

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales

Tema 5: Trigonometría esférica. Círculos esféricos.
Aplicaciones: trazas, cobertura, visibilidad.

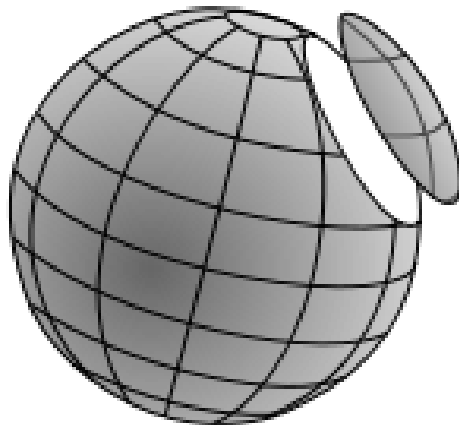
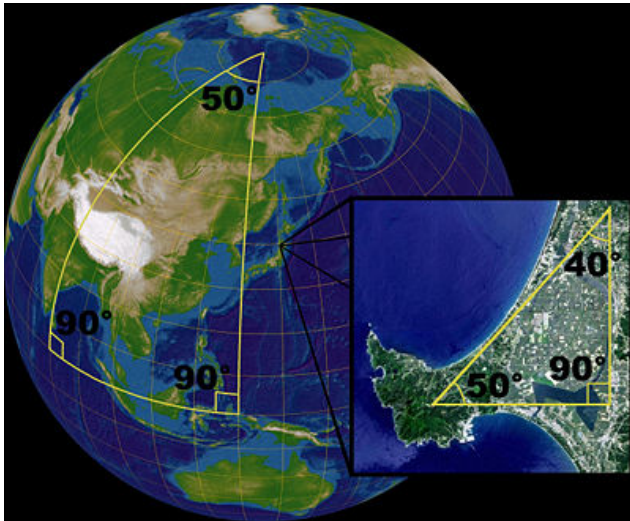
Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla
rvazquez1@us.es

19 de septiembre de 2019



Geometría en esferas

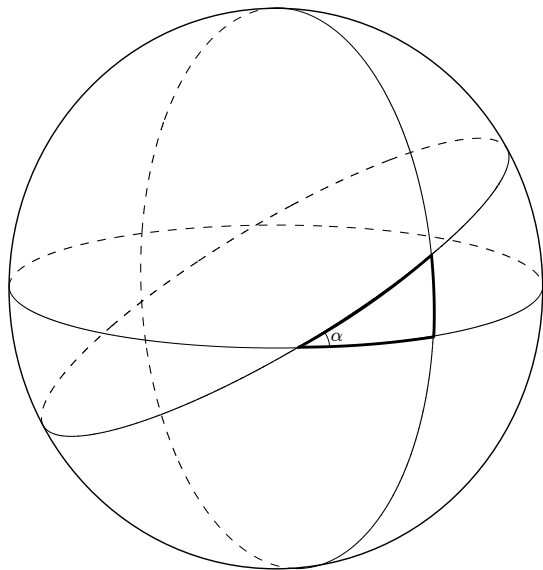


- En problemas de misiones geocéntricas, es necesario considerar las órbitas en el espacio en el entorno de la Tierra.
- No es posible limitarse al problema plano, por lo que es necesario trabajar en un entorno geométrico tridimensional.
- Asimilando la superficie de la Tierra a una esfera, se usan coordenadas esféricas (según el sistema de referencia, latitud ϕ y longitud λ o declinación δ y ascensión recta AR).
- En este marco, aparecen triángulos y circunferencias esféricas; estos son el objeto de estudio de la trigonometría esférica.



Trigonometría Esférica I

Objeto: Estudiar relaciones angulares en **triángulos esféricos** (los triángulos de la geometría esférica).



