Formulario —Mecánica Orbital

Datos de uso común

TIERRA	UNIDADES CANÓNICAS	OTROS
$R_\oplus = 6378{,}14$ km	$\mathrm{UT}_\oplus = 806{,}8117$ s $= 13{,}447$ min	$J_2 = 0{,}001083$, $J_3 = -2{,}534 \times 10^{-6}$
$\mu_\oplus = 398600{,}4\ \mathrm{km^3/s^2}$	$\mathrm{UV}_\oplus = 7{,}9054$ km/s	$\lambda_{22} = 123^o$, $J_{22} = -5{,}35 \cdot 10^{-6}$
$L_\oplus = 1$ AU $= 149{,}598 \cdot 10^6$ km	$\mathrm{UT}_\odot = 58{,}1324$ días	$\varepsilon = 23{,}5^o$, $e_\oplus = 0{,}0167$, $\omega_\oplus^\odot = 114{,}2^o$
$T_\oplus = \frac{2\pi}{\omega_\oplus} = 23$ h 56 m 4 s	$\mathrm{UV}_\odot = 29{,}7847$ km/s	$\mu_\odot = 132712439935{,}5\ \mathrm{km^3/s^2}$
$\omega_\oplus = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad/s $= 0{,}004178\ ^o$/s		$L_☾ = 384400$ km, $R_☾ = 1738$ km, $\mu_☾ = 4902{,}8\ \mathrm{km^3/s^2}$

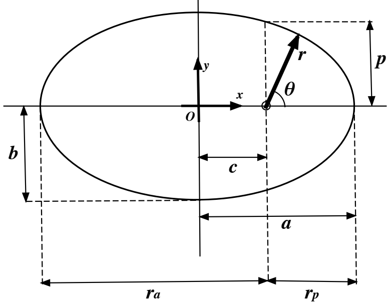
Problema de los dos cuerpos

Ecuación diferencial: $\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$, donde $\mu \approx Gm$. Solución (cónica): $\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$, donde e=excentricidad, θ=anomalía verdadera.

Parámetro de la cónica: $p = \frac{h^2}{\mu}$,**Momento angular específico:** $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$. $h = vr\cos\gamma$,**Vel. areolar** $\dot{A} = r^2\dot{\theta}/2 = h/2$

Energía específica: $\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \to \boxed{v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}}$ Velocidades: **Circular:** $v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$, **Escape:** $v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, **Exceso:** $v_\infty = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$.

Ángulo de trayectoria (γ) verifica: $\tan\gamma = \frac{e\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+e\cos\theta}$. **Periodo:** $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}}$ *Vectores:* **Nodal** $\vec{n} = \frac{\vec{k}_R \times \vec{h}}{\|\vec{k}_R \times \vec{h}\|}$. **Excentricidad:** $\vec{e} = \frac{\vec{v}\times\vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}$.



Cónicas

ELIPSE: $(0 < e < 1)$

$p = a(1-e^2)$, $b = a\sqrt{1-e^2}$, $c = ae$, $a^2 = b^2 + c^2$

$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$, $r_a = \frac{p}{1-e} = a(1+e)$, $a = \frac{r_a + r_p}{2}$, $e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$

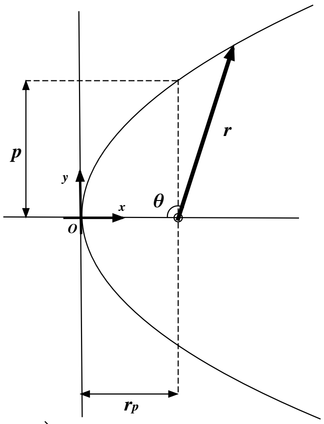
PARÁBOLA: $e = 1$, $r_p = \frac{p}{2}$, $a = c = r_a = \infty$, $\gamma = \frac{\theta}{2}$, $\theta \in (-180^\circ, 180^\circ)$

HIPÉRBOLA: $(e > 1)$

$a, b, c < 0$: $p = a(1-e^2)$, $b = a\sqrt{e^2-1}$, $c = ae$, $c^2 = b^2 + a^2$,

$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$, $\delta = 2\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$, $\theta_\infty = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$, $\theta \in (-\theta_\infty, \theta_\infty)$

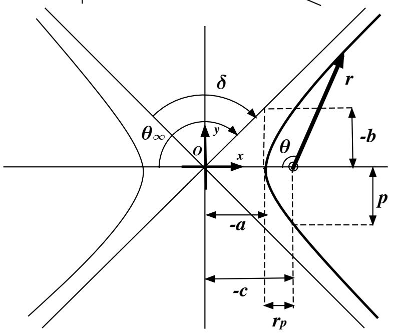
Leyes Horarias:



