

**Desarrollo de una herramienta  
académica para el estudio de la  
estabilidad de aeronaves mediante  
interfaz gráfica basada en Matlab:**

***AS.gui***

**Proyecto Fin de Carrera**

Universidad de Sevilla

Escuela Superior de Ingeniería

**Departamento de Ingeniería Aeroespacial**



**Autor: Pablo García Mascort**

**Tutor: Sergio Esteban Roncero**

Sevilla, Septiembre 2014



# Agradecimientos

---

*Este proyecto ha sido fruto de muchas horas de trabajo frente al ordenador a lo largo de este último año y no podría haber sido completado sin la ayuda de ciertas personas.*

*Le agradezco a mi tutor Sergio su guía y sus consejos que tanto me han servido para la elaboración de este proyecto.*

*Quiero agradecer a mis padres y mi hermana su paciencia y su apoyo a lo largo de todo este tiempo en la universidad que ha sido largo y en ocasiones complicado.*

*A mis amigos Juan Antonio, Antonio Jesús y María por animarme día tras día y por haber sido capaces de apretarme las tuercas cuando fue necesario.*

*Y a mis compañeros que estuvieron a mi lado durante mi tiempo en la universidad y con los que he compartido inolvidables experiencias: Juan Emilio, Jesús, Francis, Alberto, Claudia, José Carlos e Ibon.*

*A todos gracias.*

# Índice

---

|  |     |
|--|-----|
| ÍNDICE .....   | I   |
| LISTA DE TABLAS .....  | VI  |
| LISTA DE FIGURAS .....   | VII |
| GLOSARIO DE TÉRMINOS .....   | IX  |
| <br>   |     |
| CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN.....   | 1   |
| 1.1. Motivación: .....   | 1   |
| 1.2. Estado del Arte:.....   | 3   |
| 1.3. Aclaración.....   | 3   |
| <br>   |     |
| CAPÍTULO 2 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO Y MODELO DE PEQUEÑAS PERTURBACIONES .....            | 5   |
| 2.1. Ecuación de movimiento.....   | 5   |
| 2.2. Modelo de pequeñas perturbaciones .....   | 6   |
| 2.2.1. Ecuaciones del movimiento longitudinal para pequeñas perturbaciones .....       | 11  |
| 2.2.2. Ecuaciones del movimiento lateral-direccional para pequeñas perturbaciones..... | 13  |
| <br>   |     |
| CAPÍTULO 3 CÁLCULO DE DERIVADAS DE ESTABILIDAD .....                                   | 15  |
| 3.1 Aclaraciones previas.....  | 15  |
| 3.2 Geometría del avión.....   | 16  |

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| 3.2.1.    | <i>Parámetros del ala</i> .....   | 17 |
| 3.2.2.    | <i>Superficies sustentadoras</i> .....  | 18 |
| 3.3       | <b>Estabilidad Longitudinal</b> .....   | 18 |
| 3.3.1.    | <i>Derivadas con respecto del ángulo de ataque <math>\alpha</math></i> .....                                    | 18 |
| 3.3.1.1   | Variación de $\Delta C_x$ con el ángulo de ataque $\alpha$ .....  | 19 |
| 3.3.1.1.1 | Determinación de upwash y downwash .....  | 22 |
| 3.3.1.2   | Variación de $\Delta C_z$ con el ángulo de ataque $\alpha$ .....  | 23 |
| 3.3.1.3   | Variación de $\Delta C_m$ con el ángulo de ataque $\alpha$ .....  | 23 |
| 3.3.2.    | <i>Derivadas con respecto a la velocidad adimensional <math>u</math></i> .....                                  | 23 |
| 3.3.2.1   | Variación de $\Delta C_x$ con la velocidad adimensional $u$ .....   | 23 |
| 3.3.2.2   | Variación de $\Delta C_z$ con la velocidad adimensional $u$ .....   | 24 |
| 3.3.2.3   | Variación de $\Delta C_m$ con la velocidad adimensional $u$ .....   | 24 |
| 3.3.3.    | <i>Derivadas con respecto a la velocidad angular <math>q</math></i> .....                                       | 24 |
| 3.3.3.1   | Variación de $\Delta C_x$ con la velocidad angular $q$ .....  | 25 |
| 3.3.3.2   | Variación de $\Delta C_z$ con la velocidad angular $q$ .....  | 25 |
| 3.3.3.3   | Variación de $\Delta C_m$ con la velocidad angular $q$ .....  | 27 |
| 3.3.4.    | <i>Derivadas con respecto a la variación del ángulo de ataque con el tiempo <math>\dot{\alpha}</math></i> ..... | 29 |
| 3.3.4.1   | Variación de $\Delta C_x$ con la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$ .....              | 29 |
| 3.3.4.2   | Variación de $\Delta C_z$ con la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$ .....              | 29 |
| 3.3.4.3   | Variación de $\Delta C_m$ con la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$ .....              | 30 |
| 3.3.5.    | <i>Derivadas de control longitudinales</i> .....  | 31 |
| 3.3.5.1   | Variación de la sustentación con el elevador horizontal $C_{L_{\delta_e}}$ .....                                | 32 |
| 3.3.5.1.1 | Ejemplo de obtención de $\frac{(\alpha_{\delta})_{C_L}}{(\alpha_{\delta})_{C_l}}$ .....                         | 34 |
| 3.3.5.1.2 | Ejemplo de obtención de $K_b$ .....   | 34 |
| 3.3.5.2   | Variación de la sustentación con superficier de control de cannard $C_{L_{\delta_c}}$ .....                     | 35 |
| 3.3.5.3   | Variación de la momento de cabeceo con el elevador horizontal $C_{m_{\delta_e}}$ .....                          | 35 |
| 3.3.5.4   | Variación de la momento de cabeceo con la superficie de control del cannard $C_{m_{\delta_c}}$ .....            | 36 |
| 3.3.6.    | <i>Derivadas propulsivas longitudinales</i> .....   | 36 |
| 3.3.6.1   | Variación de la propulsión en el eje 'X' con la velocidad de vuelo .....  | 37 |
| 3.3.6.1.1 | Aviones con propulsión jet .....  | 37 |
| 3.3.6.1.2 | Hélices de paso variable .....  | 38 |
| 3.3.6.1.3 | Hélices de paso fijo .....  | 38 |
| 3.3.6.2   | Variación de la propulsión en el eje 'Z' con la velocidad de vuelo .....  | 38 |
| 3.3.6.3   | Variación del momento producido en el eje 'Y' por la propulsión con la velocidad de vuelo .....                 | 39 |
| 3.3.6.4   | Variación de la propulsión en el eje 'X' con el ángulo de ataque .....  | 40 |
| 3.3.6.5   | Variación de la propulsión en el eje 'Z' con el ángulo de ataque .....  | 40 |
| 3.3.6.6   | Variación del momento producido en el eje 'Y' por la propulsión con el ángulo de ataque .....                   | 40 |
| 3.4       | <b>Estabilidad Lateral-Direccional</b> .....  | 41 |

|         |   |    |
|---------|---|----|
| 3.4.1.  | <i>Derivadas con respecto del ángulo <math>\beta</math></i> .....   | 41 |
| 3.4.1.1 | Variación de $\Delta C_y$ con el ángulo de barrido $\beta$ .....  | 41 |
| 3.4.1.2 | Variación de $\Delta C_l$ con el ángulo de barrido $\beta$ .....  | 45 |
| 3.4.1.3 | Variación de $\Delta C_n$ con el ángulo de barrido $\beta$ .....  | 50 |
| 3.4.2.  | <i>Derivadas con respecto del 'roll rate' <math>p</math></i> .....  | 53 |
| 3.4.2.1 | Variación de $\Delta C_y$ con el 'roll rate' $p$ .....  | 53 |
| 3.4.2.2 | Variación de $\Delta C_l$ con el 'roll rate' $p$ .....  | 55 |
| 3.4.2.3 | Variación de $\Delta C_n$ con el 'roll rate' $p$ .....  | 57 |
| 3.4.3.  | <i>Derivadas con respecto del yaw rate <math>r</math></i> .....   | 58 |
| 3.4.3.1 | Variación de $\Delta C_y$ con el 'yaw rate' $r$ .....   | 58 |
| 3.4.3.2 | Variación de $\Delta C_l$ con el 'yaw rate' $r$ .....   | 59 |
| 3.4.3.3 | Variación de $\Delta C_n$ con el 'yaw rate' $r$ .....   | 60 |
| 3.4.4.  | <i>Derivadas con respecto a la variación del ángulo sideslip con el tiempo <math>\dot{\beta}</math></i> ..... | 63 |
| 3.4.4.1 | Variación de $\Delta C_y$ con la variación del ángulo sideslip con el tiempo $\dot{\beta}$ .....              | 63 |
| 3.4.4.2 | Variación de $\Delta C_l$ con la variación del ángulo sideslip con el tiempo $\dot{\beta}$ .....              | 65 |
| 3.4.4.3 | Variación de $\Delta C_n$ con la variación del ángulo sideslip con el tiempo $\dot{\beta}$ .....              | 65 |
| 3.4.5.  | <i>Derivadas de control Lateral-Direccional</i> .....   | 65 |
| 3.4.5.1 | Variación de $\Delta C_Y$ con la deflexión de los alerones.....   | 65 |
| 3.4.5.2 | Variación de $\Delta C_l$ con la deflexión de los alerones.....   | 65 |
| 3.4.5.3 | Variación de $\Delta C_n$ con la deflexión de los alerones.....   | 67 |
| 3.4.5.4 | Variación de $\Delta C_Y$ con la deflexión del timón de profundidad.....                                      | 68 |
| 3.4.5.5 | Variación de $\Delta C_l$ con la deflexión del timón de profundidad.....                                      | 69 |
| 3.4.5.6 | Variación de $\Delta C_n$ con la deflexión del timón de profundidad.....                                      | 69 |
| 3.4.6.  | <i>Derivadas propulsivas lateral-direccionales</i> .....  | 69 |
| 3.4.6.1 | Variación de las fuerzas debidas a la propulsión en el eje 'Y' con el ángulo de barrido.                      | 70 |
| 3.4.6.2 | Variación de los momentos debidas a la propulsión en el eje 'X' con el ángulo de barrido.....                 | 70 |
| 3.4.6.3 | Variación de los momentos debidas a la propulsión en el eje 'X' con el ángulo de barrido.....                 | 71 |
| 3.5     | Conclusión del cálculo .....  | 71 |

CAPÍTULO 4 ESTABILIDAD ESTÁTICA .....

|        |   |    |
|--------|---|----|
| 4.1.   | Trimado Longitudinal .....                                      | 73 |
| 4.2.   | Trimado Lateral .....   | 75 |
| 4.2.1. | <i>Caso 1: Fallo de motor</i> .....                             | 76 |
| 4.2.2. | <i>Caso 2: Equilibrio para un <math>\beta</math> dado</i> ..... | 77 |
| 4.2.3. | <i>Caso 3: Viraje estacionario</i> .....                        | 78 |

|   |     |
|---|-----|
| CAPÍTULO 5 ESTABILIDAD DINÁMICA.....  | 81  |
| 5.1. Dinámica Longitudinal .....  | 81  |
| 5.1.1. <i>Análisis de los autovalores</i> .....   | 84  |
| 5.1.2. <i>Aproximación de los modos</i> .....   | 85  |
| 5.2. Dinámica Lateral .....   | 86  |
| 5.2.1. <i>Análisis de los autovalores</i> .....   | 89  |
| 5.2.2. <i>Aproximación a los autovalores</i> .....  | 90  |
| <br>  |     |
| CAPÍTULO 6 EXPLICACIÓN DEL PROGRAMA AS.GUI .....  | 91  |
| 6.1. Sobre el programa .....  | 92  |
| 6.2. Manual uso de AS.gui .....   | 93  |
| 6.2.1 <i>Iniciar AS.gui</i> .....   | 93  |
| 6.2.2 <i>Cargar modelo</i> .....  | 94  |
| 6.2.2.1. Trimado longitudinal .....   | 95  |
| 6.2.2.2. Trimado lateral .....  | 95  |
| 6.2.2.3. Dinámica.....  | 97  |
| 6.2.2.4. Exportar datos .....   | 97  |
| 6.2.3. <i>Nuevo modelo</i> .....  | 98  |
| 6.2.4. <i>Modificar modelo</i> .....  | 99  |
| 6.2.5. <i>Eliminar modelo</i> .....   | 100 |
| 6.3. Conclusión del programa .....  | 100 |
| <br>  |     |
| CAPÍTULO 7 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....   | 101 |
| 7.1. Comparación con B747.....  | 101 |
| 7.1.1. <i>Análisis de los datos Longitudinales</i> .....  | 101 |
| 7.1.1.1. Variación de $\Delta C_m$ con la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$ ..... | 102 |
| 7.1.2. <i>Análisis de los datos Lateral-Direccionales</i> .....   | 103 |
| 7.1.2.1. Variación de $\Delta C_n$ con el ángulo de barrido $\beta$ .....                                   | 104 |
| 7.1.2.2. Variación de $\Delta C_l$ con el 'yaw rate' $r$ .....  | 105 |
| 7.1.2.3. Derivadas con respecto a $\dot{\beta}$ .....   | 105 |
| 7.2. Comparación con Céfiro .....   | 105 |
| 7.2.1. <i>Análisis de los datos Longitudinales</i> .....  | 106 |
| 7.2.2. <i>Análisis de los datos Lateral-Direccionales</i> .....   | 107 |
| 7.3. Comentario final .....   | 109 |
| <br>  |     |
| CAPÍTULO 8 CONCLUSIONES .....   | 111 |
| 8.1. Sugerencias para el futuro .....   | 111 |
| 8.1.1. <i>Mejorar los métodos de cálculo</i> .....  | 111 |

|  |     |
|--|-----|
| 8.1.2. Datos aerodinámicos .....               | 112 |
| 8.1.3. Fuselaje .....                          | 112 |
| 8.1.4. Derivadas propulsivas .....             | 112 |
| 8.1.5. Definir correctamente el V-tail.....    | 113 |
| 8.1.6. Elección de parámetros.....             | 113 |
| 8.1.7. Validez para altos números de Mach..... | 113 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| CAPÍTULO 9 BIBLIOGRAFÍA ..... | 115 |
|-------------------------------|-----|



# Lista de Tablas

---

|  |     |
|--|-----|
| TABLA 4.1 FACTOR DE LA PLANTA PROPULSORA [3] .....                           | 77  |
| TABLA 7.1 COMPARACIÓN DE DERIVADAS LONGITUDINALES CON B747 REAL .....        | 102 |
| TABLA 7.2 MEJORA DEL VALOR DE $C_{m\dot{\alpha}}$ .....                      | 103 |
| TABLA 7.3 COMPARACIÓN DE DERIVADAS LATERAL-DIRECCIONALES CON B747 REAL ..... | 104 |
| TABLA 7.4 NUEVOS VALORES TRAS LA MODIFICACIÓN.....                           | 105 |
| TABLA 7.5 COMPARACIÓN DE DERIVADAS LONGITUDINALES DEL CÉFIRO .....           | 106 |
| TABLA 7.6 COMPARACIÓN DE MÉTODOS PARA CALCULAR $C_{m\dot{\alpha}}$ .....     | 107 |
| TABLA 7.7 COMPARACIÓN DE DERIVADAS LATERAL-DIRECCIONALES DEL CÉFIRO .....    | 108 |
| TABLA 7.8 COMPARACIÓN DE MÉTODOS.....  | 108 |

# Lista de Figuras

---

|   |    |
|---|----|
| FIGURA 2.1 AVIÓN EN VUELO ESTABLE Y EN VUELO CON PERTURBACIONES [1].                      | 7  |
| FIGURA 3.1 EXPLICACIÓN GRÁFICA DEL ALA EXPUESTA [1]                                       | 16 |
| FIGURA 3.2 AVIÓN COMERCIAL [3]  | 16 |
| FIGURA 3.3 FORMA EN PLANTA DEL ALA, EXPLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA [3]                       | 17 |
| FIGURA 3.4 CONSTANTE DE MASA APARENTE [1]   | 20 |
| FIGURA 3.5 PENDIENTE DEL COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN DEL PERFIL TEÓRICO [1]               | 21 |
| FIGURA 3.6 FACTOR DE CORRECCIÓN EMPÍRICO [1]  | 21 |
| FIGURA 3.7 DETALLE DEL ENCASTRE DEL ALA [1]   | 26 |
| FIGURA 3.8 INCREMENTO DE SUSTENTACIÓN DEBIDO AL FLAP [2]                                  | 33 |
| FIGURA 3.9 PARÁMETRO DE EFECTIVIDAD [2]   | 33 |
| FIGURA 3.10 FACTOR DE FLAP-SPAN [2]   | 34 |
| FIGURA 3.11 DETALLE DE LA OBTENCIÓN DE $\eta_i$ Y $\eta_f$ [2]                            | 35 |
| FIGURA 3.12 EJEMPLO DE LA DISTANCIA $d_T$ ENTRE LA LÍNEA DE EMPUJE Y EL C.G.              | 39 |
| FIGURA 3.13 LOCALIZACIÓN DEL PUNTO $x_o$ [4]  | 42 |
| FIGURA 3.14 OBTENCIÓN DE $K_i$ [4]  | 42 |
| FIGURA 3.15 OBTENCIÓN DE $k$ [1]  | 43 |
| FIGURA 3.16 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $\frac{A_{v(B)}}{A_v}$ [1]                            | 44 |
| FIGURA 3.17 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $\frac{A_{v(HB)}}{A_{v(B)}}$ [1]                      | 44 |
| FIGURA 3.18 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $K_H$ [1]   | 45 |
| FIGURA 3.19 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $(\Delta C_{l\beta} / \Delta C_L)_{\Lambda_{c2}}$ [1] | 46 |
| FIGURA 3.20 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $K_{M\Lambda}$ [1]                                    | 47 |
| FIGURA 3.21 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $K_f$ [1]   | 47 |
| FIGURA 3.22 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $C_{l\beta} / \Gamma$ [1]                             | 48 |
| FIGURA 3.23 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $(C_{l\beta} / C_L)_A$ [1]                            | 49 |
| FIGURA 3.24 OBTENCIÓN DE $K_{M\Gamma}$ [1]  | 49 |
| FIGURA 3.25 FACTOR EMPÍRICO $K_N$ [1]   | 51 |
| FIGURA 3.26 VARIACIÓN DE $K_{Rl}$ CON EL NÚMERO DE REYNOLDS [1]                           | 52 |
| FIGURA 3.27 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $\frac{C_{yp}}{C_L}_{C_L=0, M=0}$ [1]                 | 54 |

|  |     |
|--|-----|
| FIGURA 3.28 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $\frac{\beta C_{lp}}{k}_{c_L=0}$ [1] .....               | 55  |
| FIGURA 3.29 RESISTENCIA DEL ALA DEBIDA AL PARÁMETRO 'ROLL DAMPING' [3] .....                 | 57  |
| FIGURA 3.30 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $\left(\frac{C_{lr}}{C_L}\right)_{c_L=0, M=0}$ [1] ..... | 60  |
| FIGURA 3.31 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $\left(\frac{C_{nr}}{C_L^2}\right)$ [1] .....            | 61  |
| FIGURA 3.32 OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO $\left(\frac{C_{nr}}{C_D}\right)$ [1] .....              | 62  |
| FIGURA 3.33 OBTENCIÓN DE $\sigma_{\beta\alpha}$ EN GRADOS [1] .....                          | 63  |
| FIGURA 3.34 OBTENCIÓN DE $\sigma_{\beta r}$ EN GRADOS [1] .....                              | 64  |
| FIGURA 3.35 OBTENCIÓN DE $\sigma_{\beta, WB}$ [1] .....                                      | 64  |
| FIGURA 3.36 DETALLE DEL ALERÓN [2] .....   | 66  |
| FIGURA 3.37 OBTENCIÓN DE $\left(\frac{\partial C_L}{\partial \delta_f}\right)$ [2] .....     | 66  |
| FIGURA 3.38 OBTENCIÓN DE $K_f$ [2] .....   | 67  |
| FIGURA 3.39 K PARA $\lambda = 0.5$ [2] .....   | 68  |
| FIGURA 3.40 K PARA $\lambda = 1$ [2] .....   | 68  |
| FIGURA 3.41 VALOR DE $\tau$ EN FUNCIÓN DEL AREA DEL TIMÓN DE DIRECCIÓN [2] .....             | 69  |
| FIGURA 4.1 ESQUEMA DE VIRAJE ESTACIONARIO [3] .....  | 79  |
| FIGURA 5.1 MOVIMIENTO DINÁMICO .....   | 84  |
| FIGURA 6.1 LOGOTIPO DEL PROGRAMA .....   | 91  |
| FIGURA 6.2 ARQUITECTURA DEL PROGRAMA .....   | 92  |
| FIGURA 6.3 PANTALLA PRINCIPAL DEL PROGRAMA .....   | 93  |
| FIGURA 6.4 DETALLE DEL MODELO CARGADO .....  | 94  |
| FIGURA 6.5 PANTALLA DE RESULTADOS .....  | 94  |
| FIGURA 6.6 RESULTADOS DEL TRIMADO LONGITUDINAL .....   | 95  |
| FIGURA 6.7 TRIMADO LATERAL CON DETALLE DE FALLO DE MOTOR .....                               | 95  |
| FIGURA 6.8 TRIMADO LATERAL PARA UN $\beta$ DADO .....  | 96  |
| FIGURA 6.9 TRIMADO LATERAL PARA VIRAJE ESTACIONARIO .....                                    | 96  |
| FIGURA 6.10 DATOS DEL ESTUDIO DINÁMICO .....   | 97  |
| FIGURA 6.11 VENTANA DE DATOS .....   | 98  |
| FIGURA 6.12 PANTALLA DE 'ELECCIÓN DE VALORES' .....  | 99  |
| FIGURA 6.13 VENTANA DE MODIFICAR MODELO .....  | 99  |
| FIGURA 6.14 VERIFICACIÓN DE ELIMINACIÓN .....  | 100 |

# Glosario de términos

| Símbolo                              | Descripción   | Unidades |
|--------------------------------------|---|----------|
| $A$                                  | Alargamiento  | -        |
| $A_{thrust}, B_{thrust}, C_{thrust}$ | Coefficientes de potencia   | -        |
| $A_{power}, B_{power}, C_{power}$    | Coefficientes de potencia   | -        |
| $a_o$                                | $C_{L\alpha}$ del perfil  | 1/rad    |
| $a_w$                                | $C_{L\alpha}$ del ala limpia  | 1/rad    |
| $B$                                  | $\sqrt{1 - M^2 \cos^2(\Lambda_{c/4})}$  |          |
| $b$                                  | Envergadura del avión   | m        |
| $b_c$                                | Envergadura del canard  | m        |
| $b_{f,max}$                          | Ancho máximo del fuselaje   | m        |
| $b_t$                                | Envergadura del estabilizador horizontal  | m        |
| $c$                                  | Cuerda  | m        |
| $c_c$                                | Cuerda del canard   | m        |
| $C_D$                                | Coefficiente de resistencia   | -        |
| $C_{D\alpha}$                        | Variación del Coeficiente de resistencia con $\alpha$                                 | 1/rad    |
| $C_{D0}$                             | Coefficiente de resistencia para coeficiente de sustentación nulo                     | -        |
| $c_e$                                | Cuerda elevador   | m        |
| $c_f$                                | Cuerda del flap   | m        |
| $C_L$                                | Coefficiente de sustentación  | -        |
| $\Delta C_l, \Delta C_m, \Delta C_n$ | Adimensionalización de $\Delta L, \Delta M, \Delta N$                                 | -        |
| $C_{L\alpha}$                        | Variación del coeficiente de sustentación con $\alpha$                                | 1/rad    |
| $C_{L\alpha,c}$                      | Variación del coeficiente de sustentación del canard con $\alpha$                     | 1/rad    |
| $C_{L\alpha,t}$                      | Variación del coeficiente de sustentación del estabilizador horizontal con $\alpha$   | 1/rad    |
| $C_{L\alpha,WB}$                     | Variación del coeficiente de sustentación de la combinación ala-fuselaje con $\alpha$ | 1/rad    |
| $C_{L0}$                             | Coefficiente de sustentación a ángulo de ataque nulo                                  | -        |

|                                      |   |       |
|--------------------------------------|---|-------|
| $C_{MAC,w}$                          | Coeficiente del momento aerodinámico producido por el ala en el centro aerodinámico |       |
| $c_r$                                | cuerda en la raíz del ala   | m     |
| $c_t$                                | Cuerda en la punta del ala  | m     |
| $C_{tail}$                           | Cola del estabilizador horizontal   | m     |
| $C_{Tx1}$                            | Coeficientes de potencia  |       |
| $C_{Tx\alpha}$                       | Coeficientes de potencia  |       |
| $C_{Txu}$                            | Coeficientes de potencia  |       |
| $\Delta C_x, \Delta C_y, \Delta C_z$ | Adimensionalización $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z$                            | -     |
| $C_{Dq}$                             | Variación del coeficiente de resistencia con $q$                                    | 1/rad |
| $C_{Du}$                             | Variación del coeficiente de resistencia con $u$                                    |       |
| $C_{L\alpha,N}$                      | Pendiente de sustentación del morro   | 1/rad |
| $C_{L\alpha,t}$                      | Pendiente de sustentación del perfil  | 1/rad |
| $C_{l\beta}$                         | Variación de $\Delta C_l$ con $\beta$   | 1/rad |
| $C_{l\dot{\beta}}$                   | Variación de $\Delta C_l$ con $\dot{\beta}$   | 1/rad |
| $C_{l\phi}$                          | Variación de $\Delta C_l$ con $\phi$  | 1/rad |
| $C_{l\delta_a}$                      | Variación de $\Delta C_l$ con $\delta_a$  | 1/rad |
| $C_{l\delta_r}$                      | Variación de $\Delta C_l$ con $\delta_r$  | 1/rad |
| $C_{lp}$                             | Variación de $\Delta C_l$ con $p$   | 1/rad |
| $C_{lr}$                             | Variación de $\Delta C_l$ con $r$   | 1/rad |
| $C_{Lu}$                             | Variación del coeficiente de sustentación con $u$                                   |       |
| $C_{m\alpha}$                        | Variación de $\Delta C_m$ con $\alpha$  | 1/rad |
| $C_{m\dot{\alpha}}$                  | Variación de $\Delta C_m$ con $\dot{\alpha}$  | 1/rad |
| $C_{m\delta_e}$                      | Variación de $\Delta C_m$ con $\delta_e$  | 1/rad |
| $C_{m\delta_t}$                      | Variación de $\Delta C_m$ con $\delta_t$  | -     |
| $C_{mq}$                             | Variación de $\Delta C_m$ con $q$   | 1/rad |
| $C_{m\theta}$                        | Variación de $\Delta C_m$ con $\theta$  | 1/rad |
| $C_{mu}$                             | Variación de $\Delta C_m$ con $u$   | -     |
| $C_{n\beta}$                         | Variación de $\Delta C_n$ con $\beta$   | 1/rad |
| $C_{n\dot{\beta}}$                   | Variación de $\Delta C_n$ con $\dot{\beta}$   | 1/rad |
| $C_{n\phi}$                          | Variación de $\Delta C_n$ con $\phi$  | 1/rad |
| $C_{n\delta_a}$                      | Variación de $\Delta C_n$ con $\delta_a$  | 1/rad |
| $C_{n\delta_r}$                      | Variación de $\Delta C_n$ con $\delta_r$  | 1/rad |
| $C_{np}$                             | Variación de $\Delta C_n$ con $p$   | 1/rad |
| $C_{nr}$                             | Variación de $\Delta C_n$ con $r$   | 1/rad |
| $C_{x\alpha}$                        | Variación de $\Delta C_x$ con $\alpha$  | 1/rad |
| $C_{x\dot{\alpha}}$                  | Variación de $\Delta C_x$ con $\dot{\alpha}$  | 1/rad |
| $C_{x\delta_e}$                      | Variación de $\Delta C_x$ con $\delta_e$  | 1/rad |

|                                      |   |                   |
|--------------------------------------|---|-------------------|
| $C_{x\delta_t}$                      | Variación de $\Delta C_x$ con $\delta_t$  | 1/rad             |
| $C_{xq}$                             | Variación de $\Delta C_x$ con $q$   | 1/rad             |
| $C_{x\theta}$                        | Variación de $\Delta C_x$ con $\theta$  | 1/rad             |
| $C_{xu}$                             | Variación de $\Delta C_x$ con $u$   | -                 |
| $C_{y\beta}$                         | Variación de $\Delta C_y$ con $\beta$   | 1/rad             |
| $C_{y\dot{\beta}}$                   | Variación de $\Delta C_y$ con $\dot{\beta}$   | 1/rad             |
| $C_{y\phi}$                          | Variación de $\Delta C_y$ con $\phi$  | 1/rad             |
| $C_{y\delta_a}$                      | Variación de $\Delta C_y$ con $\delta_a$  | 1/rad             |
| $C_{y\delta_r}$                      | Variación de $\Delta C_y$ con $\delta_r$  | 1/rad             |
| $C_{yp}$                             | Variación de $\Delta C_y$ con $p$   | 1/rad             |
| $C_{yr}$                             | Variación de $\Delta C_y$ con $r$   | 1/rad             |
| $C_{z\alpha}$                        | Variación de $\Delta C_z$ con $\alpha$  | 1/rad             |
| $C_{z\dot{\alpha}}$                  | Variación de $\Delta C_z$ con $\dot{\alpha}$  | 1/rad             |
| $C_{z\delta_e}$                      | Variación de $\Delta C_z$ con $\delta_e$  | 1/rad             |
| $C_{z\delta_t}$                      | Variación de $\Delta C_z$ con $\delta_t$  | 1/rad             |
| $C_{zq}$                             | Variación de $\Delta C_z$ con $q$   | 1/rad             |
| $C_{z\theta}$                        | Variación de $\Delta C_z$ con $\theta$  | 1/rad             |
| $C_{zu}$                             | Variación de $\Delta C_z$ con $u$   | -                 |
| $d$                                  | Diámetro medio del fuselaje en la raíz del ala  | m                 |
| $d_{f,\max}$                         | ancho máximo del fuselaje   | m                 |
| $d_T$                                | distancia más corta de la línea de empuje al c.g.   | m                 |
| $D_{prop}$                           | Diámetro de la helice   | m <sup>2</sup>    |
| $e$                                  | Coficiente de Oswald  | -                 |
| $\epsilon_{ot}$                      | Ángulo de downwash en el estabilizador horizontal   | rad               |
| $\epsilon_{oc}$                      | Ángulo de upwash en el cannard  | rad               |
| $\bar{F}$                            | Fuerza sobre el avión   | N                 |
| $F_x, F_y, F_z$                      | Componentes de la fuerzas aerodinámicas sobre el avión en XYZ   | N                 |
| $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z$ | Perturbación de las fuerzas aerodinámicas en XYZ  | N                 |
| $h$                                  | Altura de vuelo   | m                 |
| $h_h$                                | Distancia de el c.a. del ala hasta el c.a. del estabilizador horizontal perpendicular a la cuerda del ala | m                 |
| $H_p$                                | Momento angular actuando sobre el avión   | N m seg           |
| $I_x, I_y, I_z$                      | Momentos de inercia del avión en XYZ  | Kg m <sup>2</sup> |
| $I_{xz}$                             | Producto de inercia del avión   | Kg m <sup>2</sup> |
| $i_w$                                | Ángulo de incidencia del ala  | rad               |
| $i_c$                                | Ángulo de incidencia del cannard  | rad               |
| $K_b$                                | Flap-span factor  | -                 |

|                                |  |                      |
|--------------------------------|--|----------------------|
| $K_{B(W)}$                     | Cociente de sustentación del fuselaje en presencia del ala   | -                    |
| $K_N$                          | Cociente de sustentación del morro   | -                    |
| $K_{W(B)}$                     | Cociente de sustentación del ala en presencia del fuselaje   | -                    |
| $L, M, N$                      | Componentes de $\vec{M}$ en XYZ  | Nm                   |
| $l_c$                          | distancia entre centro de gravedad y el c.a. del cannard   | m                    |
| $\Delta L, \Delta M, \Delta N$ | Perturbación de $\vec{M}$ en XYZ   | Nm                   |
| $l_f$                          | longitud del fuselaje  | m                    |
| $l_h$                          | Distancia del c.a. del ala hasta el c.a. del estabilizador horizontal paralela a la cuerda del ala | m                    |
| $l_t$                          | Distancia entre centro de gravedad y el c.a. del estabilizador horizontal                          | m                    |
| $l_v$                          | Distancia, paralela al eje x, del c.a. del estabilizador vertical al centro de gravedad            | m                    |
| $m$                            | masa   | kg                   |
| $M$                            | Número de Mach   | -                    |
| $\vec{M}$                      | Momentos sobre el avión  | Nm                   |
| $p, q, r$                      | Componente de la velocidad angular en XYZ  | rad/seg              |
| $\Delta p, \Delta q, \Delta r$ | Perturbación de la velocidad angular en XYZ  | rad/seg              |
| $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$    | Aceleración angular en las direcciones X, Y y Z  | rad/seg <sup>2</sup> |
| $q$                            | Presión dinámica   | -                    |
| $q_c$                          | Presión dinámica cannard   | -                    |
| $q_t$                          | Presión dinámica estabilizador horizontal  | -                    |
| $r_1$                          | Radio medio del fuselaje bajo el estabilizador vertical  | m                    |
| $\rho$                         | Densidad del aire  | Kg/m <sup>3</sup>    |
| $S$                            | Superficie alar  | m <sup>2</sup>       |
| $S_b(x)$                       | Área a lo largo de todo x  | m <sup>2</sup>       |
| $S_{b,max}$                    | Área transversal máxima del fuselaje   | m <sup>2</sup>       |
| $S_{b,S}$                      | Área lateral del fuselaje  | m <sup>2</sup>       |
| $S_c$                          | Superficie del cannard   | m <sup>2</sup>       |
| $S_t$                          | Superficie del estabilizador horizontal  | m <sup>2</sup>       |
| $S_v$                          | Superficie vertical  | m <sup>2</sup>       |
| $t$                            | Espesor del ala  | m                    |
| $u$                            | Velocidad $\Delta U$ adimensionalizada   | -                    |
| $U, V, W$                      | Componentes de $V_p$ en XYZ  | m/s                  |
| $\Delta U, \Delta V, \Delta W$ | Valores perturbados de U, V, W   | m/seg                |
| $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}$    | Aceleración en las direcciones X, Y y Z  | m/seg <sup>2</sup>   |
| $V_b$                          | Volumen del fuselaje   | m <sup>3</sup>       |
| $V_p$                          | Velocidad del avión  | m/seg                |
| $x_1$                          | Punto en donde $S_b(x) = S_{b,max}$  | m                    |
| $\bar{x}_a$                    | Distancia entre el c.a. y el c.g. adimensionalizado con c  | m                    |
| $\bar{x}_{ac}$                 | Centro aerodinámico adimensionalizado con c medido desde el borde del ala                          | m                    |

|                |   |     |
|----------------|---|-----|
| $\bar{x}_{cg}$ | Centro de gravedad adimensionalizado con c medido desde el borde del ala  | m   |
| $x_m$          | $x_{cg}$  | m   |
| $\bar{x}_{NA}$ | Punto neutro adimensionalizado con c medido desde el borde del ala  | m   |
| $y_{fin}$      | Distancia del final del aleron a la línea central   | m   |
| $y_{ini}$      | Distancia del inicio del aleron a la línea central  | m   |
| $z_v$          | Distancia, paralela al eje z, del c.a. del estabilizador vertical a la línea central del fuselaje                                       | m   |
| $z_w$          | Distancia, paralela al eje z, del punto 1/4 de la raíz del ala a la línea central del fuselaje. Positivo cuando el ala está por debajo. | m   |
| $n$            | Factor de carga   |     |
| $R_t$          | Radio de giro   | m   |
| $\alpha$       | Ángulo de ataque  | rad |
| $\beta$        | Ángulo de barrido   | rad |
| $\theta$       | Ángulo de cabeceo   | rad |
| $\phi$         | Ángulo de balance   | rad |
| $\psi$         | Ángulo de guiñada   | rad |
| $\delta_e$     | Deflexión del elevador  | rad |
| $\delta_t$     | Variación del empuje  | m   |
| $\delta_a$     | Deflexión del alerón  | rad |
| $\delta_r$     | Deflexión del timón de cola   | rad |
| $\lambda$      | Taper ratio   | -   |
| $\Lambda_n$    | Flecha del ala a n fracción de la cuerda  | rad |
| $\Phi_{TE}$    | Parámetro geométrico del perfil de ala  | rad |
| $\Gamma$       | Ángulo de diedro  | rad |
| $\sigma$       | Sidewash  | rad |
| $\eta_t$       | Coeficiente de presión dinámica del estabilizador horizontal  | -   |
| $\eta_c$       | Coeficiente de presión dinámica del canard  | -   |
| $\eta_v$       | Coeficiente de presión dinámica del estabilizador vertical  | -   |





# Introducción

---

En el diseño de aeronaves el alumno de ingeniería aeronáutica se acerca a multitud de fórmulas y tablas con el propósito de obtener los datos necesarios para realizar un modelo lo más cercano posible a la realidad. El modelo que se quiere realizar está condicionado por múltiples factores: tipo de aeronave, velocidad de vuelo, planta motora, aerodinámica del ala... Cualquier cambio en alguno de estos factores puede cambiar por completo el modelo final. Ahí reside la complejidad del diseño de aeronaves. Tras haber realizado un estudio extenso para obtener un modelo valido cualquier cambio en los datos obliga a realizar un estudio completo de nuevo para validar el modelo u obtener otro nuevo.

## 1.1. Motivación:

Por esta complejidad se decide iniciar la creación de una serie de herramientas que permitan facilitar las tareas del alumno de ingeniería aeronáutica bajo el contexto de la asignatura 'Cálculo de aviones'. Ésta pretende ser una solución para ahorrar tiempo en los cálculos que en numerosas ocasiones son repetitivos y han de realizarse cada vez que se produce una modificación en el diseño del avión. Este trabajo se centrará en el estudio de la estabilidad de la aeronave.

En el desarrollo de la asignatura 'Cálculo de aviones' el alumno encargado de la sección de estabilidad se encuentra muy limitado en tiempo debido a la prioridad que tienen otras secciones frente a la suya. En ocasiones la estabilidad llegar a ser relegada a un segundo plano siendo la que impone unas limitaciones muy concretas en cuanto al diseño. El estudio de estabilidad no llega a ser completo del todo llegándose en muchas ocasiones a no realizar un estudio de estabilidad dinámica adecuado.

