

# Fundamentos de Navegación Aérea

Tema 7: Sistemas de referencia. Actitud. Ecuaciones de la navegación.

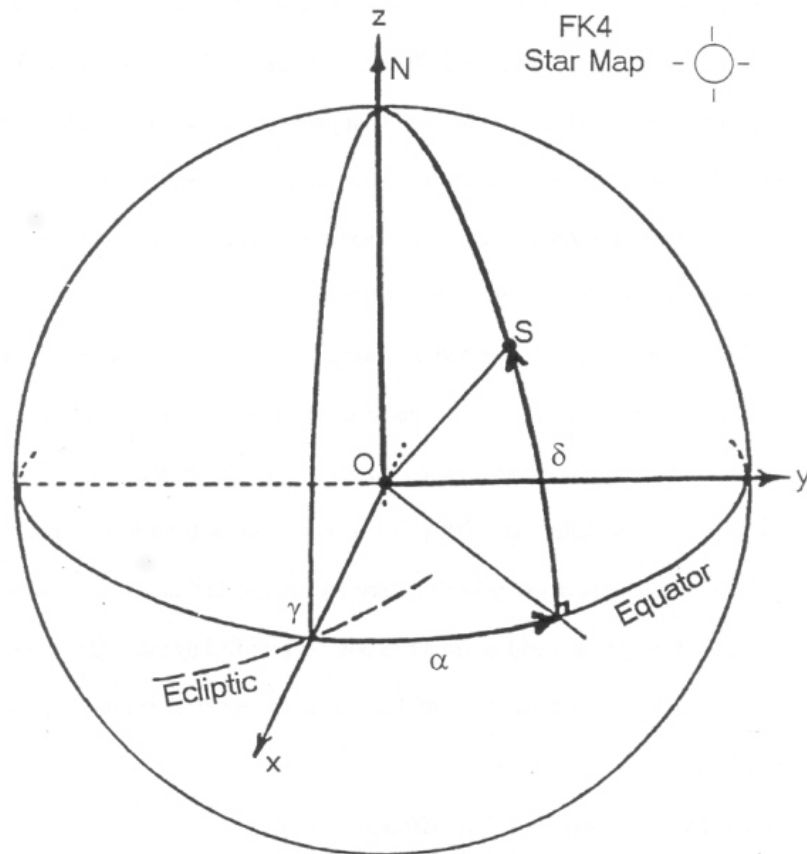


## Sistemas de referencia usuales en Navegación Aérea

- Para poder entender los sistemas de navegación es imprescindible dominar los diferentes sistemas de referencia en los que se va a trabajar. Veremos los siguientes sistemas de referencia:
  - Sistema inercial geocéntrico (ECI: Earth Centered Inertial).
  - Sistema de Ejes Tierra (ECEF: Earth Centered, Earth Fixed)
  - Sistema de referencia topocéntrico.
  - Sistema de ejes horizonte local (LLS: Local Level System, NED: North East Down).
  - Sistema de referencia de azimut de deriva (Wander azimuth frame).
  - Sistema de ejes cuerpo (BFS: Body Fixed System).
- Además estudiaremos las relaciones entre los diferentes sistemas de referencia y como pasar de uno a otro.
- En este proceso se definirán cantidades útiles, como la velocidad respecto a Tierra y los ángulos de Euler que definen la actitud de una aeronave.

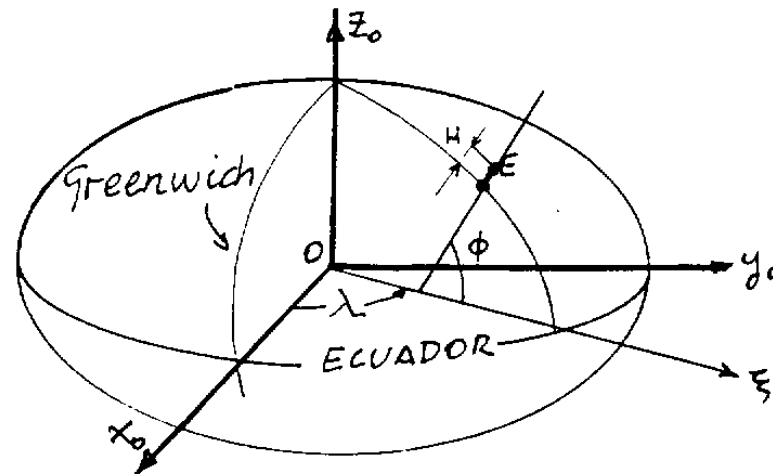


## Sistema Inercial Geocéntrico (ECI)



- Útil para el estudio del movimiento de cuerpos orbitando la Tierra, por ejemplo los satélites GPS, y como sistema de referencia inercial absoluto.
- El eje  $Oz$  coincide con el eje de rotación de la Tierra.
- El plano  $Oxy$  contiene al Ecuador y  $Ox$  apunta a  $\Upsilon$ , el primer punto de Aries (una dirección fija en las estrellas).
- No es realmente inercial (se está despreciando el movimiento de la Tierra en torno al Sol, y el movimiento propio del Sol respecto a las estrellas).

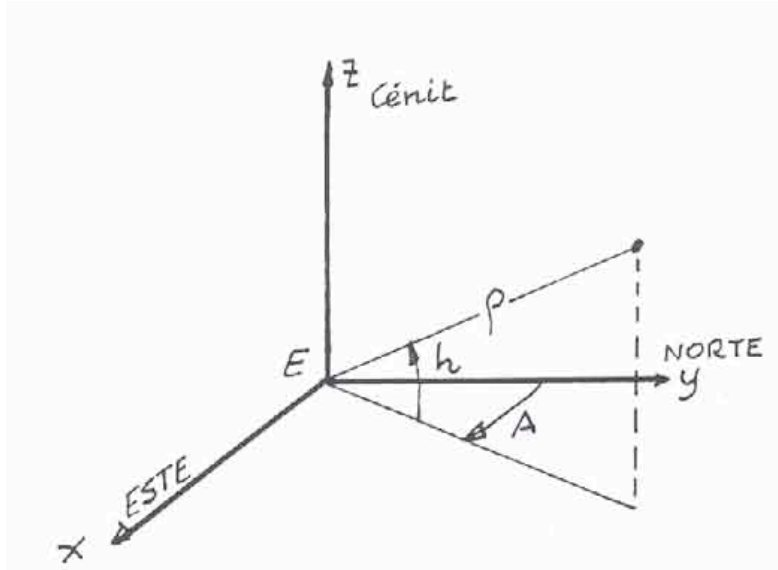
## Sistema de Ejes Tierra (ECEF)



- Ligado íntimamente a la Tierra, rota con ella.
- Util para referenciar posiciones terrestres.
- El plano  $Oxy$  contiene al Ecuador y el plano  $Oxz$  al Meridiano de Greenwich.
- La forma de la Tierra se asimila a un elipsoide de revolución (Elipsoide Internacional WGS84) alrededor del eje  $Oz$  (de rotación de la Tierra).



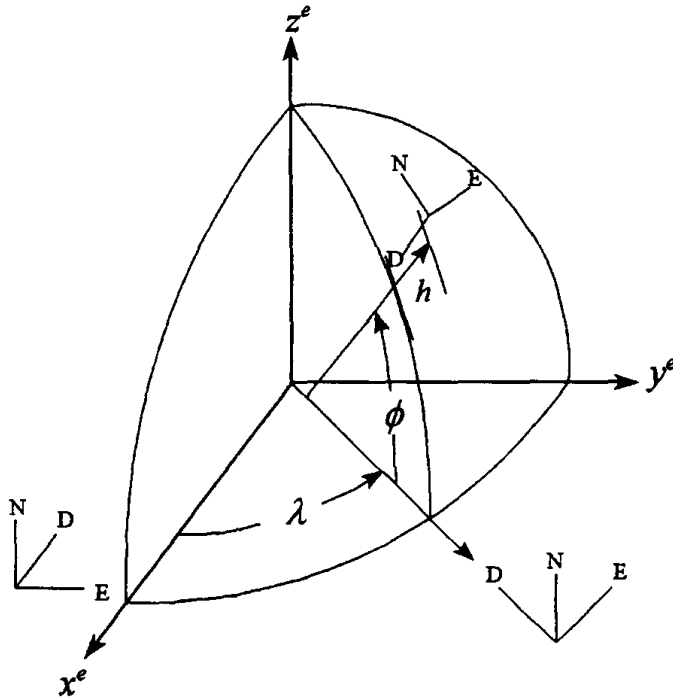
## Sistema Topocéntrico



- Ligado íntimamente a la Tierra, con origen en el donde se encuentre el observador ( $E$ ).
  - Se usa para tomar medidas desde Tierra.
- 
- El plano  $E_{xy}$  es tangente al Elipsoide Internacional WGS84 en la superficie, la dirección  $E_x$  apunta al Este, la dirección  $E_y$  al Norte, y la  $E_z$  sigue la vertical local “hacia arriba” (cénit). La dirección local “hacia abajo” se denomina nadir.
  - Las observaciones se componen de tres medidas:  $r$  o  $\rho$  (distancia al objeto);  $A$ , azimut; y  $h$ , la altura o elevación sobre el plano horizontal.