ELIPSE: $\tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan(E/2) \leftrightarrow M = E - e\,\mathrm{sen}\,E \leftrightarrow M = n\Delta t \leftrightarrow n = \sqrt{\mu/a^3}$, $r = a(1-e\cos E)$, $\cos\theta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$. Mét. Newton: $E_{k+1} = E_k - \frac{f(E_k)}{f'(E_k)}$, donde $f(E) = M - E + e\,\mathrm{sen}\,E$. Recurrencia: $E_{k+1} = M + e\,\mathrm{sen}\,E_k$, Relación $\theta \leftrightarrow \gamma$: θ=0°, 180°:γ=0°, $\theta \in (0^\circ, 180^\circ)$:$\gamma > 0$,$\theta \in (180^\circ, 360^\circ)$:$\gamma < 0$.

PARÁBOLA: $B = 3\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\Delta t \longleftrightarrow 2B = 3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \longleftrightarrow \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = z - \frac{1}{z}$, $z = \sqrt[3]{B + \sqrt{B^2+1}}$

HIPÉRBOLA: $\tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1+e}{e-1}}\tanh(H/2)$, $N = e\,\mathrm{senh}\,H - H$, $N = n\Delta t$, $n = \sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}$



Elementos Orbitales Clásicos

Si $e = 0 \to \omega, \theta$ indefinidos: $u = \omega + \theta$. Si $i = 0^o \to \Omega, \omega$ indefinidos: $\varpi = \Omega + \omega$.

Si $e = 0$, $i = 0^o \to \Omega, \omega, \theta$ indefinidos: $\lambda_T = \Omega + \omega + \theta$.

$i = \cos^{-1}(\frac{h_z}{|\vec{h}|})$, con $i \in (0^\circ, 180^\circ)$, $\omega = \cos^{-1}(\frac{\vec{n}\cdot\vec{e}}{e})$ si $e_z > 0$, $\theta = \cos^{-1}(\frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{re})$ si $\vec{r}\cdot\vec{v} > 0$, $\Omega = \cos^{-1}(n_x)$ si $n_y > 0$.

Traza/lanzamiento

$\cos i = \mathrm{sen}\,Az \cos\phi$, donde Az=azimut, ϕ=latitud.

$\mathrm{sen}\,\phi = \mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,i$ || $\tan\lambda_u = \tan u \cos i$

$\cos\lambda_u = \frac{\cos Az}{\mathrm{sen}\,i}$, $\mathrm{GST}(t_2) = \mathrm{GST}(t_1) + (t_2 - t_1)\omega_\oplus$

$\lambda_u + \Omega = \mathrm{LST} = \mathrm{GST} + \lambda = \mathrm{GST}_0 + \lambda + \omega_\oplus t$

$\dot{\phi} = \frac{\tan\phi}{\tan u}\dot{u}$, $\dot{\lambda} = -\omega_\oplus + \frac{\cos i}{\cos^2\phi}\dot{u}$

$\dot{u} = \dot{\theta} = n\frac{(1+e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}$, retrograda si $\dot{\lambda} < 0$.

CRITERIO ÁNGULOS:

Cruce S↗N: $u \in [-90^o, 90^o]$, **N↘S:** $u \in [90^o, 270^o]$

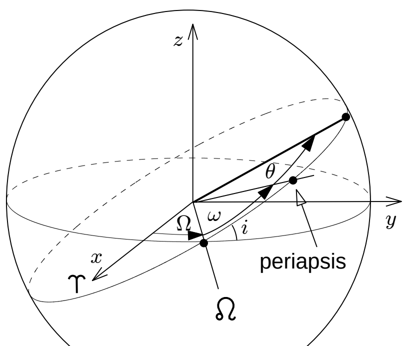
☊: $u = 0^o$. Máx. ϕ: $u = 90^o$. ☋: $u = 180^o$. Mín. ϕ: $u = 270^o$

Órbita directa ($i < 90^o$): λ_u mismo cuadrante que u.

Retrógrada ($i > 90^o$): λ_u cuadrante opuesto a u.

Órbita polar ($i = 90^o$): Cruce S↗N $\to u = \phi$, $\lambda_u = 0^o$

N↗S $\to u = 180^o - \phi$, $\lambda_u = 180^o$



Cobertura:

$\cos\Gamma = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}$, ($h$=altitud, Γ=radio angular). **Instrumental:** $\Gamma = \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{R_\oplus + h}{R_\oplus}\mathrm{sen}\,\alpha\right) - \alpha$ donde α=ángulo visibilidad instrumento. **Ancho huella:** $w = 2R_\oplus\Gamma$ (Γ en rad.). **Área:** $2\pi R_\oplus^2(1 - \cos\Gamma)$.