La solución a este problema se pretende alcanzar de dos formas. La primera, realizando una relación detallada de todas las derivadas de estabilidad y sus métodos de cálculo. Y la segunda, reuniendo todos los métodos descritos anteriormente y compilarlos en un programa informático que permita, con la introducción de los datos de la aeronave mediante una interfaz sencilla, calcular las derivadas de estabilidad de una forma automática. Para ello se utilizará la herramienta GUI que proporciona el programa MATLAB.

Para entender mejor el tema principal del cual trata este trabajo y cuál es su origen, en el capítulo 2 se presentan las ecuaciones del movimiento. Éstas serán sometidas a ciertas simplificaciones y restricciones hasta llegar al modelo llamado de pequeñas perturbaciones. En este punto se introducirá el concepto de derivadas de estabilidad.

Gran variedad de autores han realizado estudios en los que indican las pautas para calcular las derivadas de estabilidad existiendo poca discrepancia entre ellos. Los trabajos de Pamadi [1] y Roskam [3] han sido la fuente principal de la que se han obtenido los métodos presentados en el capítulo 3. En esta parte se realizará un estudio detallado de todos los métodos para obtener cada una de las derivadas de estabilidad. Además de éstas también se presentarán métodos de cálculo para las derivadas de control y las derivadas propulsivas.

Una vez obtenidas todas las derivadas de estabilidad y de control se está en condiciones de realizar un estudio del trimado de la aeronave. Esto es comprobar cómo de adecuadas son las superficies sustentadoras y las superficies de control para mantener el avión en equilibrio en vuelo estable. Esto se hará en el capítulo 4. En él se estudiarán los elementos necesarios para realizar un correcto trimado tanto longitudinal como lateral-direccional.

Recuperando las ecuaciones de movimiento para pequeñas perturbaciones obtenidas en el capítulo 2 se puede observar la respuesta del avión. Esta respuesta dinámica se analizará en el capítulo 5 atendiendo a los autovalores de la matriz principal del sistema matricial, los cuales ofrecen la información suficiente sobre el tipo de respuesta que ofrecerá la aeronave en función de las derivadas de estabilidad ya calculadas.

Finalmente, todo lo visto a lo largo de este documento será trasladado a un soporte informático. Una interfaz que pretende, después de haber introducido todos los datos necesarios, suministrar al usuario de todas las derivadas de estabilidad y datos referentes a la estabilidad estática y dinámica. Una explicación sobre el funcionamiento de este programa se presenta en el capítulo 6 donde se mostrará su arquitectura y sus posibilidades.

Una vez presentado el programa se procederá a comparar los datos que se obtienen para diversas aeronaves con los datos suministrados en la bibliografía en el capítulo 7. Se observarán las diferencias existentes entre cada derivada de estabilidad y la posibilidad de mejora de los métodos utilizados en el caso que difieran en exceso. Los aviones que serán objeto de este estudio serán el B747 y el Céfiro.

## 1.2. Estado del Arte:

Actualmente existen herramientas que abordan el problema de calcular las derivadas de estabilidad a partir de los datos de diseño de la aeronave. Ejemplo de estas plataformas son los programas AAA (<http://www.darcorp.com/Software/AAA/>) y Ceasium (<http://www.ceasium.com/>) que realizan los cálculos a partir de fórmulas obtenidas de Roskam [3]. En este trabajo también se utilizan dichas fórmulas. Otro ejemplo bastante notable es *Datcom*. Este último es una compleja herramienta que combina resultados experimentales con fórmulas teóricas siendo de un nivel demasiado elevado para lo que pretende el presente documento que no es más que desarrollar una herramienta de uso académico.

## 1.3. Aclaración

Esta herramienta esta contextualizada dentro de la asignatura de Cálculo de Aviones por lo que han de tomarse los datos suministrados desde un punto de vista crítico dado que dependen de la validez de las ecuaciones. No se pretende demostrar la validez de las ecuaciones que estiman las derivadas de estabilidad sino proporcionar una herramienta para una rápida estimación de las mismas y facilitar de esa manera la tarea de diseño dentro de un contexto de ingeniería concurrente en el que el diseño y análisis de la estabilidad y control de la aeronave depende de forma intrínseca de los cálculos realizados por cada una de las distintas áreas de diseño.

De igual forma se aclara que los resultados aquí desarrollados se limitan a aeronaves de ala fija y con distintas configuraciones de superficies horizontales. Estas son: canard, estabilizador horizontal y cola en V. Estas pueden combinarse no siendo excluyentes con la excepción del estabilizador horizontal y la cola en V por razones obvias.



# Ecuación de Movimiento y modelo de pequeñas perturbaciones

---

El movimiento de la aeronave viene determinado por una serie de ecuaciones que se derivan de las leyes de Newton de la física clásica. A partir de estas ecuaciones generales, añadiendo ciertas particularidades y simplificaciones, se va a llegar a una serie de ecuaciones del movimiento que corresponden al modelo de pequeñas perturbaciones [1].

En dicho modelo se deberá encontrar una expresión para los coeficientes aerodinámicos que permita introducirlos en el nuevo sistema de ecuaciones en función de las variables del problema. Aquí se introducirá el concepto de derivada de estabilidad. Adicionalmente se realizará el desacople de las ecuaciones en longitudinal y en lateral-direccional.

## 2.1. Ecuación de movimiento

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del avión se derivan de las leyes de Newton de la física clásica y son las siguientes

$$F_x = m(\dot{U} + qW - rV) \quad (2.1)$$

$$F_y = m(\dot{V} + rU - pW) \quad (2.2)$$

$$F_z = m(\dot{W} + pV - qU) \quad (2.3)$$

$$L = \dot{p}I_x - I_{xz}(pq + \dot{r}) + qr(I_z - I_y) \quad (2.4)$$

$$M = \dot{q}I_y + rp(I_x - I_z) + (p^2 - r^2)I_{zx} \quad (2.5)$$

$$N = \dot{r}I_z - I_{xz}(\dot{p} - qr) + pq(I_y - I_x) \quad (2.6)$$

Donde  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  son las fuerzas que actúan sobre la aeronave en los diferentes ejes.  $L$ ,  $M$  y  $N$  son los momentos que actúan sobre el avión en los diferentes ejes.  $U$ ,  $V$  y  $W$  son las componentes de la velocidad de la aeronave.  $p$ ,  $q$  y  $r$  son las componentes de la velocidad angular. El punto encima de la variable como ' $\dot{U}$ ' indica que se trata de aceleración.

Estas ecuaciones gobiernan el movimiento del avión con respecto a un sistema inercial de referencia fijo en Tierra. Para alcanzar estas ecuaciones se ha ignorado el movimiento de rotación de la Tierra, así como su movimiento alrededor del Sol, se ha supuesto que el avión tiene un plano de simetría vertical y que el origen del sistema de ejes cuerpo está localizado en el centro de gravedad del avión.

## 2.2. Modelo de pequeñas perturbaciones

Para el estudio de la estabilidad, las ecuaciones antes presentadas pueden ser simplificadas si se asume que el avión está en equilibrio y las variaciones de movimiento son lo suficientemente pequeñas, esto es, la perturbación del movimiento es pequeña en comparación con el movimiento en el estado de equilibrio. Las variables del movimiento perturbado serán

$$U = U_o + \Delta U \quad V = V_o + \Delta V \quad W = W_o + \Delta W \quad (2.7)$$

$$p = p_o + \Delta p \quad q = q_o + \Delta q \quad r = r_o + \Delta r \quad (2.8)$$

$$F_x = F_{xo} + \Delta F_x \quad F_y = F_{yo} + \Delta F_y \quad F_z = F_{zo} + \Delta F_z \quad (2.9)$$

$$L = L_o + \Delta L \quad M = M_o + \Delta M \quad N = N_o + \Delta N \quad (2.10)$$

donde el sufijo  $o$  indica las variables en vuelo de equilibrio y el prefijo  $\Delta$  indica las pequeñas perturbaciones.

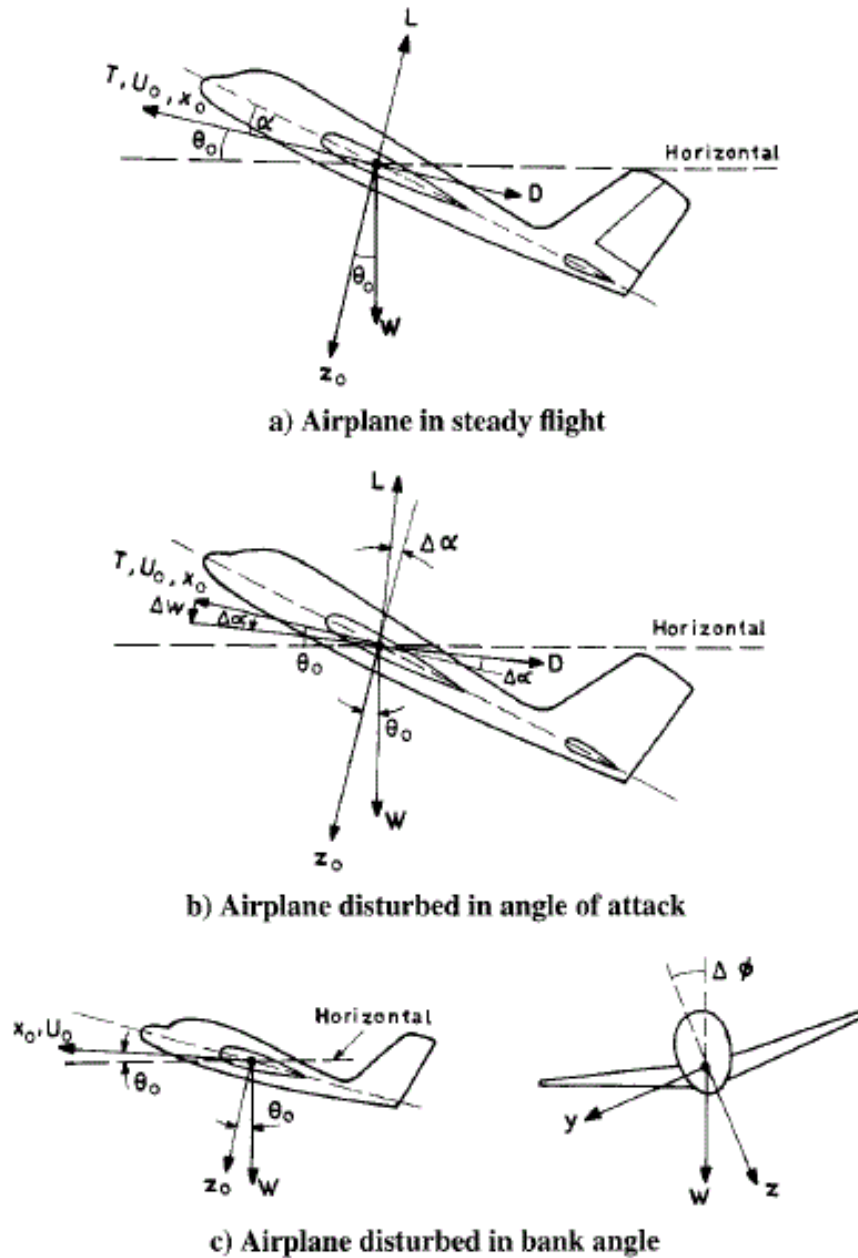


Figura 2.1 Avión en vuelo estable y en vuelo con perturbaciones [1].

Se asume que el avión, antes de enfrentarse a la perturbación está en vuelo estable, sin aceleración. Esto es, las fuerzas netas y momentos netos son iguales a cero. Esto implica

$$\dot{U}_o = 0 \quad V_o = W_o = 0 \quad (2.11)$$

$$p_o = q_o = r_o = 0 \quad (2.12)$$

$$F_{x_o} = F_{y_o} = F_{z_o} = 0 \quad (2.13)$$

$$L_o = M_o = N_o = 0 \quad (2.14)$$



De esta manera

$$U = U_o + \Delta U \quad V = \Delta V \quad W = \Delta W \quad (2.15)$$

$$p = \Delta p \quad q = \Delta q \quad r = \Delta r \quad (2.16)$$

$$F_x = \Delta F_x \quad F_y = \Delta F_y \quad F_z = \Delta F_z \quad (2.17)$$

$$L = \Delta L \quad M = \Delta M \quad N = \Delta N \quad (2.18)$$

Se asume también que cada componente de la velocidad perturbada es pequeña en comparación con la velocidad de referencia  $U_o$  y que las componentes de la velocidad angular perturbada son muy cercanas a cero. Teniendo todo esto en cuenta las ecuaciones (2.1)-(2.6) se reescriben, ignorando términos de segundo orden como  $\Delta q \Delta W$ , dando lo siguiente

$$\Delta F_x = m \Delta \dot{U} \quad (2.19)$$

$$\Delta F_y = m(\Delta \dot{V} + r U_o) \quad (2.20)$$

$$\Delta F_z = m(\Delta \dot{W} - q U_o) \quad (2.21)$$

$$\Delta L = \dot{p} I_x - I_{xz} \dot{r} \quad (2.22)$$

$$\Delta M = \dot{q} I_y \quad (2.23)$$

$$\Delta N = \dot{r} I_z - I_{xz} \dot{p} \quad (2.24)$$

Se definen las siguientes variables adimensionales.

$$u = \frac{\Delta U}{U_o} \quad v = \frac{\Delta V}{U_o} \quad w = \frac{\Delta W}{U_o} \quad (2.25)$$

$$\Delta C_x = \frac{\Delta F_x}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S} \quad \Delta C_y = \frac{\Delta F_y}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S} \quad \Delta C_z = \frac{\Delta F_z}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S} \quad (2.26)$$

$$\Delta C_l = \frac{\Delta L}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S} \quad \Delta C_m = \frac{\Delta M}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 \bar{c}} \quad \Delta C_n = \frac{\Delta N}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 b} \quad (2.27)$$

donde,  $U_o$  es la velocidad de vuelo,  $S$  la superficie alar,  $\bar{c}$  es la cuerda principal y  $b$  la envergadura. Los ángulos de ataque y de barrido al tratarse de pequeñas perturbaciones se aproximan así

$$\tan \alpha \approx \Delta\alpha = \frac{W}{U_o} \quad (2.28)$$

$$\sin \beta \approx \Delta\beta = \frac{V}{U_o} \quad (2.29)$$

Teniendo en cuenta la adimensionalización mostrada las ecuaciones (2.19)-(2.24) toman la siguiente forma:

$$\Delta C_x = \frac{mU_o}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 S} \dot{u} \quad (2.30)$$

$$\Delta C_y = \frac{mU_o}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 S} (\Delta\dot{\beta} + r) \quad (2.31)$$

$$\Delta C_z = \frac{mU_o}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 S} (\Delta\dot{\alpha} - q) \quad (2.32)$$

$$\Delta C_l = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 S b} (\dot{p}I_x - \dot{r}I_{xz}) \quad (2.33)$$

$$\Delta C_m = \frac{I_y}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 S b} \dot{q} \quad (2.34)$$

$$\Delta C_n = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 S b} (\dot{r}I_z - \dot{p}I_{xz}) \quad (2.35)$$

El siguiente paso es hallar una expresión para los diferentes coeficientes aerodinámicos. Se asume que las fuerzas y momentos longitudinales ( $\Delta F_x, \Delta F_z$  y  $\Delta M$ ) sólo están afectadas por las variables longitudinales ( $u, \Delta\alpha$  y  $q$ ). Se hace lo mismo para las fuerzas lateral-direccionales desacoplando las ecuaciones en dos sistemas. Con esta suposición y teniendo en cuenta que las perturbaciones son pequeñas se pueden expresar los coeficientes aerodinámicos como series de Taylor en torno al punto de equilibrio. Cada coeficiente quedaría de la siguiente manera

$$\Delta C_x = C_{xu}u + C_{x\alpha}\Delta\alpha + C_{x\theta}\Delta\theta + C_{x\dot{\alpha}}\left(\frac{\Delta\dot{\alpha}\bar{c}}{2U_o}\right) + C_{xq}\left(\frac{q\bar{c}}{2U_o}\right) + C_{x\delta_e}\Delta\delta_e + C_{x\delta_t}\Delta\delta_t + \dots \quad (2.36)$$

$$\Delta C_z = C_{zu}u + C_{z\alpha}\Delta\alpha + C_{z\theta}\Delta\theta + C_{z\dot{\alpha}}\left(\frac{\Delta\dot{\alpha}\bar{c}}{2U_o}\right) + C_{zq}\left(\frac{q\bar{c}}{2U_o}\right) + C_{z\delta_e}\Delta\delta_e + C_{z\delta_t}\Delta\delta_t + \dots \quad (2.37)$$

$$\Delta C_m = C_{mu}u + C_{m\alpha}\Delta\alpha + C_{m\theta}\Delta\theta + C_{m\dot{\alpha}}\left(\frac{\Delta\dot{\alpha}\bar{c}}{2U_o}\right) + C_{mq}\left(\frac{q\bar{c}}{2U_o}\right) + C_{m\delta_e}\Delta\delta_e + C_{m\delta_t}\Delta\delta_t + \dots \quad (2.38)$$

$$\Delta C_y = C_{y\beta}\Delta\beta + C_{y\phi}\Delta\phi + C_{y\dot{\beta}}\left(\frac{\Delta\dot{\beta}b}{2U_o}\right) + C_{yp}\left(\frac{pb}{2U_o}\right) + C_{yr}\left(\frac{rb}{2U_o}\right) + C_{y\delta_a}\Delta\delta_a + C_{y\delta_r}\Delta\delta_r + \dots \quad (2.39)$$

$$\Delta C_l = C_{l\beta}\Delta\beta + C_{l\phi}\Delta\phi + C_{l\dot{\beta}}\left(\frac{\Delta\dot{\beta}b}{2U_o}\right) + C_{lp}\left(\frac{pb}{2U_o}\right) + C_{lr}\left(\frac{rb}{2U_o}\right) + C_{l\delta_a}\Delta\delta_a + C_{l\delta_r}\Delta\delta_r + \dots \quad (2.40)$$

$$\Delta C_n = C_{n\beta}\Delta\beta + C_{n\phi}\Delta\phi + C_{n\dot{\beta}}\left(\frac{\Delta\dot{\beta}b}{2U_o}\right) + C_{np}\left(\frac{pb}{2U_o}\right) + C_{nr}\left(\frac{rb}{2U_o}\right) + C_{n\delta_a}\Delta\delta_a + C_{n\delta_r}\Delta\delta_r + \dots \quad (2.41)$$

Donde  $\Delta\delta_e$  es la variación de deflexión del elevador,  $\Delta\delta_t$  el término que indica la variación del empuje,  $\Delta\delta_a$  la variación de deflexión del alerón y  $\Delta\delta_r$  la variación de deflexión del timón de cola.

El desarrollo de los coeficientes aerodinámicos está compuesto por unos términos del tipo  $C_{xu}$ ,  $C_{x\alpha}$  y  $C_{x\theta}$  que son las derivadas de estabilidad y otros del tipo  $C_{x\delta_e}$  y  $C_{x\delta_t}$  que son las derivadas de control. Por las condiciones previas que se han definido se desacoplan las fuerzas longitudinales de las lateral-direccionales. De esta manera se reduce el problema no lineal de seis grados de libertad a dos problemas de tres grados de libertad cada uno y linealizados en el punto de equilibrio. La linealización de estas ecuaciones simplifica el estudio por métodos analíticos de la estabilidad del avión. Hay que tener en cuenta las simplificaciones que se han hecho para llegar a estas expresiones. Se ha tenido en cuenta un modelo de pequeñas perturbaciones y la linealización de fuerzas aerodinámicas en torno a un punto de vuelo estable, un punto de equilibrio. Para situaciones que se alejen de estas consideraciones la aproximación no sería válida. A continuación se muestran las ecuaciones que rigen el comportamiento longitudinal y el comportamiento lateral-direccional para pequeñas perturbaciones.

### 2.2.1. Ecuaciones del movimiento longitudinal para pequeñas perturbaciones

Sustituyendo los valores de  $\Delta C_x$ ,  $\Delta C_z$  y  $\Delta C_m$  obtenidos del desarrollo de Taylor en (2.36)-(2.38) en las ecuaciones (2.30)-(2.32) se llega a

$$\left(m_1 \frac{d}{dt} - C_{xu}\right)u - \left(C_{x\dot{\alpha}}c_1 \frac{d}{dt} + C_{x\alpha}\right)\Delta\alpha - \left(C_{xq}c_1 \frac{d}{dt} + C_{x\theta}\right)\Delta\theta = C_{x\delta_e}\Delta\delta_e + C_{x\delta_t}\Delta\delta_t \quad (2.42)$$

$$-C_{zu}u - \left[\left(m_1 \frac{d}{dt} - C_{z\dot{\alpha}}c_1 \frac{d}{dt}\right) - C_{z\alpha}\right]\Delta\alpha - \left(m_1 \frac{d}{dt} + C_{zq}c_1 \frac{d}{dt} + C_{z\theta}\right)\Delta\theta = C_{z\delta_e}\Delta\delta_e + C_{z\delta_t}\Delta\delta_t \quad (2.43)$$

$$-C_{mu}u - \left(C_{m\dot{\alpha}}c_1 \frac{d}{dt} + C_{m\alpha}\right)\Delta\alpha + \frac{d}{dt}\left(I_{y1} \frac{d}{dt} - C_{mq}c_1\right)\Delta\theta = C_{m\delta_e}\Delta\delta_e + C_{m\delta_t}\Delta\delta_t \quad (2.44)$$

donde

$$c_1 = \frac{c}{2U_o} \quad (2.45)$$

$$m_1 = \frac{2m}{\rho U_o S} \quad (2.46)$$

$$I_{y1} = \frac{I_y}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 S c} \quad (2.47)$$

A continuación se van a desarrollar algunas de las derivadas de estabilidad que aparecen en las ecuaciones (2.42)-(2.44). Las fuerzas que actúan sobre la aeronave son la sustentación  $L$ , la resistencia  $D$ , el empuje  $T$ , y el peso  $W$ . En vuelo en equilibrio se cumple

$$F_{x0} = T - D_o - W \sin \theta_o = 0 \quad (2.48)$$

y para el vuelo en equilibrio perturbado debe ser

$$F_x = F_{x0} + \Delta F_x \quad (2.49)$$

$$= T - D - W \sin(\theta_o + \Delta\theta) \quad (2.50)$$

$$= T - (D_o + \Delta D) - W \sin(\theta_o + \Delta\theta) \quad (2.51)$$

Y, teniendo en cuenta la Ec.(2.48) y aproximando  $\sin(\theta_o + \Delta\theta)$  como  $\cos\theta_o\Delta\theta$  la expresión de  $F_x$  queda de la siguiente manera

$$F_x = \Delta F_x \approx -\Delta D - W \cos\theta_o \Delta\theta \quad (2.52)$$

Por simplicidad se ignoran las variaciones de empuje durante las perturbaciones. Supóngase que la aeronave sólo está perturbada en velocidad de vuelo. Se tendría  $U = U_o + \Delta U$ ,  $\Delta\theta = 0$ ,  $\Delta F_x = -\Delta D$  y  $\partial U = \partial \Delta U$ . Entonces

$$\frac{\partial F_x}{\partial U} = \frac{\partial \Delta F_x}{\partial \Delta U} = -\frac{\partial \Delta D}{\partial \Delta U} = -\frac{\partial D}{\partial U} \quad (2.53)$$

$$= \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \rho U^2 S C_D \right)}{\partial U} \quad (2.54)$$

$$= -\rho U S C_D - \frac{1}{2} \rho U^2 S \frac{\partial C_D}{\partial U} \quad (2.55)$$

Con  $U \approx U_o$  se tiene

$$\frac{\partial F_x}{U_o \partial \left( \frac{\Delta U}{U_o} \right)} = -\rho U_o S C_D - \frac{1}{2} \rho U_o^2 S \frac{\partial C_D}{U_o \partial \left( \frac{\Delta U}{U_o} \right)} \quad (2.56)$$

Con  $u = \frac{\Delta U}{U_o}$  y  $C_x = F_x / \frac{1}{2} \rho U_o^2 S$  la Ec.(2.56) se simplifica siendo al final

$$C_{xu} = -2C_D - C_{Du} \quad (2.57)$$

Ahora se supondrá que el avión sólo está perturbado en el ángulo de cabeceo siendo el nuevo ángulo  $\theta + \Delta\theta$  y  $\Delta U = 0$ . Entonces de la Ec.(2.52) se obtiene  $\Delta F_x = -W \cos\theta_o \Delta\theta$ . Desarrollando de la misma manera que en el caso anterior se llega a

$$\frac{\partial F_x}{\partial \theta} = \frac{\partial \Delta F_x}{\partial \Delta \theta} = -W \cos\theta_o \quad (2.58)$$

O, lo que es lo mismo,

$$C_{x\theta} = -C_L \cos\theta_o \quad (2.59)$$

El resto de derivadas se obtienen de idéntica manera.

### 2.2.2. Ecuaciones del movimiento lateral-direccional para pequeñas perturbaciones

Sustituyendo los valores de  $\Delta C_{y_r}$ ,  $\Delta C_{l_r}$  y  $\Delta C_{n_r}$  obtenidos del desarrollo de Taylor en (2.39)-(2.41) en las ecuaciones (2.33)-(2.35) se obtiene

$$\left(m_1 \frac{d}{dt} - b_1 C_{y\beta} \frac{d}{dt} - C_{y\beta}\right) \Delta\beta - \left(b_1 C_{y\phi} \frac{d}{dt} + C_{y\phi}\right) \Delta\phi + \left(m_1 \frac{d}{dt} - b_1 C_{y\psi} \frac{d}{dt}\right) \Delta\psi = C_{y\delta_r} \Delta\delta_r + C_{y\delta_a} \Delta\delta_a \quad (2.60)$$

$$\left(-C_{l\beta} - b_1 C_{l\beta} \frac{d}{dt}\right) \Delta\beta + \left(-b_1 C_{l\phi} \frac{d}{dt} + I_{xz1} \frac{d^2}{dt^2}\right) \Delta\phi + \left(-b_1 C_{l\psi} \frac{d}{dt} - I_{xz1} \frac{d^2}{dt^2}\right) \Delta\psi = C_{l\delta_r} \Delta\delta_r + C_{l\delta_a} \Delta\delta_a \quad (2.61)$$

$$\left(-C_{n\beta} - b_1 C_{n\beta} \frac{d}{dt}\right) \Delta\beta + \left(-b_1 C_{n\phi} \frac{d}{dt} - I_{xz1} \frac{d^2}{dt^2}\right) \Delta\phi + \left(-b_1 C_{n\psi} \frac{d}{dt} - I_{z1} \frac{d^2}{dt^2}\right) \Delta\psi = C_{n\delta_r} \Delta\delta_r + C_{n\delta_a} \Delta\delta_a \quad (2.62)$$

donde

$$\frac{d\phi}{dt} = p \quad (2.63)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = r \quad (2.64)$$

$$b_1 = \frac{b}{2U_o} \quad (2.65)$$

$$I_{xz1} = \frac{I_x}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S b} \quad (2.66)$$

$$I_{z1} = \frac{I_z}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S b} \quad (2.67)$$

$$I_{xz1} = \frac{I_{xz}}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S b} \quad (2.68)$$

A continuación se van a desarrollar algunas de las derivadas de estabilidad que aparecen en las ecuaciones (2.42)-(2.44). Se supone que el avión está perturbado en el ángulo de balance  $\Delta\phi$  como se ve en la Figura 2.1. Se tendría entonces

$$F_y = F_{y_o} + \Delta F_y = W \cos \theta_o \Delta\phi + Y_{aero} + \Delta Y_{aero} \quad (2.69)$$

Donde  $Y_{aero}$  denota la fuerza lateral aerodinámica. Se tiene por equilibrio que  $F_{y0} = Y_{aero} = 0$ , por lo que

$$\Delta F_y = W \cos \theta_o \Delta \phi + \Delta Y_{aero} \quad (2.70)$$

y derivando

$$\frac{\partial \Delta F_y}{\partial \Delta \phi} = \frac{\partial F_y}{\partial \phi} = W \cos \theta_o \quad (2.71)$$

o, lo que es lo mismo

$$C_{y\phi} = C_L \cos \theta_o \quad (2.72)$$

Y así, de la misma manera, con el resto de derivadas de estabilidad.

En el presente capítulo se han desarrollado las ecuaciones del movimiento hasta llegar a una expresión simplificada en la que las fuerzas aerodinámicas se expresan en función de unos términos denominados derivadas de estabilidad y derivadas de control. Será preciso encontrar unos métodos válidos para determinar el valor de cada una de estas derivadas. Del estudio de cada método de cálculo de derivadas de estabilidad y de control se encarga el siguiente capítulo.

# Cálculo de derivadas de estabilidad

---

En el capítulo anterior las fuerzas y momentos que afectan a la aeronave se presentaron como un desarrollo de Taylor en torno a un punto de equilibrio. Los coeficientes de este desarrollo de Taylor son las llamadas derivadas de estabilidad y de control. Éstas definen la variación que se produce en las fuerzas y momentos adimensionales con respecto a las variables del problema.

En el presente capítulo se mostrarán los métodos utilizados para el cálculo de estas derivadas. Están divididos en dos grandes grupos como sugiere el desacople de las ecuaciones del movimiento. Unos son los métodos para hallar las derivadas longitudinales y otros los dedicados a hallar las derivadas lateral-direccionales.

## 3.1 Aclaraciones previas

Las expresiones mostradas a continuación para el cálculo de las derivadas de estabilidad sólo tienen en cuenta la condición de vuelo subsónico. Perderán validez para casos en los que  $M > 0.7$  siendo en estos casos sólo valores orientativos. En las referencias consultadas aparecen métodos para obtener las derivadas para altos números de mach, [1] y [3].

Durante la definición de las expresiones se hace referencia en muchas ocasiones a datos del ala expuesta. Estos datos, tanto geométricos como aerodinámicos, se refieren a un ala con la misma geometría que la que es objeto de estudio eliminando la parte física en la que



ésta se combina con el fuselaje como se puede ver en la Figura 3.1. Estas variables se reconocerán con el subíndice  $e$ .

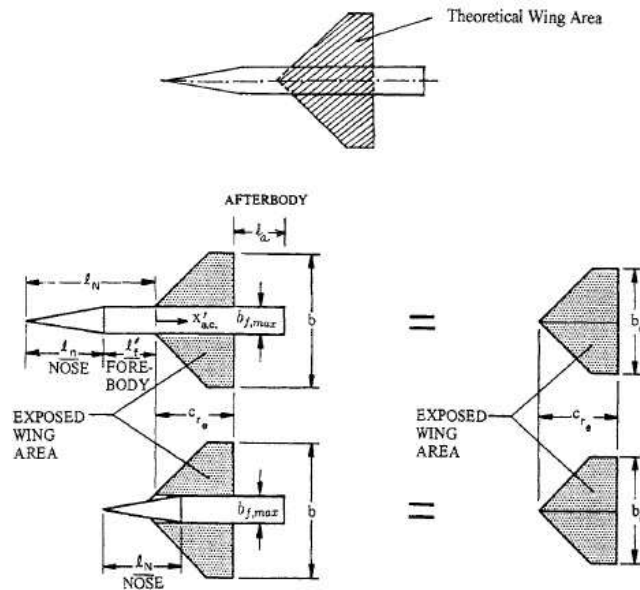


Figura 3.1 Explicación gráfica del ala expuesta [1]

Todas las derivadas de estabilidad aquí expresadas tienen unidades de  $1/rad$ . Y todos los ángulos serán introducidos en radianes. En caso contrario se indicará.

### 3.2 Geometría del avión

El tipo de aeronaves que se estudiarán en este trabajo son aviones convencionales de ala fija. Se admitirán diversas configuraciones en relación a superficies horizontales: estabilizador horizontal, canar y cola en V. Y también podrá variarse el tipo de planta propulsora.

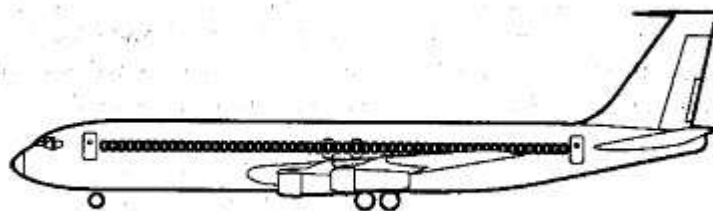


Figura 3.2 Avión comercial [3]

### 3.2.1. Parámetros del ala

La geometría del ala juega un papel fundamental en el valor de los coeficientes aerodinámicos del avión. En la Figura 3.3 se muestran las dimensiones principales del ala. Aquí se describen los parámetros que se utilizarán a lo largo del capítulo.

'Taper ratio'  $\lambda = \frac{c_t}{c_r}$  (3.1)

Alargamiento  $A = \frac{b^2}{S} = \frac{2b}{c_r(1+\lambda)}$  (3.2)

Area  $A = \frac{b}{2} c_r (1+\lambda)$  (3.3)

Cuerda principal  $\bar{c} = \frac{2}{3} c_r \left( \frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda} \right)$  (3.4)

Ángulo de flecha a  $n$  fracción de la cuerda  $\tan \Lambda_n = \tan \Lambda_{LE} - \frac{4n(1-\lambda)}{A(1+\lambda)}$  (3.5)

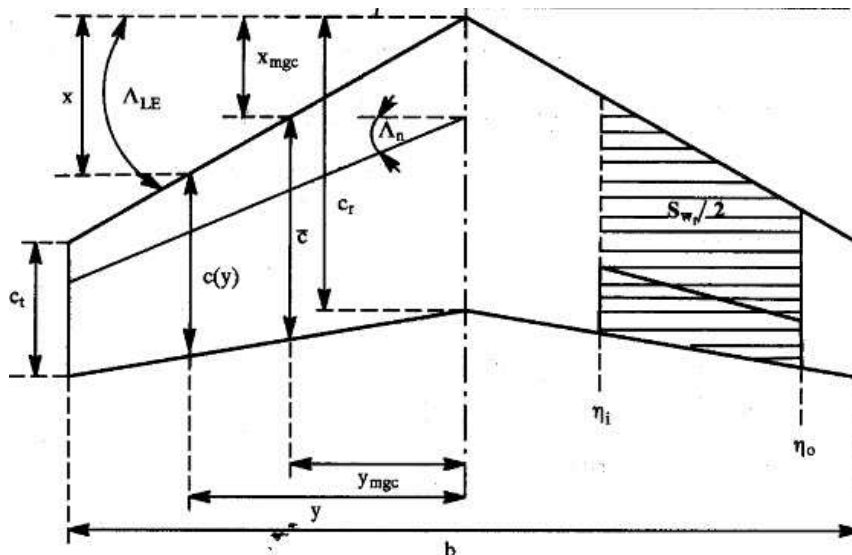


Figura 3.3 Forma en planta del ala, explicación de la geometría [3]

### 3.2.1. Superficies sustentadoras

En el estudio de estabilidad realizado en este documento se consideran varias superficies sustentadoras. La primera de ellas, el ala, ya se ha comentado previamente y se mantendrá en todos los modelos a estudiar. No pasa lo mismo con las diferentes superficies estabilizadoras. En el desarrollo de los métodos para hallar las diversas derivadas de estabilidad y de control se presentarán cálculos para los casos de sustentador horizontal y para los casos de canard. Éstos pueden encontrarse al mismo tiempo en el modelo, o sólo haber uno de ellos.

Diferente es el caso de la cola en V. El tratamiento que se hace en el estudio de este tipo de superficie sustentadora es sencillo. La cola en V se descompone en sus componentes vertical y horizontal. Así se tratará como un sustentador horizontal idéntico a su proyección en planta y como un estabilizador vertical idéntico al doble de su proyección vertical. Destacar este dato ya que en las ecuaciones de este capítulo no se tendrán en cuenta considerándola descompuesta en horizontal y vertical.

## 3.3 Estabilidad Longitudinal

Las derivadas de estabilidad y de control, gracias al desacople de ecuaciones que se realizó en el capítulo anterior, se pueden dividir en dos tipos: Longitudinales y Lateral-Direccionales. En este apartado vamos a mostrar los métodos necesarios para hallar las correspondientes al caso longitudinal. Se van a dividir según la derivada de la que dependen siendo en ocasiones necesario hallar una derivada antes de calcular otra.

Los coeficientes de fuerzas y momentos longitudinales,  $\Delta C_x$ ,  $\Delta C_z$  y  $\Delta C_m$ , se descomponen en un desarrollo de Taylor. Cada miembro de ese desarrollo es una derivada de estabilidad o una derivada de control que dependen de las variables  $u$ ,  $\alpha$  y  $q$ .

Las componentes de las diversas derivadas se obtienen de un desarrollo idéntico al capítulo anterior en que se obtenía  $C_{xu}$  y  $C_{x\theta}$ . Este proceso está descrito en las ecuaciones de la (2.45) a la (2.59).

### 3.3.1 Derivadas con respecto el ángulo de ataque $\alpha$

A continuación se va a proceder a describir las ecuaciones que permiten el cálculo de las derivadas de estabilidad longitudinales que dependen del ángulo de ataque  $\alpha$ .

### 3.3.1.1 Variación de $\Delta C_x$ con el ángulo de ataque $\alpha$

Derivada que expresa la variación de fuerzas en el eje 'X' con la variación del ángulo de ataque. Se compone de dos elementos: el valor del coeficiente de sustentación  $C_L$  y la variación del coeficiente de resistencia con el ángulo de ataque  $C_{D\alpha}$ .

$$C_{x\alpha} = C_L - C_{D\alpha} \quad (3.6)$$

El coeficiente de sustentación está definido por la siguiente expresión.

$$C_L = C_{L\alpha}\alpha \quad (3.7)$$

Por lo que para hallar el coeficiente es necesario un valor del ángulo de ataque y de  $C_{L\alpha}$ . El valor del ángulo de ataque debe ser introducido por el usuario. El cálculo de  $C_{L\alpha}$  se realiza atendiendo a la siguiente expresión.

$$C_{L\alpha} = C_{L\alpha,WB} + C_{L\alpha,t} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \alpha}\right) \eta_t \frac{S_t}{S} + C_{L\alpha,c} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \alpha}\right) \eta_c \frac{S_c}{S} \quad (3.8)$$

donde se distinguen la contribución hecha por el conjunto ala-fuselaje  $C_{L\alpha,WB}$ , por el estabilizador horizontal  $C_{L\alpha,t}$  y por el cannard  $C_{L\alpha,c}$ . La interferencia mutua entre el ala y el fuselaje se calcula con la siguiente expresión [1]

$$C_{L\alpha,WB} = (K_N + K_{W(B)} + K_{B(W)}) C_{L\alpha,e} \frac{S_e}{S} \quad (3.9)$$

donde  $K_N$ ,  $K_{W(B)}$  y  $K_{B(W)}$  son el cociente de la sustentación del morro, el ala en presencia del fuselaje y del fuselaje en presencia del ala con la sustentación del ala por separado. Se obtienen de las siguientes expresiones [1]

$$K_N = \left( \frac{C_{L\alpha,N}}{C_{L\alpha,e}} \right) \frac{S}{S_e} \quad (3.10)$$

donde  $C_{L\alpha,N}$  es la pendiente del coeficiente de sustentación del morro aislado.  $C_{L\alpha,e}$  es la pendiente del coeficiente de sustentación del ala expuesta.  $S_e$  es la superficie del ala expuesta y  $S$  es la superficie del ala. Para velocidades subsónicas se cumple que

$$C_{L\alpha,N} = \frac{2(k_2 - k_1) S_{B,max}}{S} \quad (3.11)$$

Donde  $k_2 - k_1$  se obtiene en Figura 3.4 introduciendo el valor del 'Fineness Ratio', éste es el cociente de la longitud del fuselaje con el ancho máximo del fuselaje,  $l_f / b_{f,max}$ .  $S_{B,max}$  es el

área del fuselaje transversal máxima.  $C_{L\alpha,e}$  se calcula con la Ec.(3.14) introduciendo los datos del ala expuesta. Los valores de  $K_{W(B)}$  y  $K_{B(W)}$  se extraen de las ecuaciones (3.12) y (3.13) [1].