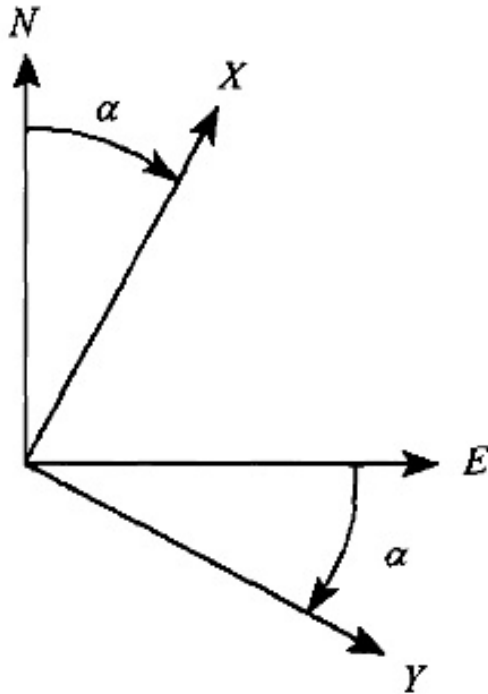
## Sistema de ejes horizonte local (LLS, NED)



- Llamada en inglés LLS=Local Level System o NED=North East Down. También “ejes geodéticos o geodésicos locales”.
- Es un sistema local centrado en un punto que puede o no estar en la superficie de la Tierra.
- Por tanto cambia al moverse el punto.
- Está definida respecto al elipsoide: la dirección Norte es  $\underline{e}_\phi$ , la dirección Este es  $\underline{e}_\lambda$  y la dirección abajo es  $-\underline{e}_h$ .
- Es el sistema de referencia fundamental usado en navegación, aunque a veces es sustituido por el de azimut errante (ver siguiente transparencia).



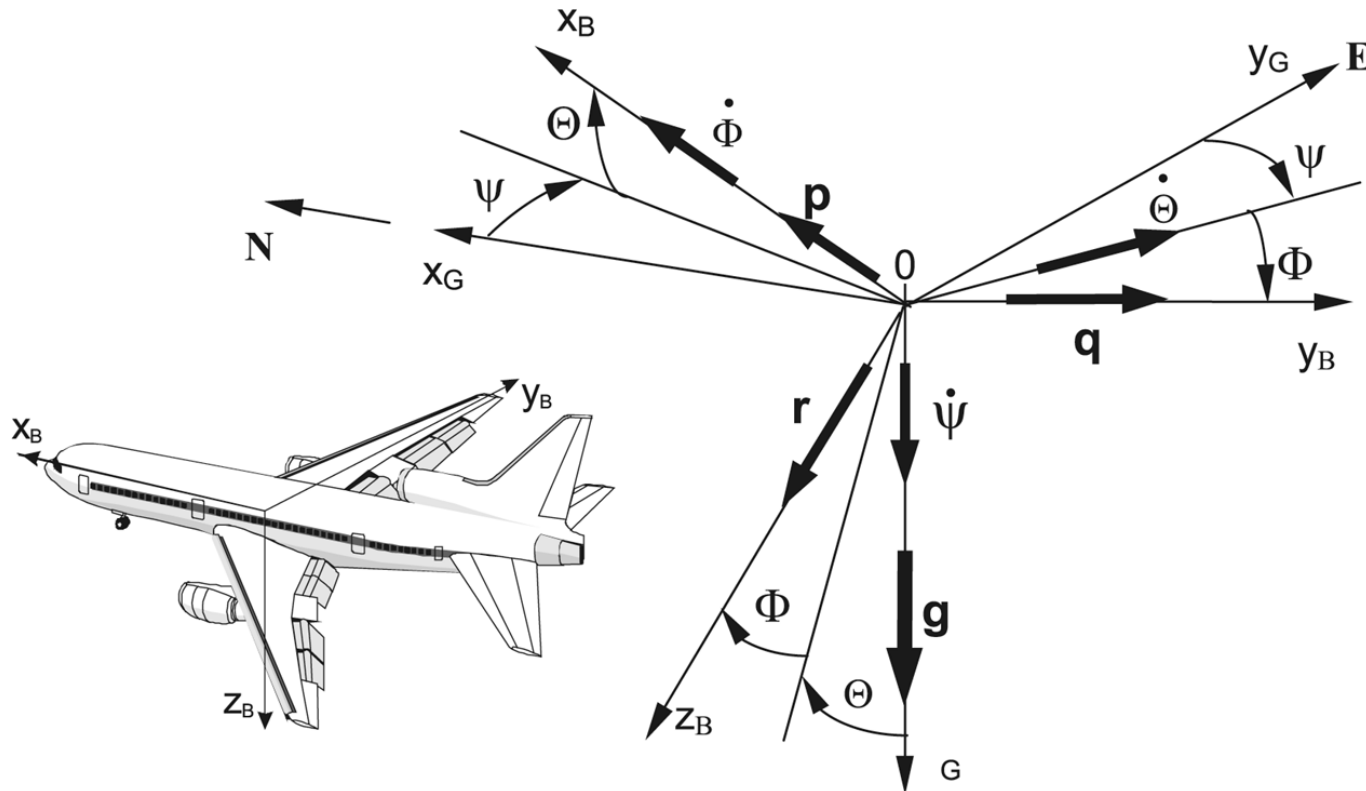
## Sistema de referencia de azimut de deriva



- Llamada en inglés “Wander azimuth frame”.
- Se usa frecuentemente en navegación en vez del sistema de referencia horizonte local debido a que, en las proximidades de los polos, dicho sistema está mal definido y ocasiona problemas numéricos.
- Se rota un ángulo  $\alpha$  respecto a la dirección N/E. Dicho ángulo y su variación se puede definir por el diseñador del sistema de navegación.
- Con  $\alpha = \dot{\alpha} = 0$  recuperamos el sistema de ejes horizonte local.
- Típicamente se define  $\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \sin \phi$ .



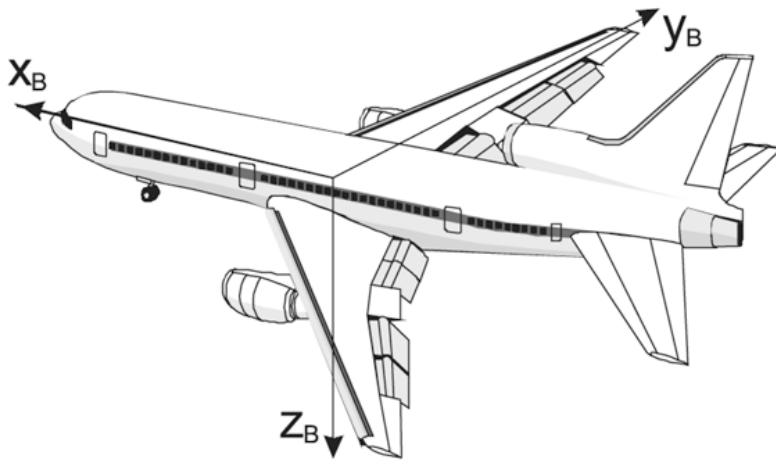
## Sistema de referencia ejes cuerpo (BFS)



- Llamada en inglés BFS=Body Fixed System.
- Se utiliza para definir la actitud (orientación) de la aeronave, respecto el sistema de ejes de navegación (NED o wander azimuth).



## Sistema de referencia ejes cuerpo (BFS)



- Los ejes están definidos como en la figura.
- El centro del sistema de referencia, en el centro de masas del avión.
- El eje  $x_b$  contenido en el plano de simetría del avión, hacia el morro. El ángulo rotado en torno a  $x_b$  es  $\varphi$  (alabeo o roll).
- El eje  $z_b$  contenido en el plano de simetría del avión, hacia abajo. El ángulo rotado en torno a  $z_b$  es  $\psi$  (guiñada o yaw).
- El eje  $y_b$  completa el triedro (dirección aproximada del ala derecha). El ángulo rotado en torno a  $y_b$  es  $\theta$  (cabeceo o pitch).



## Relación entre sistemas de referencia

- Dado un sistema de referencia  $A$  y un sistema de referencia  $B$ , para pasar de uno a otro habrá que tener en cuenta dos hechos:
  - Cuando no coinciden los orígenes de  $A$  y  $B$ , habrá que realizar una translación:  $\underline{r}^A = \underline{r}^B + \underline{r}_{BA}$ .
  - Cuando  $A$  y  $B$  están rotados entre sí, habrá que realizar una rotación:  $\underline{r}^A = C_B^A \underline{r}^B$ , donde  $C_B^A$  será la matriz del cambio de base entre  $A$  y  $B$  (ortogonal).
- Además, a la hora de estudiar derivadas, hay que tener en cuenta que la derivada tomada en dos sistema de referencia distintos cambia si dichos sistemas rotan uno en relación al otro con velocidad angular  $\omega_{B/A}$ . Lo estudiaremos más adelante.



## Algunas definiciones de interés

- **Velocidad inercial:** es la derivada de la posición, tomada en el sistema de referencia inercial, es decir,  $\underline{v}^i = \dot{\underline{r}}^i$ .
- **Velocidad respecto a Tierra:** es la derivada de la posición, tomada en el sistema de referencia ejes Tierra, es decir,  $\underline{v}^e = \dot{\underline{r}}^e$ .
- Obsérvese que ambas definiciones no coinciden puesto que la Tierra rota; además  $\underline{v}^e \neq C_i^e \underline{v}^i$  porque las derivadas no están tomadas en el mismo sistema de referencia. Más adelante veremos como están relacionadas ambas cantidades.
- **Posición en los ejes de navegación:** es la posición respecto a Tierra  $\underline{r}^e$  tomada en el sistema de referencia de navegación, es decir,  $\underline{r}^n = C_e^n \underline{r}^e$ .
- **Velocidad en los ejes de navegación:** es la velocidad respecto a Tierra  $\underline{v}^e$  tomada en el sistema de referencia de navegación, es decir,  $\underline{v}^n = C_e^n \underline{v}^e$ . Obsérvese que  $\underline{v}^n \neq \dot{\underline{r}}^n$ !