Circunferencia esférica de radio Γ centrada en ϕ_0, λ_0: $\mathrm{sen}\,\phi = \mathrm{sen}\,\phi_0\cos\Gamma + \cos\phi_0\,\mathrm{sen}\,\Gamma\cos A$.

$\cos\Delta\lambda = \frac{\cos\Gamma - \mathrm{sen}\,\phi_0\,\mathrm{sen}\,\phi}{\cos\phi_0\cos\phi}$, $\lambda = \lambda_0 \pm \Delta\lambda$ (+ si $A \in [0, 180^o]$, - si $A \in [180, 360^o]$).

Distancia ortodrómica: $\cos\alpha = \mathrm{sen}\,\phi_0\,\mathrm{sen}\,\phi + \cos\phi_0\cos\phi\cos(\lambda_0 - \lambda)$. Dentro si $\alpha \le \Gamma$.

Visibilidad:

(ϕ, λ): $h(t) = \mathrm{sen}^{-1}\left[(r\cos\psi - R_\oplus)\left(r^2 + R_\oplus^2 - 2R_\oplus r\cos\psi\right)^{-1/2}\right]$, visible si $h > h_{min}$,

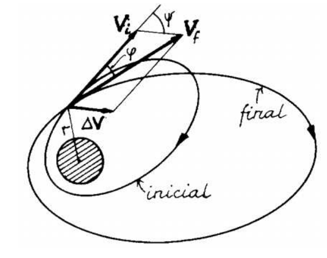
donde ψ: $\cos\psi = \cos\phi[\cos(LST - \Omega)\cos(\omega + \theta) + \mathrm{sen}(LST - \Omega)\,\mathrm{sen}(\omega + \theta)\cos i] + \mathrm{sen}(\omega + \theta)\,\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,\phi$.

Si $\vec{r}_{sat}$ conocido: $\cos\Psi = \frac{\vec{r}_{sat}\vec{r}_e}{r_{sat}R_\oplus}$, donde $\vec{r}_{sat}, \vec{r}_e$ mismo sist. ref.

Perturbaciones seculares debidas al J_2

$\dot\Omega=-\frac{3}{2}n\frac{R_\oplus^2}{p^2}J_2\cos i$. $\dot\omega=\frac{3}{4}n\frac{R_\oplus^2}{p^2}J_2(5\cos^2 i-1)$. $\dot M=n+\frac{3}{4}n\frac{R_\oplus^2}{p^2}J_2\sqrt{1-e^2}(2-3\,\mathrm{sen}^2\, i)$. Inclinación crítica: i=$\arccos\sqrt{\frac{1}{5}}$.
Órbita heliosíncrona (circular): $\cos i\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus+h}\right)^{7/2}=-0{,}0989$. δ=$\Omega-AR_M$. $HSM=HSM_0+\frac{\lambda_u}{15}$, donde HSM_0=$\frac{\delta}{15}+12$.

Maniobras



MANIOBRA GENERAL: $\Delta V^2=V_i^2+V_f^2-2V_iV_f\cos\varphi$, donde V_i=Vel. inicial, V_f=Vel. final, φ=Ángulo entre V_i y V_f $=\gamma_i-\gamma_f$. $\mathrm{sen}\,\psi=\frac{V_f\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\Delta V}$, ψ=Ángulo entre V_i y ΔV. $\omega_i+\theta_i=\omega_f+\theta_f$ si maniobra plana. Solución $A\,\mathrm{sen}\,\theta+B\cos\theta=C$: si $C^2\le A^2+B^2$, $\theta=\pm\cos^{-1}(C/D)+\theta_0$, con $D=\sqrt{A^2+B^2}$, $\cos\theta_0=B/D$, $\mathrm{sen}\,\theta_0=A/D$.

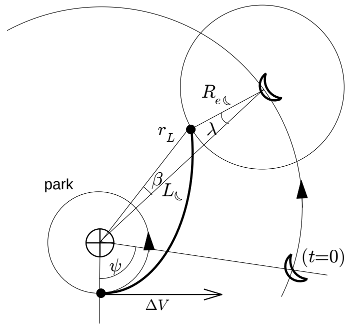
MANIOBRA DE CAMBIO DE LÍNEA DE ÁPSIDES: $\theta_i=\frac{\Delta\omega}{2}\to\gamma_i\to\Delta V=2V\,\mathrm{sen}\,\gamma_i$.