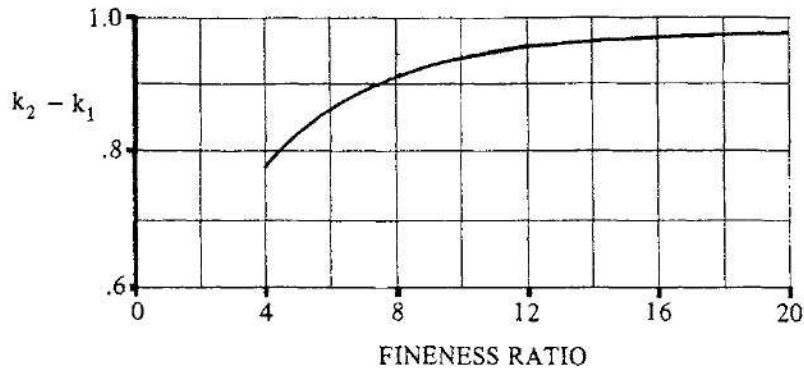


Figura 3.4 Constante de masa aparente [1]

$$K_{W(B)} = 0,1714 \left( \frac{b_{f,max}}{b} \right)^2 + 0,8326 \left( \frac{b_{f,max}}{b} \right) + 0,9974 \quad (3.12)$$

$$K_{B(W)} = 0,781 \left( \frac{b_{f,max}}{b} \right)^2 + 1,1976 \left( \frac{b_{f,max}}{b} \right) + 0,0088 \quad (3.13)$$

Donde  $b_{f,max}$  es el ancho máximo del fuselaje y  $b$  la envergadura del ala.

$$a_w = \frac{2\pi A}{2 + \sqrt{\frac{A^2 \beta^2}{k^2} \left( 1 + \frac{\tan^2 \Lambda_{c/4}}{\beta^2} \right) + 4}} \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) proporciona la pendiente de sustentación del ala corregida de 2D a 3D. Siendo  $A$  el alargamiento,  $\Lambda_{c/4}$  la flecha en un cuarto del ala,  $\beta = \sqrt{1 - M^2}$  y  $k = a_o / 2\pi$ . La pendiente del coeficiente de sustentación del perfil del ala es  $a_o$  y viene definido por la ecuación (3.15) [1].

$$a_o = \frac{1.05}{\sqrt{1 - M^2}} \left[ \frac{a_o}{(a_o)_{theory}} \right] (a_o)_{theory} \quad (3.15)$$

donde  $a_o$  es la pendiente del coeficiente de sustentación de una sección 2D. Su valor teórico y el de su factor de corrección,  $a_o / (a_o)_{theory}$ , se extraen de Figura 3.5 y Figura 3.6.

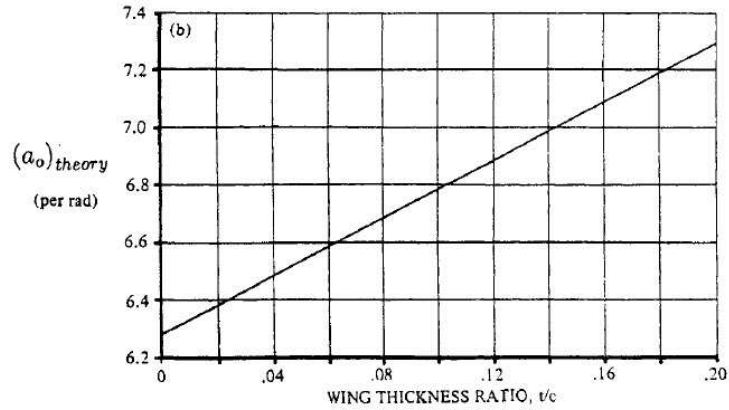


Figura 3.5 Pendiente del coeficiente de sustentación del perfil teórico [1]

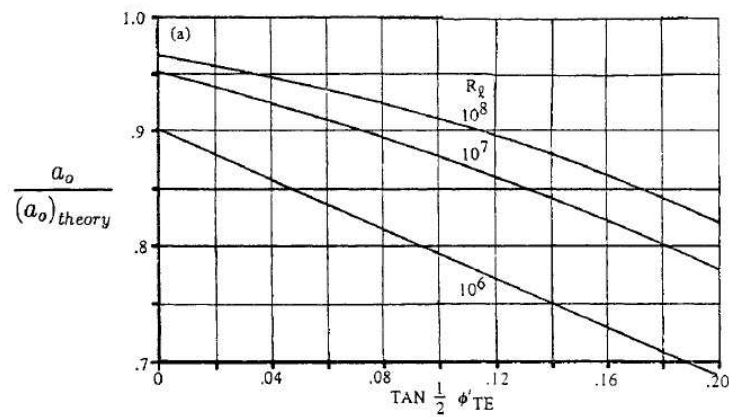


Figura 3.6 Factor de corrección empírico [1]

En la Figura 3.5 puede verse la dependencia directa con el espesor del ala siendo sencilla su programación. Diferente es el caso de Figura 3.6 pues depende del número de Reynolds y del parámetro geométrico  $\Phi'_{TE}$ . En este caso, y para simplificar los cálculos, se asigna un valor de 0.8 a  $a_o / (a_o)_{theory}$ . Si se tuvieran resultados o bien teóricos, experimentales o de cálculo numérico de  $a_o$  pueden usarse en vez de la Ec.(3.15).

En la Ec. (3.8) aparecen también términos que se refieren tanto al estabilizador horizontal como al canard.  $C_{L\alpha,t}$  y  $C_{L\alpha,c}$  son las pendientes del coeficiente de sustentación del estabilizador horizontal y del canard respectivamente.  $S_t$  y  $S_c$  son, respectivamente, la superficie del estabilizador horizontal y del canard.  $\eta_t$  y  $\eta_c$  son los cocientes de presión dinámica definidos en el caso del estabilizador horizontal como  $q_t/q$  siendo  $q_t = 1/2 \rho U_t^2$  y  $q = 1/2 \rho U^2$ . Estos serán introducidos por el usuario, teniendo normalmente un valor de 0,95.

Falta por obtener el valor de  $C_{D\alpha}$ . Este se obtiene de derivar la expresión de la polar del avión, suponiéndola no compensada,  $C_D = C_{D0} + kC_L^2$ . La derivada resultante es

$$C_{D\alpha} = 2kC_L C_{L\alpha} \quad (3.16)$$

donde  $k = 1/\pi A e$ . El coeficiente de Oswald  $e$  se calculará con Ec.(3.17) en caso de no disponer de un valor introducido por el usuario [1].

$$e = \frac{1.1C_{L\alpha}}{RC_{L\alpha} + (1-R)\pi A} \quad (3.17)$$

El parámetro  $R$  está dado por la expresión

$$R = a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_1^2 + a_3\lambda_1 + a_4 \quad (3.18)$$

donde  $a_1 = 0.0004$ ,  $a_2 = -0.0080$ ,  $a_3 = 0.0501$ ,  $a_4 = 0.8642$  y  $\lambda_1 = A\lambda / \cos \Lambda_{LE}$ .

#### 3.3.1.1.1 Determinación de upwash y downwash

No se entrará en el estudio del upwash del canard  $\frac{\partial \epsilon_c}{\partial \alpha}$ . Éste se supondrá despreciable debido a que el canard se halla alejado de la zona de influencia del ala [1]. El downwash del estabilizador horizontal  $\frac{\partial \epsilon_t}{\partial \alpha}$  tomará su valor de la Ec. (3.19) [1].

$$\frac{\partial \epsilon_t}{\partial \alpha} = 4.44 \left[ K_A K_\lambda K_H (\cos \Lambda_{c/4})^{\frac{1}{2}} \right]^{1.19} \quad (3.19)$$

Siendo,

$$K_A = \frac{1}{A} - \frac{1}{1+A^{1.7}} \quad (3.20)$$

$$K_\lambda = \frac{10-3\lambda}{7} \quad (3.21)$$

$$K_H = \frac{1 - \frac{h_H}{b}}{\sqrt[3]{\frac{2l_h}{b}}} \quad (3.22)$$

donde  $l_h$  es la distancia, medida paralela a la cuerda en la raíz del ala, entre el centro aerodinámico del ala y el centro aerodinámico del estabilizador horizontal.  $h_H$  es la altura del

centro aerodinámico del estabilizador horizontal medida en el plano de simetría normal a la cuerda en la raíz del ala, positiva cuando el estabilizador se encuentra sobre la cuerda en la raíz del ala.  $A$  es el alargamiento,  $b$  la envergadura y  $\lambda$  el 'taper ratio'.

### 3.3.1.2 Variación de $\Delta C_z$ con el ángulo de ataque $\alpha$

Derivada que expresa la variación de la fuerza en dirección del eje 'Z' (positivo hacia abajo) con el ángulo de ataque. Tiene la expresión siguiente

$$C_{z\alpha} = -C_{L\alpha} \quad (3.23)$$

### 3.3.1.3 Variación de $\Delta C_m$ con el ángulo de ataque $\alpha$

Derivada que expresa la variación del momento en el eje 'Y' con el ángulo de ataque. El cálculo de esta derivada se realiza acorde a la siguiente expresión

$$C_{m\alpha} = -C_{L\alpha} (\bar{x}_{CG} - \bar{x}_{NA}) \quad (3.24)$$

la cual es muy simple e ignora los efectos producidos por el fuselaje y su interacción con el ala y la forma del morro. Se sugiere un estudio más profundo de esta derivada en trabajos posteriores.  $\bar{x}_{CG}$  es la posición del centro de gravedad y  $\bar{x}_{NA}$  es la posición del punto neutro, todas ellas adimensionalizadas con la cuerda principal  $\bar{c}$ .

## 3.3.2 Derivadas con respecto a la velocidad adimensional $u$ .

A continuación se va a proceder a describir las ecuaciones que permiten el cálculo de las derivadas de estabilidad longitudinales que dependen de la velocidad adimensional  $u$ .

### 3.3.2.1 Variación de $\Delta C_x$ con la velocidad adimensional $u$

Derivada que representa la variación de fuerzas en el eje 'X' con la variación de la velocidad  $u$ . Su definición, ignorando los efectos de variación de empuje, es la siguiente

$$C_{xu} = -2C_D - C_{du} \quad (3.25)$$

El valor de  $C_D$  se calculará por su expresión  $C_D = C_{D0} + kC_L^2$  cuyos elementos deben ser introducidos por el usuario. El valor de  $k$  depende del coeficiente de Oswald que se calcula según (3.17).  $C_{du}$  se expresa de la siguiente manera [1]



$$C_{du} = M \frac{\partial C_D}{\partial M} \quad (3.26)$$

A bajas velocidades subsónicas ( $M \leq 0.5$ ) el coeficiente de resistencia es prácticamente constante  $\partial C_D / \partial M = 0$ . Para mayores velocidades este término tomará valores diferentes a cero [3]. Para la elaboración del programa se considerará nulo debido a las bajas velocidades que se tendrán en cuenta y a la falta de una expresión analítica de  $C_D$ .

### 3.3.2.2 Variación de $\Delta C_z$ con la velocidad adimensional $u$

Derivada que representa la variación de fuerzas en el eje 'Z' con la variación de la velocidad  $u$ . Su definición, ignorando los efectos de variación de empuje, es la siguiente

$$C_{zu} = -2C_L - C_{Lu} \quad (3.27)$$

Donde  $C_L$  se obtiene de la Ec. (3.7).  $C_{Lu}$  tiene una expresión similar a  $C_{du}$  pero en este caso se dispone de una expresión que permite su cálculo en función de  $M$  y  $C_L$  [3].

$$C_{Lu} = M \frac{\partial C_L}{\partial M} = \frac{M^2}{(1-M^2)} C_L \quad (3.28)$$

### 3.3.2.3 Variación de $\Delta C_m$ con la velocidad adimensional $u$

Derivada que representa la variación de momentos en el eje 'Y' con la variación de la velocidad  $u$ . Su expresión es idéntica que a las dos derivadas anteriores, Ec. (3.29), y por las mismas razones que para  $C_{du}$  se considerará de valor nulo.

$$C_{mu} = M \alpha \frac{\partial C_{m\alpha}}{\partial M} \approx 0 \quad (3.29)$$

### 3.3.3 Derivadas con respecto a la velocidad angular $q$

A continuación se va a proceder a describir las ecuaciones que permiten el cálculo de las derivadas de estabilidad longitudinales que dependen de la velocidad angular  $q$ .

### 3.3.3.1 Variación de $\Delta C_x$ con la velocidad angular $q$

Derivada que representa la variación de fuerzas en el eje 'X' con la variación de la velocidad angular  $q$ . Su expresión es la siguiente

$$C_{xq} = -C_{Dq} \quad (3.30)$$

cuyo valor es pequeño y puede ser ignorado [1].

$$C_{xq} \approx 0 \quad (3.31)$$

### 3.3.3.2 Variación de $\Delta C_z$ con la velocidad angular $q$

Derivada que representa la variación de fuerzas en el eje 'Z' con la variación de la velocidad angular de cabeceo  $q$ . Su expresión es la siguiente

$$C_{zq} = -C_{Lq} \quad (3.32)$$

En la variación del coeficiente de sustentación con la velocidad angular de cabeceo intervienen el sustentador horizontal  $C_{Lq,t}$ , el cannard  $C_{Lq,c}$  y la combinación ala-fuselaje  $C_{Lq,WB}$ .

$$C_{Lq} = C_{Lq,t} + C_{Lq,c} + C_{Lq,WB} \quad (3.33)$$

Las expresiones para el horizontal y el cannard son simples

$$C_{Lq,t} = 2C_{L\alpha,t} \left( \frac{S_t}{S} \right) \eta_t \left( \frac{l_t}{c} \right) \quad (3.34)$$

$$C_{Lq,c} = 2C_{L\alpha,c} \left( \frac{S_c}{S} \right) \eta_c \left( \frac{l_c}{c} \right) \quad (3.35)$$

donde  $l_t$  y  $l_c$  son la distancia desde el centro de gravedad hasta el centro aerodinámico del estabilizador horizontal y hasta el centro aerodinámico del cannard respectivamente. Se definen de la siguiente manera

$$l_c = x_{ac_c} - x_{cg} \quad (3.36)$$

$$l_t = x_{ac_t} - x_{cg} \quad (3.37)$$

La expresión de la combinación ala-fuselaje es más compleja [1]

$$C_{Lq,WB} = \left[ K_{W(B)} + K_{B(W)} \right] \left( \frac{S_e c_e}{S c} \right) C_{Lq,e} + C_{Lq,B} \left( \frac{S_{B,\max} l_f}{S c} \right) \quad (3.38)$$

donde  $c_e$  y  $c$  son la cuerda principal del ala expuesta y del ala total,  $C_{Lq,e}$  y  $C_{Lq,B}$  son la contribución del ala expuesta y del fuselaje aislado respectivamente.  $K_{W(B)}$  y  $K_{B(W)}$  se calcularon anteriormente con Ec.(3.12) y (3.13). El valor dado por (3.38) es por radianes.

Para el caso subsónico, que es el que abarca este documento, la contribución del ala expuesta,  $C_{Lq,e}$ , se halla de la siguiente manera [1]

$$C_{Lq,e} = \left( \frac{1}{2} + 2\xi \right) C_{L\alpha,e} \quad (3.39)$$

$$\xi = \frac{\bar{x}}{c} \quad (3.40)$$

$$\bar{x} = (x_{ac})_e - x_{cg,le} \quad (3.41)$$

$(x_{ac})_e$  es la distancia del centro aerodinámico del ala expuesta desde el borde de ataque en el encastre, y  $x_{cg,le}$  es la distancia entre el centro de gravedad y el borde de ataque del ala en el encastre. Estas distancias están detalladas en la Figura 3.7.

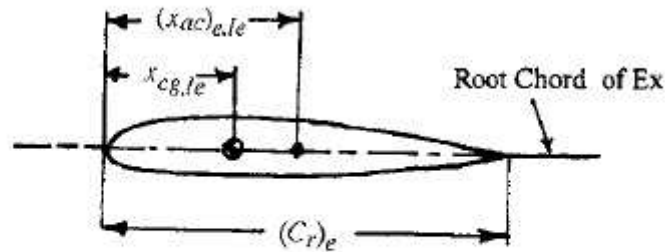


Figura 3.7 Detalle del encastre del ala [1]

La contribución del fuselaje,  $C_{Lq,B}$ , en vuelo subsónico viene dada por las siguientes expresiones [1]

$$C_{Lq,B} = 2C'_{Lq,B} \left( 1 - \frac{x_m}{l_f} \right) \quad (3.42)$$

$$C'_{Lq,B} = C_{L\alpha,B} \left( \frac{V_B^{2/3}}{S_{B,\max}} \right) \quad (3.43)$$

$$C_{L\alpha,B} = 2(k_2 - k_1) \left( \frac{S_{B,\max}}{V_B^{2/3}} \right) \quad (3.44)$$

Donde  $x_m = x_{cg}$  y  $V_B$  es el volumen del fuselaje. El coeficiente de masa aparente,  $(k_2 - k_1)$ , ya fue obtenido de Figura 3.4.

### 3.3.3.3 Variación de $\Delta C_m$ con la velocidad angular $q$

Derivada que representa la variación del momento de cabeceo debido a una variación en la velocidad angular de cabeceo. Es conocida como '*the damping-in-pitch derivative*' (*derivada de amortiguamiento en cabeceo*). Como en la derivada anterior

$$C_{mq} = C_{mq,t} + C_{mq,c} + C_{mq,WB} \quad (3.45)$$

Las expresiones para el horizontal y el cannard son simples [1]

$$C_{mq,t} = -2C_{L\alpha,t} \left( \frac{S_t}{S} \right) \eta_t \left( \frac{l_t}{c} \right)^2 \quad (3.46)$$

$$C_{mq,c} = -2C_{L\alpha,c} \left( \frac{S_c}{S} \right) \eta_c \left( \frac{l_c}{c} \right)^2 \quad (3.47)$$

La contribución ala-fuselaje resulta ser más complicada como se puede ver la siguiente expresión [1]

$$C_{mq,WB} = \left[ K_{W(B)} + K_{B(W)} \right] \frac{S_e}{S} \left( \frac{c_e}{c} \right)^2 C_{mq,e} + C_{mq,B} \frac{S_{B,\max}}{S} \left( \frac{l_f}{c} \right)^2 \quad (3.48)$$

donde todos los términos son idénticos a los de  $C_{Lq,WB}$ , Ec.(3.38), salvo los de  $C_{mq,e}$  y  $C_{mq,B}$ . Que son la contribución del ala expuesta y del cuerpo respectivamente. Para velocidades subsónicas  $C_{mq,e}$  es

$$C_{mq,e} = \left[ \frac{\frac{c_1}{c_3} + c_2}{\frac{c_1}{c_4} + 3} \right] C_{mq,e,M=0.2} \quad (3.49)$$

donde

$$C_{mq,e,M=0.2} = -0.7C_{L\alpha} \cos \Lambda_{c/4} \left[ \frac{A(0.5\xi + 2\xi^2)}{c_5} + \frac{c_1}{24c_4} + \frac{1}{8} \right] \quad (3.50)$$

$$c_1 = A^3 \tan^2 \Lambda_{c/4} \quad (3.51)$$

$$c_2 = \frac{3}{B} \quad (3.52)$$

$$c_3 = AB + 6 \cos \Lambda_{c/4} \quad (3.53)$$

$$c_4 = A + 6 \cos \Lambda_{c/4} \quad (3.54)$$

$$c_5 = A + 2 \cos \Lambda_{c/4} \quad (3.55)$$

$$B = \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \Lambda_{c/4}} \quad (3.56)$$

La contribución del fuselaje viene dada por la siguiente expresión

$$C_{mq,B} = 2C'_{mq,B} \left[ \frac{(1 - x_{m1})^2 V_{B1} (x_{c1} - x_{m1})}{1 - x_{m1} - V_{B1}} \right] \quad (3.57)$$

$$x_{m1} = \frac{x_m}{l_f} \quad x_{c1} = \frac{x_c}{l_f} \quad V_{B1} = \frac{V_B}{S_{B,\max} l_f} \quad (3.58)$$

Donde los parámetros se definen como en el apartado anterior salvo  $x_c$  que se halla a través de una integración en el fuselaje [1].

$$x_c = \frac{1}{V_B} \int_0^{l_f} S_B(x) x dx \quad (3.59)$$

Donde  $S_B(x)$  es la superficie transversal del fuselaje en función de la variable longitudinal  $x$ . Para velocidades subsónicas el valor que nos falta para completar la Ec.(3.57) está definido de la siguiente manera [1]

$$C'_{mq,B} = C_{mq,B} \left( \frac{V_B}{S_{B,\max} l_f} \right) \quad (3.60)$$

$$C_{mq,B} = \frac{2(k_2 - k_1)}{V_B} \int_0^{x_1} \frac{dS_B(x)}{dx} (x_m - x) dx \quad (3.61)$$

donde  $x_1$  es el punto donde se el fuselaje alcanza la superficie transversal máxima, es decir cuando  $S_B = S_{B,\max}$ .

En las expresiones (3.59) y (3.61) aparecen dos integrales. Éstas se realizan sobre la función que proporciona la superficie transversal del avión. Al no disponer de esta expresión,  $S_B(x)$ , el usuario deberá calcular e introducir los valores de ambas integrales.

### 3.3.4 Derivadas con respecto a la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$

A continuación se va a proceder a describir las ecuaciones que permiten el cálculo de las derivadas de estabilidad longitudinales que dependen del cambio del ángulo de ataque con el tiempo  $\dot{\alpha}$ .

#### 3.3.4.1 Variación de $\Delta C_x$ con la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$

Esta derivada es una medida del cambio de fuerzas en el eje 'X' al variar el ángulo de ataque con el tiempo. Se considerará pequeña y se despreciará [1].

$$C_{x\dot{\alpha}} \approx 0 \quad (3.62)$$

#### 3.3.4.2 Variación de $\Delta C_z$ con la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$

Por definición  $C_{z\dot{\alpha}} = -C_{L\dot{\alpha}}$ . Por lo que esta derivada es una medida del efecto que tiene la variación del flujo de aire debido al cambio del ángulo de ataque con el tiempo sobre el coeficiente de sustentación. Los elementos que afectan a esta derivada son el estabilizador horizontal  $C_{l\dot{\alpha},t}$ , el canard  $C_{l\dot{\alpha},c}$  y el conjunto ala-fuselaje  $C_{l\dot{\alpha},WB}$ .

$$C_{l\dot{\alpha}} = C_{l\dot{\alpha},t} + C_{l\dot{\alpha},c} + C_{l\dot{\alpha},WB} \quad (3.63)$$

Donde el efecto del sustentador horizontal y del canard se expresan de la siguiente manera

$$C_{l\dot{\alpha},t} = 2C_{L\alpha,t}\eta_t \left( \frac{S_t}{S} \right) \left( \frac{l_t}{c} \right) \left( \frac{\partial \epsilon_t}{\partial \alpha} \right) \quad (3.64)$$

$$C_{l\dot{\alpha},c} = -2C_{L\alpha,c}\eta_c \left( \frac{S_c}{S} \right) \left( \frac{l_c}{c} \right) \left( \frac{\partial \epsilon_c}{\partial \alpha} \right) \quad (3.65)$$

La contribución de la combinación ala-fuselaje viene definida por la siguiente expresión [1]

$$C_{l\dot{\alpha},WB} = \left[ K_{W(B)} + K_{B(W)} \right] \left( \frac{S_e c_e}{S c} \right) C_{l\dot{\alpha},e} + C_{l\dot{\alpha},B} \frac{S_{B,\max} l_f}{S c} \quad (3.66)$$

Donde  $C_{l\dot{\alpha},e}$  es la contribución del ala expuesta y  $C_{l\dot{\alpha},B}$  es la contribución del fuselaje. De manera idéntica a como pasaba con  $C_{lq,WB}$  en Ec.(3.38). Para velocidades subsónicas  $C_{l\dot{\alpha},e}$  se define de la siguiente manera [1]

$$C_{l\dot{\alpha},e} = 1.5 \left( \frac{x_{ac}}{c_r} \right)_e C_{l\alpha,e} + 3C_L(g) \quad (3.67)$$

La pendiente de la curva de sustentación con el ángulo de ataque del ala expuesta,  $C_{l\alpha,e}$ , ya se calculó previamente mediante la Ec.(3.14) introduciendo los valores del ala expuesta. El valor de  $C_L(g)$  se obtiene mediante

$$C_L(g) = \left( \frac{-\pi A_e}{2\beta^2} \right) (0.0013\tau^4 - 0.0122\tau^3 + 0.0317\tau^2 + 0.0186\tau - 0.0004) \quad (3.68)$$

donde  $\tau = \beta A_e$ . Siendo  $A_e$  el alargamiento del ala expuesta y  $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ .

La contribución del fuselaje  $C_{l\dot{\alpha},B}$  se calcula así [1]

$$C_{L\dot{\alpha},B} = 2C'_{L\alpha,B} \left( \frac{V_B}{S_{B,\max} l_f} \right) \quad (3.69)$$

$$C'_{L\alpha,B} = C_{L\alpha,B} \left( \frac{V_B^{2/3}}{S_{B,\max}} \right) \quad (3.70)$$

$$C_{L\alpha,B} = 2(k_2 - k_1) \left( \frac{S_{B,\max}}{V_B^{2/3}} \right) \quad (3.71)$$

donde  $S_{B,\max}$  es el máxima área transversal del fuselaje,  $V_B$  es el área del fuselaje y  $l_f$  la longitud del mismo.

### 3.3.4.3 Variación de $\Delta C_m$ con la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$

Esta derivada es una medida del efecto que tiene la variación del flujo de aire debido al cambio del ángulo de ataque con el tiempo sobre el momento de cabeceo. Igual que en la derivada anterior está afectada por el sustentador horizontal  $C_{m\dot{\alpha},t}$ , el cannard  $C_{m\dot{\alpha},c}$  y la combinación ala-fuselaje  $C_{m\dot{\alpha},WB}$ .

$$C_{m\dot{\alpha}} = C_{m\dot{\alpha},t} + C_{m\dot{\alpha},c} + C_{m\dot{\alpha},WB} \quad (3.72)$$

Calculándose los dos primeros elementos de la siguiente manera [1]

$$C_{m\dot{\alpha},t} = -2C_{L\alpha,t}\eta_t \left(\frac{S_t}{S}\right) \left(\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \alpha}\right) \left(\frac{l_t}{c}\right)^2 \quad (3.73)$$

$$C_{m\dot{\alpha},c} = -2C_{L\alpha,c}\eta_c \left(\frac{S_c}{S}\right) \left(\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \alpha}\right) \left(\frac{l_c}{c}\right)^2 \quad (3.74)$$

El efecto de la combinación ala-fuselaje responde a la siguiente expresión, análoga a la utilizada en el cálculo de  $C_{l\dot{\alpha},WB}$  en Ec.(3.48).

$$C_{m\dot{\alpha},WB} = \left[ K_{W(B)} + K_{B(W)} \right] \left( \frac{S_e c_e^2}{S c^2} \right) C_{m\dot{\alpha},e} + C_{m\dot{\alpha},B} \frac{S_{B,\max} l_f^2}{S c^2} \quad (3.75)$$

Donde  $C_{m\dot{\alpha},e}$  es la contribución del ala expuesta y  $C_{m\dot{\alpha},B}$  es la del fuselaje. Siendo la primera

$$C_{m\dot{\alpha},e} = C''_{m\dot{\alpha},e} + \bar{x}_{cg} C_{l\dot{\alpha},e} \quad (3.76)$$

Para velocidades subsónicas el primer término de la Ec.(3.76) es [1]

$$C''_{m\dot{\alpha},e} = -\left(\frac{81}{32}\right) \left(\frac{x_{ac}}{c_r}\right)^2 C_{l\alpha,e} + \frac{9}{2} C_{m\alpha}(g) \quad (3.77)$$

donde  $C_m(g)$  se obtiene de la siguiente expresión

$$C_m(g) = \left(\frac{-\pi A_e}{2\beta^2}\right) (0.0008\tau^4 - 0.0075\tau^3 + 0.0185\tau^2 + 0.0128\tau - 0.0003) \quad (3.78)$$

La expresión para la contribución del fuselaje  $C_{m\dot{\alpha},B}$  es la siguiente

$$C_{m\dot{\alpha},B} = 2C'_{m\alpha,B} \left[ \frac{x_{c1} - x_{m1}}{1 - x_{m1} - V_{B1}} \right] \left( \frac{V_B}{S_{B,\max} l_f} \right) \quad (3.79)$$

donde  $x_{c1}$ ,  $x_{m1}$  y  $V_{B1}$  están definidas en Ec.(3.58).  $C'_{m\alpha,B}$  esta determinado en Ec.(3.60) y (3.61).

### 3.3.5 Derivadas de control longitudinales

En este punto se mostrarán los métodos necesarios para calcular las derivadas de control longitudinales. Éstas dependerán de las superficies de control horizontales.



### 3.3.5.1 Variación de la sustentación con el elevador horizontal $C_{L\delta_e}$

Ésta indica la variación de sustentación con el movimiento del elevador. Para hallar esta derivada de control existen diversos métodos explicados en [2]. Aquí se muestra uno de ellos

$$C_{L\delta_e} = \left( \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \right) \left( \frac{C_{L\alpha_t}}{C_{L\alpha_i}} \right) \left( \frac{(\alpha_\delta)_{C_L}}{(\alpha_\delta)_{C_i}} \right) K_b \quad (3.80)$$

Donde  $\frac{\partial C_L}{\partial \delta_e}$  es el incremento de sustentación teórico debido al flap del perfil 2D obtenido de Figura 3.8,  $C_{L\alpha_t}$  es la pendiente de sustentación del estabilizador horizontal y  $C_{L\alpha_i}$  es la pendiente de sustentación del perfil del estabilizador horizontal, en 2D. El resto de parámetros son factores de corrección que dependen del tamaño del flap y de la cuerda en el caso de  $\frac{(\alpha_\delta)_{C_L}}{(\alpha_\delta)_{C_i}}$  y del tamaño del flap y de la envergadura en el caso de  $K_b$ . Su valor se extrae de las Figura 3.9 y Figura 3.10 .

Para hallar  $\frac{(\alpha_\delta)_{C_L}}{(\alpha_\delta)_{C_i}}$  es necesario introducir la relación de la cuerda del flap con la cuerda del estabilizador horizontal  $c_e / c_t$  en la gráfica superior derecha de la Figura 3.9 que proporciona un valor de  $(\alpha_\delta)_{C_i}$ . Con ese valor de  $(\alpha_\delta)_{C_i}$  y el alargamiento del sustentador horizontal  $A_f$  en la gráfica principal se obtiene el valor de  $\frac{(\alpha_\delta)_{C_L}}{(\alpha_\delta)_{C_i}}$ .

Para hallar  $K_b$  hay que tener en cuenta las dimensiones en planta del flap.  $K_b$  se define como la siguiente diferencia  $K_b = K_{2fin} - K_{2ini}$ . El valor de  $K_{2ini}$  se obtiene de la Figura 3.10 introduciendo el valor de  $\eta_i$ .  $\eta_i$  es la variable adimensional de la distancia de inicio del flap en el estabilizador horizontal  $\eta_i = \frac{y_i}{b/2}$ . Lo mismo ocurre con  $K_{2fin}$  pero introduciendo  $\eta_f$  que es la variable adimensional de la distancia final del flap  $\eta_f = \frac{y_f}{b/2}$ . Los valores de  $K_{2ini}$  y  $K_{2fin}$  dependerán también del 'taper ratio'  $\lambda$  como se indica en la Figura 3.10.

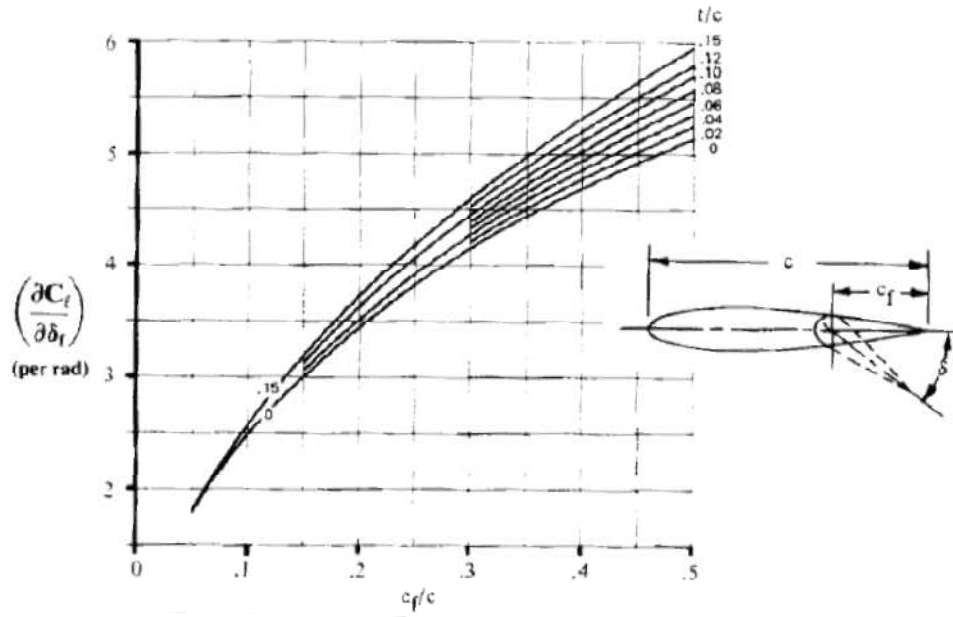


Figura 3.8 Incremento de sustentación debido al flap [2]

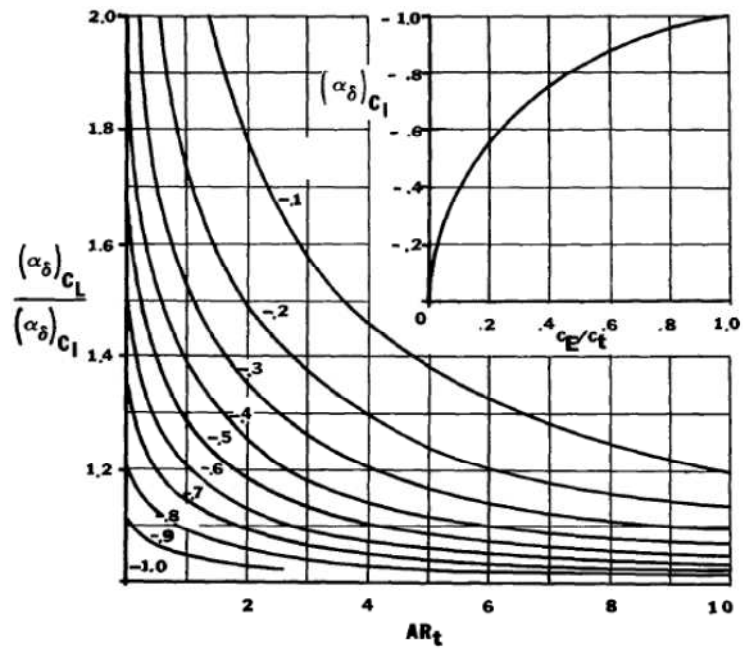


Figura 3.9 Parámetro de efectividad [2]

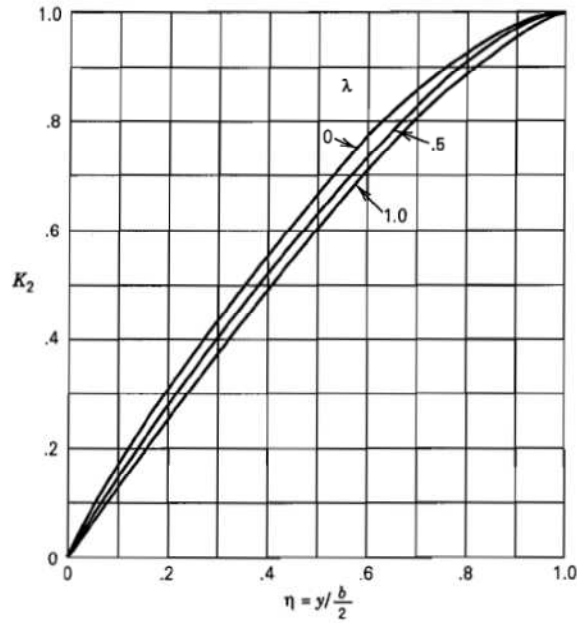


Figura 3.10 Factor de flap-span [2]

### 3.3.5.1.1 Ejemplo de obtención de $\frac{(\alpha_\delta)_{C_L}}{(\alpha_\delta)_{C_t}}$

A continuación se muestra un ejemplo de cómo se obtiene el valor de  $\frac{(\alpha_\delta)_{C_L}}{(\alpha_\delta)_{C_t}}$ . Se tiene un estabilizador horizontal con una cuerda  $c = 2m$ , una cuerda de flap  $c_f = 0.4m$  y un alargamiento  $A_t = 4$ . El valor que es necesario introducir en la Figura 3.9 es la relación  $c_f / c_t$  que es igual a 0.4. Introduciendo este valor en la gráfica se obtiene un valor de  $(\alpha_\delta)_{C_t}$  de  $-0.55$ . Teniendo en cuenta que el alargamiento es 4 extrapolando de la gráfica obtenemos un valor de  $\frac{(\alpha_\delta)_{C_L}}{(\alpha_\delta)_{C_t}} = 1.1$ .