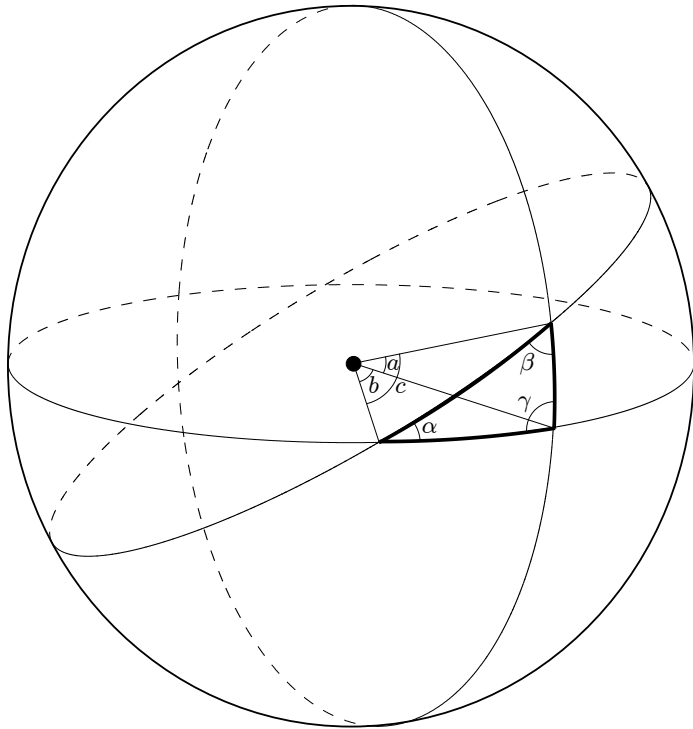
La *Encyclopædia Britannica* de 1911 dice:

"Perhaps to the student there is no part of elementary mathematics so repulsive as is spherical geometry."

- En una esfera, un “círculo mayor” (gran círculo, círculo máximo) viene dado por la intersección de un plano que pasa por el centro de la esfera con la esfera.
- Las “rectas esféricas” (geodésicas) son los círculos mayores. Obsérvese que cualesquiera dos rectas esféricas cortan siempre en dos puntos; por tanto, no existen paralelas en geometría esférica.
- El ángulo entre dos rectas esféricas viene dado por el ángulo entre las tangentes en el punto de corte.



Trigonometría Esférica II



Al-Jayyani

Matemático musulmán nacido en Córdoba o Jaén en el siglo X. Escribió el primer tratado sobre trigonometría esférica, "*Libro de los arcos desconocidos sobre una esfera*".

- Un triángulo esférico es el determinado por tres rectas esféricas.
- En un triángulo esférico hay seis ángulos: los formados entre las rectas en los vértices, que llamaremos α , β y γ , (que NO suman 180°) y tres ángulos interiores, a , b , y c , que se oponen a los anteriores.
- Obsérvese que si el radio de la esfera es unidad, entonces a , b y c (en radianes) corresponden a las longitudes de los arcos que forman el triángulo; por ello se denominan "lados", mientras que α , β y γ son los "ángulos".



Trigonometría Esférica III

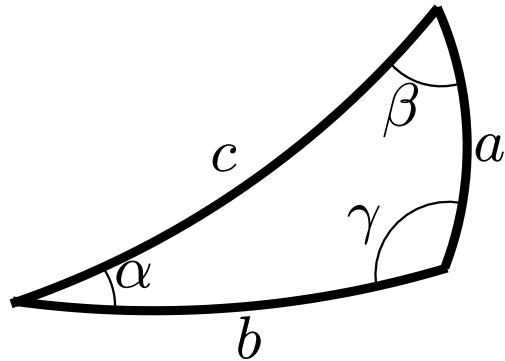


Figura: Representación de un triángulo esférico

- Existen otras fórmulas, pero éstas son las más importantes. A veces se usan simultáneamente para resolver ambigüedades de signo.