MANIOBRA DE CAMBIO DE PLANO: $(i_1,\Omega_1\to i_2,\Omega_2)$. $\cos\varphi=\cos i_1\cos i_2+\mathrm{sen}\, i_1\,\mathrm{sen}\, i_2\cos(\Omega_2-\Omega_1)$, $\Delta V=2V\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}$. Si $\Omega_2=\Omega_1\to\varphi$=$\Delta i$=$i_2-i_1$. Si $i_1=i_2\to\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}$=$\mathrm{sen}\, i\,\mathrm{sen}\,\frac{\Delta\Omega}{2}$.
$\mathrm{sen}\,\phi=\frac{\mathrm{sen}\, i_1\,\mathrm{sen}\, i_2\,\mathrm{sen}(\Omega_2-\Omega_1)}{\mathrm{sen}\,\varphi}$, donde ϕ=latitud donde se realiza la maniobra.

MANIOBRA DE Δi DE 3 IMPULSOS: $\lambda_{\mathrm{OPT}}=\frac{\mathrm{sen}\,\Delta i/2}{1-2\,\mathrm{sen}\,\Delta i/2}$, con $\lambda=\frac{r_2}{r_1}>1$. **MANIOBRA DE PHASING:** $T_{ph}=T_{sat}\left(1\pm\frac{\nu}{2\pi k}\right)$, con k nº de vueltas, ν adelanto(+) o retraso(-). **GASTO COMBUSTIBLE:** $\Delta V=V_e\ln\frac{m_0+m_p}{m_0}$, V_e=$I_{sp}g_0$. I_{sp}=impulso específico, $g_0=9{,}81\mathrm{m/s^2}$.

Misiones lunares e interplanetarias

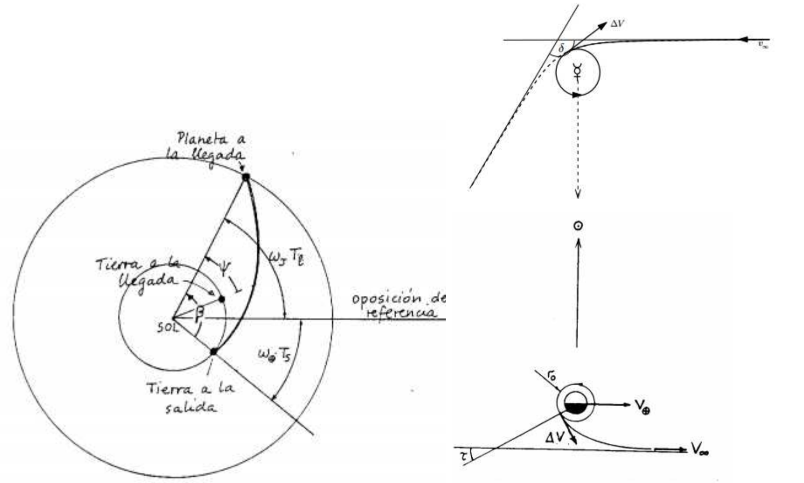
Esfera de influencia($m_2\ll m_1$): $R_e=L\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2/5}$. Per. sinódico: $T_P^{sin}=\frac{1}{|1/T_\oplus^H-1/T_P^H|}$.



MISIONES LUNARES: De la figura: $r_L=\sqrt{L_☾^2+R_{e☾}^2-2L_☾R_{e☾}\cos\lambda}$.
$\Psi=\theta_L-\beta-n_☾t_v$, donde β se obtiene de $r_L\,\mathrm{sen}\,\beta=R_{e☾}\,\mathrm{sen}\,\lambda$.
órbita selenocéntrica: $\vec V_L^S=\vec V_L^G-\vec V_☾$. $V_L^S=\sqrt{(V_L^G)^2+V_☾^2-2V_L^GV_☾\cos(\gamma_L^G-\beta)}$.
$\gamma_L^S=|\delta|-90^o$ donde δ verifica $V_L^S\,\mathrm{sen}\,\delta=V_☾\cos\lambda-V_L^G\cos(\gamma_L^G-\lambda-\beta)$.