### 3.3.5.1.2 Ejemplo de obtención de $K_b$

A continuación se muestra un ejemplo de cómo se obtiene el valor de  $K_b$ . Se tiene un estabilizador horizontal con una envergadura  $b = 7$ , con  $\lambda_t = 0.5$ , con un flap que en ambos laterales empieza en la coordenada  $y_i = 0.25$  y que termina en la coordenada  $y_f = 2.5$ . Con estos datos las variables adimensionales  $\eta_i$  y  $\eta_f$  toman los siguientes valores

$$\eta_i = \frac{y_i}{b/2} = \frac{0.25}{7/2} = 0.0714 \quad (3.81)$$

$$\eta_f = \frac{y_f}{b/2} = \frac{2.5}{7/2} = 0.7143 \quad (3.82)$$

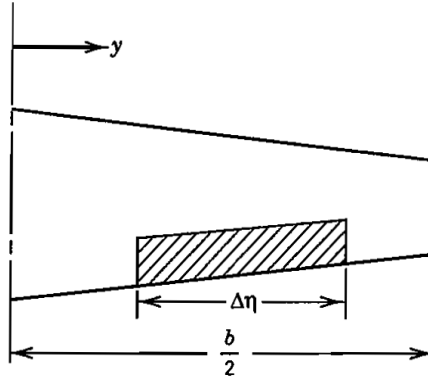


Figura 3.11 Detalle de la obtención de  $\eta_i$  y  $\eta_f$  [2]

Estos valores de  $\eta_i$  y  $\eta_f$  se introducen en la Figura 3.10 y teniendo en cuenta que  $\lambda_i = 0.5$  se obtiene que  $K_{2ini} = 0.08$  y  $K_{2fin} = 0.82$ . El valor final de  $K_b$  será

$$K_b = K_{2fin} - K_{2ini} = 0.82 - 0.08 = 0.02 \quad (3.83)$$

### 3.3.5.2 Variación de la sustentación con superficie de control de canard $C_{L\delta_c}$

Se calcula utilizando el mismo método que para calcular  $C_{L\delta_e}$  en el apartado anterior.

### 3.3.5.3 Variación de la momento de cabeceo con el elevador horizontal $C_{m\delta_e}$

Es la variación del momento de guiñada producido por el movimiento del alerón. Es función de  $C_{L\delta_e}$  y se expresa así.

$$C_{M\delta_e} = -\frac{l_t}{C} C_{L\delta_e} \quad (3.84)$$

Estando  $l_t$  definido como

$$l_t = x_{ac_t} - x_{cg} \quad (3.85)$$

Siendo  $x_{ac_t}$  el centro aerodinámico del estabilizador horizontal.

### 3.3.5.4 Variación de la momento de cabeceo con la superficie de control del cannard $C_{m_{\delta_c}}$

Es la variación del momento de guiñada producido por el movimiento de la superficies de control del cannard. Es función de  $C_{L_{\delta_c}}$  y se expresa así.

$$C_{M_{\delta_c}} = -\frac{l_c}{\bar{c}} C_{L_{\delta_c}} \quad (3.86)$$

Estando  $l_c$  definido como

$$l_c = x_{ac_c} - x_{cg} \quad (3.87)$$

Siendo  $x_{ac_c}$  el centro aerodinámico del estabilizador horizontal.

### 3.3.6 Derivadas propulsivas longitudinales

Las variables longitudinales, al ser perturbadas, también pueden generar cambios en las fuerzas propulsivas de la aeronave. No se han tenido en cuenta en el modelo de pequeñas perturbaciones estudiado. La única referencia al motor existía en el estudio longitudinal al variar la palanca de gases. En este punto vamos a introducir la variación de los coeficientes propulsivos con las variables longitudinales. Según [3] las fuerzas y momentos longitudinales propulsivos se pueden expresar como serie de Taylor donde las únicas variables presentes son la velocidad de vuelo y el ángulo de ataque. Esto es que sólo estas variables longitudinales afectan a la propulsión dando las siguientes expresiones

$$F_{T_x} = \frac{\partial F_{T_x}}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial F_{T_x}}{\partial \alpha} \alpha \quad (3.88)$$

$$F_{T_z} = \frac{\partial F_{T_z}}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial F_{T_z}}{\partial \alpha} \alpha \quad (3.89)$$

$$M_T = \frac{\partial M_T}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial M_T}{\partial \alpha} \alpha \quad (3.90)$$

Las fuerzas y momentos propulsivos se adimensionalizan de la siguiente manera

$$C_{T_x} = \frac{F_{T_x}}{\frac{1}{2}\rho u^2 S} \quad (3.91)$$

$$C_{T_z} = \frac{F_{T_z}}{\frac{1}{2}\rho u^2 S} \quad (3.92)$$

$$C_{m_T} = \frac{M_T}{\frac{1}{2}\rho u^2 S \bar{c}} \quad (3.93)$$

A continuación se van a desarrollar las Ec.(3.88)-(3.90) para encontrar la expresión final correspondiente.

### 3.3.6.1 Variación de la propulsión en el eje 'X' con la velocidad de vuelo

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.88) con la velocidad adimensional  $\frac{u}{U_1}$

$$\frac{\partial F_{T_x}}{\partial(\frac{u}{U_1})} = \frac{\partial C_{T_x}}{\partial(\frac{u}{U_1})} \frac{1}{2}\rho u^2 S + C_{T_x} S \frac{\partial(\frac{1}{2}\rho u^2)}{\partial(\frac{u}{U_1})} \quad (3.94)$$

Evaluando la expresión en el punto de equilibrio y renombrado la primera derivada como  $C_{T_{xu}}$  queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial F_{T_x}}{\partial(\frac{u}{U_1})} = \frac{1}{2}\rho u^2 S (C_{T_{xu}} + 2C_{T_{x1}}) \quad (3.95)$$

El coeficiente propulsivo en equilibrio  $C_{T_{x1}}$  será normalmente igual al coeficiente de resistencia en equilibrio debido a que  $T = D$  en vuelo en equilibrio. La derivada  $C_{T_{xu}}$  depende de las características del sistema de propulsión. Distinguimos tres casos:

#### 3.3.6.1.1 Aviones con propulsión jet

Para el caso de jet en el que se el empuje se modela como [2]

$$T = A_{thrust} U_1^2 + B_{thrust} U_1 + C_{thrust} \quad (3.96)$$

y  $C_{T_{zu}}$  se expresa como

$$C_{T_{zu}} = \left( \frac{U_1}{qS} \right) (2A_{thrust} U_1 + B_{thrust}) - 2C_{T_{z1}} \quad (3.97)$$

### 3.3.6.1.2 Hélices de paso variable

Para el caso de hélices de paso variables  $C_{T_{zu}}$  toma el valor

$$C_{T_{zu}} = -3C_{T_{z1}} \quad (3.98)$$

### 3.3.6.1.3 Hélices de paso fijo

Para el caso de hélices de paso fijo en el empuje se modela como [2]

$$P = A_{power} U_1^2 + B_{power} U_1 + C_{power} \quad (3.99)$$

y  $C_{T_{zu}}$  se expresa como

$$C_{T_{zu}} = \left( \frac{1}{qS} \right) (2A_{power} U_1 + B_{power}) - 2C_{T_{z1}} \quad (3.100)$$

### 3.3.6.2 Variación de la propulsión en el eje 'Z' con la velocidad de vuelo

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.89) se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{\partial F_{T_z}}{\partial \left( \frac{u}{U_1} \right)} = \frac{1}{2} \rho u^2 S (C_{T_{zu}} + 2C_{T_{z1}}) \quad (3.101)$$

La derivada  $C_{T_{zu}}$  y el coeficiente  $C_{T_{z1}}$  son despreciables para la mayoría de configuraciones convencionales. Por lo que se asumirá que:

$$\frac{\partial F_{T_z}}{\partial \left( \frac{u}{U_1} \right)} = 0 \quad (3.102)$$

### 3.3.6.3 Variación del momento producido en el eje 'Y' por la propulsión con la velocidad de vuelo

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.90) se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{\partial M_T}{\partial\left(\frac{u}{U_1}\right)} = \frac{1}{2} \rho u^2 S \bar{c} (C_{m_{T_u}} + 2C_{m_{T_1}}) \quad (3.103)$$

Para casos convencionales la derivada  $C_{m_{T_u}}$  se obtiene a partir de la derivada  $C_{T_{xu}}$ . Esta se multiplica por la distancia de la línea de empuje al centro de gravedad,  $d_T$ , adimensionalizada con la cuerda,  $\bar{c}$ .

$$C_{m_{T_u}} = -C_{T_{xu}} \frac{d_T}{\bar{c}} \quad (3.104)$$

Donde  $d_T$  está definida en la Figura 3.12 y es positiva si la línea de empuje está encima del centro de gravedad.

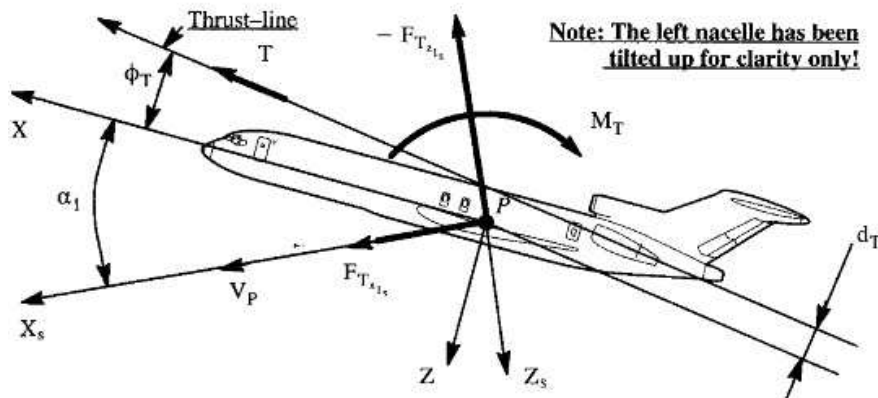


Figura 3.12 Ejemplo de la distancia  $d_T$  entre la línea de empuje y el C.G.

El valor del coeficiente de momentos en estado de equilibrio producido por el motor  $C_{m_{T_1}}$  se halla imponiendo que la suma de coeficiente de momentos sea cero produciéndose así el equilibrio.

$$\Sigma C_m = C_{m_{T_1}} + C_{m_1} = 0 \quad (3.105)$$

Por lo que  $C_{m_{T_1}} = -C_{m_1}$ .



### 3.3.6.4 Variación de la propulsión en el eje 'X' con el ángulo de ataque

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.88) con el ángulo de ataque  $\alpha$

$$\frac{\partial F_{T_x}}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \rho u^2 S C_{T_{x\alpha}} \quad (3.106)$$

Para un rango normal de ángulos de ataque y para la mayoría de aviones la derivada  $C_{T_{x\alpha}}$  es despreciable [3].

$$C_{T_{x\alpha}} \approx 0 \quad (3.107)$$

### 3.3.6.5 Variación de la propulsión en el eje 'Z' con el ángulo de ataque

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.89) con el ángulo de ataque se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{\partial F_{T_z}}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \rho u^2 S C_{T_{z\alpha}} \quad (3.108)$$

La derivada  $C_{T_{z\alpha}}$  es despreciable [3]. Por lo que se asumirá que:

$$C_{T_{z\alpha}} \approx 0 \quad (3.109)$$

### 3.3.6.6 Variación del momento producido en el eje 'Y' por la propulsión con el ángulo de ataque

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.90) se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{\partial M_T}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \rho u^2 S \bar{c} C_{m_{T\alpha}} \quad (3.110)$$

Aunque el valor de la derivada  $C_{m_{T\alpha}}$  varía en función del tipo de propulsión sus aproximaciones son muy complejas y puede aproximarse su valor a cero [2].

$$C_{m_{T\alpha}} \approx 0 \quad (3.111)$$

### 3.4 Estabilidad Lateral-Direccional

Los coeficientes de fuerzas y momentos lateral-direccionales,  $\Delta C_y$ ,  $\Delta C_l$  y  $\Delta C_n$ , se descomponen en un desarrollo de Taylor. Cada miembro de ese desarrollo es una derivada de estabilidad o una derivada de control que dependen de las variables  $\beta$ ,  $p$  y  $r$ .

#### 3.4.1 Derivadas con respecto del ángulo $\beta$

A continuación se va a proceder a describir las ecuaciones que permiten el cálculo de las derivadas de estabilidad laterales que dependen del ángulo de barrido  $\beta$ .

##### 3.4.1.1 Variación de $\Delta C_y$ con el ángulo de barrido $\beta$

Esta derivada representa la variación que se produce en la fuerza lateral debido al cambio en el ángulo  $\beta$ . Se descompone en tres efectos, el producido por el ala,  $C_{y\beta,w}$ , por el fuselaje,  $C_{y\beta,f}$ , y por el estabilizador vertical,  $C_{y\beta,v}$ .

$$C_{y\beta} = C_{y\beta,w} + C_{y\beta,f} + C_{y\beta,v} \quad (3.112)$$

El primero de ellos puede aproximarse por [4]

$$C_{y\beta,w} = -0.00573 |\Gamma_w| \quad (3.113)$$

La contribución del fuselaje viene dada por [4]

$$C_{y\beta,f} = -2K_i(k_2 - k_1) \frac{S_o}{S} \quad (3.114)$$

donde  $S_o$  es el área de la sección en  $x_o$ , punto en el cual el flujo deja de ser potencial. Se determina en función de  $x_1$ , punto en el cual la derivada  $dS(x)/dx$  alcanza su primer mínimo, es decir, no varía. En la Figura 3.13 se ve la relación existente entre  $x_1$  y  $x_o$ . En la Figura 3.13  $l_b$  es la longitud del fuselaje.  $K_i$  se determina con Figura 3.14 siendo  $z_w$  la distancia entre la línea central del fuselaje y el punto localizado a un cuarto de la cuerda en la raíz del ala expuesta, positiva con ese punto encima de la línea central, y  $d$  la máxima altura del fuselaje en la zona intersección ala-fuselaje.

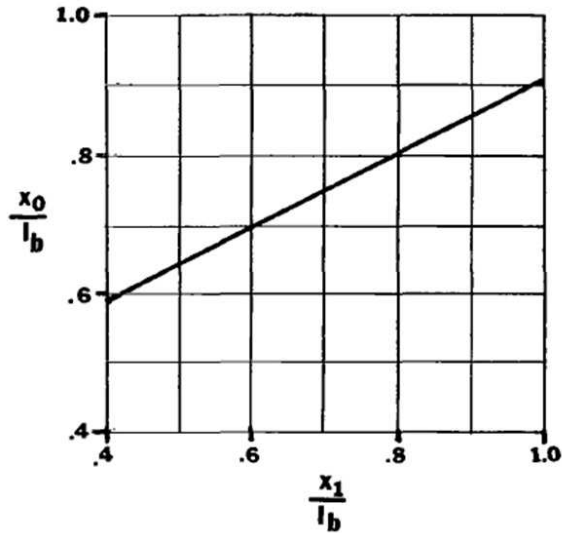


Figura 3.13 Localización del punto  $x_0$  [4]

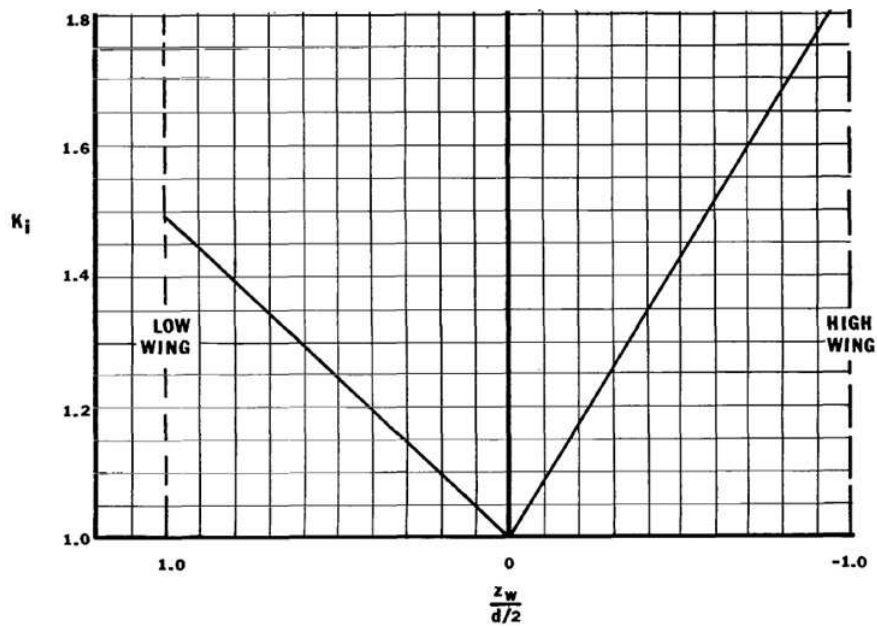


Figura 3.14 Obtención de  $K_i$  [4]

La contribución del estabilizador vertical viene dada por la siguiente expresión

$$C_{y\beta, V} = -kC_{L\alpha, v} \left( 1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \eta_v \frac{S_v}{S} \quad (3.115)$$

donde  $C_{L\alpha, v}$  es la pendiente del coeficiente de sustentación del estabilizador vertical,  $S_v$  la superficie del estabilizador vertical,  $\sigma$  el sidewash inducido sobre el estabilizador vertical y  $\eta_v$  la relación de presión dinámica en el estabilizador vertical. El parámetro  $k$  viene dado por

Figura 3.15 en función de  $b_v/2r_1$ .  $b_v$  es la envergadura del vertical medido desde la línea central del fuselaje y  $r_1$  el radio medio de la sección del fuselaje bajo el vertical.

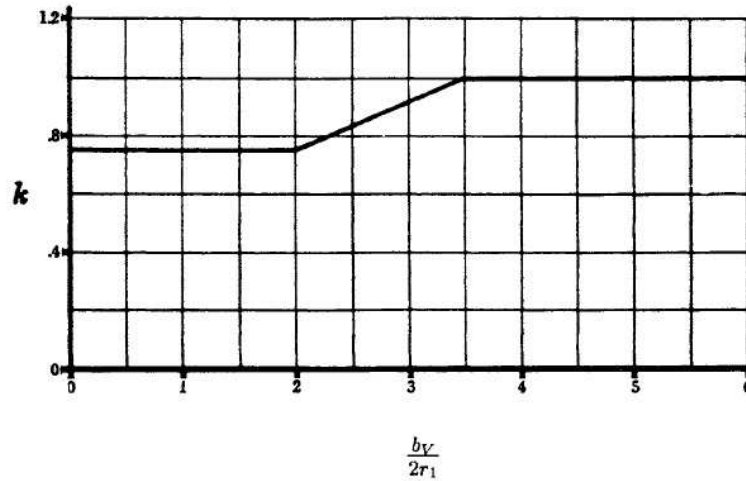


Figura 3.15 Obtención de  $k$  [1]

La siguiente expresión sirve para calcular la combinación sidewash y relación de presión dinámica.

$$\left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) \eta_v = 0.724 + \frac{3.06 S_v / S}{1 + \cos \Lambda_{c/4}} + \frac{0.4 z_w}{d_{f,max}} + 0.0009 A \quad (3.116)$$

Donde  $d_{f,max}$  es el ancho máximo del fuselaje. La pendiente del coeficiente de sustentación del estabilizador vertical deberá ser calculada e introducida en el programa. La cual se puede obtener por la Ec.(3.14) introduciendo el alargamiento efectivo del vertical. Éste viene dado por la siguiente expresión

$$A_{v,eff} = \left( \frac{A_{v(B)}}{A_v} A_v \right) \left[ 1 + K_H \left( \frac{A_{v(HB)}}{A_{v(B)}} - 1 \right) \right] \quad (3.117)$$

Los términos necesarios para el cálculo de Ec.(3.117) se sacan de Figura 3.16, Figura 3.17 y Figura 3.18. La primera proporciona el valor de  $\frac{A_{v(B)}}{A_v}$  en función de  $b_v/2r_1$  y del 'taper ratio',  $\lambda_v$ , del estabilizador vertical. La segunda, Figura 3.17, proporciona el valor de  $\frac{A_{v(HB)}}{A_{v(B)}}$

en función de los parámetros  $\frac{z_H}{b_v}$  y  $\frac{x}{c_v}$ . En este caso  $b_v$  y  $c_v$  son la envergadura y la cuerda media del estabilizador vertical respectivamente,  $z_H$  es la altura del centro aerodinámico del estabilizador vertical y  $x$  la distancia entre el centro aerodinámico del estabilizador horizontal

y el borde de ataque del estabilizador vertical, medido en el mismo plano del estabilizador horizontal.

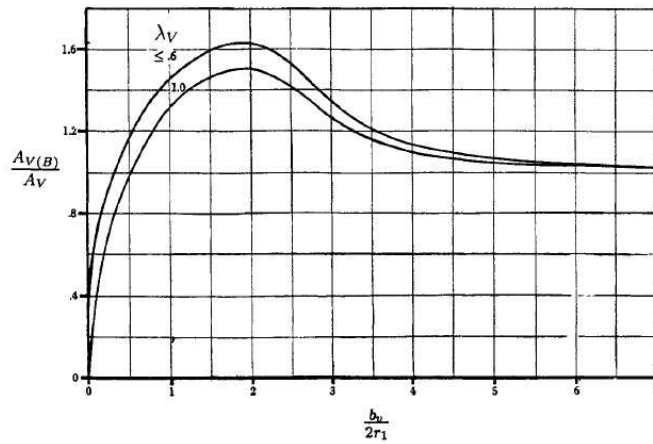


Figura 3.16 Obtención del parámetro  $\frac{A_{V(B)}}{A_V}$  [1]

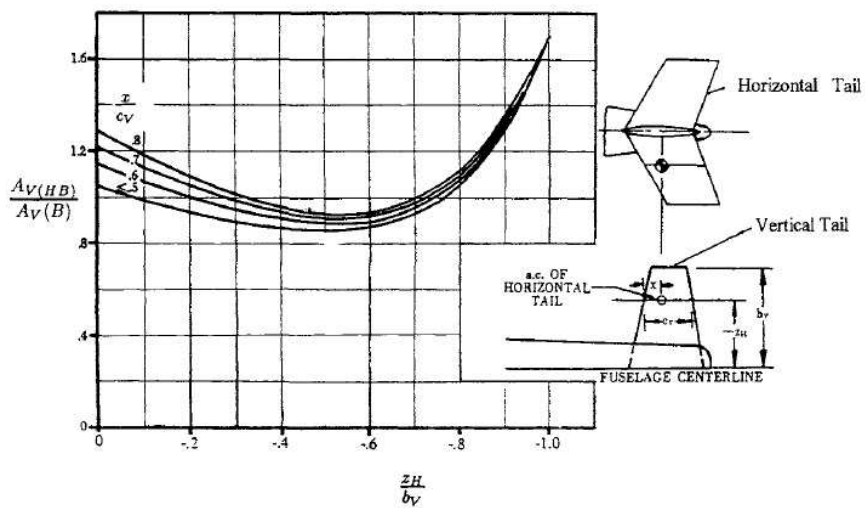


Figura 3.17 Obtención del parámetro  $\frac{A_{V(HB)}}{A_{V(B)}}$  [1]

El último parámetro se obtiene de la Figura 3.18 en función del cociente  $\frac{S_t}{S_v}$ . Siendo  $S_t$  la superficie del estabilizador horizontal y  $S_v$  la superficie del estabilizador vertical.

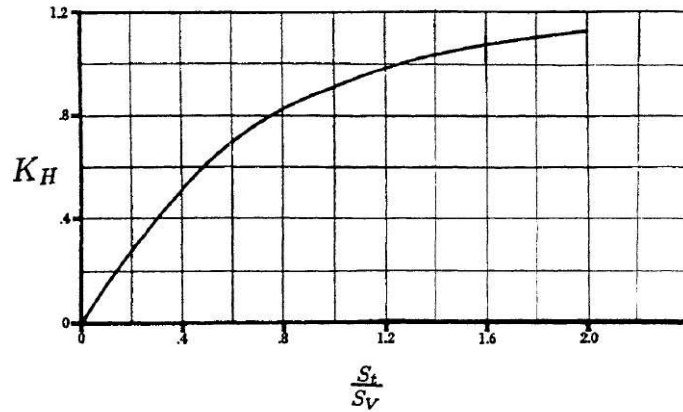


Figura 3.18 Obtención del parámetro  $K_H$  [1]

### 3.4.1.2 Variación de $\Delta C_l$ con el ángulo de barrido $\beta$

Esta derivada es una medida de la variación del momento en el eje 'Y' debido a un cambio en  $\beta$ . Afectan a esta derivada tanto el ala y el fuselaje,  $C_{l\beta, W(B)}$ , la cola,  $C_{l\beta, V}$  y  $C_{l\beta, t}$ , y el cannard,  $C_{l\beta, c}$ . Siendo el valor total la suma de todas las contribuciones.

$$C_{l\beta} = C_{l\beta, W(B)} + C_{l\beta, V} + C_{l\beta, t} + C_{l\beta, c} \quad (3.118)$$

Varios elementos del ala contribuyen al valor de esta derivada de estabilidad: ángulo de diedro, flecha y la combinación ala-fuselaje. Estos efectos se reflejan en la siguiente ecuación [1]

$$C_{l\beta, W(B)} = C_L \left[ \left( \frac{C_{l\beta}}{C_L} \right)_{\Lambda_{c/2}} K_{M\Lambda} K_f + \left( \frac{C_{l\beta}}{C_L} \right)_A \right] + \Gamma \left[ \frac{C_{l\beta}}{\Gamma} K_{M\Gamma} + \frac{\Delta C_{l\beta}}{\Gamma} \right] + \Delta C_{l\beta, z_w} \quad (3.119)$$

Nótese que el ángulo de diedro  $\Gamma$  está en grados. El parámetro  $(\Delta C_{l\beta} / \Delta C_L)_{\Lambda_{c/2}}$  se encuentra en la Figura 3.19. El resto de parámetros necesarios para la resolución de la Ec.(3.119) son  $K_{M\Lambda}$ ,  $K_f$ ,  $K_{M\Gamma}$ ,  $(C_{l\beta} / C_L)_A$  y  $C_{l\beta} / \Gamma$ . Éstos se extraen de la Figura 3.20 a la Figura 3.24 respectivamente. Las dimensiones que proporciona la Ec.(3.119) es en 1/grados. El resto de elementos necesarios para el cálculo de  $C_{l\beta, W(B)}$  están definidos en las Ec.(3.120) y Ec.(3.121)

$$\frac{\Delta C_{l\beta}}{\Gamma} = -0.0005 \sqrt{A} \left( \frac{d}{b} \right)^2 \quad (3.120)$$

$$\Delta C_{l\beta, z_w} = \frac{1.2 \sqrt{A}}{57.3} \left( \frac{z_w}{b} \right) \left( \frac{2d}{b} \right) \quad (3.121)$$

Donde  $d$  es el diámetro del fuselaje en el encastre del ala,  $b$  es la envergadura del ala,  $A$  el alargamiento y  $z_w$  es la distancia vertical entre la línea central del fuselaje el punto correspondiente a un cuarto de la cuerda en el encastre.

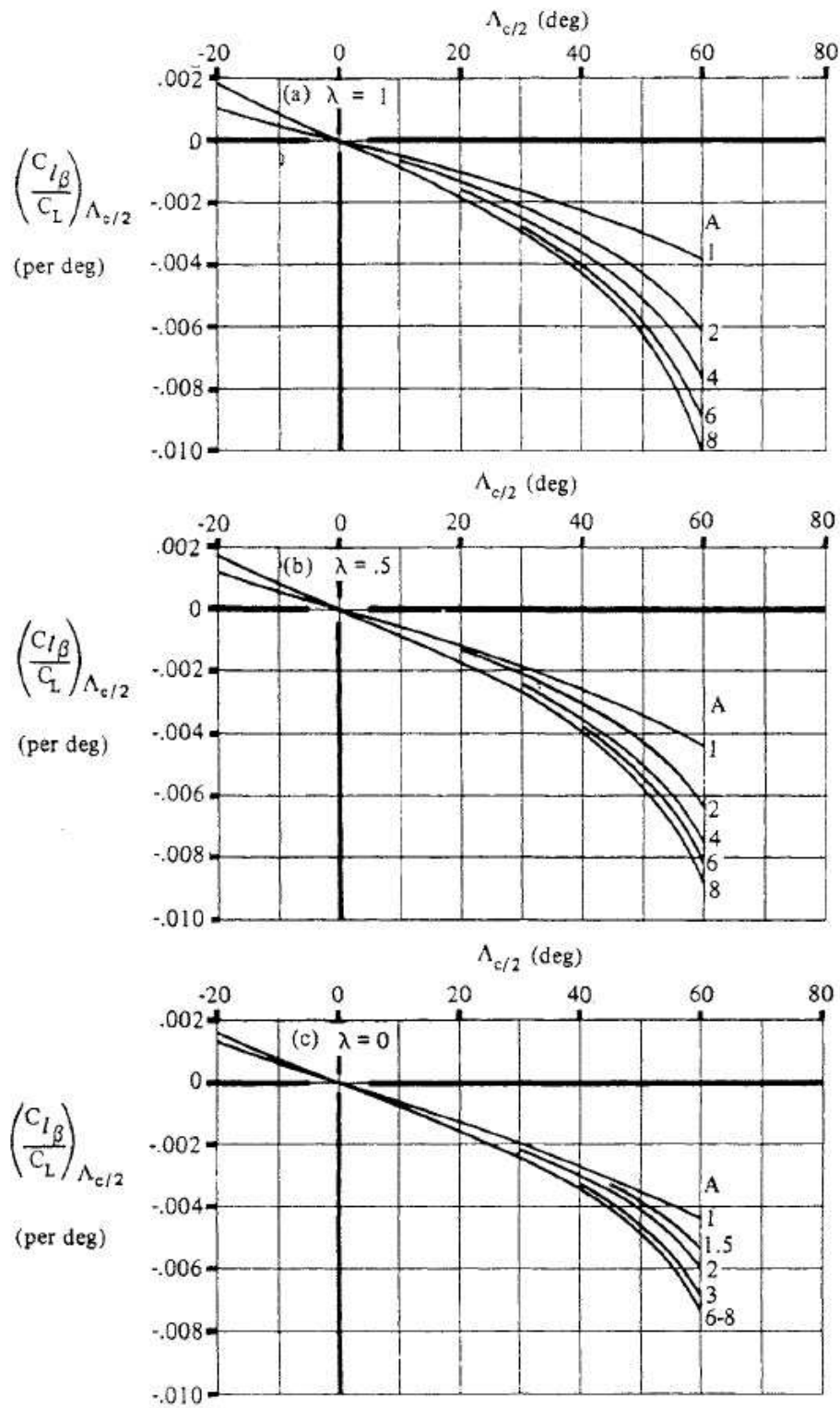


Figura 3.19 Obtención del parámetro  $(\Delta C_{l\beta} / \Delta C_L)_{\Lambda_{c/2}}$  [1]

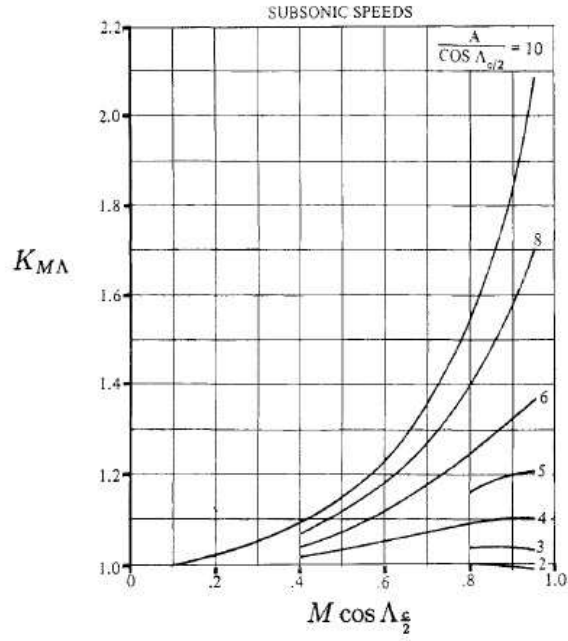


Figura 3.20 Obtención del parámetro  $K_{M\Lambda}$  [1]

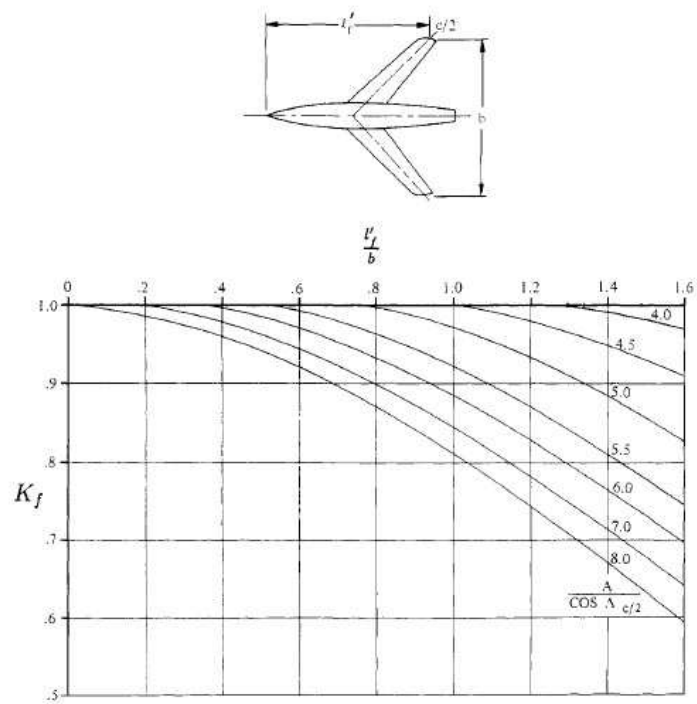


Figura 3.21 Obtención del parámetro  $K_f$  [1]



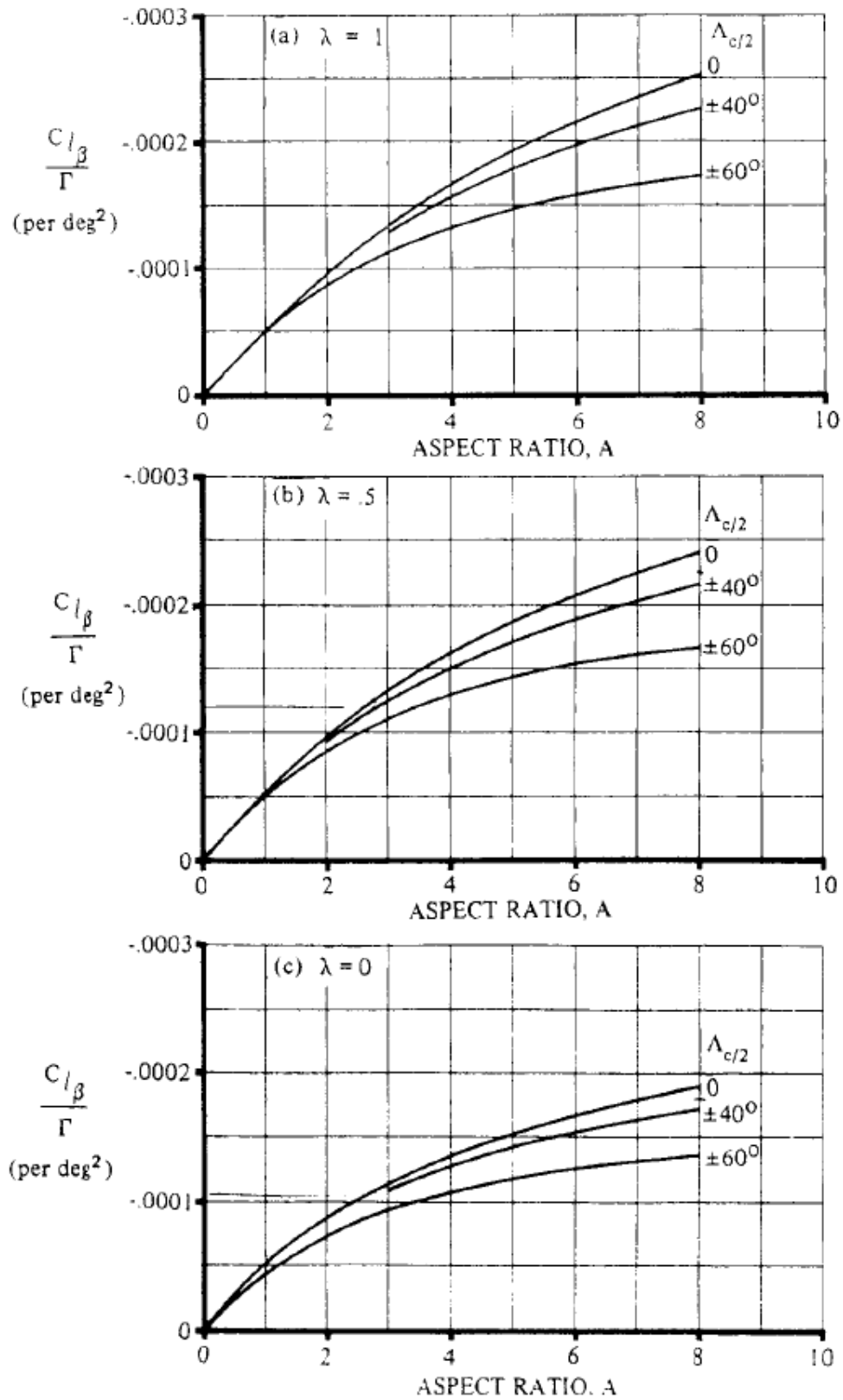


Figura 3.22 Obtención del parámetro  $C_{l\beta}/\Gamma$  [1]

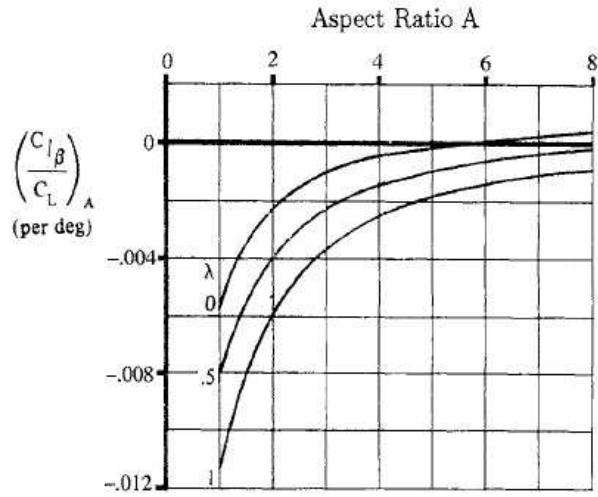


Figura 3.23 Obtención del parámetro  $(C_{l\beta} / C_{L_A})_A$  [1]

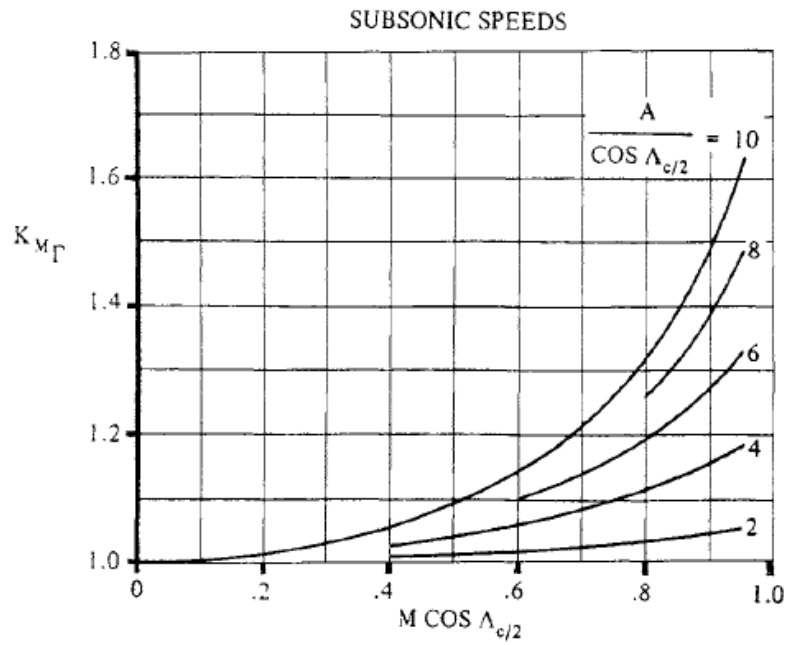


Figura 3.24 Obtención de  $K_{M\Gamma}$  [1]

La contribución del estabilizador vertical implica a la derivada de estabilidad calculada anteriormente  $C_{y\beta,V}$  y viene definida por la siguiente ecuación.

$$C_{l\beta,V} = C_{y\beta,V} \left( \frac{z_v \cos \alpha - l_v \sin \alpha}{b} \right) \quad (3.122)$$

Donde  $z_v$  es la distancia entre el centro aerodinámico del estabilizador vertical y la línea central de referencia medida perpendicular a ésta y  $l_v$  es la distancia entre el centro aerodinámico del estabilizador vertical y el centro de gravedad de la aeronave medido paralelo a la línea central de referencia. Se define como

$$l_v = x_{ac,v} - x_{cg} \quad (3.123)$$

La contribución del estabilizador horizontal y del cannard a esta derivada viene expresada por

$$C_{l\beta,t} = C_{y\beta,tf} \frac{S_t b_t}{Sb} \quad (3.124)$$

$$C_{l\beta,c} = C_{y\beta,cf} \frac{S_c b_c}{Sb} \quad (3.125)$$

siendo  $C_{y\beta,tf}$  y  $C_{y\beta,cf}$  el resultado de introducir en la expresión (3.119) de  $C_{l\beta,W(B)}$  los datos correspondientes para el estabilizador horizontal y el cannard.