## Algunas definiciones de interés

- Ésta velocidad  $\underline{v}^n$  es la velocidad “percibida” en el avión. Cuando  $n$  es el sistema de referencia horizonte local, esta velocidad se suele descomponer en:
  - Módulo: velocidad respecto a Tierra, a veces llamada  $V_g$ . Sería la velocidad real del avión respecto al suelo.
  - Ángulo formado entre  $\underline{v}^n$  y el plano horizonte local: ángulo de trayectoria  $\gamma$  (flight path angle).
  - Ángulo formado entre la proyección de  $\underline{v}^n$  en el plano horizonte local y la dirección Norte: ángulo de rumbo  $\chi$  (heading angle).
- Hay que tener en cuenta que el ángulo de rumbo  $\chi$  y el de guiñada  $\psi$  pueden no coincidir, especialmente en presencia de viento.



## Relación entre ECEF y ECI.

- Para encontrar  $C_i^e$ , hay que tener en cuenta que la Tierra gira con velocidad angular  $\omega_{i/e} = [0 \ 0 \ \omega_E]^T$ , es decir, ambos sistemas de referencia estarán rotados una cantidad  $\theta_E = \theta_{E0} + \omega_E t$ . Luego:

$$ECI \xrightarrow[\substack{\theta_E \\ z^i}]{} ECEF$$

- Por tanto:

$$C_i^e = \begin{bmatrix} c\theta_E & s\theta_E & 0 \\ -s\theta_E & c\theta_E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Donde  $c = \cos$  y  $s = \text{sen}$ .



## Relación entre LLS y ECEF.

- Para encontrar  $C_e^g$  (donde g hace referencia al carácter geodésico de LLS), hay que tener en cuenta la posición  $(\lambda, \phi)$  y realizar las siguientes operaciones:
  - Rotar  $\lambda$  grados en torno a  $z^e$ .
  - Rotar  $-\phi$  grados en torno al nuevo eje y.
  - El sistema resultante tiene x en la dirección  $-z$  y z en la dirección x. Por tanto girar -90 grados adicionales.

$$ECEF \xrightarrow[\substack{\lambda \\ z^e}]{} S \xrightarrow[\substack{-\phi \\ y^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{-90 \\ y^{S'}}]{} LLS$$

- Por tanto:

$$C_e^S = \begin{bmatrix} c\lambda & s\lambda & 0 \\ -s\lambda & c\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_S^{S'} = \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \quad C_{S'}^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_e^g = C_{S'}^g C_S^{S'} C_e^S = \begin{bmatrix} -s\phi c\lambda & -s\phi s\lambda & c\phi \\ -s\lambda & c\lambda & 0 \\ -c\phi c\lambda & -c\phi s\lambda & -s\phi \end{bmatrix}$$



## Relación entre LLS y azimut errante (n).

- Para encontrar  $C_g^n$ , hay que tener en cuenta que la rotación de ángulo  $\alpha$  en torno al eje  $z$ . Por tanto:

$$LLS \xrightarrow[z]{\alpha} WA$$

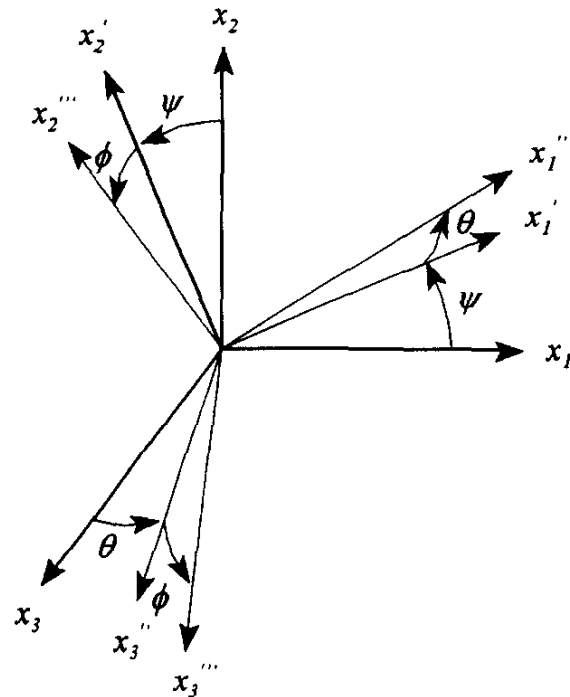
- Por tanto:

$$C_g^n = \begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Relación entre n y BFS

- Para encontrar  $C_n^b$  hay que tener en cuenta los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ .



- Las operaciones son:

- Rotar  $\psi$  grados en torno a  $z^n$ .
- Rotar  $\theta$  grados en torno al nuevo eje  $y$ .
- Rotar  $\varphi$  grados en torno al nuevo eje  $x$ .

$$n \xrightarrow[\text{z}^n]{\psi} S \xrightarrow[\text{y}^S]{\theta} S' \xrightarrow[\text{x}^{S'}]{\varphi} \text{BFS}$$

- Se llega a:

$$C_n^b = C_{S'}^b C_S^{S'} C_n^S = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\varphi s\psi + s\varphi s\theta c\psi & c\varphi c\psi + s\varphi s\theta s\psi & s\varphi c\theta \\ s\varphi s\psi + c\varphi s\theta c\psi & -s\varphi c\psi + c\varphi s\theta s\psi & c\varphi c\theta \end{bmatrix}$$

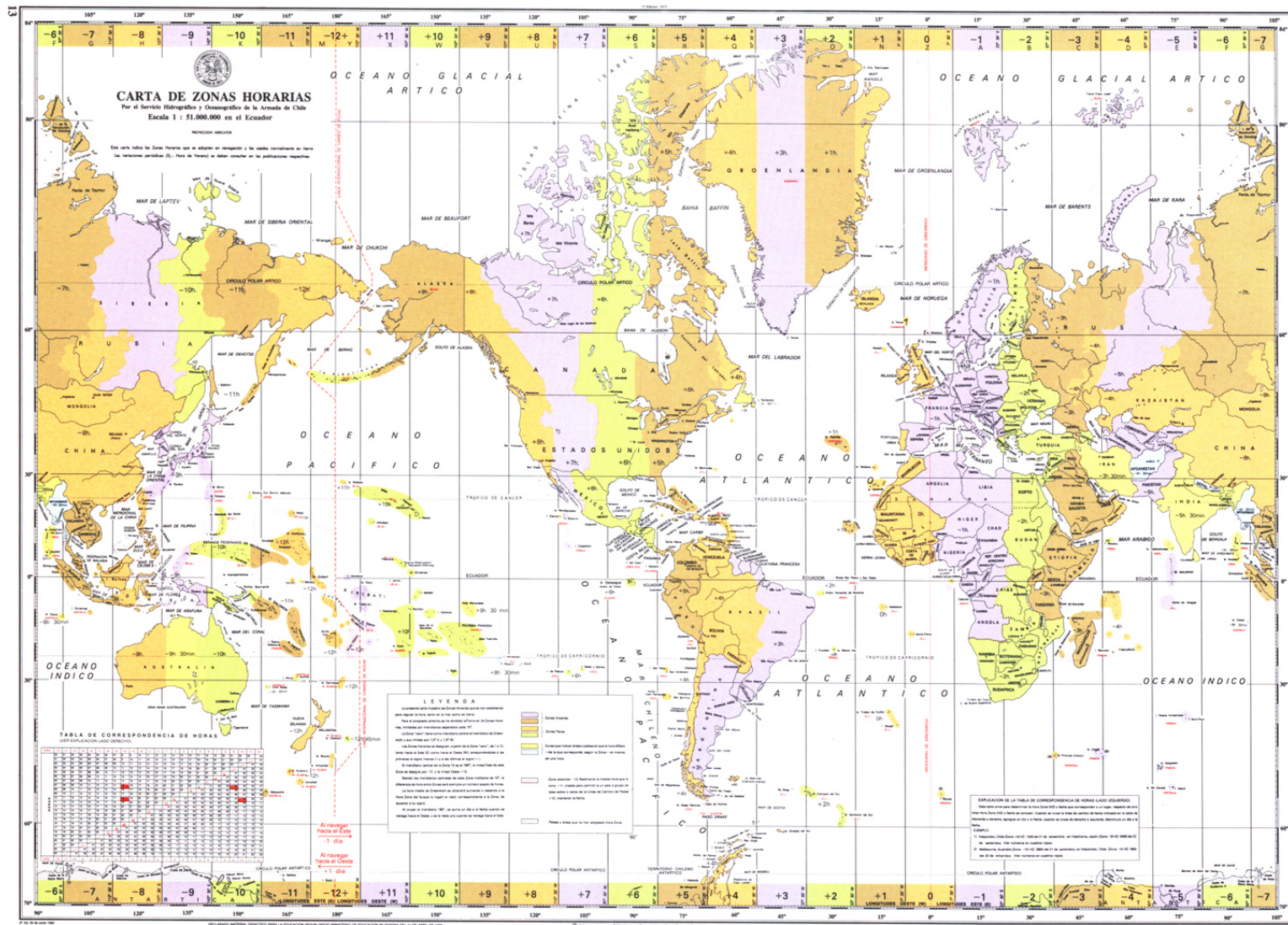


## Tiempos de interés en Navegación Aérea

- Tiempo Universal Coordinado (**UTC**):
  - Medido por relojes atómicos a lo largo del mundo.
  - Cada cierto tiempo (a lo largo de años) se añaden o restan segundos para compensar la pequeña irregularidad de la rotación de la Tierra.
  - El huso horario se define como  $UTC \pm n$ . Además hay que tener en cuenta el cambio de horario de verano. Por ejemplo, Sevilla es  $UTC+1$ , y en verano  $UTC+2$ .
  - A efectos prácticos UTC coincide con el viejo GMT.
- Tiempo GPS (**GPST**):
  - Sirve de referencia para las aplicaciones relacionadas con GPS.
  - Medido en los relojes atómicos a bordo de los Navstar.
  - No se añaden ni restan segundos: no coincide con UTC (difiere en segundos).