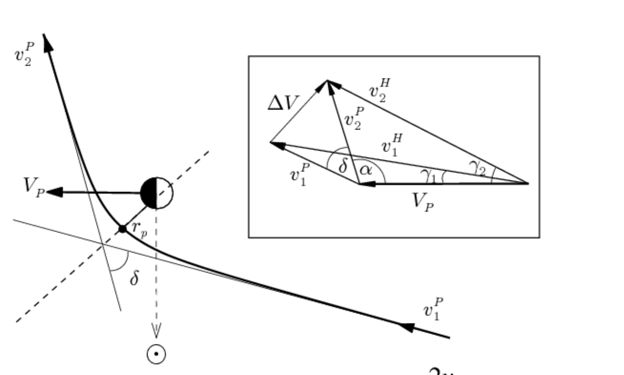
MISIONES LUNARES: ÓRBITA GEOCÉNTRICA

MISIONES INTERPLANETARIAS: FASES



$C_3=v_\infty^2$, C_3=parámetro característico de la misión. $v_i=v_\oplus\pm v_\infty$ si salida es tangencial, con (+) para planeta superior y (-) para planeta inferior.
De la figura: $\tau=180-\theta_\infty$. $\Psi=\theta_p-n_pt_v$, Ψ=Ángulo de fase.

MANIOBRA ASISTIDA POR GRAVEDAD (EL TRIÁNGULO VARÍA SEGÚN EL PROBLEMA):



$v_1^P=v_2^P=v_\infty$. $\Delta V=2v_\infty\,\mathrm{sen}\,\delta/2=\frac{2v_\infty}{1+r_pv_\infty^2/\mu_p}$.
$v_2^H=\sqrt{V_P^2+v_\infty^2-2V_Pv_\infty\cos\alpha}$. $\mathrm{sen}\,|\gamma_2|=\frac{v_\infty\,\mathrm{sen}\,\alpha}{v_2^H}$, α se obtiene del triángulo. $\vec v^P=\vec v^H-\vec V_P$.

Otros

Traza repetida: $T_{sat}=\frac{m}{k}T_\oplus$, donde m nº días hasta repetirse, k nº revoluciones del sat. por repetición. Retraso nodal: $\Delta\lambda=-(\omega_\oplus-\dot\Omega)T_N^{SAT}$.
Traza uniformemente compartida por n sats con $T_{sat}=T_\oplus/k$: $M_j=M_0+j\frac{2\pi k}{n}$, $\Omega_j=\Omega_0-j\frac{2\pi}{n}$, con M_0, Ω_0 del 1er satélite, $j=1,\ldots,n$.
"Frozen orbit" de altitud constante: $\omega=90^o$, $e\approx-\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)\mathrm{sen}\, i\,\mathrm{sen}\,\omega$. Sol: $u_\odot=\frac{360^o}{365{,}25}D$ siendo D=días desde equinoccio de Prim.
$\delta_\odot$=$\arcsin(\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\, u_\odot)$, $AR_\odot$=$\arctan(\cos\varepsilon\tan u_\odot)$, HSA= $(LST-\mathrm{AR}_\odot)/15+12$. HSM=UT+$\lambda$/15.
Radio circ. eclipse a en h: $\mathrm{sen}\,\Gamma=R_\oplus/(R_\oplus+h)$ centrado en $\delta_o=-\delta_\odot$, $AR_o=AR_\oplus+180^o$ donde o=punto antipodal al sol.
Áng. horario S: $H_S=LST-\mathrm{AR}_S$. Círculo visible: $\Phi=\arccos\left[\frac{R_\oplus\cos h_{min}}{R_\oplus+h_{SAT}}\right]-h_{min}$.

TRIÁNGULOS ESFÉRICOS TÍPICOS

Días Julianos: $\mathrm{JD}=367A-\left\lfloor 7/4\left(A+\lfloor\frac{M+9}{12}\rfloor\right)\right\rfloor+\left\lfloor\frac{275M}{9}\right\rfloor+D+1721013{,}5$.

$\vec r^F=\frac{P}{1+e\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta\\ 0\end{bmatrix}$, $\vec v^F=\sqrt{\frac{\mu}{P}}\begin{bmatrix}-\mathrm{sen}\,\theta\\ \cos\theta+e\\ 0\end{bmatrix}$, $C_R^F=\begin{bmatrix}c\Omega c\omega-s\Omega s\omega ci & s\Omega c\omega+c\Omega s\omega ci & s\omega si\\ -c\Omega s\omega-s\Omega c\omega ci & -s\Omega s\omega+c\Omega c\omega ci & c\omega si\\ s\Omega si & -c\Omega si & ci\end{bmatrix}$

Trig. Esférica:
$$\begin{cases}\frac{\mathrm{sen}\, a}{\mathrm{sen}\,\alpha}=\frac{\mathrm{sen}\, b}{\mathrm{sen}\,\beta}=\frac{\mathrm{sen}\, c}{\mathrm{sen}\,\gamma}\\ \cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos a\\ \cos a=\cos b\cos c+\mathrm{sen}\, b\,\mathrm{sen}\, c\cos\alpha\\ S=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2\end{cases}$$