### 3.4.1.3 Variación de $\Delta C_n$ con el ángulo de barrido $\beta$

Esta derivada es una medida de la variación del momento en el eje 'Z' debido a un cambio en  $\beta$ . Afectan a esta derivada el ala,  $C_{n\beta,W}$ , el fuselaje,  $C_{n\beta,B(W)}$ , y el estabilizador vertical,  $C_{n\beta,V}$ . La contribución del ala a su vez se divide en la contribución del diedro,  $C_{n\beta,\Gamma}$ , y la contribución de la flecha,  $C_{n\beta,\Lambda}$ . La contribución del diedro viene dada por la siguiente fórmula empírica [1]

$$C_{n\beta,\Gamma} = -0.075\Gamma C_L \quad (3.126)$$

La contribución de la flecha del ala la proporciona la siguiente relación empírica [1]

$$\frac{C_{n\beta,\Lambda}}{C_L^2} = \frac{1}{4\pi A} - \frac{\tan \Lambda_{c/4}}{\pi A(A + 4 \cos \Lambda_{c/4})} \left( \cos \Lambda_{c/4} - \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8 \cos \Lambda_{c/4}} + 6\bar{x}_a \frac{\sin \Lambda_{c/4}}{A} \right) \quad (3.127)$$

Donde  $\Lambda_{c/4}$  es la flecha en un cuarto del ala,  $A$  el alargamiento teórico del ala y  $\bar{x}_a$  es la distancia entre el centro de gravedad y el centro aerodinámico adimensionalizados con la cuerda principal. La flecha en un cuarto del ala,  $\Lambda_{c/4}$ , está dada por la Ec.(3.128), donde  $c_r$  y  $c_t$  son la cuerda en la raíz y en la punta del ala respectivamente.

$$\tan \Lambda_{c/4} = \tan \Lambda_{LE} - \left( \frac{c_r - c_t}{2b} \right) \quad (3.128)$$

La contribución del fuselaje viene dada por la siguiente relación empírica [1]

$$C_{n\beta, B(W)} = -K_N K_{RI} \left( \frac{S_{B,S}}{S} \right) \left( \frac{l_f}{b} \right) \quad (3.129)$$

donde  $K_N$  es un factor de interferencia ala-fuselaje empírico que se obtiene de la Figura 3.25 y  $K_{RI}$  es otro factor empírico que es función del número de Reynolds expresado en Figura 3.26. La ecuación (3.129) viene expresada en unidades de 1/grados.

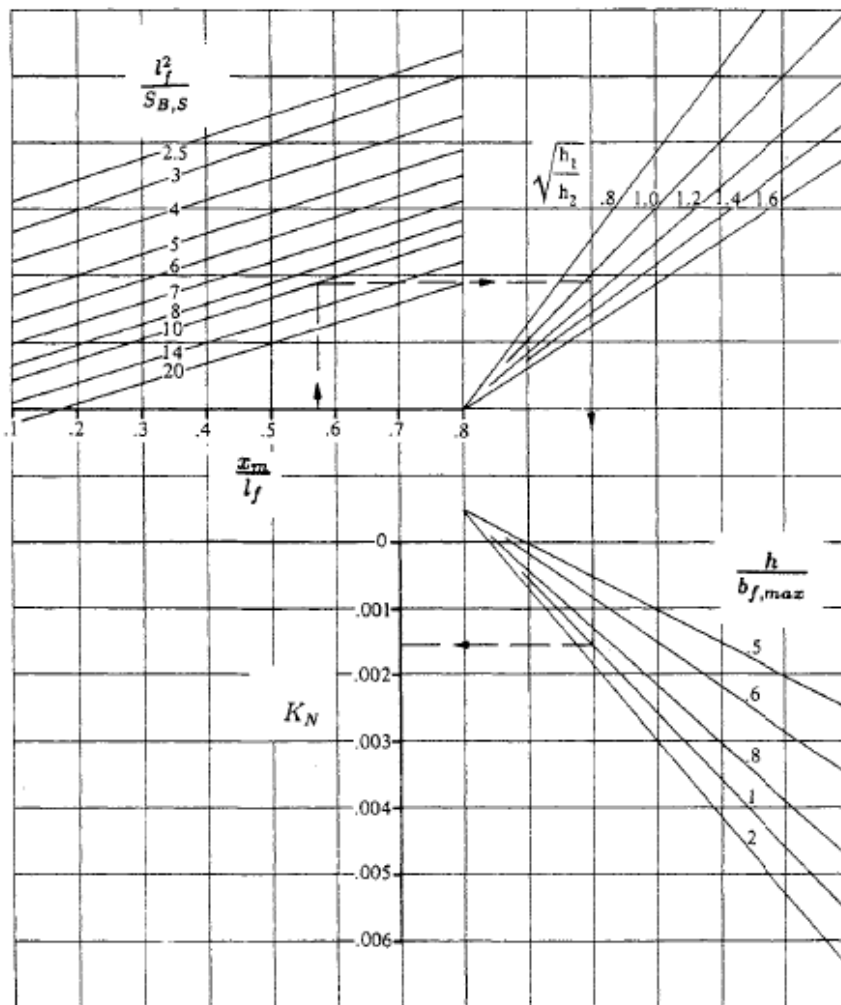
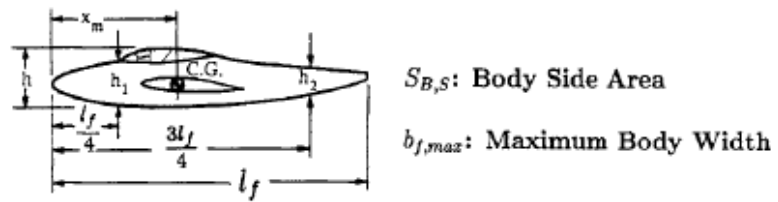


Figura 3.25 Factor empírico  $K_N$  [1]

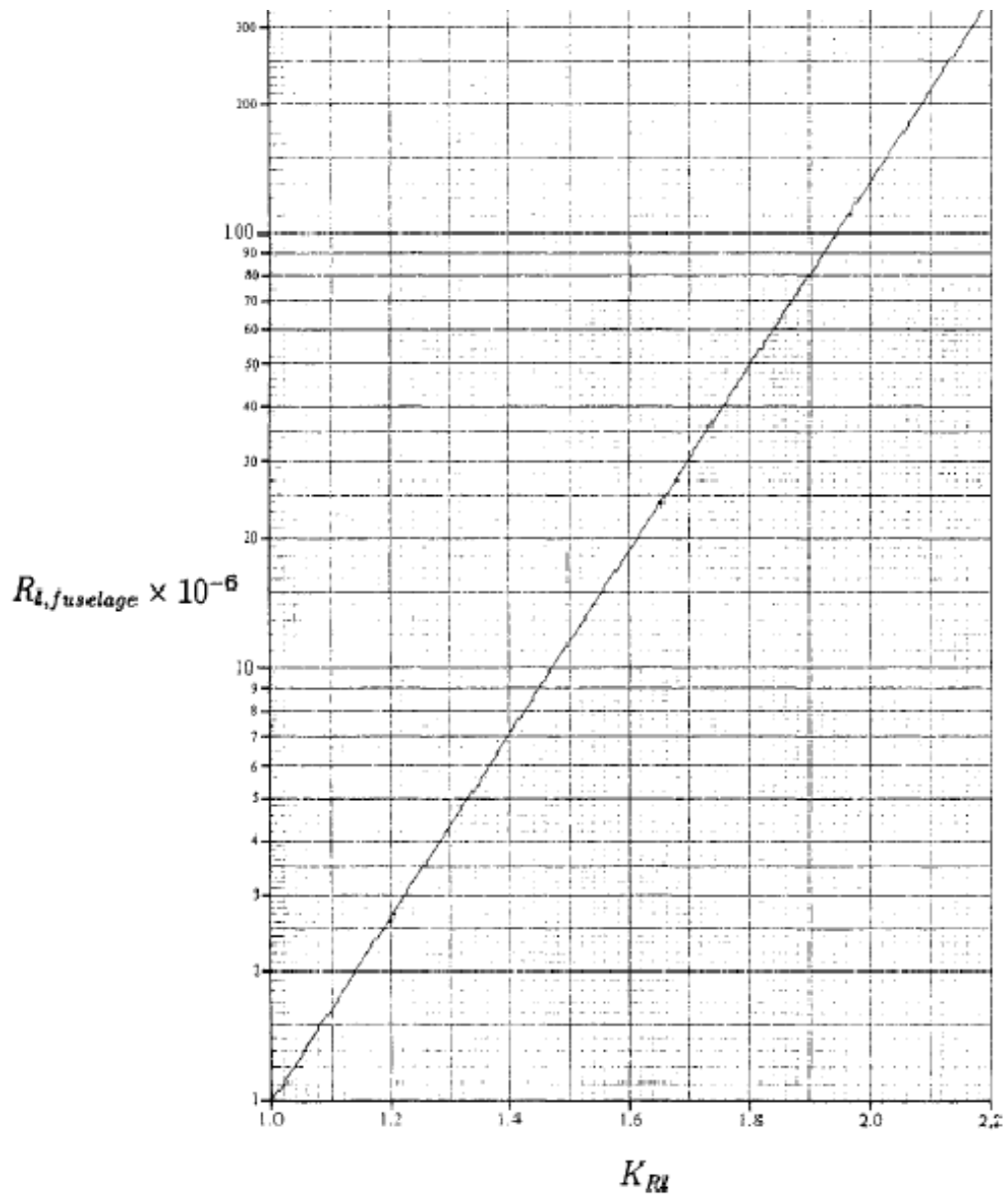


Figura 3.26 Variación de  $K_{RI}$  con el número de Reynolds [1]

La contribución del estabilizador vertical es la siguiente

$$C_{n\beta, V} = k C_{L\alpha, V} \left( 1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \eta_V \frac{S_V l_V}{S b} \frac{l_V \cos \alpha - z_V \sin \alpha}{b} \quad (3.130)$$

Donde  $C_{L\alpha, V}$  es la pendiente de sustentación efectiva del estabilizador vertical.

### 3.4.2 Derivadas con respecto del 'roll rate' $p$ .

A continuación se va a proceder a describir las ecuaciones que permiten el cálculo de las derivadas de estabilidad lateral-direccionales que dependen de la velocidad adimensional  $p$  también conocida como 'roll rate'.

#### 3.4.2.1 Variación de $\Delta C_y$ con el 'roll rate' $p$

Esta derivada es la medida de la fuerza lateral inducida debido al 'roll rate' experimentado por la aeronave. El valor predominante es el debido al estabilizador vertical,  $C_{yp,V}$ . Se considera también el producido por el ala,  $C_{yp,W}$ , siendo de menor importancia que el del vertical. Quedando definida la derivada de estabilidad por

$$C_{yp} = C_{yp,W} + C_{yp,V} \quad (3.131)$$

La contribución del estabilizador vertical está definida por la siguiente expresión [1]

$$C_{yp,V} = \frac{2(z - z_v)}{b} C_{y\beta,V} \quad (3.132)$$

donde

$$z = z_v \cos \alpha - l_v \sin \alpha \quad (3.133)$$

La contribución del fuselaje está definida por la siguiente expresión

$$C_{yp,W} = K \left( \frac{C_{yp}}{C_L} \right)_{C_L=0,M} + (\Delta C_{yp})_{\Gamma} \quad (3.134)$$

donde

$$K = \frac{1 - a_{w1}}{1 - a_{w2}} \quad a_{w1} = \frac{(C_{L\alpha})_e}{\pi A e} \quad a_{w2} = e a_{w1} \quad (3.135)$$

En la ecuación anterior  $(C_{L\alpha})_e$  se refiere a la pendiente de sustentación para el ala expuesta. Aunque en el caso del programa actual este no considera el ala expuesta. Los elementos restantes de la Ec.(3.134) son

$$\left( \frac{C_{yp}}{C_L} \right)_{C_L=0,M} = \frac{(A + B \cos \Lambda_{c/4})(AB + \cos \Lambda_{c/4})}{(AB + 4 \cos \Lambda_{c/4})(A + \cos \Lambda_{c/4})} \left( \frac{C_{yp}}{C_L} \right)_{C_L=0,M=0} \quad (3.136)$$

Donde  $B$  es

$$B = \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \Lambda_{c/4}} \quad (3.137)$$

Y el último término es

$$(\Delta C_{yp})_{\Gamma} = 3 \sin \Gamma \left[ 1 - \frac{4z}{b} \sin \Gamma \right] (C_{lp})_{\Gamma=0, C_L=0} \quad (3.138)$$

Donde  $(C_{lp})_{\Gamma=0, C_L=0}$  viene definido de la siguiente manera

$$(C_{lp})_{\Gamma=0, C_L=0} = \left( \frac{\beta C_{lp}}{k} \right)_{C_L=0} \frac{k}{\beta} \quad (3.139)$$

$$k = \frac{a_o}{2\pi} \quad (3.140)$$

La expresión de Ec.(3.140) ya se vio en el cálculo de la estabilidad longitudinal. El valor de  $a_o$  es la pendiente de sustentación del perfil 2D y se define con la Ec.(3.15). En la Ec.(3.136)

aparece el parámetro  $\left( \frac{C_{yp}}{C_L} \right)_{C_L=0, M=0}$  que se obtiene de Figura 3.27. En la Ec.(3.139) aparece

el parámetro  $\left( \frac{\beta C_{lp}}{k} \right)_{C_L=0}$  el cual se obtiene interpolando en Figura 3.28.

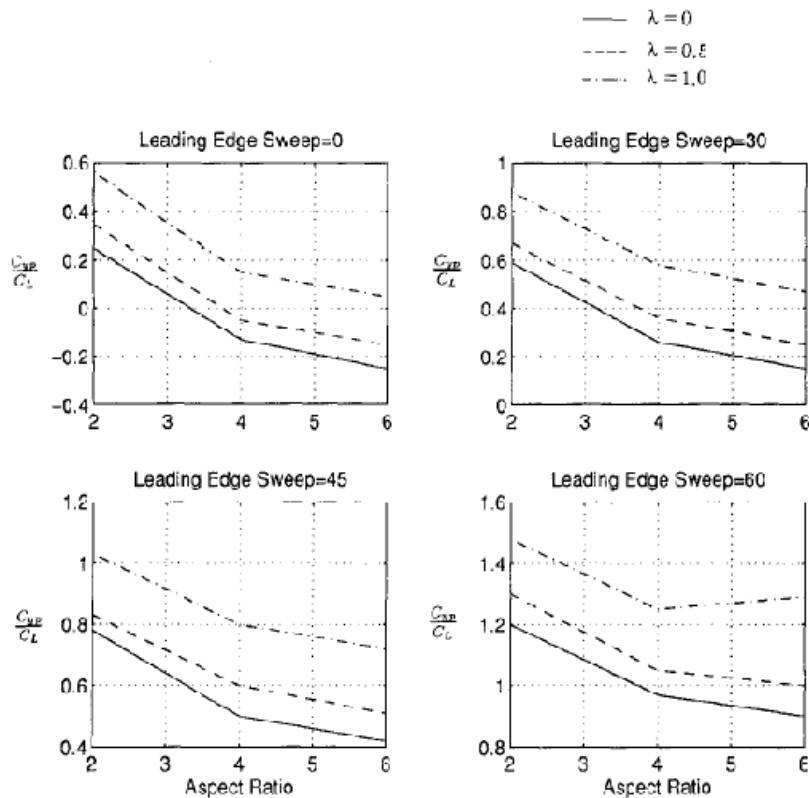


Figura 3.27 Obtención del parámetro  $\frac{C_{yp}}{C_L}_{C_L=0, M=0}$  [1]

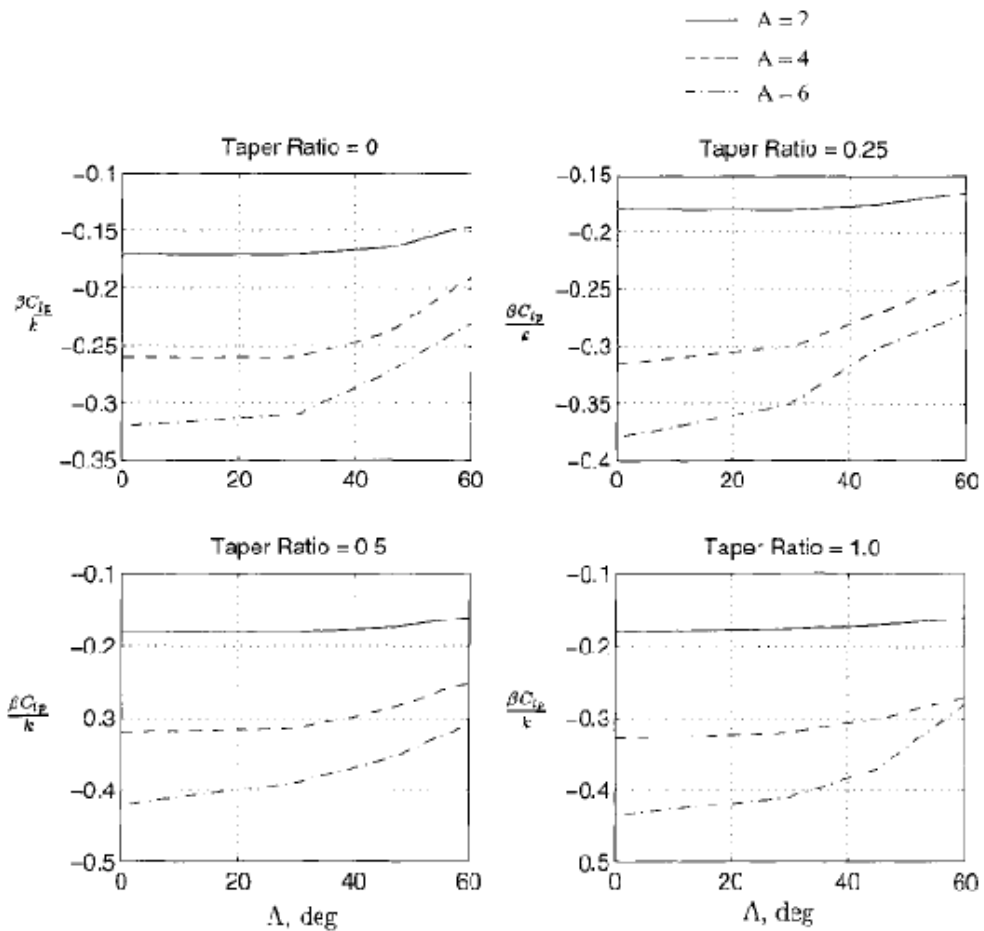


Figura 3.28 Obtención del parámetro  $\frac{\beta C_{lE}}{k}$  [1]  
 $k_{C_L=0}$

### 3.4.2.2 Variación de $\Delta C_l$ con el 'roll rate' $p$

Esta derivada es la medida del momento de balance inducido debido al "roll rate" experimentado por la aeronave. Se la conoce como '*damping in roll derivative*'. Es una de las más importantes derivadas lateral-direccionales. Es combinación de los efectos producidos por el estabilizador vertical,  $C_{lp,v}$ , y el ala,  $C_{lp,w}$ . También se tendrán en cuenta los efectos producidos por el estabilizador horizontal,  $C_{lp,h}$ , el canard y la cola en V, si los hubiera.

$$C_{lp} = C_{lp,w} + C_{lp,v} + C_{lp,h} + C_{lp,c} \quad (3.141)$$

La contribución del vertical viene dada por la siguiente expresión [1]

$$C_{lp,v} = \left| 2 \left( \frac{z}{b} \right) \left( \frac{z - z_v}{b} \right) \right| C_{y\beta,v} \quad (3.142)$$



Mientras que la contribución del ala viene dada por [1]

$$C_{lp,w} = \left( \frac{\beta C_{lp}}{k} \right)_{C_L=0} \left( \frac{k}{\beta} \right) \left( \frac{C_{lp,\Gamma}}{C_{lp,\Gamma=0}} \right) + \Delta C_{lp,drag} \quad (3.143)$$

siendo

$$\left( \frac{C_{lp,\Gamma}}{C_{lp,\Gamma=0}} \right) = (1 - 2z' \sin \Gamma + 3z'^2 \sin^2 \Gamma) \quad (3.144)$$

Donde  $\Gamma$  es el ángulo de diedro del ala medido en radianes y  $z'$  corresponde a

$$z' = \frac{2z_w}{b} \quad (3.145)$$

En esta derivada de estabilidad tiene importancia la contribución de la resistencia debida tanto a la resistencia del ala como a la extensión de los flaps  $\Delta C_{lp,drag}$ , en el caso de haberlos. [2]

$$\Delta C_{lp,drag} = \frac{(C_{lp})_{C_{DL}}}{C_{L_w}^2} (C_{L_w} + \Delta C_{L_{\delta f}})^2 - 0.125 (C_{D_{Ow}} + C_{D_{Oflap}}) \quad (3.146)$$

En el presente estudio no se tiene en cuenta la existencia de flaps, por lo que la Ec.(3.146) se simplifica pasando a ser

$$\Delta C_{lp,drag} = \frac{(C_{lp})_{C_{DL}}}{C_{L_w}^2} C_{L_w} - 0.125 C_{D_o} \quad (3.147)$$

donde  $\frac{(C_{lp})_{C_{DL}}}{C_{L_w}^2}$  es la resistencia del ala debida parámetro 'roll damping' y se obtiene

interpolando de la Figura 3.29 a partir del alargamiento,  $A$ , y del ángulo de flecha en un cuarto de la cuerda,  $\Lambda_{4/c}$ .  $C_{L_w}$  es el coeficiente de sustentación del ala y  $C_{D_o}$  es el coeficiente de resistencia sin sustentación.

A la hora de calcular el valor de la contribución del estabilizador horizontal y del cannard se procede de la misma manera que al calcular la contribución del ala. Introduciendo en la Ec.(3.143) los valores correspondiente a la superficie sustentadora de estudio se obtiene un valor que en lugar de denominar  $C_{lp,w}$  se denominará  $(C_{lp})_h$  o  $(C_{lp})_c$  según la superficie que se estudie. Estos valores deben ser redimensionados con la siguiente expresión

$$C_{lp,ls} = \frac{1}{2} (C_{lp})_{ls} \frac{S_{ls}}{S_w} \left( \frac{b_{ls}}{b_w} \right)^2 \quad (3.148)$$

siendo el subíndice 'l's' el correspondiente a cada superficie sustentadora (horizontal o cannard). El valor obtenido de Ec.(3.148) es la contribución a la derivada de estabilidad de la superficie sustentadora correspondiente.

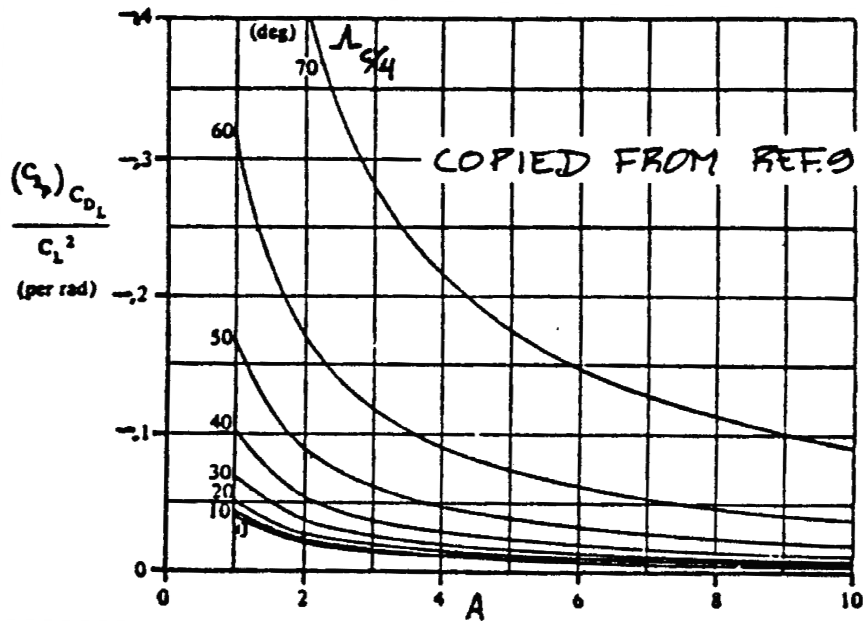


Figura 3.29 Resistencia del ala debida al parámetro 'roll damping' [3]

### 3.4.2.3 Variación de $\Delta C_n$ con el 'roll rate' $p$

Esta derivada es la medida del momento de guiñada inducido debido al 'roll rate' experimentado por la aeronave. La contribución debida al fuselaje y al estabilizador horizontal es pequeña por lo que se ignora. La contribución principal a esta derivada está producida por el ala,  $C_{np,W}$ , y el estabilizador vertical,  $C_{np,V}$ .

$$C_{np} = C_{np,W} + C_{np,V} \quad (3.149)$$

La contribución del ala viene dada por la siguiente expresión [1]

$$C_{np,W} = C_{lp} \tan \alpha (K - 1) + K \left( \frac{C_{np}}{C_L} \right)_{C_L=0,M} C_L \quad (3.150)$$

Quedando  $K$  definida en Ec.(3.135) y el parámetro  $\left( \frac{C_{np}}{C_L} \right)_{C_L=0,M}$  por la siguiente expresión

$$\left( \frac{C_{np}}{C_L} \right)_{C_L=0,M} = \left( \frac{A + 4 \cos \Lambda_{c/4}}{AB + 4 \cos \Lambda_{c/4}} \right) \left[ \frac{AB + 0.5(AB + \cos \Lambda_{c/4}) \tan^2 \Lambda_{c/4}}{A + 0.5(A + \cos \Lambda_{c/4}) \tan^2 \Lambda_{c/4}} \right] \left( \frac{C_{np}}{C_L} \right)_{C_L=0} \quad (3.151)$$

Siendo  $A$  el alargamiento,  $\Lambda_{c/4}$  el ángulo de flecha en un cuarto de la cuerda y  $B$  quedó definido anteriormente como  $B = \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \Lambda_{c/4}}$ . El término que falta por definir de la Ec.(3.151) se obtiene de la siguiente expresión [1]

$$\left( \frac{C_{np}}{C_L} \right)_{C_L=0} = - \left[ \frac{A + 6(A_e + \cos \Lambda_{c/4}) \left( \frac{\xi \tan \Lambda_{c/4}}{A_e} + \frac{\tan^2 \Lambda_{c/4}}{12} \right)}{6(A_e + 4 \cos \Lambda_{c/4})} \right] \quad (3.152)$$

Donde

$$\xi = \frac{\bar{x}}{c} \quad (3.153)$$

$$\bar{x} = (x_{ac})_e - x_{cg,le} \quad (3.154)$$

Siendo  $(x_{ac})_e$  es la distancia entre el centro aerodinámico del ala expuesta y el borde de ataque en el encastre, y  $x_{cg,le}$  es la distancia entre el centro de gravedad y el borde de ataque en el encastre.

La contribución del estabilizador vertical viene dada por [1]

$$C_{np,V} = -\frac{2}{b} (l_v \cos \alpha + z_v \sin \alpha) \left( \frac{z - z_v}{b} \right) C_{y\beta,V} \quad (3.155)$$

donde  $z = z_v \cos \alpha - l_v \sin \alpha$ .

### 3.4.3 Derivadas con respecto del yaw rate $r$ .

A continuación se va a proceder a describir las ecuaciones que permiten el cálculo de las derivadas de estabilidad lateral-direccionales que dependen de la velocidad angular  $r$  también conocida como 'yaw rate'.

#### 3.4.3.1 Variación de $\Delta C_y$ con el 'yaw rate' $r$

Esta derivada es una medida de la fuerza lateral inducida debido al movimiento de guiñada experimentado por la aeronave. La mayor contribución a esta derivada viene dada por la superficie vertical por

$$C_{yr,V} = -\frac{2}{b} (l_v \cos \alpha + z_v \sin \alpha) C_{y\beta,V} \quad (3.156)$$

donde  $C_{y,\beta,V}$  se cálculo en Ec.(3.115). El resto de elemento tiene una contribución muy pequeña y es posible despreciarlos [1].

### 3.4.3.2 Variación de $\Delta C_l$ con el 'yaw rate' $r$

Esta derivada es una medida del momento de balanceo inducido debido al movimiento de guiñada experimentado por la aeronave. La principal contribución a esta derivada está producida por el ala  $C_{l,r,W}$  y por el estabilizador vertical  $C_{l,r,V}$ .

$$C_{l,r} = C_{l,r,W} + C_{l,r,V} \quad (3.157)$$

La contribución del ala se calcula con la siguiente expresión [2]

$$C_{l,r,W} = C_L \left( \frac{C_{l,r}}{C_L} \right)_{C_L=0,M} + \left( \frac{\Delta C_{l,r}}{\Gamma} \right) \Gamma + \left( \frac{\Delta C_{l,r}}{\epsilon_{tw}} \right) \epsilon_{tw} + \frac{\Delta C_{l,r}}{\alpha_{\delta_f}} \alpha_{\delta_f} \delta_f \quad (3.158)$$

Los dos últimos términos corresponden a la contribución de 'twist' y del flap y se no se van a tener en cuenta. Por lo que se reescribe la ecuación quedando

$$C_{l,r,W} = C_L \left( \frac{C_{l,r}}{C_L} \right)_{C_L=0,M} + \left( \frac{\Delta C_{l,r}}{\Gamma} \right) \Gamma \quad (3.159)$$

El primer parámetro de Ec.(3.158) viene dado por la compleja expresión siguiente [1]

$$\left( \frac{C_{l,r}}{C_L} \right)_{C_L=0,M} = \frac{Num}{Den} \left( \frac{C_{l,r}}{C_L} \right)_{C_L=0,M=0} \quad (3.160)$$

Donde  $\left( \frac{C_{l,r}}{C_L} \right)_{C_L=0,M=0}$  se obtiene de Figura 3.30. y el resto de la expresión de hallando los valores de  $Num$  y  $Den$  de las siguientes expresiones.

$$Num = 1 + \frac{A(1-B^2)}{2B(AB+2\cos\Lambda_{c/4})} + \left( \frac{AB+2\cos\Lambda_{c/4}}{AB+4\cos\Lambda_{c/4}} \right) \left( \frac{\tan^2\Lambda_{c/4}}{8} \right) \quad (3.161)$$

$$Den = 1 + \left( \frac{A+2\cos\Lambda_{c/4}}{A+4\cos\Lambda_{c/4}} \right) \left( \frac{\tan^2\Lambda_{c/4}}{8} \right) \quad (3.162)$$

Donde  $A$  es el alargamiento,  $\Lambda_{c/4}$  el ángulo de flecha a un cuarto de la cuerda principal y  $B$  se define como  $B = \sqrt{1-M^2 \cos^2 \Lambda_{c/4}}$ .

El segundo parámetro de Ec.(3.158) se calcula mediante la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\Delta C_{lr}}{\Gamma}\right) = \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{\pi A \sin \Lambda_{c/4}}{A + 4 \cos \Lambda_{c/4}}\right) / \text{rad}^2 \quad (3.163)$$

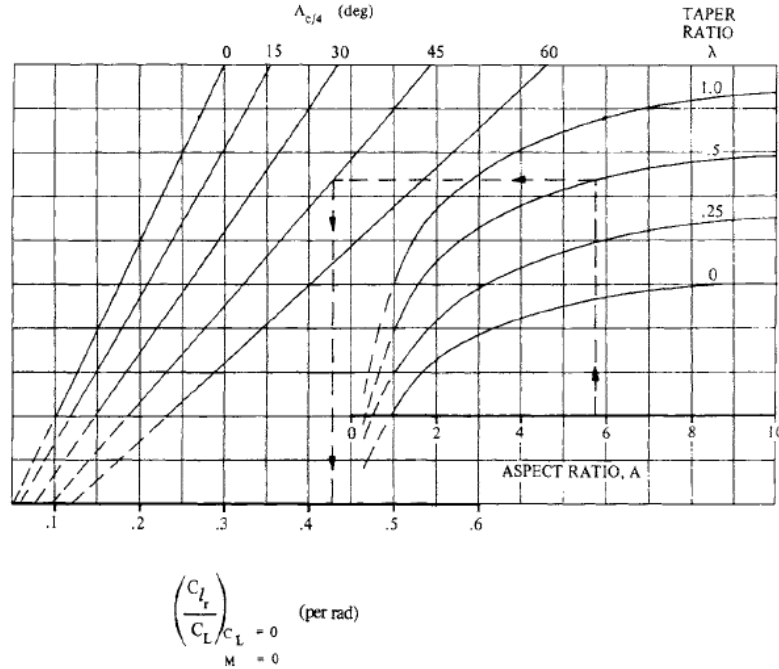


Figura 3.30 Obtención del parámetro  $\left(\frac{C_{lr}}{C_L}\right)_{C_L=0, M=0}$  [1]

La contribución del estabilizador vertical viene dada por la siguiente expresión

$$C_{lr,V} = -\frac{2}{b^2} (l_v \cos \alpha + z_v \sin \alpha)(z_v \cos \alpha - l_v \sin \alpha) C_{y\beta,V} \quad (3.164)$$

donde  $C_{y\beta,V}$  se cálculo en Ec.(3.115).

### 3.4.3.3 Variación de $\Delta C_n$ con el 'yaw rate' $r$

Esta derivada es una medida del momento de guiñada inducido debido al movimiento de guiñada experimentado por la aeronave. Conocida como '*damping-in-yaw-derivative*'. Es una de las derivadas de estabilidad lateral-direccional más importantes. La principal contribución a esta derivada está producida por el ala  $C_{nr,W}$  y por el estabilizador vertical  $C_{nr,V}$

$$C_{nr} = C_{nr,W} + C_{nr,V} \quad (3.165)$$

La contribución del fuselaje viene dada por [1]

$$C_{nr,W} = \left( \frac{C_{nr}}{C_L^2} \right) C_L^2 + \left( \frac{C_{nr}}{C_D} \right) C_{D0} \quad (3.166)$$

donde  $\left( \frac{C_{nr}}{C_L^2} \right)$  es evaluado en Figura 3.31, y  $\left( \frac{C_{nr}}{C_D} \right)$  se obtiene de Figura 3.32. donde  $\frac{\bar{x}}{c}$  es el margen estático.

La contribución del estabilizador vertical viene dada por

$$C_{nr,V} = \frac{2}{b^2} (l_v \cos \alpha + z_v \sin \alpha)^2 C_{y\beta,V} \quad (3.167)$$

donde  $C_{y\beta,V}$  se cálculo en la Ec.(3.115).