# Husos horarios



## La actitud de la aeronave

- La actitud de la aeronave es su orientación respecto al sistema de referencia de navegación (típicamente el sdr horizonte local o el de azimut errante).
- En realidad, es suficiente conocer la orientación de un sistema de referencia solidario a la aeronave (los ejes cuerpo).
- Los ángulos de Euler cabeceo, guiñada y alabeo son la representación clásica, pero no la única; existen otras representaciones con diferentes ventajas e inconvenientes.
- Estudiaremos cuatro representaciones diferentes:
  - Matriz de cosenos directores.
  - Ángulos de Euler.
  - Ángulo y eje de Euler.
  - Cuaterniones.
- **Nota:** La posición  $(\phi, \lambda)$  o  $(\phi, \lambda, \alpha)$  también se puede considerar una “orientación” del sistema de referencia de navegación respecto al ECEF.



## Matriz de cosenos directores (DCM) I

- Dado un sistema de referencia  $S$  (determinado por una base de vectores unitarios  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ ) y otro  $S'$  (determinado por una base de vectores unitarios  $(\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{y'}, \underline{e}_{z'})$ ), la orientación de  $S$  respecto a  $S'$  está totalmente determinada por la matriz de cambio de base  $C_S^{S'}$ , que para un vector genérico  $\underline{v}$  permite cambiar de base:  $\underline{v}^{S'} = C_S^{S'} \underline{v}^S$ . Denotemos:

$$C_S^{S'} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

- Obsérvese:  $\underline{e}_{x'}^{S'} = C_S^{S'} \underline{e}_x^S = C_S^{S'} [1 \ 0 \ 0]^T = [c_{11} \ c_{21} \ c_{31}]^T$ .
- Luego:  $\underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_x = (\underline{e}_{x'}^{S'})^T \underline{e}_x^S = [1 \ 0 \ 0][c_{11} \ c_{21} \ c_{31}]^T = c_{11}$ .
- Igualmente:

$$\begin{aligned} c_{21} &= \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_x, & c_{31} &= \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_x \\ c_{12} &= \underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_y, & c_{22} &= \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_y, & c_{32} &= \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_y \\ c_{13} &= \underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_z, & c_{23} &= \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_z, & c_{33} &= \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_z \end{aligned}$$



## Matriz de cosenos directores (DCM) II

- Por tanto:

$$C_S^{S'} = \begin{bmatrix} \underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_x & \underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_y & \underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_z \\ \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_x & \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_y & \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_z \\ \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_x & \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_y & \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_z \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que razonando igualmente:

$$C_{S'}^S = \begin{bmatrix} \underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_x & \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_x & \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_x \\ \underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_y & \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_y & \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_y \\ \underline{e}_{x'} \cdot \underline{e}_z & \underline{e}_{y'} \cdot \underline{e}_z & \underline{e}_{z'} \cdot \underline{e}_z \end{bmatrix} = (C_S^{S'})^T$$

- Y por tanto, puesto que  $C_{S'}^S = (C_S^{S'})^{-1}$ , obtenemos que  $C_S^{S'}$  es ortogonal, es decir:  $(C_S^{S'})^{-1} = (C_S^{S'})^T$ . También se justifica el nombre “matriz de cosenos directores”.
- Otra propiedad es  $\det(C_{S'}^S) = 1$ . Esto se debe a que  $1 = \det(\text{Id}) = \det((C_{S'}^S)(C_S^{S'})^{-1}) = \det((C_{S'}^S)(C_S^{S'})^T) = (\det(C_{S'}^S))^2$ . Por tanto  $\det(C_S^{S'}) = \pm 1$ . El signo + corresponde a los sistemas de referencia que son triedros “a derechas”.



## Matriz de cosenos directores (DCM) III

- Es una representación de la actitud con 9 parámetros. Estos parámetros son dependientes entre sí, es decir, las entradas de la matriz  $C$  no pueden ser cualesquiera (la matriz ha de ser ortogonal y con determinante  $+1$ ).
- Supongamos que la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $C_{S_1}^{S_2}$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $C_{S_2}^{S_3}$ . La actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3} C_{S_1}^{S_2}$ . Por tanto la “composición” de actitudes viene dada por un simple producto matricial.



# Ángulos de Euler I

- En general una actitud se puede describir mediante tres rotaciones, en ejes no consecutivos.
- Por ejemplo, la rotación clásica:

$$n \xrightarrow[z^n]{\psi} S \xrightarrow[y^S]{\theta} S' \xrightarrow[x^{S'}]{\varphi} BFS$$

- Existen otras posibilidades:

$$n \xrightarrow[x^n]{\theta_1} S \xrightarrow[y^S]{\theta_2} S' \xrightarrow[z^{S'}]{\theta_3} BFS \quad n \xrightarrow[z^n]{\Omega} S \xrightarrow[x^S]{i} S' \xrightarrow[z^{S'}]{\omega} BFS$$

- Existen hasta 12 posibles secuencias de ángulos de Euler para representar la actitud.
- El número de parámetros de cada secuencia es siempre 3.
- Se puede obtener la DCM a partir de los ángulos de Euler mediante multiplicación de matrices de rotación elementales. Por ejemplo:  $C_n^b(\psi, \theta, \varphi) = C_{S'}^b(\varphi) C_S^{S'}(\theta) C_n^S(\psi)$ .



## Ángulos de Euler II

- Como ya vimos, para el caso  $(\psi, \theta, \varphi)$ :

$$C_n^b = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\varphi s\psi + s\varphi s\theta c\psi & c\varphi c\psi + s\varphi s\theta s\psi & s\varphi c\theta \\ s\varphi s\psi + c\varphi s\theta c\psi & -s\varphi c\psi + c\varphi s\theta s\psi & c\varphi c\theta \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que  $(180^\circ + \psi, 180^\circ - \theta, 180^\circ + \varphi)$  es la misma actitud que  $(\psi, \theta, \varphi)$ . Por ello se suelen limitar los ángulos, típicamente  $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ .

$$n \xrightarrow[\substack{\psi \\ z^n}]{} S \xrightarrow[\substack{\theta \\ y^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\varphi \\ x^{S'}}]{} BFS$$

- Para obtener los ángulos de la DCM:

- 1  $\theta = -\arcsin c_{13}$ .
- 2 Con  $\cos \psi = c_{11} / \cos \theta$ ,  $\sin \psi = c_{12} / \cos \theta$ , obtener  $\psi$ .
- 3 Con  $\sin \varphi = c_{23} / \cos \theta$ ,  $\cos \varphi = c_{33} / \cos \theta$ , obtener  $\varphi$ .



## Ángulos de Euler III

- Su mayor ventaja es su significado físico.
- No obstante, hay que tener cuidado a la hora de componer dos actitudes.
- Supongamos que la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $(\psi_2, \theta_2, \varphi_2)$ . Denotemos como  $(\psi_3, \theta_3, \varphi_3)$  la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$ . En general:  $\psi_3 \neq \psi_1 + \psi_2$ ,  $\theta_3 \neq \theta_1 + \theta_2$ ,  $\varphi_3 \neq \varphi_1 + \varphi_2$ .
- Para obtener  $(\psi_3, \theta_3, \varphi_3)$  hay que calcular los ángulos de Euler a partir de  $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3}(\psi_2, \theta_2, \varphi_2)C_{S_1}^{S_2}(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$ .
- Por tanto es complicado operar con ángulos de Euler.



## Ángulo y eje de Euler I

- Teorema de Euler: “el movimiento más general posible de un sólido con un punto fijo es una rotación alrededor de un único eje”.
- **Nota:** De momento consideramos la actitud en un instante de tiempo concreto, es decir, no estudiamos cuando hay una rotación que cambia con el tiempo.
- Denominemos a un vector unitario en la dirección de dicho eje (**Eje de Euler**) como  $\underline{e}_{S/S'}$  y a la magnitud de la rotación (**Ángulo de Euler**) como  $\theta$ .
- Por tanto  $\|\underline{e}_{S/S'}\| = 1$  y si escribimos  $\underline{e}_{S/S'}^{S'} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$ , se tiene que  $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$ .
- Dado un vector  $\underline{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  definimos el operador  $\underline{v}^\times$  como:

$$\underline{v}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$



## Ángulo y eje de Euler II

- El operador  $\underline{v}^\times$  sirve para escribir fácilmente el producto vectorial  $\underline{v} \times \underline{w}$ , para cualquier vector  $\underline{w}$ , en un sistema de referencia dado  $S$ :  $(\underline{v} \times \underline{w})^S = (\underline{v}^S)^\times \underline{w}^S$ .
- Por tanto la actitud con el ángulo y eje de Euler queda representada con los parámetros  $(\underline{e}_{S/S'}^{S'}, \theta)$ . ¿Cómo se puede pasar de estos parámetros a la DCM y viceversa?

- Se tiene que

$$C_S^{S'} = \cos \theta \text{Id} + (1 - \cos \theta) \underline{e}_{S/S'}^{S'} (\underline{e}_{S/S'}^{S'})^T - \sin \theta \left( \underline{e}_{S/S'}^{S'} \right)^\times.$$

Ésta es la llamada fórmula de Euler-Rodrigues.