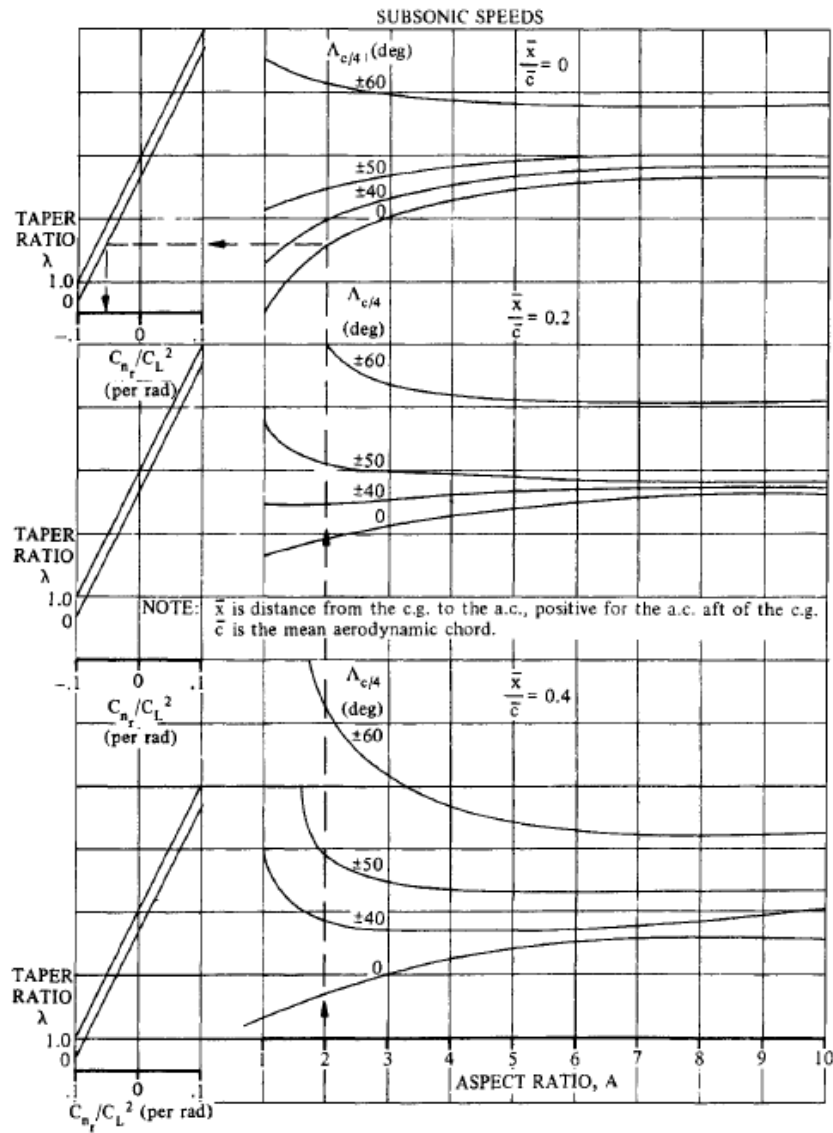
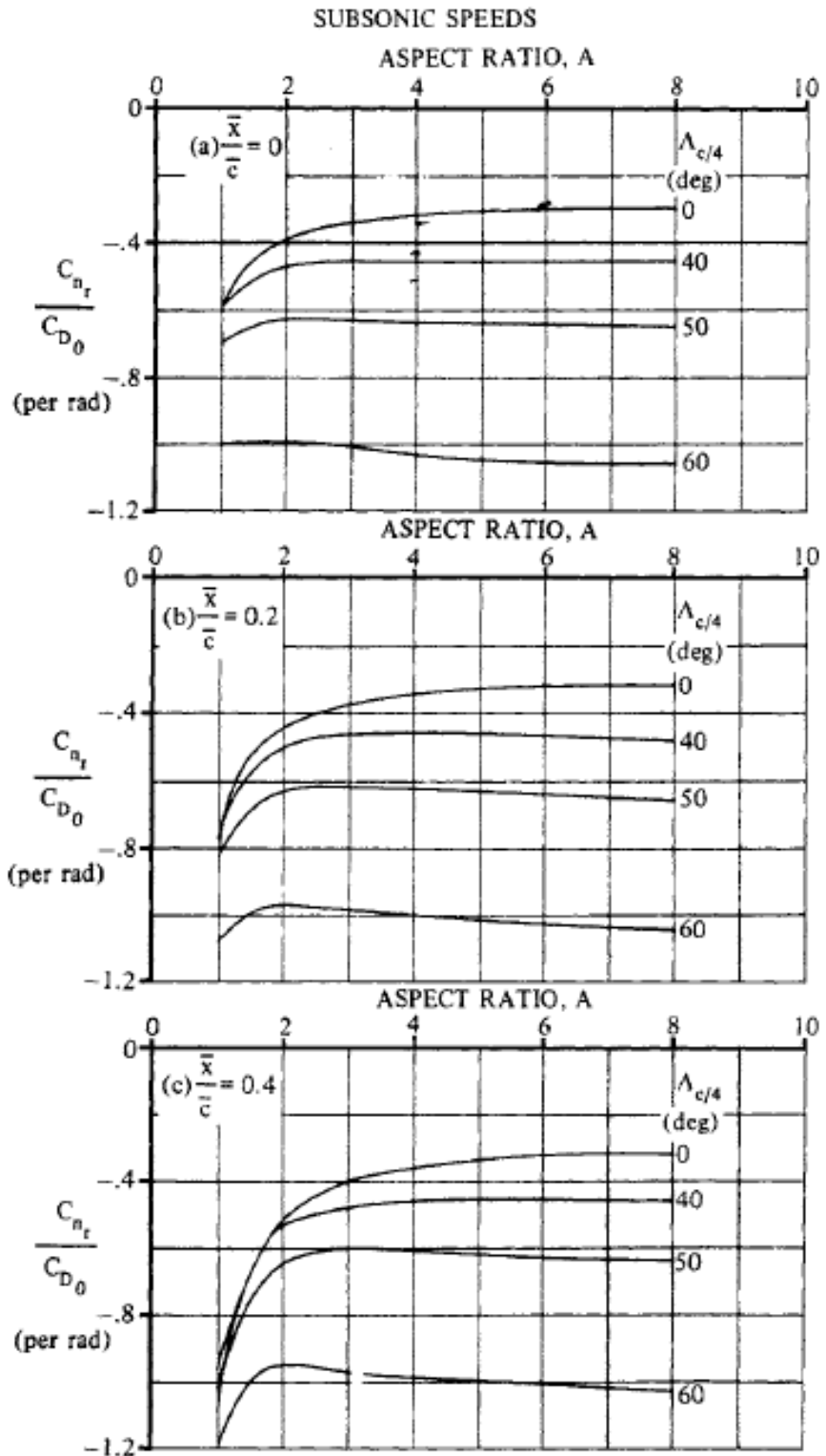


Figura 3.31 Obtención del parámetro  $\left( \frac{C_{nr}}{C_L^2} \right)$  [1]



NOTE:  $\bar{x}$  is the distance from the c.g. to the a.c., positive for the a.c. aft of the c.g.  
 $\bar{c}$  is the wing mean aerodynamic chord.

Figura 3.32 Obtención del parámetro  $\left(\frac{C_{nr}}{C_D}\right)$  [1]

### 3.4.4 Derivadas con respecto a la variación del ángulo sideslip con el tiempo $\dot{\beta}$

A continuación se va a proceder a describir las ecuaciones que permiten el cálculo de las derivadas de estabilidad lateral-direccionales que dependen del cambio en el tiempo del ángulo de barrido  $\dot{\beta}$ .

#### 3.4.4.1 Variación de $\Delta C_y$ con la variación del ángulo sideslip con el tiempo $\dot{\beta}$

Esta derivada es una medida de los efectos no estacionarios debidos al cambio en el ángulo de barrido sobre la fuerza lateral. El elemento que más contribuye a esta derivada es el estabilizador vertical siendo la contribución producida por otros elementos como el ala pequeña e ignorada. Se calcula con la siguiente expresión [1].

$$C_{y\dot{\beta},V} = 2C_{L\alpha,V}\sigma_{\beta} \frac{S_v}{S} \left[ \frac{l_v \cos \alpha + z_v \sin \alpha}{b} \right] \quad (3.168)$$

El valor del sidewash,  $\sigma_{\beta}$ , es la suma de los efectos producidos por el ángulo de ataque, por el ángulo de diedro y por la combinación ala-fuselaje sobre el sidewash.

$$\sigma_{\beta} = \sigma_{\beta\alpha} \alpha + \sigma_{\beta\Gamma} \left( \frac{\Gamma}{57.3} \right) + \sigma_{\beta,WB} \quad (3.169)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo de ataque en grados y  $\Gamma$  es el ángulo de diedro del ala en grados. Los coeficientes de la Ec.(3.169) se obtienen  $\sigma_{\beta\alpha}$  de la Figura 3.33,  $\sigma_{\beta\Gamma}$  de la Figura 3.34 y  $\sigma_{\beta,WB}$  de la Figura 3.35.

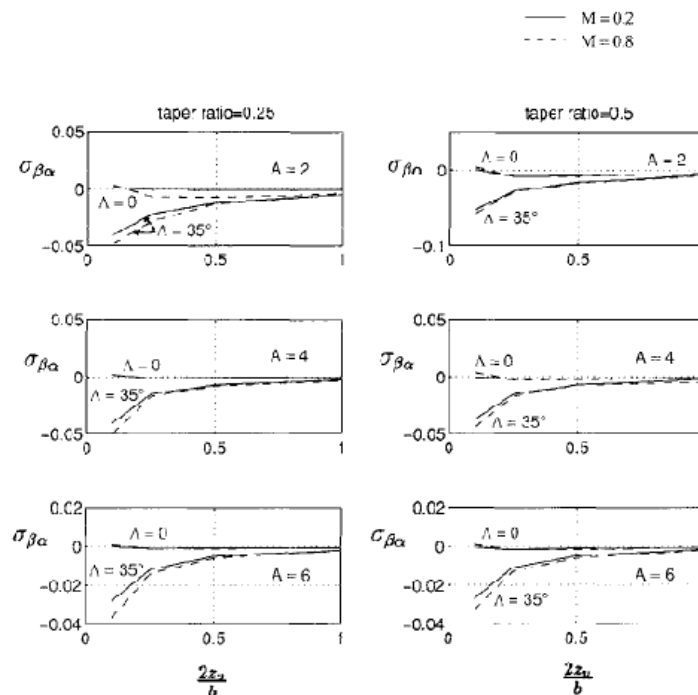


Figura 3.33 Obtención de  $\sigma_{\beta\alpha}$  en grados [1]



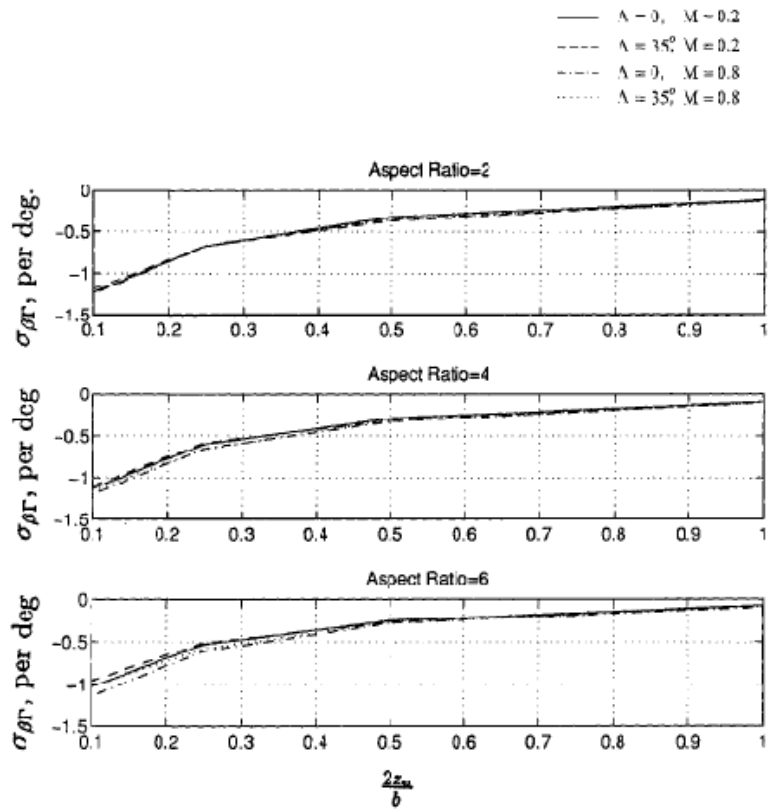


Figura 3.34 Obtención de  $\sigma_{\beta T}$  en grados [1]

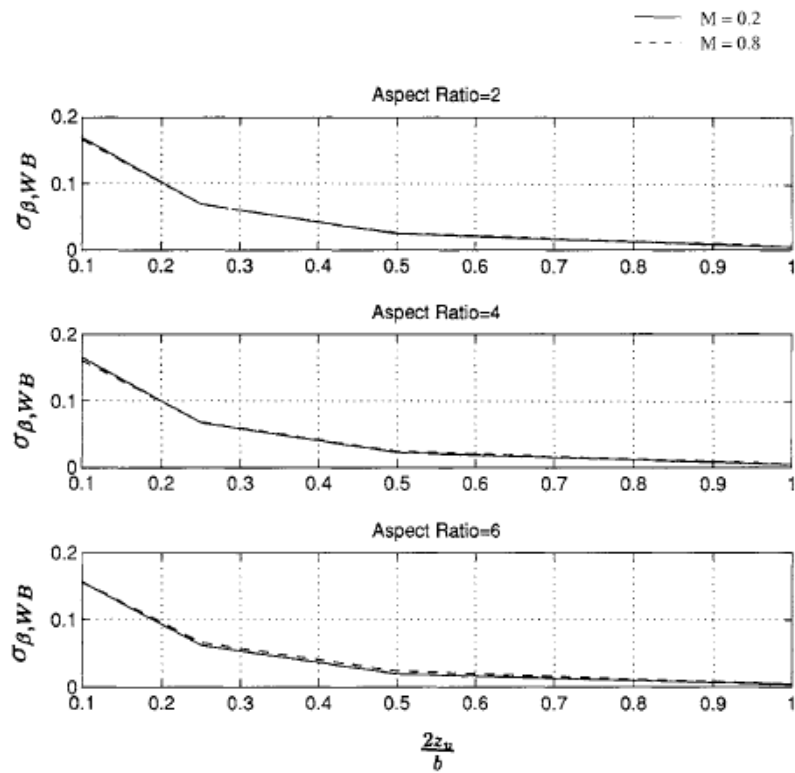


Figura 3.35 Obtención de  $\sigma_{\beta, WB}$  [1]

### 3.4.4.2 Variación de $\Delta C_l$ con la variación del ángulo sideslip con el tiempo $\dot{\beta}$

La mayor contribución a esta derivada viene del estabilizador vertical y se calcula a partir de la derivada  $C_{y\dot{\beta},V}$  siendo

$$C_{l\dot{\beta},V} = C_{y\dot{\beta},V} \left[ \frac{z_v \cos \alpha - l_v \sin \alpha}{b} \right] \quad (3.170)$$

### 3.4.4.3 Variación de $\Delta C_n$ con la variación del ángulo sideslip con el tiempo $\dot{\beta}$

La mayor contribución a esta derivada viene del estabilizador vertical y se calcula a partir de la derivada  $C_{y\dot{\beta},V}$  siendo

$$C_{n\dot{\beta},V} = -C_{y\dot{\beta},V} \left[ \frac{l_v \cos \alpha + z_v \sin \alpha}{b} \right] \quad (3.171)$$

## 3.4.5 Derivadas de control Lateral-Direccional

A continuación se detallan los métodos que se siguen para hallar las derivadas de Control lateral-direccional así como algunas simplificaciones.

### 3.4.5.1 Variación de $\Delta C_Y$ con la deflexión de los alerones

Esta derivada de control se puede aproximar a cero [2]

$$C_{Y_{\delta a}} \approx 0 \quad (3.172)$$

### 3.4.5.2 Variación de $\Delta C_l$ con la deflexión de los alerones

Esta derivada de control expresa el momento en el eje 'x' producido por la deflexión de los alerones. La expresión que proporciona esta derivada de control es la siguiente

$$C_{l_{\delta a}} = \frac{2 \sum K_f \left( \frac{\partial C_L}{\partial \delta_f} \right) Y_i S_i \cos \Lambda_{H.L.}}{Sb} \quad (3.173)$$

En ella es necesario realizar un sumatorio que concierne a la posición del alerón. El número dos en el inicio de la expresión indica que se tienen en cuenta los dos alerones. Aquí se divide el alerón en franjas y se realiza el sumatorio correspondiente.  $Y_i$  es la distancia de una

franja del alerón hasta el plano de simetría y  $S_i$  es el área de la franja del ala completa relacionada con  $Y_i$  como se indica en la Figura 3.36.

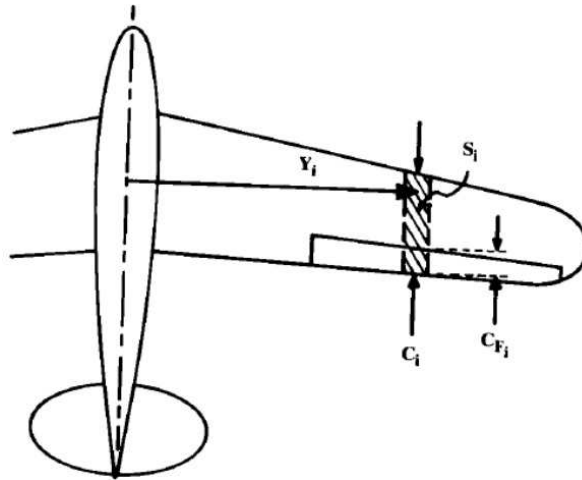


Figura 3.36 Detalle del alerón [2]

$\Lambda_{H.L.}$  es el ángulo en flecha del alerón,  $\frac{\partial C_L}{\partial \delta_f}$  es el incremento de sustentación teórico debido al flap del perfil 2D dado por la Figura 3.37. En el apartado de derivadas de control longitudinales ya se utilizó para el caso del elevador. Y  $K_f$  se obtiene de la Figura 3.38.

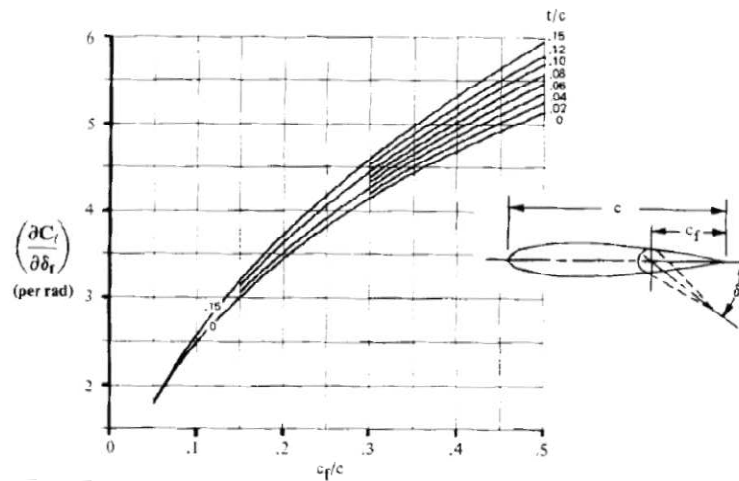


Figura 3.37 Obtención de  $\left(\frac{\partial C_L}{\partial \delta_f}\right)$  [2]

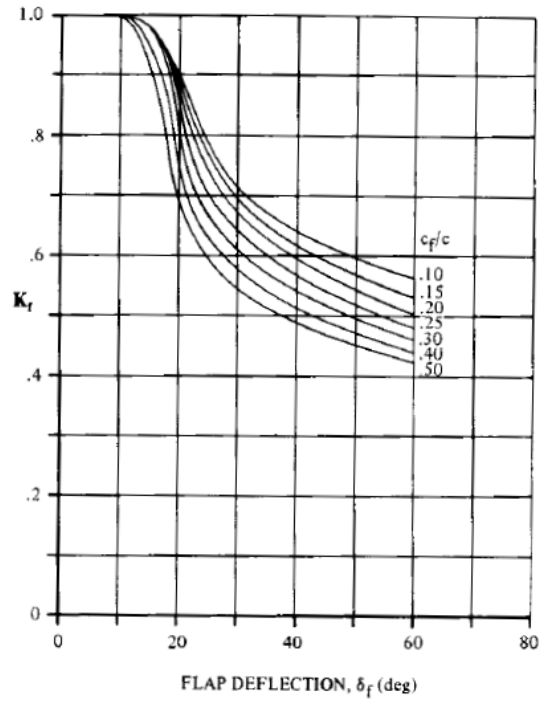


Figura 3.38 Obtención de  $K_f$  [2]

### 3.4.5.3 Variación de $\Delta C_n$ con la deflexión de los alerones

La expresión para calcular esta derivada de control es la siguiente [2]

$$C_{n\delta_a} = 2KC_L C_{L\delta_a} \quad (3.174)$$

Donde el valor de  $K$  se extrae de Figura 3.39 estando  $\eta$  definida como el cociente de la distancia del punto medio de la superficie de control con la mitad de la envergadura,

$$\eta = \frac{Y_1}{b/2}$$

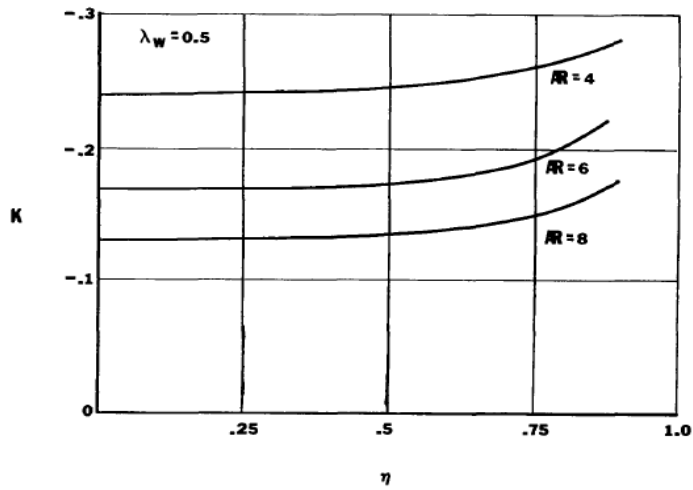


Figura 3.39 k para  $\lambda = 0.5$  [2]

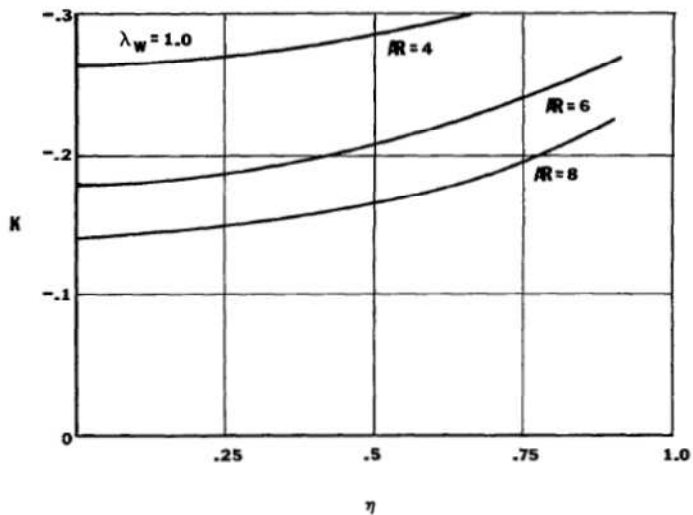


Figura 3.40 k para  $\lambda = 1$  [2]

#### 3.4.5.4 Variación de $\Delta C_Y$ con la deflexión del timón de profundidad

Esta derivada de control, y las siguientes, corresponden al efecto producido por el timón de dirección situado en el estabilizador vertical. Su expresión es la siguiente.

$$C_{Y_{\delta r}} = C_{L\alpha, v} \tau \frac{S_v}{S} \quad (3.175)$$

### 3.4.5.5 Variación de $\Delta C_l$ con la deflexión del timón de profundidad

$$C_{l_{\delta r}} = C_{L\alpha, v} \tau \frac{S_v z_v}{S b} \quad (3.176)$$

### 3.4.5.6 Variación de $\Delta C_n$ con la deflexión del timón de profundidad

$$C_{n_{\delta r}} = -C_{L\alpha, v} \tau \frac{S_v l_v}{S b} \eta_v \quad (3.177)$$

Donde  $\tau$  se obtiene de la relación de la superficie de timón de dirección,  $S_R$ , con la superficie del ala,  $S$ , indicada en la Figura 3.41

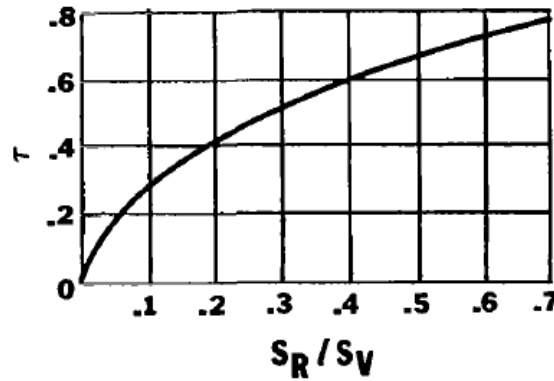


Figura 3.41 Valor de  $\tau$  en función del área del timón de dirección [2]

### 3.4.6 Derivadas propulsivas lateral-direccionales

Del mismo modo que pasaba con las variables longitudinales, las lateral-direccionales, al ser perturbadas, pueden generar cambios en las fuerzas propulsivas de la aeronave. Según [3] las fuerzas y momentos lateral-direccionales propulsivos se pueden expresar como serie de Taylor donde la única variable presente es el ángulo de barrido.

$$F_{T_y} = \frac{\partial F_{T_y}}{\partial \beta} \beta \quad (3.178)$$

$$L_T = \frac{\partial L_T}{\partial \beta} \beta \quad (3.179)$$

$$N_T = \frac{\partial N_T}{\partial \beta} \beta \quad (3.180)$$

Las fuerzas y momentos propulsivos se adimensionalizan de la siguiente manera

$$C_{T_y} = \frac{F_{T_y}}{\frac{1}{2} \rho u^2 S} \quad (3.181)$$

$$C_{l_T} = \frac{L_T}{\frac{1}{2} \rho u^2 S b} \quad (3.182)$$

$$C_{n_T} = \frac{N_T}{\frac{1}{2} \rho u^2 S b} \quad (3.183)$$

### 3.4.6.1 Variación de las fuerzas debidas a la propulsión en el eje 'Y' con el ángulo de barrido

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.178) el resultado es el siguiente

$$\frac{\partial F_{T_y}}{\partial \beta} = C_{T_y \beta} \frac{1}{2} \rho u^2 S \quad (3.184)$$

La derivada  $C_{T_y \beta}$  es despreciable para la mayoría de aviones convencionales por lo que se asumirá

$$C_{T_y \beta} \approx 0 \quad (3.185)$$

Para el caso de aviones con jet esta expresión se aproxima a cero. Para los casos de aviones con hélice esta expresión, debido a la complejidad de los cálculos necesarios, también suele aproximarse a cero.

### 3.4.6.2 Variación de los momentos debidas a la propulsión en el eje 'X' con el ángulo de barrido

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.179) el resultado es el siguiente

$$\frac{\partial L_T}{\partial \beta} = C_{l_T \beta} \frac{1}{2} \rho u^2 S b \quad (3.186)$$

La derivada  $C_{l_{T\beta}}$  es despreciable para la mayoría de aviones convencionales por lo que se asumirá

$$C_{l_{T\beta}} \approx 0 \quad (3.187)$$

### 3.4.6.3 Variación de las momentos debidas a la propulsión en el eje 'X' con el ángulo de barrido

Desarrollando la derivada parcial de la Ec.(3.180) el resultado es el siguiente

$$\frac{\partial N_T}{\partial \beta} = C_{n_{T\beta}} \frac{1}{2} \rho u^2 S b \quad (3.188)$$

La derivada  $C_{n_{T\beta}}$ , ya sea para aviones de hélice o de turborreactores, es muy complicada de obtener por las estimaciones que hay que realizar. Se asume que es próxima a cero

$$C_{n_{T\beta}} \approx 0 \quad (3.189)$$

## 3.5 Conclusión del cálculo

Se ha terminado con la descripción de todos los métodos que se utilizarán para hallar las derivadas de estabilidad y de control. Estos métodos se programarán en un archivo .m de Matlab. Este archivo servirá para obtener todas las derivadas a partir de los datos que el usuario proporcione al programa. La explicación de todo el programa se encuentra en el capítulo 6.





# Estabilidad estática

---

Con el trimado del avión lo que se consigue es poner al avión en una situación de equilibrio en la que se mantiene su rumbo dejando los mandos en una posición fija en función de la condición de vuelo. Adicionalmente al cálculo de las derivadas de estabilidad el programa contiene un módulo que permite calcular el trimado del avión. Este se va a dividir en trimado longitudinal y en trimado lateral-direccional.

El trimado del avión sirve principalmente para dimensionar superficies. En el caso longitudinal da idea del tamaño que debería tener la superficie horizontal o el mismo elevador. Al obtener valores elevados es necesario redimensionar. En el caso lateral-direccional se proponen varias situaciones en notable desequilibrio para comprobar que el avión tendrá un comportamiento adecuado. En caso de no hacerlo habría que redimensionar las superficies de control lateral direccional.

## 4.1. Trimado Longitudinal

El trimado longitudinal se obtendrá para un cierto valor de  $\alpha$  y para un cierto valor de  $\delta_e$ . Para obtener estos valores se plantean las ecuaciones de equilibrio en sustentación y momento de cabeceo. En la primera, la sustentación debe ser igual al peso del avión y en la segunda el momento de cabeceo debe ser nulo. De esta manera se consigue mantener la actitud. Se plantea el equilibrio de fuerzas y momentos.

$$\Sigma F_x = \frac{W}{qS} - C_{L_0} - C_{L_\alpha} \alpha - C_{L_{\delta_e}} \delta_e \quad (4.1)$$

$$\Sigma M_x = 0 = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \quad (4.2)$$

Los coeficientes que aparecen en las ecuaciones anteriores se obtienen como suma de los coeficientes aerodinámicos de diferentes elementos. En el caso que se va a tratar estos elementos son el ala, el canard y el estabilizador horizontal, así como las diversas superficies de control correspondientes.

El coeficiente de sustentación a ángulo de ataque nulo lo componen los siguientes elementos. Los tres primeros corresponden a los coeficientes de sustentación a ángulo de ataque nulo del ala-fuselaje  $C_{L_{0WB}}$ , del canard  $C_{L_{0c}}$  y del estabilizador horizontal  $C_{L_{0t}}$ , corrigiendo las dimensiones. Y los tres últimos corresponden a la sustentación producida por las superficies anteriores por la aparición de los ángulos de incidencia  $i_c, i_w$  y  $i_t$ , del upwash  $\varepsilon_{0_c}$  y del downwash  $\varepsilon_{0_t}$ .

$$C_{L_0} = C_{L_{0WB}} + \frac{q_c S_c}{qS} C_{L_{0c}} + \frac{q_t S_t}{qS} C_{L_{0t}} + C_{L_{\alpha WB}} i_w + \frac{q_c S_c}{qS} C_{L_{\alpha c}} (i_c + \varepsilon_{0_c}) + \frac{q_t S_t}{qS} C_{L_{\alpha t}} (i_t - \varepsilon_{0_t}) \quad (4.3)$$

La pendiente de sustentación total,  $C_{L_\alpha}$ , está compuesta por las diferentes pendientes de sustentación del conjunto ala-fuselaje  $C_{L_{\alpha WB}}$ , del canard  $C_{L_{\alpha c}}$  y del estabilizador horizontal  $C_{L_{\alpha t}}$ . Las dos últimas corregidas para ser dimensionalmente coherentes.

$$C_{L_\alpha} = C_{L_{\alpha WB}} + \frac{q_c S_c}{qS} C_{L_{\alpha c}} \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \alpha}\right) + \frac{q_t S_t}{qS} C_{L_{\alpha t}} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \alpha}\right) \quad (4.4)$$

El coeficiente de sustentación del elevador,  $C_{L_{\delta_e}}$ , está compuesto por la efectividad de las superficies de control del canard  $C_{L_{\delta_c}}$  y del elevador  $C_{L_{\delta_t}}$ . Se ha de suponer que ambas deflexiones son idénticas a  $\delta_e$ .

$$C_{L_{\delta_e}} = \frac{q_c S_c}{qS} C_{L_{\delta_c}} + \frac{q_t S_t}{qS} C_{L_{\delta_t}} \quad (4.5)$$

El coeficiente de momentos,  $C_{m_0}$ , se compone de los coeficientes de los momentos generados en el centro aerodinámico de cada superficie,  $C_{MAC_c}, C_{MAC_w}$  y  $C_{MAC_t}$ , y de los momentos generados por la sustentación de cada superficie.

$$\begin{aligned} C_{m_0} = & \frac{q_c S_c}{qS} \frac{c_c}{c} C_{MAC_c} + \frac{q_c S_c}{qS} (\bar{x}_{xg} - \bar{x}_{ac_c}) (C_{L_{0c}} + C_{L_{\alpha c}} (i_c + \varepsilon_{0_c})) \\ & + C_{MAC_w} + (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_w}) (C_{L_{0w}} + C_{L_{\alpha w}} i_w) \\ & + \frac{q_t S_t}{qS} \frac{c_t}{c} C_{MAC_t} + \frac{q_t S_t}{qS} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_t}) (C_{L_{0t}} + C_{L_{\alpha t}} (i_t - \varepsilon_{0_t})) \end{aligned} \quad (4.6)$$

El coeficiente de momentos en función del ángulo de ataque es idéntico al producto de la pendiente de la sustentación total por la distancia entre el centro de gravedad y el punto neutro adimensionalizados con la cuerda media  $\bar{c}$ .

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{NA}) \quad (4.7)$$

El coeficiente de momentos en función de la deflexión de la superficie de control es idéntico a la suma de las contribuciones del cannard y de la superficie horizontal. Esta contribución es idéntica a la efectividad de la superficie de control multiplicada por la distancia entre el centro aerodinámico de la superficie y el centro de gravedad.

$$C_{m_{\delta_e}} = \frac{q_c S_c}{qS} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_c}) C_{L_{\delta_e}} + \frac{q_t S_t}{qS} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_t}) C_{L_{\delta_e}} \quad (4.8)$$

Una vez hallados todos los coeficientes se resuelve el sistema dado por

$$\begin{pmatrix} C_{L_\alpha} & C_{L_{\delta_e}} \\ -C_{M_\alpha} & -C_{M_{\delta_e}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W}{qS} - C_{L_0} \\ C_{M_0} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

obteniendo de esta manera los valores de  $\alpha$  y  $\delta_e$  para los cuales el avión se encuentra trimado. Si los valores de  $\alpha$  y de  $\delta_e$  son más grandes que los deseados habría que dimensionar las superficies horizontales y de control y volver a realizar el trimado.

## 4.2. Trimado Lateral

De igual manera que para el caso longitudinal para realizar el trimado lateral del avión éste debe de estar en equilibrio con las fuerzas laterales. Para el caso de vuelo estable sin ángulo de barrido el trimado es trivial pues todas las fuerzas laterales se encuentran en equilibrio. Cuando se introduce un elemento asimétrico que afecta a este equilibrio es cuando se realiza el trimado. Principalmente éste se usa para dimensionar las superficies de control. El sistema de ecuaciones que rige el comportamiento lateral-direccional se obtiene de las Ec. (2.2), (2.4) y (2.6).

$$F_y = m(\dot{V} + rU - pW) \quad (4.10)$$

$$L = \dot{p}I_x - I_{xz}(pq + \dot{r}) + qr(I_z - I_y) \quad (4.11)$$

$$N = \dot{r}I_z - I_{xz}(\dot{p} - qr) + pq(I_y - I_x) \quad (4.12)$$

Al considerar vuelo estable y en equilibrio todas las aceleraciones y las velocidades angulares se anulan. La única aceleración existente sería la de la gravedad. El sistema anterior

eliminando los términos nulos y descomponiendo las fuerzas y momentos en aerodinámicos y propulsivos queda así

$$F_{y_{T_1}} + F_{y_A} = -mg \sin \phi_1 \cos \theta_1 \quad (4.13)$$

$$L_{T_1} + L_A = 0 \quad (4.14)$$

$$N_{T_1} + N_A = 0 \quad (4.15)$$

Desarrollando los términos de fuerzas y momentos aerodinámicos a partir de sus derivadas de estabilidad correctamente dimensionalizadas, y usando únicamente las variables correspondientes al problema, se llega al sistema final. El subíndice '1' indica variable en equilibrio. La presión dinámica se expresa como  $\bar{q}_1$  para no confundir con la velocidad angular  $q_1$ .

$$-mg \sin \phi_1 \cos \theta_1 = (C_{y\beta} \beta_1 + C_{y\delta_a} \delta_{a_1} + C_{y\delta_r} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S + F_{y_{T_1}} \quad (4.16)$$

$$0 = (C_{l\beta} \beta_1 + C_{l\delta_a} \delta_{a_1} + C_{l\delta_r} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S b + L_{T_1} \quad (4.17)$$

$$0 = (C_{n\beta} \beta_1 + C_{n\delta_a} \delta_{a_1} + C_{n\delta_r} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S b + N_{T_1} \quad (4.18)$$

Cuando no hay asimetrías propulsivas y el empuje neto pasa por el centro de gravedad las componentes de empuje asimétrico se anulan

$$L_{T_1} = N_{T_1} = F_{y_{T_1}} = 0 \quad (4.19)$$

A continuación se presentan tres casos para los que se rompe el equilibrio lateral: caso de fallo de motor, caso de ángulo de barrido y caso de viraje estacionario.

#### 4.2.1. Caso 1: Fallo de motor

Ha de comprobarse que el avión puede operar aún cuando uno de sus motores se apaga. Es por eso por lo que se realiza este trimado. Cuando uno de los motores falla se produce una asimetría propulsiva que afecta a las fuerzas y momentos que actúan sobre el avión. El más afectado es el momento de guiñada. A este momento de guiñada se le suma una componente debida al aumento de resistencia resultante. Este aumento viene expresado como

$$N_{T_1} + \Delta N_{D_1} \approx (F_{OEI}) N_{T_1} \quad (4.20)$$

Donde  $N_{T_1}$  es el momento generado por el motor que ha fallado,  $\Delta N_{D_1}$  es el momento debido a la resistencia y  $F_{OEI}$  es un factor que depende del tipo de planta propulsora según Tabla 4.1.

| Tipo de planta propulsora | Paso variable | Paso fijo | Bajo BPR | Alto BPR |
|---------------------------|---------------|-----------|----------|----------|
| $F_{OEI}$                 | 1.25          | 1.10      | 1.15     | 1.25     |

Tabla 4.1 Factor de la planta propulsora [3]

El sistema de ecuaciones derivado de las Ec (4.15)-(4.17) de este problema es el siguiente

$$\begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-mg \sin \phi_1 \cos \theta_1 - F_{yT_1}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \\ \frac{-(F_{OEI})N_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

El problema que se plantea ante el fallo de motor es mantener el mismo rumbo cambiando únicamente las superficies de control. Para simplificar las ecuaciones se ha supuesto que las componentes de empuje asimétrico son nulas excepto  $N_{T_1}$ . Con lo que el sistema a resolver es el siguiente

$$\begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-mg \sin \phi_1 \cos \theta_1}{\bar{q}_1 S} \\ 0 \\ \frac{-(F_{OEI})N_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Las incógnitas de este problema son  $\beta$ ,  $\phi_1$ ,  $\delta_a$  y  $\delta_r$ . Imponiendo una de ellas se obtendrán el resto de variables necesarias para el trimado lateral. El ángulo  $\theta_1$  es dato del problema. Las deflexiones  $\delta_a$  y  $\delta_r$  no deben superar los  $25^\circ$  y en ángulo de balance no debe superar los  $5^\circ$ . El ángulo de barrido  $\beta$  debe ser lo más pequeño posible para mantener el rumbo.

#### 4.2.2. Caso 2: Equilibrio para un $\beta$ dado

También se ha de demostrar que el avión puede mantenerse estable en condiciones de viento lateral. Esto impone un ángulo de barrido  $\beta$  excesivo que ha de corregirse con los

mandos de control. En caso de no ser suficientes habría que dimensionar las superficies de control lateral-direccionales y el estabilizador vertical.

En este caso se impone un ángulo de barrido  $\beta$  correspondiente a la velocidad de viento límite que deseamos que supere el avión. Se desprecian todas las componentes de empuje asimétrico. Por lo que el sistema de ecuaciones (4.21) quedaría de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-mg \sin \phi_1 \cos \theta_1}{\bar{q}_1 S} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Las incógnitas de este problema son  $\beta$ ,  $\phi_1$ ,  $\delta_a$  y  $\delta_r$ . Imponiendo una de ellas se obtendrán el resto de variables necesarias para el trimado lateral. El ángulo  $\theta_1$  es dato del problema. Las deflexiones  $\delta_a$  y  $\delta_r$  no deben superar los  $25^\circ$  y en ángulo de balance no debe superar los  $5^\circ$ . El ángulo de barrido  $\beta$  debe ser lo más pequeño posible para mantener el rumbo.

#### 4.2.3. Caso 3: Viraje estacionario

En este tercer y último caso no son validas las ecuaciones presentadas previamente pues éstas corresponden a un vuelo rectilíneo. En este nuevo sistema han de tenerse en cuenta las velocidades angulares. En la Figura 4.1 Esquema de viraje estacionario [3]Figura 4.1 se muestra un ejemplo de viraje estacionario. Sin asimetrías propulsivas y con la línea de empuje neto pasando por el centro de gravedad las variables del problema son las siguientes

$$p_1 = 0 \quad q_1 = \dot{\psi} \sin \phi_1 \quad r_1 = \dot{\psi} \cos \phi_1 \quad (4.24)$$

$$M_{T_i} = L_{T_i} = N_{T_i} = F_{T_i} = 0 \quad (4.25)$$

Manipulando las ecuaciones (4.10)-(4.12) como se hizo anteriormente pero esta vez para el caso de viraje estacionario se llega al sistema siguiente

$$mr_1 U_1 - mg \sin \phi_1 = (C_{y\beta} \beta_1 + C_{y_r} \frac{r_1 b}{2U_1} + C_{y\delta_a} \delta_{a_1} + C_{y\delta_r} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S \quad (4.26)$$

$$q_1 r_1 (I_z - I_y) = (C_{l\beta} \beta_1 + C_{l_r} \frac{r_1 b}{2U_1} + C_{l\delta_a} \delta_{a_1} + C_{l\delta_r} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S b \quad (4.27)$$

$$I_{xz} q_1 r_1 = (C_{n\beta} \beta_1 + C_{n_r} \frac{r_1 b}{2U_1} + C_{n\delta_a} \delta_{a_1} + C_{n\delta_r} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S b \quad (4.28)$$

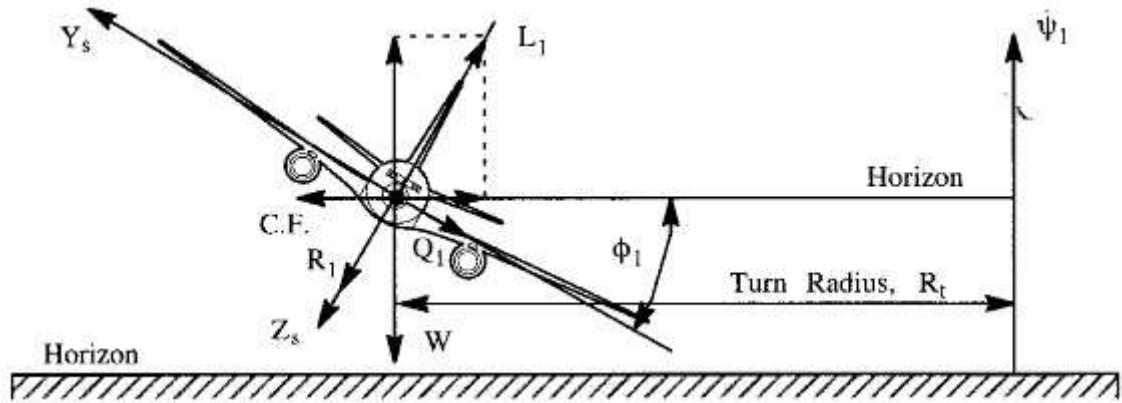


Figura 4.1 Esquema de viraje estacionario [3]

En el viraje estacionario la velocidad  $U_1$  será producto de la velocidad de giro  $\dot{\psi}$  por el radio de giro  $R_t$ .

$$U_1 = R_t \dot{\psi} \quad (4.29)$$

Por equilibrio de fuerzas se cumple que

$$m R_t \dot{\psi}^2 = L \sin \phi_1 \quad (4.30)$$

$$W = L \cos \phi_1 \quad (4.31)$$

Por combinación de las expresiones anteriores el radio y la velocidad de giro pueden ser escritos como

$$R_t = \frac{U_1^2}{g \tan \phi_1} \quad (4.32)$$

$$\dot{\psi} = \frac{g \tan \phi_1}{U_1} \quad (4.33)$$

En este problema en valor más determinante es el factor de carga. A partir de él se obtiene el resto de valores determinantes. Este se define como el cociente entre la sustentación y el peso del avión.



$$n = \frac{L}{W} \quad (4.34)$$

Por la Ec.(4.31) se puede establecer una relación entre el factor de carga y ángulo de balance.

$$n = \frac{1}{\cos \phi_1} \quad (4.35)$$

El factor de carga es un elemento estructuralmente restrictivo en aviación civil. Al imponer éste se obtiene el ángulo de balance y con éste último se obtienen los valores de las velocidades angulares sustituyendo la Ec.(4.33) en Ec.(4.24) dando como resultado

$$q_1 = \frac{g \sin^2 \phi_1}{U_1 \cos \phi_1} \quad (4.36)$$

$$r_1 = \frac{g \sin \phi_1}{U_1} \quad (4.37)$$

Con todo lo anterior introducido en Ec.(4.26)-(4.28) el sistema matricial correspondiente al caso de viraje estacionario es el siguiente

$$\begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -C_{yr} \frac{bg \sin \phi_1}{2U_1^2} \\ \frac{(I_{zz} - I_{yy})g^2 \sin^3 \phi_1}{\bar{q}_1 S b U_1^2 \cos \phi_1} - C_{lr} \frac{bg \sin \phi_1}{2U_1^2} \\ \frac{I_{xz} g^2 \sin^3 \phi_1}{\bar{q}_1 S b U_1^2 \cos \phi_1} - C_{nr} \frac{bg \sin \phi_1}{2U_1^2} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Donde imponiendo el valor de  $\phi_1$  se obtiene el resto de valores  $\beta$ ,  $\delta_a$  y  $\delta_r$  necesarios para el correcto trimado en viraje estacionario.

# Estabilidad dinámica

---

En el capítulo 2 se presentaron las ecuaciones del movimiento para un modelo de pequeñas perturbaciones. En este capítulo se analizará la solución a esas ecuaciones para determinar la respuesta del avión. Existen dos tipos de respuestas dependiendo de las condiciones iniciales del sistema: la respuesta natural y la respuesta forzada. La respuesta natural corresponde a la solución con unas condiciones iniciales dadas y con las variables de control nulas.

## 5.1. Dinámica Longitudinal

En esta sección se estudiará la respuesta natural longitudinal del sistema. Al ser respuesta natural se asume que el elevador tiene una deflexión nula. Las ecuaciones de movimiento longitudinales vienen dadas por las Ec. (2.42)-(2.44) que aquí se vuelven a representar. En este caso se han introducido, ya que se hablaron de ellas en el capítulo 3, las derivadas propulsivas. Pero a efectos del estudio que se va a realizar no se van a tener en cuenta. Ni las derivadas propulsivas ni los cambios en la propulsión indicados por  $\Delta\delta_i$ .

$$\left(m_1 \frac{d}{dt} - C_{xu} - C_{T_{xu}} - 2C_{T_{x1}}\right)u - \left(C_{x\dot{\alpha}}c_1 \frac{d}{dt} + C_{x\alpha}\right)\Delta\alpha - \left(C_{xq}c_1 \frac{d}{dt} + C_{x\theta}\right)\Delta\theta = C_{x\delta_e} \Delta\delta_e \quad (5.1)$$

$$-C_{zu}u - \left[\left(m_1 \frac{d}{dt} - C_{z\dot{\alpha}}c_1 \frac{d}{dt}\right) - C_{z\alpha}\right]\Delta\alpha - \left(m_1 \frac{d}{dt} + C_{zq}c_1 \frac{d}{dt} + C_{z\theta}\right)\Delta\theta = C_{z\delta_e} \Delta\delta_e \quad (5.2)$$

$$-\left(C_{nu} + C_{m_{T_u}} + 2C_{m_{T_1}}\right)u - \left(C_{m\dot{\alpha}}c_1 \frac{d}{dt} + C_{m\alpha}\right)\Delta\alpha + \frac{d}{dt}\left(I_{y1} \frac{d}{dt} - C_{mq}c_1\right)\Delta\theta = C_{m\delta_e} \Delta\delta_e \quad (5.3)$$

Para el estudio de la respuesta dinámica es preferible mostrar las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) en el espacio de variables de la siguiente manera (ya se han eliminado las derivadas propulsivas)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = \frac{1}{m_1} & [(C_{xu} + \xi_1 C_{zu})u + (C_{x\alpha} + \xi_1 C_{z\alpha})\Delta\alpha \\ & + [C_{xq}c_1 + \xi_1(m_1 + C_{zq}c_1)]q + (C_{x\theta} + \xi_1 C_{z\theta})\Delta\theta + (C_{x\delta_e} + \xi_1 C_{z\delta_e})\Delta\delta_e] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\frac{d\Delta\alpha}{dt} = \frac{1}{(m_1 - C_{z\dot{\alpha}}c_1)} [C_{zu}u + C_{z\alpha}\Delta\alpha + (m_1 + C_{zq}c_1)q + C_{z\theta}\Delta\theta + C_{z\delta_e}\Delta\delta_e] \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{I_{y1}} & [(C_{mu} + \xi_2 C_{zu})u + (C_{m\alpha} + \xi_2 C_{z\alpha})\Delta\alpha \\ & + [C_{mq}c_1 + \xi_2(m_1 + C_{zq}c_1)]q + \xi_2 C_{z\theta}\Delta\theta + (C_{m\delta_e} + \xi_2 C_{z\delta_e})\Delta\delta_e] \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} = q \quad (5.7)$$

donde

$$\xi_1 = \frac{C_{x\dot{\alpha}}c_1}{m_1 - C_{z\dot{\alpha}}c_1} \quad (5.8)$$

$$\xi_2 = \frac{C_{m\dot{\alpha}}c_1}{m_1 - C_{z\dot{\alpha}}c_1} \quad (5.9)$$

Identificando las variables de la siguiente forma

$$x_1 = u \quad x_2 = \Delta\alpha \quad x_3 = q \quad x_4 = \Delta\theta \quad (5.10)$$

El sistema de ecuaciones puede ser expresado de la siguiente forma matricial

$$\dot{X} = AX + BU \quad (5.11)$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad U = \delta_e \quad (5.12)$$

y los valores de todos los términos de este sistema matricial son

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{C_{xu} + \xi_1 C_{zu}}{m_1} & a_{12} &= \frac{C_{x\alpha} + \xi_1 C_{z\alpha}}{m_1} & a_{13} &= \frac{C_{xq} c_1 + \xi_1 (m_1 + C_{zq} c_1)}{m_1} \\ a_{14} &= \frac{C_{x\theta} + \xi_1 C_{z\theta}}{m_1} & a_{21} &= \frac{C_{zu}}{m_1 - C_{z\dot{\alpha}} c_1} & a_{22} &= \frac{C_{z\alpha}}{m_1 - C_{z\dot{\alpha}} c_1} & a_{23} &= \frac{m_1 + C_{zq} c_1}{m_1 - C_{z\dot{\alpha}} c_1} \\ a_{24} &= \frac{C_{z\theta}}{m_1 - C_{z\dot{\alpha}} c_1} & a_{31} &= \frac{C_{mu} + \xi_2 C_{zu}}{I_{y1}} & a_{32} &= \frac{C_{m\alpha} + \xi_2 C_{z\alpha}}{I_{y1}} \\ a_{33} &= \frac{C_{mq} c_1 + \xi_2 (m_1 + C_{zq} c_1)}{I_{y1}} & a_{34} &= \frac{\xi_2 C_{z\theta}}{I_{y1}} \\ a_{41} &= 0 & a_{42} &= 0 & a_{43} &= 1 & a_{44} &= 0 \\ b_1 &= \frac{C_{x\delta_e} + \xi_1 C_{z\delta_e}}{m_1} & b_2 &= \frac{C_{z\delta_e}}{m_1 + c_1 C_{z\dot{\alpha}}} & b_3 &= \frac{C_{m\delta_e} + \xi_2 C_{z\delta_e}}{I_{y1}} & b_4 &= 0 \\ m_1 &= \frac{2m}{\rho U_o S} & c_1 &= \frac{\bar{c}}{2U_o} & I_{y1} &= \frac{I_y}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S \bar{c}} \end{aligned}$$

Para la respuesta natural el elevador tiene una deflexión nula, por lo que  $U = 0$ . Dejando así el sistema de la siguiente manera  $\dot{X} = AX$  de fácil resolución. Para analizar la respuesta dinámica hay que obtener los autovalores de la matriz  $A$ . La respuesta dinámica puede ser combinación de cualquiera de las respuestas naturales mostradas en la Figura 5.1. Dependerá de los valores que tomen los autovalores,  $\lambda$ .

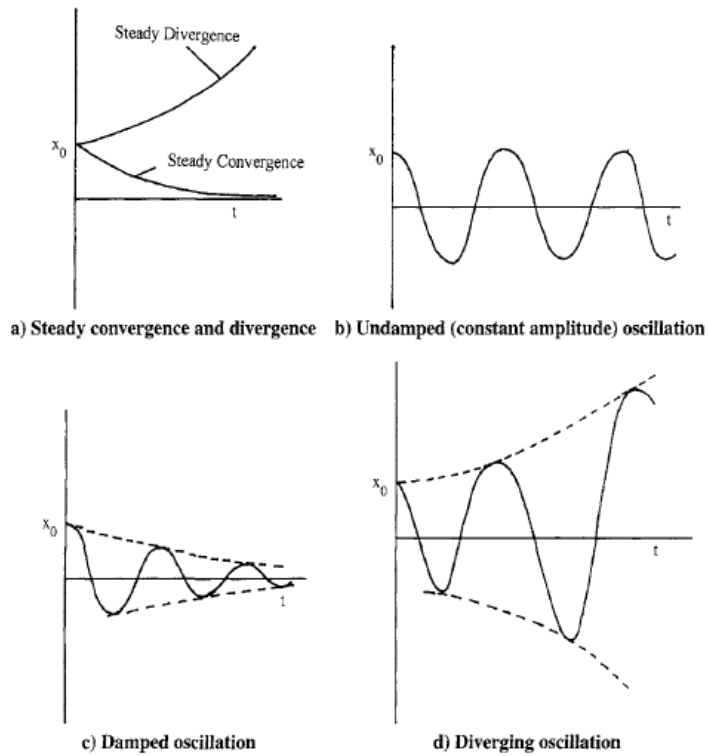


Figura 5.1 Movimiento Dinámico

Atendiendo a la Figura 5.1, un movimiento convergente y divergente estable (a) corresponde a un autovalor real negativo, para el caso convergente y a un autovalor real positivo, para el caso divergente. Un movimiento oscilatorio de amplitud constante (b) corresponde al caso de autovalor complejo con parte real nula. Un movimiento oscilatorio amortiguado (c) para el caso de autovalor complejo con parte real negativa. Y un movimiento oscilatorio divergente (d) para el caso de autovalor complejo con parte real positiva. De esta manera se puede ver que para que el avión sea dinámicamente estable los autovalores de la matriz  $A$  deben ser negativos en el caso de ser reales, y tener parte real negativa en el caso de ser complejos.

### 5.1.1. Análisis de los autovalores

Al obtener los diferentes autovalores del sistema matricial se puede extraer información sobre el movimiento que representan. Del autovalor correspondiente se extrae información sobre el amortiguamiento, la frecuencia natural y el periodo. Siendo el autovalor de la forma

$$\lambda = -r \pm js \tag{5.13}$$

el amortiguamiento y la frecuencia natural se obtienen a partir de los autovalores de la siguiente manera

$$\zeta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \quad (5.14)$$

$$\omega_n = \sqrt{r^2 + s^2} \quad (5.15)$$

y el periodo y el tiempo para el que la amplitud se duplica o se reduce a la mitad vienen dados por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5.16)$$

$$t_a = \frac{0.6931}{|r|} \quad (5.17)$$

### 5.1.2. Aproximación de los modos

A continuación se procede a presentar la aproximación de los modos acorde a [1]. Éstos son los datos que el programa, en el módulo de estabilidad dinámica proporcionará. En aviones convencionales las dos parejas de autovalores complejos corresponderán a dos tipos de movimientos. Uno fuertemente amortiguado denominado modo de corto periodo y otro suavemente amortiguado denominado modo fugoide.

Para el corto periodo la frecuencia natural y el amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_{n_{sp}} = \sqrt{\frac{C_{z\alpha} c_1 C_{mq}}{m_1 I_{y1}} - \frac{C_{m\dot{\alpha}}}{I_{y1}}} \quad \zeta_{sp} = \frac{-\left(\frac{C_{zq}}{m_1} + \frac{c_1}{I_{y1}} (C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}})\right)}{2\omega_{n_{sp}}} \quad (5.18)$$

Del análisis de las expresiones anteriores se extraen las siguientes conclusiones. La magnitud del amortiguamiento del corto periodo depende directamente de la derivada de estabilidad estática  $C_{m\dot{\alpha}}$ . Por lo que cuando  $C_{m\dot{\alpha}}$  decrece, el avión se hace más estable y la frecuencia de corto periodo aumenta. Obsérvese también que el amortiguamiento depende directamente de las derivadas  $C_{mq}$  y  $C_{m\dot{\alpha}}$ . La mayor contribución a estas derivadas es el estabilizador horizontal. Cuanto mayor sea el estabilizador horizontal, mayores serán estas derivadas y mayor será el amortiguamiento.

La aproximación del autovalor asociado es

$$\lambda_{sp} = -\zeta_{sp} \omega_{n_{sp}} \pm j \omega_{n_{sp}} \sqrt{1 - \zeta_{sp}^2} \quad (5.19)$$

Para el fugoide la frecuencia natural y el amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_{n_{ph}} = \frac{1}{m_1} \sqrt{C_{x\theta} C_{zu}} \quad \zeta = -\frac{C_{xu}}{2m_1 \omega_{n_{ph}}} \quad (5.20)$$

Y la aproximación del autovalor asociado al modo phugoide es el siguiente

$$\lambda_{ph} = -\zeta_{ph} \omega_{n_{ph}} \pm j \omega_{n_{ph}} \sqrt{1 - \zeta_{ph}^2} \quad (5.21)$$

## 5.2. Dinámica Lateral

De la misma manera que se hizo en el caso de la dinámica longitudinal se abordará ahora el tema de la dinámica lateral. Las ecuaciones del movimiento lateral vienen dadas por las ecuaciones 2.41-2.43.

$$\left( m_1 \frac{d}{dt} - b_1 C_{y\beta} \frac{d}{dt} - C_{y\beta} \right) \Delta\beta - \left( b_1 C_{yp} \frac{d}{dt} + C_{y\phi} \right) \Delta\phi + \left( m_1 \frac{d}{dt} - b_1 C_{yr} \frac{d}{dt} \right) \Delta\psi = C_{y\delta_r} \Delta\delta_r + C_{y\delta_a} \Delta\delta_a \quad (5.22)$$

$$\left( -C_{l\beta} - b_1 C_{l\dot{\beta}} \frac{d}{dt} \right) \Delta\beta + \left( -b_1 C_{lp} \frac{d}{dt} + I_{x1} \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta\phi + \left( -b_1 C_{lr} \frac{d}{dt} - I_{xz1} \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta\psi = C_{l\delta_r} \Delta\delta_r + C_{l\delta_a} \Delta\delta_a \quad (5.23)$$

$$\left( -C_{n\beta} - b_1 C_{n\dot{\beta}} \frac{d}{dt} \right) \Delta\beta + \left( -b_1 C_{np} \frac{d}{dt} - I_{xz1} \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta\phi + \left( -b_1 C_{nr} \frac{d}{dt} - I_{z1} \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta\psi = C_{n\delta_r} \Delta\delta_r + C_{n\delta_a} \Delta\delta_a \quad (5.24)$$

Para llegar al modelo matricial operamos de manera análoga al caso anterior.

$$\frac{d\beta}{dt} = \left( \frac{1}{m_1 - b_1 C_{y\dot{\beta}}} \right) [C_{y\beta} \Delta\beta + C_{y\phi} \Delta\phi + b_1 C_{yp} p - (m_1 - b_1 C_{yr}) r + C_{y\delta_a} \Delta\delta_a + C_{y\delta_r} \Delta\delta_r] \quad (5.25)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{I_{x1}} [C_{l\beta} \Delta\beta + C_{l\dot{\beta}} b_1 \Delta\dot{\beta} + b_1 C_{lp} p + b_1 C_{lr} r + I_{xz1} \dot{r} + C_{l\delta_a} \Delta\delta_a + C_{l\delta_r} \Delta\delta_r] \quad (5.26)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{I_{z1}} [C_{n\beta} \Delta\beta + C_{n\dot{\beta}} b_1 \Delta\dot{\beta} + b_1 C_{np} p + b_1 C_{nr} r + I_{xz1} \dot{p} + C_{n\delta_a} \Delta\delta_a + C_{n\delta_r} \Delta\delta_r] \quad (5.27)$$

donde  $b_1 = \frac{b}{2U_o}$  y

$$I_{x1} = \frac{I_x}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S b} \quad (5.28)$$

$$I_{z1} = \frac{I_z}{\frac{1}{2} \rho U_o^2 S b} \quad (5.29)$$

$$I_{xz1} = \frac{I_{xz}}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 S b} \quad (5.30)$$

Las operaciones que hay que realizar sobre este sistema de ecuaciones son más complejas y vienen indicadas en [1]. Aunque nomenclatura utilizada coincide en algunos puntos con el apartado 5.1 dedicado a la estabilidad longitudinal no son lo mismo estando debidamente definidos. Debido a las operaciones que se realizan para llegar a la forma matricial del sistema se han introducido las variables siguientes que dependen del tensor de inercia

$$I'_{x1} = \frac{I_{x1}}{I_{x1}I_{z1} - I_{xz1}^2} \quad (5.31)$$

$$I'_{z1} = \frac{I_{z1}}{I_{x1}I_{z1} - I_{xz1}^2} \quad (5.32)$$

$$I'_{xz1} = \frac{I_{xz1}}{I_{x1}I_{z1} - I_{xz1}^2} \quad (5.33)$$

Finalmente se llega a un sistema de ecuaciones de forma matricial donde las variables vienen definidas por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta\phi \\ p \\ \Delta\psi \\ r \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

las variables de control son

$$U = \begin{bmatrix} \Delta\delta_a \\ \Delta\delta_r \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Siendo el sistema de ecuaciones

$$\dot{X} = AX + BU \quad (5.36)$$

donde



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

y los valores de todos los términos de este sistema matricial son

$$a_{11} = \frac{C_{y\beta}}{m_1 - b_1 C_{y\beta}} \quad a_{12} = \frac{C_{y\phi}}{m_1 - b_1 C_{y\beta}} \quad a_{13} = \frac{C_{yp} b_1}{m_1 - b_1 C_{y\beta}}$$

$$a_{14} = 0 \quad a_{15} = - \left( \frac{m_1 - b_1 C_{yr}}{m_1 - b_1 C_{y\beta}} \right)$$

$$a_{21} = 0 \quad a_{22} = 0 \quad a_{23} = 1 \quad a_{24} = 0 \quad a_{25} = 0$$

$$a_{31} = C_{l\beta} I'_{z1} + C_{n\beta} I'_{xz1} + \xi_1 b_1 a_{11} \quad a_{32} = \xi_1 b_1 a_{12}$$

$$a_{33} = C_{lp} b_1 I'_{z1} + C_{np} I'_{xz1} b_1 + \xi_1 b_1 a_{13} \quad a_{34} = 0$$

$$a_{35} = C_{lr} b_1 I'_{z1} + C_{nr} I'_{xz1} b_1 + \xi_1 b_1 a_{15}$$

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0 \quad a_{45} = 1 \quad a_{51} = C_{n\beta} I'_{x1} + C_{l\beta} I'_{xz1} + \xi_2 b_1 a_{11}$$

$$a_{52} = \xi_2 b_1 a_2 \quad a_{53} = b_1 (C_{np} I'_{x1} + C_{lp} I'_{xz1} + \xi_2 a_{11})$$

$$a_{54} = 0 \quad a_{55} = b_1 (C_{nr} I'_{x1} + C_{lr} I'_{xz1} + \xi_2 a_{15})$$

$$b_{11} = \frac{C_{y\delta_a}}{(m_1 - b_1 C_{y\beta})} \quad b_{12} = \frac{C_{y\delta_r}}{(m_1 - b_1 C_{y\beta})}$$

$$b_{21} = 0 \quad b_{22} = 0$$

$$b_{31} = C_{l\delta_a} I'_{z1} + C_{n\delta_a} I'_{xz1} + \xi_1 b_1 b_{11} \quad b_{32} = C_{l\delta_r} I'_{z1} + C_{n\delta_r} I'_{xz1} + \xi_1 b_1 b_{12}$$

$$b_{41} = 0 \quad b_{42} = 0$$

$$b_{51} = C_{n\delta_a} I'_{x1} + C_{l\delta_a} I'_{xz1} + \xi_2 b_1 b_{11} \quad b_{52} = C_{n\delta_r} I'_{x1} + C_{l\delta_r} I'_{xz1} + \xi_2 b_1 b_{12}$$

donde

$$\xi_1 = I'_{z1} C_{l\dot{\beta}} + I'_{xz1} C_{n\dot{\beta}} \quad \xi_2 = I'_{x1} C_{n\dot{\beta}} + I'_{xz1} C_{l\dot{\beta}}$$

Para la respuesta natural el elevador tiene una deflexión nula, por lo que  $U = 0$ . Dejando así el sistema de la siguiente manera  $\dot{X} = AX$  de fácil resolución.

### 5.2.1. Análisis de los autovalores

Para analizar la respuesta dinámica hay que obtener los autovalores de la matriz  $A$ . Estos serán cinco autovalores. Uno de ellos será el autovalor nulo,  $\lambda = 0$ , que corresponderá a la perturbación en el ángulo de guiñada,  $\Delta\psi$ . Para aviones convencionales el resto de autovalores consisten en dos autovalores reales y un par de autovalores complejos generalmente.

Para un avión estable un autovalor real tiene un valor grande negativo y corresponde al modo de convergencia en balance. El otro autovalor real puede tener un valor pequeño y puede ser positivo o negativo, corresponde al modo espiral. Si es positivo, entonces el modo espiral es divergente. El movimiento asociado a la pareja de autovalores complejos es la oscilación de balanceo holandés. La amortiguación y frecuencia de este último modo depende del tipo de aeronave.

Del autovalor complejo se extrae información de la siguiente manera. Siendo el autovalor

$$\lambda = -r \pm js \quad (5.38)$$

el amortiguamiento y la frecuencia natural se obtienen

$$\zeta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \quad (5.39)$$

$$\omega_n = \sqrt{r^2 + s^2} \quad (5.40)$$

y el periodo y el tiempo para el que la amplitud se duplica o se reduce a la mitad vienen dados por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5.41)$$

$$t_a = \frac{0.6931}{|r|} \quad (5.42)$$

## 5.2.2. Aproximación a los autovalores

A continuación se procede a presentar la aproximación de los modos acorde a [1]. Éstos son los datos que el programa, en el módulo de estabilidad dinámica proporcionará.

Para el balanceo holandés la frecuencia natural y el amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_{n_d} = \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 I_{z1}}\right) [C_{y\beta} C_{nr} b_1 + C_{n\beta} C(m_1 - b_1 C_{yr})]} \quad (5.43)$$

$$\zeta_d = -\left(\frac{1}{2\omega_{n_d}}\right) \left(\frac{C_{y\beta}}{m_1} + \frac{b_1 C_{nr}}{I_{z1}}\right) \quad (5.44)$$

Siendo la aproximación del autovalor asociado

$$\lambda_d = -\zeta_d \omega_{n_d} \pm j \omega_{n_d} \sqrt{1 - \zeta_d^2} \quad (5.45)$$

Para el modo espiral la aproximación es la siguiente

$$\lambda_{spiral} = \frac{b_1 (C_{l\beta} C_{nr} - C_{n\beta} C_{lr})}{I_{z1} C_{l\beta}} \quad (5.46)$$

Normalmente  $C_{l\beta} < 0$  por la estabilidad del efecto diedro y  $C_{nr} < 0$  por el amortiguamiento positivo en guiñada por lo que  $C_{l\beta} C_{nr} > 0$ . También  $C_{n\beta} > 0$  por ser direccionalmente estable y  $C_{lr} > 0$  al generarse un momento en balance positivo debido a una guiñada positiva. De esta manera  $C_{n\beta} C_{lr} > 0$ . Entonces cuando  $C_{l\beta} C_{nr} > C_{n\beta} C_{lr}$  el autovalor  $\lambda_{spiral} < 0$  y el modo espiral será estable. Queda descrito así un criterio de estabilidad lateral-direccional.

## Explicación del programa *AS.gui*

---

Una vez realizada toda la relación de derivadas de estabilidad establecida en el capítulo 3, los métodos necesarios para su cálculo se implementarán en Matlab. Se desarrollará una interfaz que permita al usuario introducir los datos de la aeronave de manera ágil proponiendo datos de referencia para el estudio de la estabilidad. Pretende ser una interfaz sencilla que permita elegir entre diferentes configuraciones, cargar datos de otros modelos, modificar los mismos, etc. La sencillez de esta interfaz permitirá en futuros trabajos adaptarle otros módulos de cálculo.



Figura 6.1 Logotipo del programa

## 6.1. Sobre el programa

En esta primera aproximación al diseño del programa no se pretende dejar un producto terminado. El objetivo principal es la elaboración de una arquitectura primaria de un programa de cálculo de aeronaves que sirva de herramienta al alumno de ingeniería aeronáutica. El programa que aquí se desarrolla contiene únicamente los módulos dedicados al cálculo de la estabilidad dejando abierta la posibilidad de modificaciones. Estas modificaciones podrán ser tanto de ampliación a otro tipo de cálculos (aerodinámica, propulsión...) como de modificación de la parte del programa dedicada a la estabilidad.

El nombre del programa es AS.gui (Academic Stability). Es una clara referencia a que el programa se dedicará a calcular la estabilidad de aeronaves en el ámbito académico utilizando la herramienta *gui* que proporciona MATLAB® para desarrollar interfaces. Al abrir la posibilidad de la creación de otros programas con idéntica estructura para la realización de otro tipo de cálculos (aerodinámica, propulsión...) el nombre se alteraría ligeramente. Por ejemplo: *AP.gui* (*Academic Propulsive*).

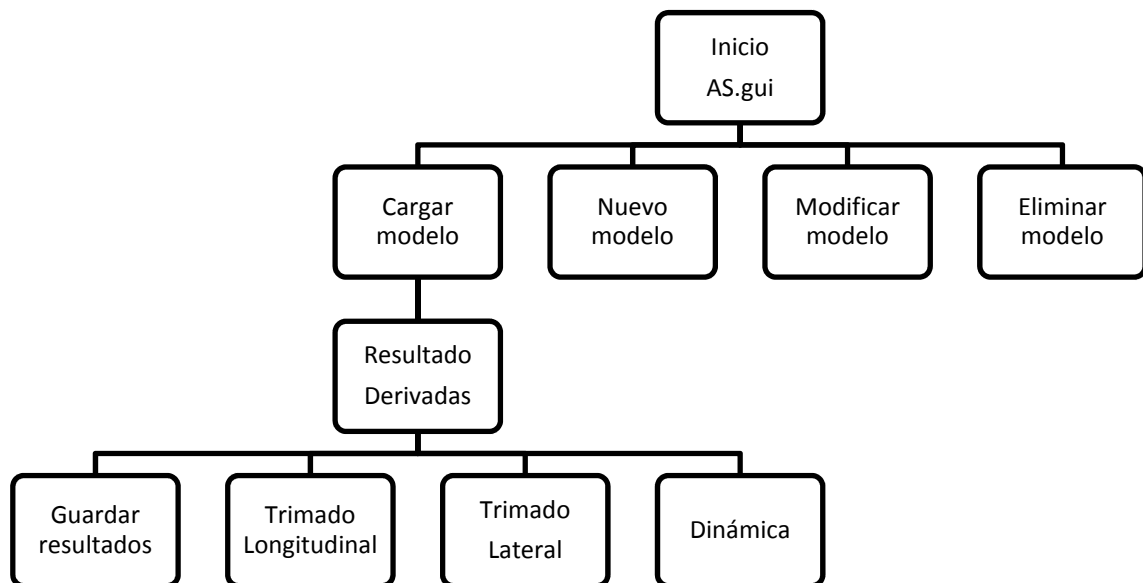


Figura 6.2 Arquitectura del programa

En el esquema de la Figura 6.2 se muestra la arquitectura del programa. Al iniciar el programa se presentan cuatro opciones: Cargar un modelo guardado, crear un nuevo modelo, modificar un modelo existente o eliminar un modelo. Con modelo se refiere a todos los datos de la aeronave que queremos estudiar. Estos datos se guardan en la memoria del programa y son datos geométricos, aerodinámicos, de masa, de condición de vuelo y de parámetros varios

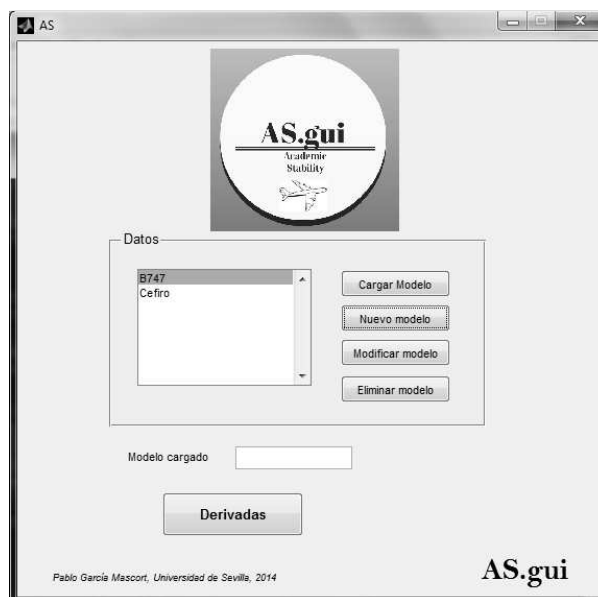
necesarios para el estudio de la estabilidad. La herramienta importante de este programa se desarrolla al cargar un modelo, pues es a este modelo sobre el que se realizarán los cálculos para hallar las derivadas de estabilidad. Adicionalmente se podrán realizar estudios de trimado longitudinal y lateral, estudios dinámicos y guardar los resultados obtenidos.

## 6.2. Manual uso de AS.gui

A continuación se detallan los pasos que hay que dar para manejar el programa. El programa *AS.gui* se encarga de calcular las derivadas de estabilidad de una aeronave a partir de unas ecuaciones programadas de antemano. Los datos necesarios se introducen por él usuario.

### 6.2.1. Iniciar AS.gui

Abrir la carpeta que contiene el programa y teclear en la ventana de comandos *AS*. Automáticamente se abrirá la siguiente ventana, que es la ventana principal del programa.



**Figura 6.3 Pantalla principal del programa**

En ella aparecen los modelos existentes en la base de datos y se ofrecen cuatro opciones: cargar modelo, crear un nuevo modelo, modificar un modelo existente y eliminar un modelo.

## 6.2.2. Cargar modelo

Si se quiere estudiar la estabilidad de un modelo ya ubicado en la base de datos se elige uno de los modelos de la lista y se pulsa 'Cargar Modelo'. Automáticamente el modelo elegido se cargará.

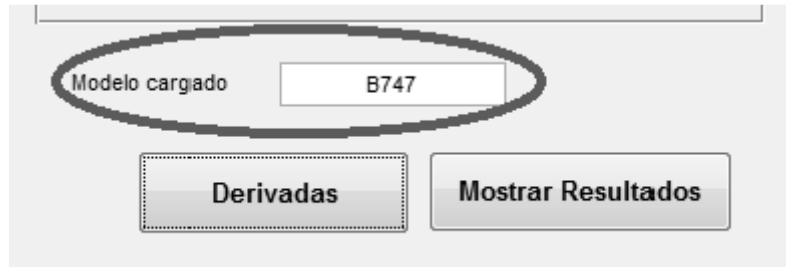


Figura 6.4 Detalle del modelo cargado

Para que el programa comience a realizar los cálculos hay que pulsar el botón 'Derivadas'. Una vez que se han realizado los cálculos aparecerá el botón 'Mostrar Resultados', al pulsarlo aparecerán todas las derivadas de estabilidad de la aeronave elegida.