- Por otro lado, dada  $C_S^{S'}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{Tr}(C_S^{S'}) - 1}{2} \\ \left( \underline{e}_{S/S'}^{S'} \right)^\times &= \frac{1}{2 \sin \theta} \left( (C_S^{S'})^T - C_S^{S'} \right) \end{aligned}$$



## Ángulo y eje de Euler III

- Por tanto se representa la actitud con cuatro parámetros: tres componentes de un vector unitario y un ángulo. Estos parámetros tienen un claro significado físico.
- Obsérvese que la actitud dada por  $(\underline{e}_{S'/S}, \theta)$  y por  $(-\underline{e}_{S'/S}, 360^\circ - \theta)$  es exactamente la misma. Para evitar ésta ambigüedad, se restringe  $\theta$  al intervalo  $[0, 180^\circ]$ .
- La actitud inversa (la de  $S$  respecto a  $S'$ ) vendrá dada por  $(-\underline{e}_{S'/S}, \theta)$ . Nota: Obsérvese que  $e_{S'/S}^S = e_{S/S'}^{S'}$ .
- Finalmente si la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $(\underline{e}_{S_1/S_2}, \theta_1)$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $(\underline{e}_{S_2/S_3}, \theta_2)$ , si denotamos como  $(\underline{e}_{S_1/S_3}, \theta_3)$  la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$ , viene dada por:

$$\cos \theta_3 = -\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\underline{e}_{S_1/S_2} \cdot \underline{e}_{S_2/S_3})$$

$$\underline{e}_{S_1/S_3}^{S_3} = \frac{1}{\sin \theta_3} \left( \sin \theta_1 \cos \theta_2 \underline{e}_{S_1/S_2} + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \underline{e}_{S_2/S_3} + \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\underline{e}_{S_1/S_2} \times \underline{e}_{S_2/S_3}) \right)$$



## Cuaterniones

- Los cuaterniones son una creación de Hamilton (siglo XIX), que los consideraba su mayor invento; pensó serían como el “lenguaje universal” de la física. Pero fueron sustituidos pronto por los vectores (Gibbs) y las matrices (Cayley).
- Recordemos que un número complejo  $z$  es como un “vector 2-D”, que se puede escribir como  $z = x + iy$ . Los números complejos de módulo unidad se pueden usar para representar una rotación 2-D, ya que en el caso de que  $|z| = 1$ , se puede escribir  $z = e^{i\theta}$ , y en tal caso representa una rotación 2-D de ángulo  $\theta$ .
- Los cuaterniones son una extensión de los números complejos a “4 dimensiones”. Escribamos un cuaternión  $q$  como:  
$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3.$$
- En ocasiones  $q_0$  se denomina la “parte escalar” de  $q$  y se define  $\underline{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  como la “parte vectorial” de  $q$ . Algunos autores escriben  $q_4$  en vez de  $q_0$ .



# Álgebra de cuaterniones I

- Para poder entender los cuaterniones es importante conocer su álgebra, es decir, como se opera con cuaterniones.
- **Suma:** la suma es componente a componente, es decir, dado  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  y  $q' = q'_0 + iq'_1 + jq'_2 + kq'_3$ , se tiene que  $q'' = q + q' = q''_0 + iq''_1 + jq''_2 + kq''_3$  viene dado por las fórmulas:  
$$q''_0 = q_0 + q'_0, q''_1 = q_1 + q'_1, q''_2 = q_2 + q'_2, q''_3 = q_3 + q'_3.$$
- **Producto:** el producto es componente a componente, conociendo las siguientes reglas de multiplicación:  
$$i \cdot i = -1, i \cdot j = k, i \cdot k = -j, j \cdot i = -k, j \cdot j = -1, j \cdot k = i, k \cdot i = j, k \cdot j = -i, k \cdot k = -1.$$
- Se tiene la fórmula de Hamilton:  $i \cdot j \cdot k = -1$ .
- Obsérvese que en general  $qq' \neq q'q$ : La multiplicación no es conmutativa!



## Álgebra de cuaterniones II

- **Forma matricial del producto:** Es posible escribir el producto  $q'' = q'q$  en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} q_0'' \\ q_1'' \\ q_2'' \\ q_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0' & -q_1' & -q_2' & -q_3' \\ q_1' & q_0' & -q_3' & q_2' \\ q_2' & q_3' & q_0' & -q_1' \\ q_3' & -q_2' & q_1' & q_0' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- **Forma “vectorial” del producto:**  $q_0'' = q_0'q_0 - \underline{q}'^T \underline{q}$ ,  
 $\underline{q}'' = q_0' \underline{q} + q_0 \underline{q}' + \underline{q}' \times \underline{q}$ .
- **Conjugado:** Como para los números complejos, dado  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  se define el conjugado de  $q$  como  $q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ .
- **Módulo:** Se define el módulo de  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  como  $|q|^2 = qq^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$
- **División:** Se define la división usando el conjugado:  
 $q'/q = q'/q \cdot q^*/q^* = (q'q^*)/|q|^2$ .



## Representación de la actitud mediante cuaterniones I

- Dada la actitud representada mediante el eje y ángulo de Euler,  $\underline{e}$  y  $\theta$ , se “codifica” dicha actitud en forma de cuaterniones mediante:

$$q_0 = \cos \theta/2, \quad \underline{q} = \sin \theta/2 \underline{e}.$$

- Obsérvese que si un cuaternión  $q$  representa una actitud, entonces  $|q| = 1$ .
- Recordemos el operador  $\underline{q}^\times$ :

$$\underline{q}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para pasar de la DCM  $C$  a cuaterniones, se utilizan las fórmulas:  $q_0 = \frac{\sqrt{1+\text{Tr}(C)}}{2}$  y  $\underline{q}^\times = \frac{1}{4q_0} (C^T - C)$ .
- Para pasar de cuaterniones a DCM se utiliza la fórmula de Euler-Rodrigues para cuaterniones:  
 $C = (q_0^2 - \underline{q}^T \underline{q}) \text{Id} + 2\underline{q}\underline{q}^T - 2q_0\underline{q}^\times.$



## Representación de la actitud mediante cuaterniones II

- Fórmula de Euler-Rodrigues en forma matricial:

$$C(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

- Los cuaterniones son una representación de la actitud que requiere 4 parámetros, con la relación  $|q| = 1$ .
- Tienen la desventaja de ser una representación matemática sin sentido físico.
- Para pasar de la DCM a cuaterniones y viceversa no es necesario usar fórmulas trigonométricas.
- Si  $q_{S'S}$  representa la actitud de  $S'$  respecto a  $S$  y  $q_{S''S'}$  representa la actitud de  $S''$  respecto a  $S'$ , entonces  $q_{S''S}$ , la actitud de  $S''$  respecto a  $S$ , se calcula como  $q_{S''S} = q_{S'S} \cdot q_{S''S'}$  (al revés que la DCM).



## Cálculo de cuaterniones dados los ángulos de Euler

- Obsérvese que:
  - A los ángulos de Euler  $(\psi, 0, 0)$  les corresponde el cuaternión  $q_\psi = \cos \psi/2 + k \sin \psi/2$ .
  - A los ángulos de Euler  $(0, \theta, 0)$  les corresponde el cuaternión  $q_\theta = \cos \theta/2 + j \sin \theta/2$ .
  - A los ángulos de Euler  $(0, 0, \varphi)$  les corresponde el cuaternión  $q_\varphi = \cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2$ .
- Por tanto, a los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  les corresponderá el cuaternión  $q = q_\psi q_\theta q_\varphi$ .
- Realizando el producto, se obtiene:

$$\begin{aligned} q = & (\cos \psi/2 \cos \theta/2 \cos \varphi/2 + \sin \psi/2 \sin \theta/2 \sin \varphi/2) \\ & + i (\cos \psi/2 \cos \theta/2 \sin \varphi/2 - \sin \psi/2 \sin \theta/2 \cos \varphi/2) \\ & + j (\cos \psi/2 \sin \theta/2 \cos \varphi/2 + \sin \psi/2 \cos \theta/2 \sin \varphi/2) \\ & + k (\sin \psi/2 \cos \theta/2 \cos \varphi/2 - \cos \psi/2 \sin \theta/2 \sin \varphi/2). \end{aligned}$$



## Ecuaciones Diferenciales Cinemáticas de la Actitud

- Para el caso de la posición, las ecuaciones cinemáticas relacionan el vector posición con el vector velocidad, mientras que las ecuaciones dinámicas relacionan el vector velocidad con el vector fuerza.
- Para el caso de la actitud, las ecuaciones diferenciales cinemáticas (EDC) relacionan la representación de la actitud (DCM, ángulos de Euler, cuaterniones) con la velocidad angular  $\underline{\omega}$ . Típicamente estas ecuaciones son no-lineales.
- En el sistema de navegación inercial, los giróscopos nos darán  $\underline{\omega}$ , y habrá que utilizar las EDC, es decir, integrar las ecuaciones, para calcular la actitud.
- Por tanto es importante conocer las diferentes EDC para las diferentes representaciones, para ver cuál es la más ventajosa desde un punto de vista computacional.



## DCM para ángulos pequeños I

- Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia  $A$  y  $B$ , relacionados de la siguiente forma:

$$A \xrightarrow[x^A]{d\theta_1} S_1 \xrightarrow[y^{S_1}]{d\theta_2} S_2 \xrightarrow[z^{S_2}]{d\theta_3} B$$

donde suponemos que  $d\theta_i$  son ángulos pequeños, de forma que podemos aproximar  $\cos d\theta_i \simeq 1$  y  $\sin d\theta_i \simeq d\theta_i$ .

- Si escribimos las matrices de rotación teniendo en cuenta la aproximación anterior, obtenemos:

$$C_A^{S_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta_1 \\ 0 & -d\theta_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{S_1}^{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ d\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{S_2}^B = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_3 & 0 \\ -d\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Si escribimos  $C_A^B = C_{S_2}^B C_{S_1}^{S_2} C_A^{S_1}$  y despreciamos todos los productos dobles de ángulos, es decir,  $d\theta_i d\theta_j \simeq 0$ , obtenemos:

$$C_A^B = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_3 & -d\theta_2 \\ -d\theta_3 & 1 & d\theta_1 \\ d\theta_2 & -d\theta_1 & 1 \end{bmatrix} = \text{Id} - \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_3 & d\theta_2 \\ d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ -d\theta_2 & d\theta_1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Id} - d\underline{\theta}^\times,$$



## DCM para ángulos pequeños II

- En la anterior transparencia, se ha definido  $d\underline{\theta} = [d\theta_1 \ d\theta_2 \ d\theta_3]^T$  y la matriz

$$d\underline{\theta}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_3 & d\theta_2 \\ d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ -d\theta_2 & d\theta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

que es la matriz antisimétrica que se emplea para efectuar el producto vectorial.

- Obsérvese que bajo estas hipótesis (ángulos pequeños) no importa el orden de las rotaciones y los ángulos se suman.



## EDC para la DCM I

- Supongamos que quiero calcular la actitud de  $B$  respecto a  $A$ , mediante la DCM  $C_A^B(t)$ , sabiendo que  $B$  gira con respecto a  $A$  con una velocidad angular  $\underline{\omega}_{B/A}^B$ .

- Por definición:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \frac{C_A^B(t+dt) - C_A^B(t)}{dt}$

- Suponiendo  $A$  fijo, entonces podemos imaginar que es  $B$  quien se mueve en el tiempo, y por tanto podríamos escribir  $B = B(t)$  y por tanto  $C_A^B(t) = C_A^{B(t)}$ .

- Usando este razonamiento,  
 $C_A^B(t + dt) = C_A^{B(t+dt)} = C_{B(t)}^{B(t+dt)} C_A^{B(t)}$ . Por tanto:

$$A \longrightarrow B(t) \longrightarrow B(t + dt)$$

- En el tiempo  $dt$ , el sistema de referencia  $B$  habrá girado respecto a sí mismo un ángulo muy pequeño en cada eje; por lo que hemos visto en la anterior transparencia, por tanto,  
 $C_{B(t)}^{B(t+dt)} = \text{Id} - (d\underline{\theta}^B)^\times$ , donde  $d\underline{\theta}^B$  es como antes se definió.



## EDC para la DCM II

- Siguiendo el razonamiento:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \frac{C_A^B(t+dt) - C_A^B(t)}{dt} =$   
 $\frac{C_{B(t)}^{B(t+dt)} C_A^B(t) - C_A^B(t)}{dt} = \frac{(\text{Id} - (d\underline{\theta}^B)^\times) C_A^B(t) - C_A^B(t)}{dt} = -\frac{(d\underline{\theta}^B)^\times}{dt} C_A^B(t)$
- La matriz  $\frac{(d\underline{\theta}^B)^\times}{dt}$  se escribiría

$$\frac{(d\underline{\theta}^B)^\times}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d\theta_3}{dt} & \frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{d\theta_3}{dt} & 0 & -\frac{d\theta_1}{dt} \\ -\frac{d\theta_2}{dt} & \frac{d\theta_1}{dt} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\underline{\omega}_{B/A}^B = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  ya que  $d\underline{\theta}^B$  representaba el ángulo girado por  $B$  en un  $dt$ , y por definición de velocidad angular. Se tiene entonces:

$$\left(\underline{\omega}_{B/A}^B\right)^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

- Por tanto:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \dot{C}_A^B = -\left(\underline{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B.$



## EDC para la DCM III

- ¿Qué sucede si lo que conocemos es  $\underline{\omega}_{B/A}^A$ ? Tenemos que estudiar como se transforman estos operadores  $\left(\underline{\omega}_{B/A}^B\right)^\times$  al cambiar de sistema de referencia.
- Obsérvese que si  $\underline{z} = \underline{v} \times \underline{w}$ , se tiene que en el sdr  $B$ ,  $\underline{z}^B = \left(\underline{v}^B\right)^\times \underline{w}^B$ . Por otro lado en el sdr  $A$ , se tendrá que  $\underline{z}^A = \left(\underline{v}^A\right)^\times \underline{w}^A$ .
- La primera expresión también se puede escribir:  
 $\underline{z}^B = C_A^B \underline{z}^A = C_A^B \left(\underline{v}^A\right)^\times \underline{w}^A = C_A^B \left(\underline{v}^A\right)^\times C_B^A \underline{w}^B$ , y puesto que esta expresión tiene que ser igual a la anterior:  
 $\left(\underline{v}^B\right)^\times = C_A^B \left(\underline{v}^A\right)^\times C_B^A$ .
- Sustituyendo esto en la ecuación cinemática:  $\dot{C}_A^B = -\left(\underline{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B = -C_A^B \left(\underline{\omega}_{B/A}^A\right)^\times C_B^A = -C_A^B \left(\underline{\omega}_{B/A}^A\right)^\times$
- Finalmente puesto que  $\underline{\omega}_{B/A} = -\underline{\omega}_{A/B}$ :  $\dot{C}_A^B = C_A^B \left(\underline{\omega}_{A/B}^A\right)^\times$



## EDC para la DCM IV

- Otra variación: trasponiendo ambos miembros de  $\dot{C}_A^B = - \left( \underline{\omega}_{B/A}^B \right)^\times C_A^B$  llegamos a  $\dot{C}_B^A = C_B^A \left( \underline{\omega}_{B/A}^B \right)^\times$
- En general, la EDC es una ecuación diferencial matricial, que habrá que resolver componente a componente: nueve ecuaciones diferenciales acopladas.
- El principal problema de resolver numéricamente esta ecuación es garantizar que la matriz resultante de integrar sea ortogonal. Obsérvese que en teoría la ecuación diferencial respeta la ortogonalidad:  $I = (C_A^B)(C_A^B)^T$ , derivando:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d}{dt} (C_A^B) \right] (C_A^B)^T + C_A^B \frac{d}{dt} (C_A^B)^T \\ &= - \left( \underline{\omega}_{B/A}^B \right)^\times C_A^B (C_A^B)^T + C_A^B C_B^A \left( \underline{\omega}_{B/A}^B \right)^\times \\ &= - \left( \underline{\omega}_{B/A}^B \right)^\times + \left( \underline{\omega}_{B/A}^B \right)^\times = 0 \end{aligned}$$



## La ecuación de Coriolis

- La EDC de la DCM nos permite demostrar la ecuación de Coriolis que luego será útil:  $\left(\frac{d}{dt}\underline{v}\right)_A = \left(\frac{d}{dt}\underline{v}\right)_B + \underline{\omega}_{B/A} \times \underline{v}$
- Si escribimos (mecanizamos) esta ecuación en el sistema de referencia  $B$ :  $C_A^B \dot{\underline{v}}^A = \dot{\underline{v}}^B + \left(\underline{\omega}_{B/A}^B\right)^\times \underline{v}^B$ , donde el punto quiere decir derivada en el mismo sistema de referencia donde está escrito.

- En efecto: 
$$\begin{aligned} C_A^B \dot{\underline{v}}^A &= C_A^B \frac{d}{dt} (C_B^A \underline{v}^B) \\ &= \dot{\underline{v}}^B + C_A^B \dot{C}_B^A \underline{v}^B \\ &= \dot{\underline{v}}^B + C_A^B C_B^A \left(\underline{\omega}_{B/A}^B\right)^\times \underline{v}^B \\ &= \dot{\underline{v}}^B + \left(\underline{\omega}_{B/A}^B\right)^\times \underline{v}^B \end{aligned}$$

- Esta ecuación será utilizada con mucha frecuencia en este tema.



## EDC para los ángulos de Euler I

- Partimos de la definición de los ángulos de Euler:

$$n \xrightarrow[z^n]{\psi} S \xrightarrow[y^S]{\theta} S' \xrightarrow[x^{S'}]{\varphi} b$$

- La velocidad angular tiene la propiedad de que

$$\underline{\omega}_{b/n} = \underline{\omega}_{b/S'} + \underline{\omega}_{S'/S} + \underline{\omega}_{S/n}$$

- Si mecanizamos esta ecuación en b:

$$\underline{\omega}_{b/n}^b = \underline{\omega}_{b/S'}^b + \underline{\omega}_{S'/S}^b + \underline{\omega}_{S/n}^b$$

- Por otro lado está claro que:

$$\underline{\omega}_{b/S'}^b = [\dot{\varphi} \ 0 \ 0]^T, \quad \underline{\omega}_{S'/S}^{S'} = [0 \ \dot{\theta} \ 0]^T, \quad \underline{\omega}_{S/n}^S = [0 \ 0 \ \dot{\psi}]^T.$$

- Luego:  $\underline{\omega}_{b/n}^b = \underline{\omega}_{b/S'}^b + C_{S'}^b \underline{\omega}_{S'/S}^{S'} + C_S^b \underline{\omega}_{S/n}^S$  y puesto que

$$C_S^b = C_{S'}^b C_S^{S'}, \text{ podemos escribir:}$$

$$\underline{\omega}_{b/n}^b = \underline{\omega}_{b/S'}^b + C_{S'}^b \underline{\omega}_{S'/S}^{S'} + C_{S'}^b C_S^{S'} \underline{\omega}_{S/n}^S$$



## EDC para los ángulos de Euler II

- Desarrollando esta ecuación:

$$\begin{aligned}
 \underline{\omega}_{b/n}^b &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c\varphi\dot{\theta} \\ -s\varphi\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s\theta\dot{\psi} \\ s\varphi c\theta\dot{\psi} \\ c\varphi c\theta\dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & s\varphi c\theta \\ 0 & -s\varphi & c\varphi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



## EDC para los ángulos de Euler III

- Obsérvese que lo que realmente se quiere es una expresión para las derivadas de los ángulos en función de  $\underline{\omega}_{b/n}^b = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ , y por tanto hay que invertir la matriz:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & s\varphi c\theta \\ 0 & -s\varphi & c\varphi c\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{c\theta} \begin{bmatrix} c\theta & s\theta s\varphi & s\theta c\varphi \\ 0 & c\varphi c\theta & -s\varphi c\theta \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Obsérvese que se trata de 3 ecuaciones diferenciales no lineales, con multitud de funciones trigonométricas.
- Posee una singularidad para  $\theta = \pm 90^\circ$ . En realidad los ángulos de Euler no están bien definidos para esta situación. Por ello no se suelen usar en navegación inercial.