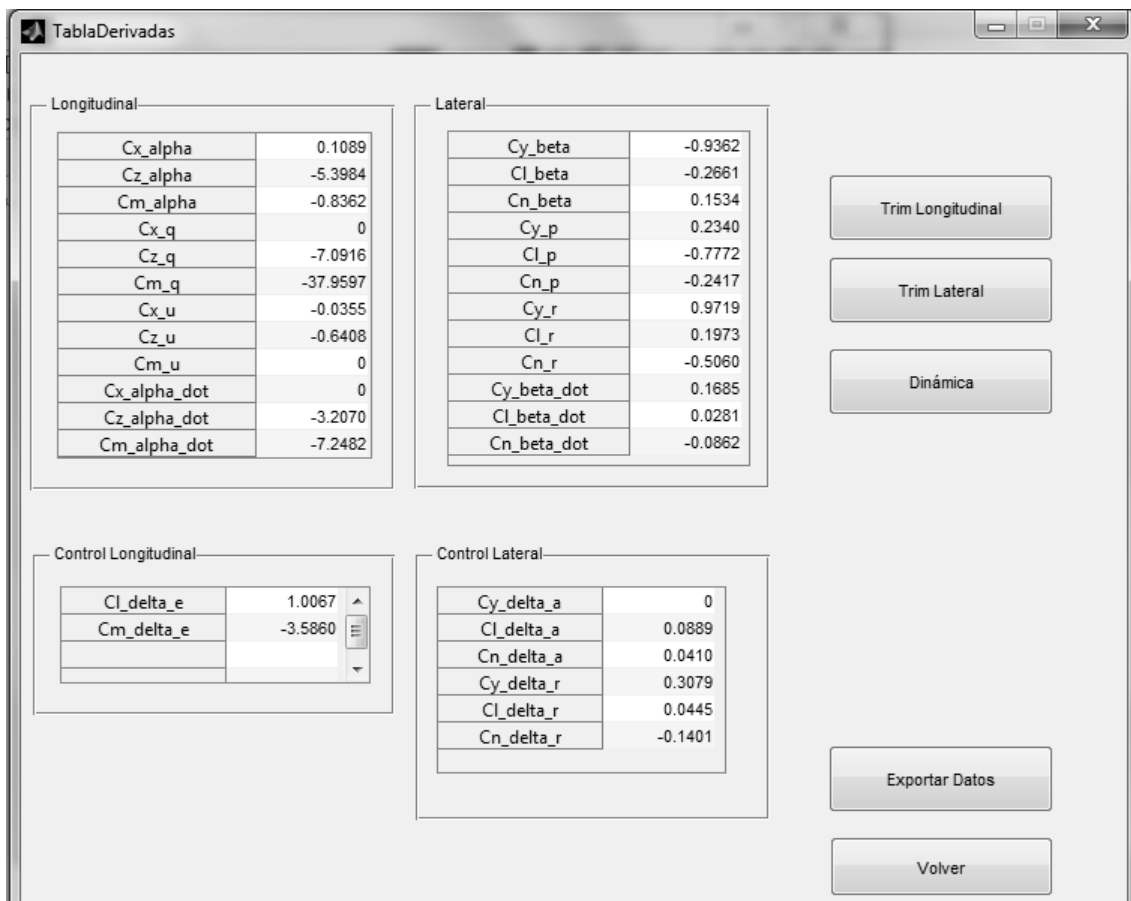


Figura 6.5 Pantalla de resultados

En esta nueva ventana donde aparecen todas las derivadas se da la opción de obtener más datos. Estos son: estudio de trimado longitudinal, trimado lateral y estudio de la dinámica del avión. Adicionalmente se podrán guardar los resultados obtenidos.

### 6.2.2.1. Trimado longitudinal

Al pulsar esta opción el programa proporciona los valores de ángulo de ataque y de deflexión del elevador que mantienen en equilibrio la aeronave.

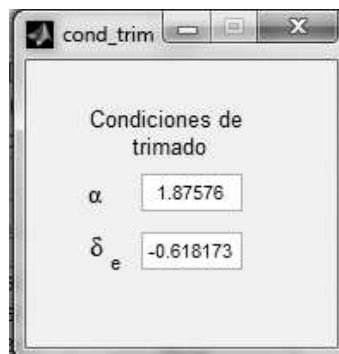


Figura 6.6 Resultados del trimado longitudinal

### 6.2.2.2. Trimado lateral

Al seleccionar esta opción se ofrece la posibilidad de realizar tres estudios diferentes del equilibrio lateral. Estos son: fallo de motor, equilibrio lateral y viraje lateral.



Figura 6.7 Trimado lateral con detalle de Fallo de motor

Al elegir una de las tres opciones diferentes que se ofrecen la apariencia de la ventana cambiará para introducir los datos correspondientes. En el caso de fallo de motor los datos que



hay que introducir en la tabla de datos de vuelo son: altura (h), velocidad (v) y el momento generado por el motor que ha fallado (N<sub>ti</sub>).

Los datos a introducir en la tabla de datos de vuelo en el caso de equilibrio lateral son: altura (h), velocidad (v) y el ángulo de barrido ( $\beta$ ).

Equilibrio Lateral

| Datos Vuelo                  | Resultados                      |
|------------------------------|---------------------------------|
| h <input type="text"/>       | $\delta_a$ <input type="text"/> |
| v <input type="text"/>       | $\delta_r$ <input type="text"/> |
| $\beta$ <input type="text"/> | $\phi$ <input type="text"/>     |

Calcular

Figura 6.8 Trimado lateral para un  $\beta$  dado

Los datos a introducir en la tabla de datos de vuelo en el caso de equilibrio lateral en viraje estacionario son: altura (h), velocidad (v) y el ángulo de balance ( $\phi$ ), que depende del factor de carga.

Viraje

| Datos Vuelo                 | Resultados                      |
|-----------------------------|---------------------------------|
| h <input type="text"/>      | $\delta_a$ <input type="text"/> |
| v <input type="text"/>      | $\delta_r$ <input type="text"/> |
| $\phi$ <input type="text"/> | $\beta$ <input type="text"/>    |

Calcular

Figura 6.9 Trimado lateral para viraje estacionario

Una vez introducidos todos los datos se pulsa 'Calcular' y se muestran los resultados en la tabla de resultados.

### 6.2.2.3. Dinámica

Al seleccionar esta opción el programa presenta los datos del estudio de la dinámica del avión. Estos son todos los autovalores de la matriz del sistema longitudinal y lateral. Y las aproximaciones de los modos.

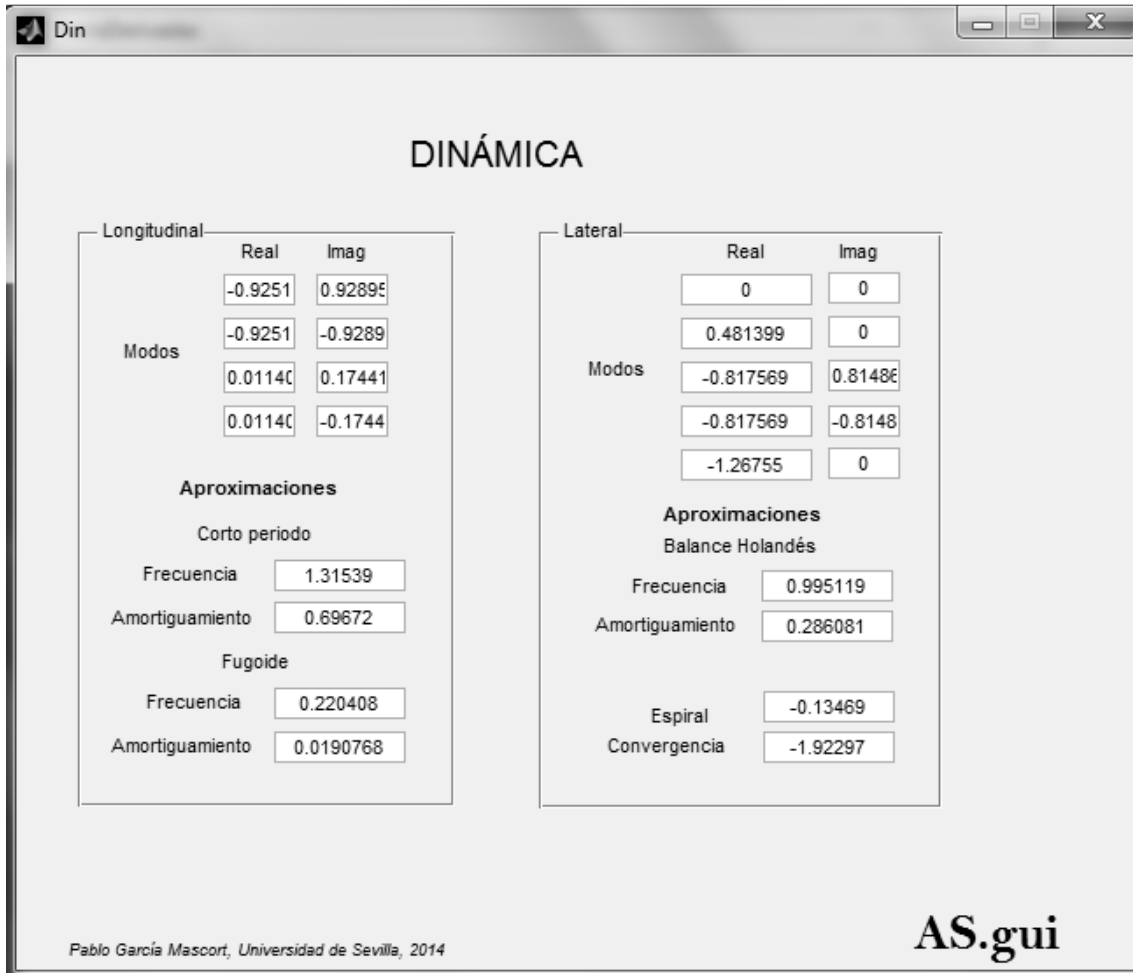


Figura 6.10 Datos del estudio dinámico

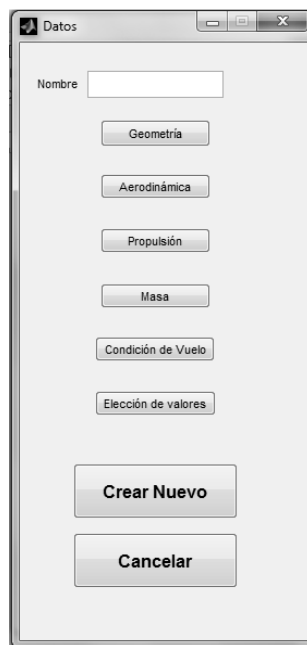
### 6.2.2.4. Exportar datos

Al pulsar este botón todas las variables de estabilidad mostradas se exportan a una tabla de Excel. De esta manera se podrán manipular más fácilmente. La tabla se guarda en la carpeta del programa llamada 'Archivos Estabilidad'.

### 6.2.3. Nuevo modelo

Si en vez de cargar un modelo existente se desea crear un nuevo modelo para estudiar su estabilidad se pulsa la opción de *'Nuevo Modelo'*. Antes es necesario elegir un modelo de la lista para utilizarlo de guía a la hora de introducir los datos. Aparecerá la ventana de Datos. En ella se pondrá el nombre del modelo y se introducirán todos los datos del nuevo modelo. Está dividido en datos de *'Geometría'*, *'Aerodinámica'*, *'Propulsión'*, *'Masa'*, *'Condición de vuelo'* y *'Elección de valores'*. Será necesario introducir todos los datos para que el programa permita crear el modelo.

*Nota importante: ¡No cerrar las ventanas pulsando en la X de la barra de título! ¡El programa fallaría! ¡Utilizar los botones dispuestos para ello!*



**Figura 6.11 Ventana de Datos**

Cada botón abrirá una ventana que permitirá introducir los datos correspondientes. En cada ventana existe un botón de *'Ayuda'* que al pulsar abrirá un documento que explica con detalle cuáles son los datos que se piden y en qué unidades. Los datos de *'Propulsión'* no podrán ser introducidos en el modelo pues en esta primera versión del programa no se tienen en cuenta. Con el botón *'Elección de valores'* se introducirán todos aquellos datos procedentes de las diversas gráficas que se han presentado en el capítulo 3 y no se han programado. La Figura 6.12 muestra una captura de pantalla de la ventana que se abre al pulsar *'Elección de valores'*. Son varios los valores que hay que introducir. Cuando se va a introducir un valor en una casilla al pulsar la tecla *'Intro'* del teclado aparece a la derecha la gráfica de la que se obtiene dicho valor. Igualmente al pulsar el botón de *'Ayuda'* aparecerá una relación de todas las figuras del presente documento de donde se obtienen dichos valores.

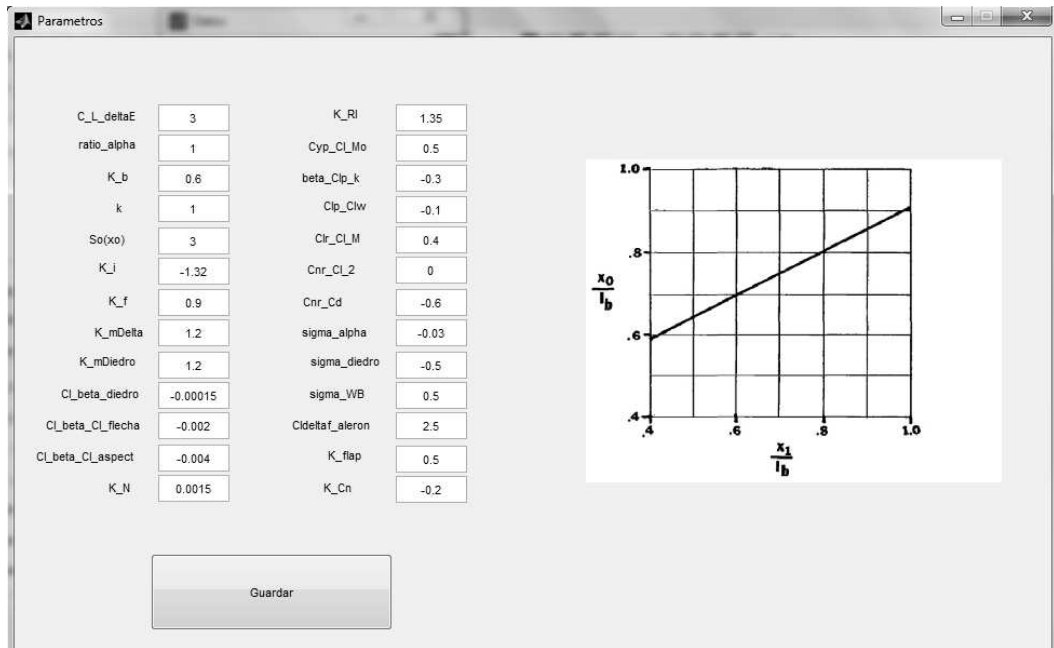


Figura 6.12 Pantalla de 'Elección de valores'

#### 6.2.4. Modificar modelo

Con esta opción se da la posibilidad de modificar uno de los modelos, previamente seleccionado, de la lista de modelos. Se abre una ventana similar a la de introducir Datos pero esta vez modificará el modelo ya existente.



Figura 6.13 Ventana de modificar modelo

### 6.2.5. Eliminar modelo

Para eliminar un modelo se selecciona esta opción, con el modelo que se desea eliminar previamente seleccionado en la lista de modelos. El programa se asegurará que se desea eliminar el modelo y tras la verificación lo eliminará.

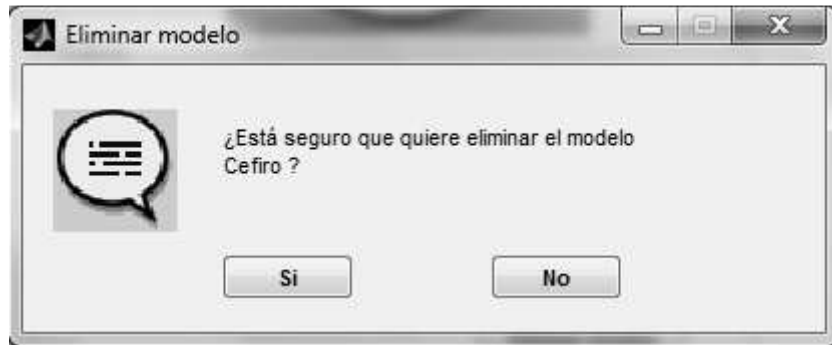


Figura 6.14 Verificación de eliminación

### 6.3. Conclusión del programa

Se ha presentado aquí un programa con una arquitectura simple y de interfaz sencilla para realizar el estudio de la estabilidad de la aeronave. Nada impide utilizar esta misma interfaz para otro tipo de estudios relacionados con el diseño de aeronaves siendo éste el espíritu inicial del presente trabajo. Esto se realizaría añadiendo más módulos al programa o hacer este mismo programa parte de uno más grande. Así en uno mismo se podrían realizar estudios de estabilidad, aerodinámicos, estructurales, propulsivos... Se conseguiría así una herramienta académica bastante completa para el diseño de aeronaves.

# Comparación de resultados

---

Una vez compilados todos los métodos para calcular las derivadas de estabilidad en un archivo .m, que será el núcleo principal del programa, se inicia el mismo para obtener resultados y analizarlos. Tras el análisis se comprobará la validez de los métodos utilizados con resultados de aviones en la literatura y se estudiará la necesidad de incorporar alguna modificación a los mismos.

## 7.1. Comparación con B747

Se van a comparar los datos obtenidos por el programa con los datos en [3] del B747. Se divide la comparación en longitudinal y lateral-direccional.

### 7.1.1. Análisis de los datos Longitudinales

En la Tabla 7.1 se expresan los valores de las derivadas de estabilidad longitudinal de un B747 [3], los valores de las derivadas de estabilidad obtenidos con la implementación de los métodos introducidos en el programa, y el error relativo cometido. Se observa que existen diferencias, en la mayoría de los casos menores del 150 %, aceptables debido a que no se está exigiendo exactitud sino una aproximación a los valores. En las derivadas en los que estas diferencias son mayores se intentará dar una explicación y proponer una solución.

|                     | B747 Real [3] | Programa    | Error  |
|---------------------|---------------|-------------|--------|
| $C_{x\alpha}$       | 1,13          | 0,10886539  | 90%    |
| $C_{z\alpha}$       | -5,57         | -5,38064207 | 3%     |
| $C_{m\alpha}$       | -1,45         | -0,83623967 | 42%    |
| $C_{xq}$            | 0             | 0           |        |
| $C_{zq}$            | -5,65         | -7,09159904 | -26%   |
| $C_{mq}$            | -21,4         | -37,9596602 | -77%   |
| $C_{xu}$            | 0             | -0,03548185 |        |
| $C_{zu}$            | -0,22         | -0,64082282 | -191%  |
| $C_{mu}$            | 0,07          | 0           | 100%   |
| $C_{x\dot{\alpha}}$ | 0             | 0           |        |
| $C_{z\dot{\alpha}}$ | -6,7          | -3,207      | 52%    |
| $C_{m\dot{\alpha}}$ | -3,3          | -194,945428 | -5807% |
| $C_{x\delta_e}$     | 0             |             |        |
| $C_{z\delta_e}$     | -0,36         | -1,0067     | -180%  |
| $C_{m\delta_e}$     | -1,4          | -3,5860     | -156%  |

Tabla 7.1 Comparación de derivadas longitudinales con B747 real

### 7.1.1.1. Variación de $\Delta C_m$ con la variación del ángulo de ataque con el tiempo $\dot{\alpha}$

El valor de esta derivada difiere bastante del valor que se debería obtener. Analizando las diferentes contribuciones se llega a la conclusión de que el posible fallo a la hora de estimar esta derivada de estabilidad se encuentra en la contribución del conjunto ala-fuselaje en la cual hay elementos que dependen de integrales sobre el fuselaje. Esta contribución viene definida por la siguiente ecuación:

$$C_{m\dot{\alpha},WB} = \left[ K_{W(B)} + K_{B(W)} \right] \left( \frac{S_e C_e^2}{S C^2} \right) C_{m\dot{\alpha},e} + C_{m\dot{\alpha},B} \frac{S_{B,\max} l_f^2}{S C^2} \quad (7.1)$$

Para evitar esta gran desviación en el valor de la derivada se opta por sustituir el método utilizado por otro más conservador pero que ofrece valores más cercanos a los reales. Este método utiliza la derivada obtenida anteriormente  $C_{L\dot{\alpha},WB}$  e iguala  $C_{m\dot{\alpha},WB}$  al momento que produce esta derivada, así

$$C_{m\dot{\alpha},WB} = C_{L\dot{\alpha},WB} (\bar{x}_{ac} - \bar{x}_{cg}) \quad (7.2)$$

El nuevo valor obtenido con este método se acerca mucho más al valor real como puede verse en la Tabla 7.2 donde se comparan los de  $C_{m\dot{\alpha}}$ . El obtenido de la literatura [3], el obtenido con el método sin modificar y el obtenido con el nuevo método en el que la contribución del conjunto ala-fuselaje se calcula de diferente manera.

|                     | <b>B747 Real [3]</b> | <b>Método antiguo</b> | <b>Nuevo método</b> | <b>Error actual</b> |
|---------------------|----------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|
| $C_{m\dot{\alpha}}$ | <b>-3,3</b>          | <b>-194,9454</b>      | <b>-7,2482</b>      | <b>-120%</b>        |

Tabla 7.2 Mejora del valor de  $C_{m\dot{\alpha}}$

### 7.1.2. Análisis de los datos Lateral-Direccionales

En la Tabla 7.3 se expresan los valores de las derivadas de estabilidad de un B747 [3], los valores de las derivadas de estabilidad obtenidos con la implementación de los métodos introducidos en el programa, y el error relativo cometido. Idéntico al caso longitudinal.

Se observa que existen diferencias, en la mayoría de los casos menores del 150 %, aceptables debido a que no se está exigiendo exactitud sino una aproximación a los valores. En las derivadas en los que estas diferencias son mayores se intentará dar una explicación y proponer una solución.



|                    | <b>B747 Real [3]</b> | <b>Programa</b>    | <b>Error</b> |
|--------------------|----------------------|--------------------|--------------|
| $C_{y\beta}$       | <b>-1,08</b>         | <b>-0,9362411</b>  | 13%          |
| $C_{l\beta}$       | <b>-0,281</b>        | <b>-0,26614244</b> | 5%           |
| $C_{n\beta}$       | <b>0,184</b>         | <b>-0,0845</b>     | 146%         |
| $C_{yp}$           | <b>0</b>             | <b>0,23396804</b>  |              |
| $C_{lp}$           | <b>-0,502</b>        | <b>-0,77720687</b> | -55%         |
| $C_{np}$           | <b>-0,222</b>        | <b>-0,24167929</b> | -9%          |
| $C_{yr}$           | <b>0</b>             | <b>0,97185818</b>  |              |
| $C_{lr}$           | <b>0,195</b>         | <b>11,3603</b>     | -5726%       |
| $C_{nr}$           | <b>-0,36</b>         | <b>-0,50595942</b> | -41%         |
| $C_{y\delta_a}$    | <b>0</b>             | <b>0</b>           |              |
| $C_{l\delta_a}$    | <b>0,053</b>         | <b>0,0889</b>      | -68%         |
| $C_{n\delta_a}$    | <b>0,0083</b>        | <b>0,041</b>       | -394%        |
| $C_{y\delta_r}$    | <b>0,179</b>         | <b>0,3079</b>      | -72%         |
| $C_{l\delta_r}$    | <b>0</b>             | <b>0,0445</b>      |              |
| $C_{n\delta_r}$    | <b>-0,113</b>        | <b>-0,1401</b>     | -24%         |
| $C_{y\dot{\beta}}$ |                      | <b>0,16852516</b>  |              |
| $C_{l\dot{\beta}}$ |                      | <b>0,02807292</b>  |              |
| $C_{n\dot{\beta}}$ |                      | <b>-0,0861753</b>  |              |

**Tabla 7.3 Comparación de derivadas lateral-direccionales con B747 real**

### 7.1.2.1. Variación de $\Delta C_n$ con el ángulo de barrido $\beta$

Demasiada desviación con respecto a los datos del B747 debido al cambio de signo que se puede observar. Tras comprobar las contribuciones de cada elemento a esta derivada se vuelve a encontrar, como pasaba con  $C_{m\dot{\alpha}}$ , que el conjunto ala-fuselaje proporciona un valor anómalo. La expresión de  $C_{n\beta, WB}$  se describió en el capítulo 3 y es como sigue.

$$C_{n\beta, WB} = -K_N K_{RI} \left( \frac{S_{B,S}}{S} \right) \left( \frac{l_f}{b} \right) \quad (7.3)$$

Se decide sustituir el método utilizado por otro que da mejores resultados como es el valor que proporciona la Ec.(7.4) [2]. Se puede observar la mejora en la Tabla 7.4

$$C_{n\beta, WB} = -1.3 \frac{V_b}{Sb} \left( \frac{D_f}{W_f} \right) \quad (7.4)$$

### 7.1.2.2. Variación de $\Delta C_l$ con el 'yaw rate' $r$

Se obtienen datos anormales para esta derivada. Analizando las distintas contribuciones se llega la conclusión de que el elemento que puede dar el error es el diedro que se obtenía con la siguiente expresión.

$$\left( \frac{\Delta C_{lr}}{\Gamma} \right) = \left( \frac{1}{12} \right) \left( \frac{\pi A \sin \Lambda_{c/4}}{A + 4 \cos \Lambda_{c/4}} \right) \quad (7.5)$$

Se opta por sustituir la Ec.(7.5) por una expresión más sencilla que aporte resultados más satisfactorios como se puede observar en la Tabla 7.4. La Ec.(7.6) es el nuevo método [2].

$$C_{lr} = \frac{C_L}{3} \quad (7.6)$$

|              | B747 Real [3] | Método antiguo | Nuevo método | Error |
|--------------|---------------|----------------|--------------|-------|
| $C_{n\beta}$ | 0,184         | -0,0845        | 0,1534       | 17%   |
| $C_{lr}$     | 0,195         | 11,3603        | 0,2265       | -16%  |

Tabla 7.4 Nuevos valores tras la modificación

### 7.1.2.3. Derivadas con respecto a $\dot{\beta}$

No se dispone de datos de estas derivadas para poder compararlas.

## 7.2. Comparación con Céfiro

A continuación se comparan los valores obtenidos al introducir los datos geométricos del UAV Céfiro en el programa con los datos obtenido de [5].

### 7.2.1. Análisis de los datos Longitudinales

No se observan grandes diferencias en la mayoría de los datos proporcionados en la Tabla 7.5. Los métodos utilizados son, en la mayoría de los casos, similares a los utilizados en [5]. Las mayores diferencias se encuentran en las derivadas con la variación del ángulo de ataque con el tiempo  $\dot{\alpha}$ . Se puede pensar que el fallo proviene del método utilizado por la cantidad de variables que se utilizan, así como que hay variables que se han aproximado no dándose su valor real como son los datos del ala expuesta.

|                     | <b>Céfiro [5]</b> | <b>Programa</b> | <b>Error</b> |
|---------------------|-------------------|-----------------|--------------|
| $C_{x\alpha}$       | <b>0,1022</b>     | <b>0,23536</b>  | -130%        |
| $C_{z\alpha}$       | <b>-3,8752</b>    | <b>-5,1715</b>  | -33%         |
| $C_{m\alpha}$       | <b>-0,5273</b>    | <b>-0,1580</b>  | 70%          |
| $C_{xq}$            | <b>0</b>          | <b>0</b>        |              |
| $C_{zq}$            | <b>-3,4418</b>    | <b>-3,6451</b>  | -6%          |
| $C_{mq}$            | <b>-14,527</b>    | <b>-8,2927</b>  | 43%          |
| $C_{xu}$            | <b>-0,0593</b>    | <b>-0,0716</b>  | -21%         |
| $C_{zu}$            | <b>-0,3038</b>    | <b>-0,8673</b>  | -185%        |
| $C_{mu}$            | <b>0</b>          | <b>0</b>        |              |
| $C_{x\dot{\alpha}}$ | <b>0</b>          | <b>0</b>        |              |
| $C_{z\dot{\alpha}}$ | <b>-0,9989</b>    | <b>55,7836</b>  | 5685%        |
| $C_{m\dot{\alpha}}$ | <b>-3,8382</b>    | <b>-61.1158</b> | 1489%        |
| $C_{x\delta_e}$     | <b>0</b>          |                 |              |
| $C_{z\delta_e}$     | <b>-0,4282</b>    | <b>1,14398</b>  | 367%         |
| $C_{m\delta_e}$     | <b>-1,6453</b>    | <b>-3,6608</b>  | -123%        |

Tabla 7.5 Comparación de derivadas longitudinales del Céfiro

Se realiza mismo cambio para calcular  $C_{m\dot{\alpha}}$  que se realizó en el caso del B747. La comparativa se puede ver en la Tabla 7.6

|                     | Céforo [5] | Método antiguo | Nuevo método | Error actual |
|---------------------|------------|----------------|--------------|--------------|
| $C_{m\dot{\alpha}}$ | -3,8382    | -61.1158       | 4.9844       | 230%         |

Tabla 7.6 Comparación de métodos para calcular  $C_{m\dot{\alpha}}$

Es notable el cambio aunque ahora con el nuevo método se obtiene un valor con un signo diferente. De igual manera el valor que se obtiene para  $C_{z\dot{\alpha}}$  está muy lejos de ser el correcto con un valor muy grande y el signo también cambiado.

### 7.2.2. Análisis de los datos Lateral-Direccionales

En la Tabla 7.7 se muestra la comparación de los resultados lateral-direccionales obtenidos en [5] con los obtenidos por el programa. Los métodos utilizados son, como en el caso longitudinal, similares a los utilizados en [5]. Existen diferencias notables en ciertos valores. Los datos aquí mostrados están calculados usando los métodos mostrados en el capítulo 3. Parece ser que las derivadas de estabilidad se aproximan a los valores dados por [5] a excepción de  $C_{l\beta}$  cuyo signo está cambiado. Las derivadas de control muestran una mayor diferencia tanto en valor como en signo. Es necesario obtener unos mejores métodos para obtener las derivadas de control o mejorar los que ya se tienen. En futuras mejoras estos valores deberán mejorarse considerando el hecho de que es un UAV teniendo circunstancias diferentes como es la existencia de la hélice y los efectos que produce ésta sobre el flujo de aire en todo el avión.

Igualmente, como se hizo en el caso del B747, se van a mostrar los datos obtenidos al modificar los métodos para obtener  $C_{n\beta}$  y  $C_{lr}$  y su comparación. Esta comparación se muestra en la Tabla 7.8 y se observa que en el caso de  $C_{n\beta}$  no hay diferencia en los resultados teniendo ambos distinto signo que el obtenido en [5]. Para  $C_{lr}$  se obtienen diferente valor pero con un error similar.

|                    | Céfiro [5] | Programa | Error |
|--------------------|------------|----------|-------|
| $C_{y\beta}$       | -0,499     | -0,2773  | 44%   |
| $C_{l\beta}$       | 0,0817     | -0,00967 | 112%  |
| $C_{n\beta}$       | -0,0364    | 0.0645   | 277%  |
| $C_{yp}$           | 0          | 0,02716  |       |
| $C_{lp}$           | -0,6439    | -0,42437 | 34%   |
| $C_{np}$           | -0,0265    | -0,1180  | -345% |
| $C_{yr}$           | 0          | 0,33964  |       |
| $C_{lr}$           | 0,0795     | 0.0185   | 77%   |
| $C_{nr}$           | -0,2464    | -0,17105 | 31%   |
| $C_{y\delta_a}$    | 0          | 0        |       |
| $C_{l\delta_a}$    | -0,0088    | 0,15411  | 1851% |
| $C_{n\delta_a}$    | 0,22       | 0,12542  | 43%   |
| $C_{y\delta_r}$    | 0,2565     | 0,13337  | 48%   |
| $C_{l\delta_r}$    | -0,1277    | 0,01209  | 109%  |
| $C_{n\delta_r}$    | 0,0233     | -0,0536  | 330%  |
| $C_{y\hat{\beta}}$ |            | 0,0637   |       |
| $C_{l\hat{\beta}}$ |            | 0,0080   |       |
| $C_{n\hat{\beta}}$ |            | -0,0288  |       |

Tabla 7.7 Comparación de derivadas lateral-direccionales del Céfiro

|              | Céfiro [5] | Método antiguo | Nuevo método | Error Actual |
|--------------|------------|----------------|--------------|--------------|
| $C_{n\beta}$ | -0,0364    | 0.0645         | 0,05433      | 220%         |
| $C_{lr}$     | 0,0795     | 0.0185         | 0,15622      | -97%         |

Tabla 7.8 Comparación de métodos

El cambio de método no ha cambiado sustancialmente el valor de las derivadas de estabilidad en el caso del Céfiro en contraste con el B747 donde estos cambios arrojaban unos valores más cercanos a los de la literatura. Esta diferencia puede deberse al tipo de aeronave que se estudia como a posibles errores en la introducción de datos. Al ser el Céfiro una aeronave de reducido tamaño hay más posibilidades que el error en una medida descompense el resultado final.

### **7.3. Comentario final**

Los resultados obtenidos en ambos casos, B747 y Céfiro, se pueden considerar satisfactorios teniendo en cuenta el error cometido. Es necesario apuntar que se está asumiendo que los valores con los que estamos comprobando la validez del programa, obtenidos de la literatura, son los correctos. Se desconoce en el caso del B747 como se han obtenido. Y en el caso del Céfiro los valores provienen de métodos parecidos a los utilizados en el programa por lo cual no se puede admitir que sean los correctos.



# Conclusiones

---

Tras comprobar que los resultados obtenidos por el programa no son perfectos pero pueden suponer una buena aproximación para los intereses de este proyecto se valorará el contenido del mismo. Valorando los datos del capítulo 7 se puede concluir que para aviones comerciales el programa es una aproximación válida a los valores deseados. Por otro lado, cuando se trata de pequeños aviones como es el caso del Céfiro, los valores obtenidos se aproximan a los calculados en [5] a diferencia de derivadas dependientes de la variación del ángulo de ataque con el tiempo  $\dot{\alpha}$ .

La idea que motivó inicialmente este proyecto era la de crear la base de un programa capaz de realizar un estudio básico de estabilidad para ayudar a los estudiantes de ingeniería aeronáutica. Esta base debería ser susceptible de revisiones, modificaciones, así como de ampliaciones a otros campos del estudio de la aeronave. Por este motivo los datos discordantes obtenidos no deben ser un lastre para la continuidad de este proyecto si no el motivo para seguir mejorando los métodos utilizados.

## 8.1. Sugerencias para el futuro

Aquí se presentan posibles mejoras a tener en cuenta en trabajos futuros.

### 8.1.1. Mejorar los métodos de cálculo

Ya se ha visto en el capítulo 7 que algunos de los métodos explicados no dan los valores deseados. Por esa razón se han tenido que reemplazar por unos nuevos como es el



caso de las derivadas de estabilidad  $C_{m\dot{\alpha}}$ ,  $C_{n\beta}$  y  $C_{lr}$ . En otros casos los métodos proporcionados por la literatura [1] eran muy complicados de implementar como ha sido para la derivada  $C_{m\alpha}$ . En este caso se exigían extensos datos del fuselaje y la realización de integrales que pudieran llevar a error. En su lugar se procedió a calcularla igualándola al coeficiente de momento generado por el coeficiente de sustentación global dando buenos resultados.

Por estas razones los métodos utilizados deberán ser revisados y mejorados para la obtención de unos valores más precisos.

### 8.1.2. Datos aerodinámicos

Se ha trabajado bajo la premisa de que la polar del avión se modela con la siguiente fórmula

$$C_D = C_{D0} + k_1 C_L^2 \quad (8.1)$$

A partir de ahí de esa fórmula se ha obtenido la eficiencia de Oswald  $e$  y la derivada  $C_{D\alpha}$ . Sería necesario contemplar otros posibles modelos de polar del avión para ser más exacto en los cálculos. De igual manera habría que tener en cuenta, a la hora de programar, el valor las variables para el ala expuesta. En los cálculos realizados por el programa los datos del ala expuesta se han igualado a los del ala general. Sería interesante observar como varían los datos considerando ala expuesta y sin considerar ala expuesta.

### 8.1.3. Fuselaje

Es imprescindible disponer en las siguientes versiones del programa de una definición detallada de la geometría del fuselaje. Es a partir de esta definición detallada como se podrían calcular las integrales sobre la superficie del fuselaje que aparecen a la hora de calcular  $C_{m\alpha}$  y  $C_{mq}$ . El cálculo de estas integrales se ha dejado, en esta versión, en las manos del usuario.

### 8.1.4. Derivadas propulsivas

En este proyecto se han presentado las derivadas propulsivas pero sin introducirla en los cálculos del programa. Simplemente se han definido, y simplificado en muchas ocasiones, pero no se han introducido en el estudio realizado. No se tienen en cuenta actualmente pero hay un módulo a la hora de introducir datos que permite la posibilidad de, en un futuro, introducir los datos correspondientes a la planta motora. Por ello, en próximas revisiones, este será un punto en el que incidir y mejorar: introducir las derivadas propulsivas en las ecuaciones del estudio de estabilidad y considerar los datos de la planta motora.

### **8.1.5. Definir correctamente el V-tail**

No se han considerado métodos exclusivos para el caso de cola en V. Cuando esto ocurre el programa actual lo que hace es descomponer la cola en V en dos superficies, una horizontal y otra vertical, que son las proyecciones de esta superficie. Habría que desarrollar las ecuaciones para este caso en especial e integrarlas en el programa.

### **8.1.6. Elección de parámetros**

Como se vio en el capítulo 6 al introducir los datos en el programa hay un paso que exige introducir una gran cantidad de parámetros. Estos parámetros se obtienen a partir de gráficas definidas todas en el capítulo 3. Se sugiere aquí la posibilidad de programar dichas gráficas para mejorar la eficiencia del programa y reducir la cantidad de trabajo del usuario. La programación de dichas gráficas es una labor extensa, ya que dependen de más de varios valores en la mayoría de casos, que requerirá bastantes horas de trabajo pero que logrará mejorar el programa final.

### **8.1.7. Validez para altos números de Mach**

Todos los métodos aquí descritos tienen validez para bajos números de Mach. El programa mejoraría si se tuvieran en cuenta los métodos para altos números de Mach. En [1] se proporcionan dichos métodos.



# Bibliografía

---

- [1] Pamadi, B. N. (1998). *Performance, Stability, Dynamics, and Control of Airplanes*. Hampton, Virginia: AIAA Education Series.
- [2] Esteban Roncero, S. (2013). Apuntes de la asignatura Cálculo de Aviones. Sevilla: Departamento Ingeniería Aeroespacial Universidad de Sevilla.
- [3] Roskam, J. (2001). *Airplane Flight Dynamics And Automatic Flight Controls*. Lawrence: DARcorporation.
- [4] Smetana, F. O. (2001). *Flight Vehicle Performance and Aerodynamic Control*. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
- [5] Teruel, P. L. (2009). Proyecto Fin de Carrera. *Análisis de la Estabilidad y el Control de un avión no tripulado*. Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingeniera, Universidad de Sevilla.