## EDC para el eje y ángulo de Euler

- La representación en forma de eje y ángulo de Euler,  $(\underline{e}_{b/n}^b, \theta)$ , tiene las siguientes EDC:
- Para el ángulo de Euler:  $\dot{\theta} = (\underline{e}_{b/n}^b)^T \underline{\omega}_{b/n}^b$
- Para el eje de Euler:

$$\dot{\underline{e}}_{b/n}^b = \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{e}_{b/n}^b \right)^\times + \frac{1}{\tan \theta/2} \left( \text{Id} - \underline{e}_{b/n}^b (\underline{e}_{b/n}^b)^T \right) \right] \underline{\omega}_{b/n}^b$$

- Son cuatro ecuaciones diferenciales, no lineales.
- Poseen una singularidad para  $\theta = 0$ .
- En la práctica no se utilizan directamente; las usamos para hallar las EDC para los cuaterniones.



## EDC para cuaterniones I

- Recordemos la definición de cuaterniones en función de ángulo y eje de Euler:  $q_0 = \cos \theta/2$ ,  $\underline{q} = \sin \theta/2 \underline{e}_{b/n}^b$ .

- Derivando en la ecuación de  $q_0$  y sustituyendo la EDC de  $\theta$ , obtenemos:

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \sin \theta/2 \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \sin \theta/2 (\underline{e}_{b/n}^b)^T \underline{\omega}_{b/n}^b = -\frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\omega}_{b/n}^b$$

- Derivando en la ecuación de  $\underline{q}$ :

$$\dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \cos \theta/2 \underline{e}_{b/n}^b \dot{\theta} + \sin \theta/2 \dot{\underline{e}}_{b/n}^b$$

- Sustituyendo las EDC de ángulo y eje de Euler:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{q}} &= \frac{1}{2} \cos \theta/2 \underline{e}_{b/n}^b (\underline{e}_{b/n}^b)^T \underline{\omega}_{b/n}^b \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \theta/2 \left[ \left( \underline{e}_{b/n}^b \right)^\times + \frac{1}{\tan \theta/2} \left( \text{Id} - \underline{e}_{b/n}^b (\underline{e}_{b/n}^b)^T \right) \right] \underline{\omega}_{b/n}^b \\ &= \frac{1}{2} [\underline{q}^\times + q_0 \text{Id}] \underline{\omega}_{b/n}^b \end{aligned}$$



## EDC para cuaterniones II

- Podemos escribir esta ecuación en forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

donde  $\underline{\omega}_{b/n}^b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ .

- Son cuatro ecuaciones diferenciales, bilineales, sin singularidades.
- No es necesario realizar ningún tipo de operación trigonométrica (senos o cosenos), todo son multiplicaciones matriciales.
- Por estas razones, la representación mediante cuaterniones es la representación de actitud más usada.



## EDC para cuaterniones III

- Definamos de la siguiente forma el “cuaternión velocidad angular”:

$$q_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}$$

es decir, un cuaternión con parte escalar cero y parte vectorial igual a a la velocidad angular.

- Entonces las ecuaciones diferenciales cinemáticas se pueden escribir de forma compacta usando el producto de cuaterniones:  $\dot{q} = \frac{1}{2}qq_\omega$ .
- Cuando se resuelve numéricamente la EDC de los cuaterniones, eventualmente los errores numéricos provocarán que el módulo del cuaternión resultante difiera de la unidad. Esto se puede resolver mediante un procedimiento llamado **renormalización**, que simplemente consiste en dividir el cuaternión por su módulo.



## Ecuaciones Fundamentales de la Navegación

- Las ecuaciones fundamentales de la navegación son las ecuaciones del movimiento de la aeronave, expresada en ejes de navegación.
- Puesto que en navegación es necesario determinar 9 variables (3 de posición, 3 de actitud, y 3 de velocidad), serán necesarias 9 ecuaciones dadas como 3 conjuntos de 3 ecuaciones diferenciales.
- El primer conjunto de ecuaciones es la EDC de la actitud, que ya hemos visto.
- Queda determinar el conjunto de ecuaciones que verifica la posición y el conjunto de ecuaciones que verifica la velocidad.
- La llamada “ecuación fundamental de la navegación” (FEN) es la ecuación vectorial de la velocidad.



## Ecuación Fundamental de la Navegación I

- La segunda ley de Newton aplicada al centro de masas del avión y expresada en el sistema de referencia inercial es:  
$$m \frac{d}{dt} \underline{v}^i = \sum \underline{F} = \underline{F}_{NG}^i + m \underline{G}^i$$
, donde se desprecia la variación de masa del avión.

- Hemos separado las fuerzas en gravitatorias ( $\underline{G}$ ) y no gravitatorias ( $\underline{F}_{NG}$ ).

- Es decir:  $\frac{d}{dt} \underline{v}^i = \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^i + \underline{G}^i$ .

- La definición de  $\underline{v}^i$  es  $\underline{v}^i = \frac{d}{dt} \underline{r}^i$ .

- Por otro lado, en el sistema de ejes Tierra, tenemos que  
$$\underline{v}^e = \frac{d}{dt} \underline{r}^e$$
.

- Por tanto:  $\underline{v}^e = \frac{d}{dt} (C_i^e \underline{r}^i) = \dot{C}_i^e \underline{r}^i + C_i^e \frac{d}{dt} \underline{r}^i = \dot{C}_i^e \underline{r}^i + C_i^e \underline{v}^i$ .

- Usando la EDC  $\dot{C}_i^e = - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_i^e$  llegamos a:

$$\underline{v}^e = - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_i^e \underline{r}^i + C_i^e \underline{v}^i$$



## Ecuación Fundamental de la Navegación II

- Igualmente, asumiendo la rotación de la Tierra constante:

$$\frac{d}{dt} \underline{v}^e = - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \dot{C}_i^e \underline{r}^i - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_i^e \dot{\underline{r}}^i + \dot{C}_i^e \underline{v}^i + C_i^e \dot{\underline{v}}^i.$$

- Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{v}^e &= \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_i^e \underline{r}^i - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_i^e \underline{v}^i - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_i^e \underline{v}^i \\ &\quad + C_i^e \dot{\underline{v}}^i \end{aligned}$$

$$= \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{r}^e - 2 \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_i^e \underline{v}^i + C_i^e \dot{\underline{v}}^i$$

- Puesto que  $\underline{v}^e = - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_i^e \underline{r}^i + C_i^e \underline{v}^i$ , se tiene que

$$C_i^e \underline{v}^i = \underline{v}^e + \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{r}^e. \text{ Por tanto:}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{v}^e = - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{r}^e - 2 \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{v}^e + C_i^e \dot{\underline{v}}^i$$

- El primer término representa la aceleración centrífuga  $\underline{a}_{\text{cent}}^e$  y

$$\text{el segundo la de Coriolis, luego } \underline{a}_{\text{cent}}^e = - \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{r}^e.$$



## Ecuación Fundamental de la Navegación III

- Sustituyendo la Ley de Newton en la ecuación antes obtenida:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\underline{v}^e &= \underline{a}_{\text{cent}}^e - 2 \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{v}^e + C_i^e \left( \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^i + \underline{G}^i \right) \\ &= \underline{a}_{\text{cent}}^e - 2 \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{v}^e + \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^e + \underline{G}^e\end{aligned}$$

- Finalmente recordemos que la aceleración del geopotencial se definía como  $\underline{g} = \underline{G} + \underline{a}_{\text{cent}}$ , llegamos a:

$$\frac{d}{dt}\underline{v}^e = -2 \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{v}^e + \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^e + \underline{g}^e$$

- Finalmente, en ejes navegación  $n$  y puesto que  $\underline{v}^n = C_e^n \underline{v}^e$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\underline{v}^n &= \dot{C}_e^n \underline{v}^e + C_e^n \frac{d}{dt}\underline{v}^e \\ &= - \left( \underline{\omega}_{n/e}^n \right)^\times C_e^n \underline{v}^e + C_e^n \left( -2 \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{v}^e + \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^e + \underline{g}^e \right)\end{aligned}$$



## Ecuación Fundamental de la Navegación IV

- Es decir:

$$\frac{d}{dt} \underline{v}^n = - \left( \underline{\omega}_{n/e}^n \right)^\times \underline{v}^n - 2 C_e^n \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times \underline{v}^e + \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^n + \underline{g}^n$$

- Y puesto que  $\underline{v}^e = C_n^e \underline{v}^n$ :

$$\frac{d}{dt} \underline{v}^n = - \left( \underline{\omega}_{n/e}^n \right)^\times \underline{v}^n - 2 C_e^n \left( \underline{\omega}_{e/i}^e \right)^\times C_n^e \underline{v}^n + \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^n + \underline{g}^n$$

- Recordemos que para el “operador producto vectorial”, se cumple que  $C_b^a \left( \underline{z}^b \right)^\times C_a^b = \left( \underline{z}^a \right)^\times$ . Por tanto la FEN queda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{v}^n &= - \left( \underline{\omega}_{n/e}^n \right)^\times \underline{v}^n - 2 \left( \underline{\omega}_{e/i}^n \right)^\times \underline{v}^n + \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^n + \underline{g}^n \\ &= - \left( \underline{\omega}_{n/e}^n + 2 \underline{\omega}_{e/i}^n \right)^\times \underline{v}^n + \frac{1}{m} \underline{F}_{NG}^n + \underline{g}^n \end{aligned}$$

- La FEN es una ecuación totalmente expresada (“mecanizada”) en ejes n.  $\underline{v}^n$  es lo que se quiere estimar. Observemos no obstante que son necesarios  $\underline{\omega}_{n/e}^n$  y  $\underline{\omega}_{e/i}^n$ .



## Velocidades angulares entre sistemas de referencias

- Necesitamos obtener valores para  $\underline{\omega}_{n/e}^n$  y  $\underline{\omega}_{e/i}^n$ .
- En primer lugar consideremos el caso simple de que  $\alpha = 0$ , por tanto  $g = n$ .
- Recordemos las matrices de transformación:

$$C_i^e = \begin{bmatrix} c\omega_{Et} & s\omega_{Et} & 0 \\ -s\omega_{Et} & c\omega_{Et} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_e^g = \begin{bmatrix} -s\phi c\lambda & -s\phi s\lambda & c\phi \\ -s\lambda & c\lambda & 0 \\ -c\phi c\lambda & -c\phi s\lambda & -s\phi \end{bmatrix}$$

- Recordemos que  $\underline{\omega}_{e/i}^e = [0 \ 0 \ \omega_E]^T$ .
- Por tanto:

$$\underline{\omega}_{e/i}^g = C_e^g \underline{\omega}_{e/i}^e = \begin{bmatrix} \omega_E c\phi \\ 0 \\ -\omega_E s\phi \end{bmatrix}$$

- Por otro lado siguiendo el procedimiento con el que se hallaron

las DCM para ángulos de Euler, llegamos a  $\underline{\omega}_{g/e}^g = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} c\phi \\ -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} s\phi \end{bmatrix}$



## Velocidades angulares entre sistemas de referencias con ángulo de deriva

- Si ahora  $\alpha \neq 0$ , recordemos la matriz de transformación:

$$C_g^n = \begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Por tanto:  $\underline{\omega}_{e/i}^n = C_g^n \underline{\omega}_{e/i}^g = \begin{bmatrix} \omega_{EC}\phi c\alpha \\ -\omega_{EC}\phi s\alpha \\ -\omega_{ES}\phi \end{bmatrix}$

- Igualmente  $\underline{\omega}_{g/e}^n = C_g^n \underline{\omega}_{g/e}^g = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}c\phi c\alpha - \dot{\phi}s\alpha \\ -\dot{\lambda}c\phi s\alpha - \dot{\phi}c\alpha \\ -\dot{\lambda}s\phi \end{bmatrix}$

- Finalmente

$$\underline{\omega}_{n/e}^n = \underline{\omega}_{g/e}^n + \underline{\omega}_{n/g}^n = \underline{\omega}_{g/e}^n + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}c\phi c\alpha - \dot{\phi}s\alpha \\ -\dot{\lambda}c\phi s\alpha - \dot{\phi}c\alpha \\ -\dot{\lambda}s\phi + \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$



## Ecuaciones Diferenciales Cinemáticas de la Posición I

- Necesitamos obtener ecuaciones para  $\lambda$ ,  $\phi$  y  $h$ ; también para  $\alpha$ , si se usa un ángulo de deriva.
- En primer lugar para simplificar consideremos el caso más simple posible: no hay ángulo de deriva ( $\alpha = 0$  luego  $n = g$ ) y la Tierra es esférica de radio  $R_e$ .
- En tal caso, se tiene:  $\underline{r}^e = \underline{v}^e$  y recordemos  $\underline{v}^g = C_e^g \underline{v}^e \neq \underline{r}^g$ . Pero el valor de  $\underline{r}^g = [0 \ 0 \ -(R_e + h)]^T$ , luego es fácil de derivar.
- Se tiene:  $[0 \ 0 \ -\dot{h}]^T = \underline{r}^g = \dot{C}_e^g \underline{r}^e + C_e^g \dot{\underline{r}}^e = -\left(\omega_{g/e}^g\right)^\times C_e^g \underline{r}^e + C_e^g \underline{v}^e = -\left(\omega_{g/e}^g\right)^\times \underline{r}^g + \underline{v}^g$
- Por otro lado  $\underline{v}^g = [v_x \ v_y \ v_z]^T = [v_N \ v_E \ v_D]^T$  teniendo en cuenta la orientación de los ejes NED. Despejando la velocidad, la ecuación matricial queda:

$$\begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\lambda} s \phi & -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} s \phi & 0 & -\dot{\lambda} c \phi \\ \dot{\phi} & \dot{\lambda} c \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_e - h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{h} \end{bmatrix}$$



## EDC de la Posición II

- Desarrollando:

$$\begin{aligned}v_N &= \dot{\phi}(R_e + h) \\v_E &= \dot{\lambda}c\phi(R_e + h) \\v_D &= -\dot{h}\end{aligned}$$

- Es decir:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{v_N}{R_e + h} \\\dot{\lambda} &= \frac{v_E}{c\phi(R_e + h)} \\\dot{h} &= -v_D\end{aligned}$$

- Éstas ecuaciones me permiten obtener la posición conocida la velocidad en todo instante. Obsérvese que son singulares en  $\phi = \pm 90^\circ$ .

- Por ese motivo se introduce el azimuth de deriva.

- Sustituyendo en  $\underline{\omega}_{g/e}^g$  obtenemos:  $\underline{\omega}_{g/e}^g = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_e + h} \\ -\frac{v_N}{R_e + h} \\ -\frac{v_E \tan \phi}{R_e + h} \end{bmatrix}$



## EDC de la Posición: caso elipsoidal

- En el caso elipsoidal se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{v_N}{R_M + h} \\ \dot{\lambda} &= \frac{v_E}{c\phi(R_N + h)} \\ \dot{h} &= -v_D\end{aligned}$$

- Donde  $R_N$  y  $R_M$  son respectivamente los radios locales de curvatura normal (de un paralelo) y meridional (del meridiano), que fueron definidos en el primer tema; dichos radios dependen de la latitud en la que se encuentre el avión.

- Y por tanto:  $\omega_{g/e}^g = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_N + h} \\ -\frac{v_N}{R_M + h} \\ -\frac{v_E \tan \phi}{R_N + h} \end{bmatrix}$



## EDC de la Posición con Azimuth de Deriva I

- Trabajamos con tierra esférica. Si  $\alpha \neq 0$  entonces  $n \neq g$  y la única ecuación que se mantiene es  $\dot{h} = -v_D$ , mientras que el resto de las ecuaciones cambian.
- Si escribimos  $\underline{v}^n = [v_x \ v_y \ v_D]^T$  y  $\underline{\omega}_{n/e}^n = [\rho_x \ \rho_y \ \rho_z]^T$ , siguiendo el mismo procedimiento de antes hallamos:

$$\underline{v}^n = \left( \underline{\omega}_{n/e}^n \right)^\times \underline{r}^n + \dot{\underline{r}}^n$$

- La ecuación matricial queda:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_e - h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{h} \end{bmatrix}$$

donde recordemos que ya calculamos  $\rho_x = \dot{\lambda}c\phi c\alpha - \dot{\phi}s\alpha$ ,  
 $\rho_y = -\dot{\lambda}c\phi s\alpha - \dot{\phi}c\alpha$ ,  $\rho_z = -\dot{\lambda}s\phi + \dot{\alpha}$ .

- Se llega a:

$$v_x = (\dot{\lambda}c\phi s\alpha + \dot{\phi}c\alpha) (R_e + h)$$

$$v_y = (\dot{\lambda}c\phi c\alpha - \dot{\phi}s\alpha) (R_e + h)$$

$$v_D = -\dot{h}$$



## EDC de la Posición con Azimuth de Deriva II

- Despejando  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\lambda}$ :

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha}{R_e + h} \\ \dot{\lambda} &= \frac{v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha}{\cos \phi (R_e + h)} \\ \dot{h} &= -V_D\end{aligned}$$

- Usando estas definiciones en  $\underline{\omega}_{n/e}^n$  se llega a:

$$\underline{\omega}_{n/e}^n = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \cos \phi \cos \alpha - \dot{\phi} \sin \alpha \\ -\dot{\lambda} \cos \phi \sin \alpha - \dot{\phi} \cos \alpha \\ -\dot{\lambda} \sin \phi + \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_y}{R_e + h} \\ -\frac{v_x}{R_e + h} \\ -\frac{v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha}{R_e + h} \tan \phi + \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \text{ donde } \dot{\alpha} \text{ se}$$

puede elegir como se quiera.

- Se suele fijar por definición  $\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \sin \phi = \frac{v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha}{R_e + h} \tan \phi$ ,

$$\text{de donde: } \underline{\omega}_{n/e}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_y}{R_e + h} \\ -\frac{v_x}{R_e + h} \\ 0 \end{bmatrix},$$

- Obsérvese que ha desaparecido la singularidad en  $\underline{\omega}_{n/e}^n$ ! (a costa de un grado de libertad adicional,  $\alpha$ ).



## EDC de la Posición con Azimuth de Deriva III

- Usando  $\alpha$  se mantiene la singularidad a la hora de calcular  $\lambda$ , pero al menos se puede seguir computando  $\underline{\omega}_{n/e}^n$ , que es necesaria para poder calcular  $\underline{v}^n$ .
- **Interpretación física:** Ésta definición de  $\alpha$  equivale a tener una plataforma a bordo, a la que se permite girar en las direcciones  $x^n$  y  $y^n$  pero se le impide girar en  $z^n$ . El ángulo que forma una dirección fija de la plataforma con el N sería  $\alpha$ .
- Observación: puesto que la posición viene dada por los ángulos  $(\phi, \lambda, \alpha)$ , se puede tratar como una “actitud”,  $C_e^n$ .
- En tal caso las ecuaciones cinemáticas de la posición podrían darse como EDC de actitud, por ejemplo  $\dot{C}_e^n = - \left( \underline{\omega}_{n/e}^n \right)^\times C_e^n$  o incluso tratarse como cuaterniones.
- Así eliminamos totalmente la singularidad, y podemos sobrevolar cualquier punto del planeta.
- Habría que añadir la ecuación de la altitud,  $\dot{h} = -v_D$ .