- Por simplicidad, podemos representar un triángulo esférico como en la figura.
- Se cumplen las siguientes relaciones:
 - Leyes de cosenos:
$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \\ \cos c &= \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma \\ \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ \cos \beta &= -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos c\end{aligned}$$

- Ley de senos:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$



Relación entre Trigonometría Esférica y Plana

- Obsérvese que si los lados a , b , c son pequeños, entonces se tiene que $\sin a \approx a$ y $\cos a \approx 1 - a^2/2$.

- Usando estas aproximaciones:

- La ley del coseno ($\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$) queda:

$$1 - \frac{a^2}{2} \approx \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc \cos \alpha = 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{b^2 c^2}{4} + bc \cos \alpha$$

despreciando términos de orden alto y cambiando el signo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

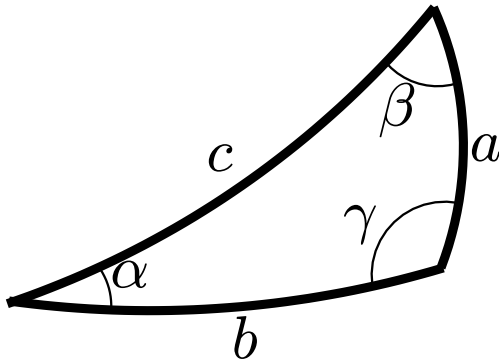
- La ley de senos queda:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

- Estos son los teoremas del seno y el coseno de trigonometría plana. Por tanto para pequeñas distancias la trigonometría esférica coincide con la plana.



Área de un triángulo esférico

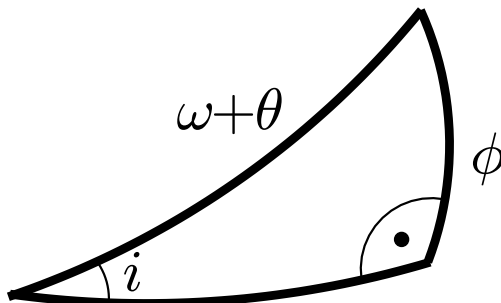
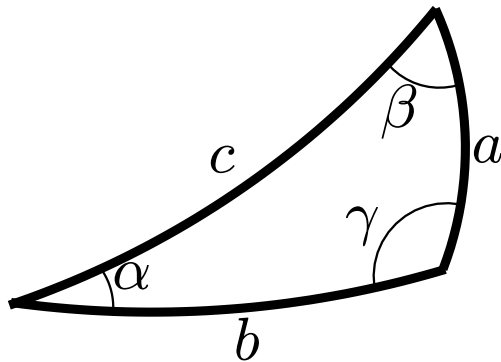


- El razonamiento anterior permite intuir que cuanto más “grande” sea un triángulo esférico, más grande será la desviación de un triángulo plano.
- Esta idea intuitiva se puede cuantificar mediante el llamado Teorema de Girard.
- Si llamamos S a la superficie del triángulo esférico, y R al radio de la esfera en la que está inscrita el triángulo, se verifica que:
$$S = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$
- S cuantifica el tamaño del triángulo, y la fórmula $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ (llamada el exceso esférico) cuantifica la desviación de la trigonometría plana (donde los ángulos de un triángulo suman π).



Trigonometría Esférica: Aplicaciones

- En misiones geocéntricas o planetocéntricas en general (tomando como modelo del planeta una esfera), la trigonometría esférica permite determinar cantidades de interés a partir de los elementos orbitales conocidos.
- **Primera Aplicación:** Encontrar la latitud/declinación de un satélite dada su anomalía verdadera θ y el argumento del perigeo ω .



- En este caso, $\gamma = 90^\circ$, $a = \phi = \delta$ (la latitud o declinación), $\alpha = i$ (la inclinación sobre el ecuador) y $c = \omega + \theta$.
- Aplicamos la ley de senos:

$$\frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } i} = \frac{\text{sen}(\omega + \theta)}{\text{sen } 90^\circ}$$

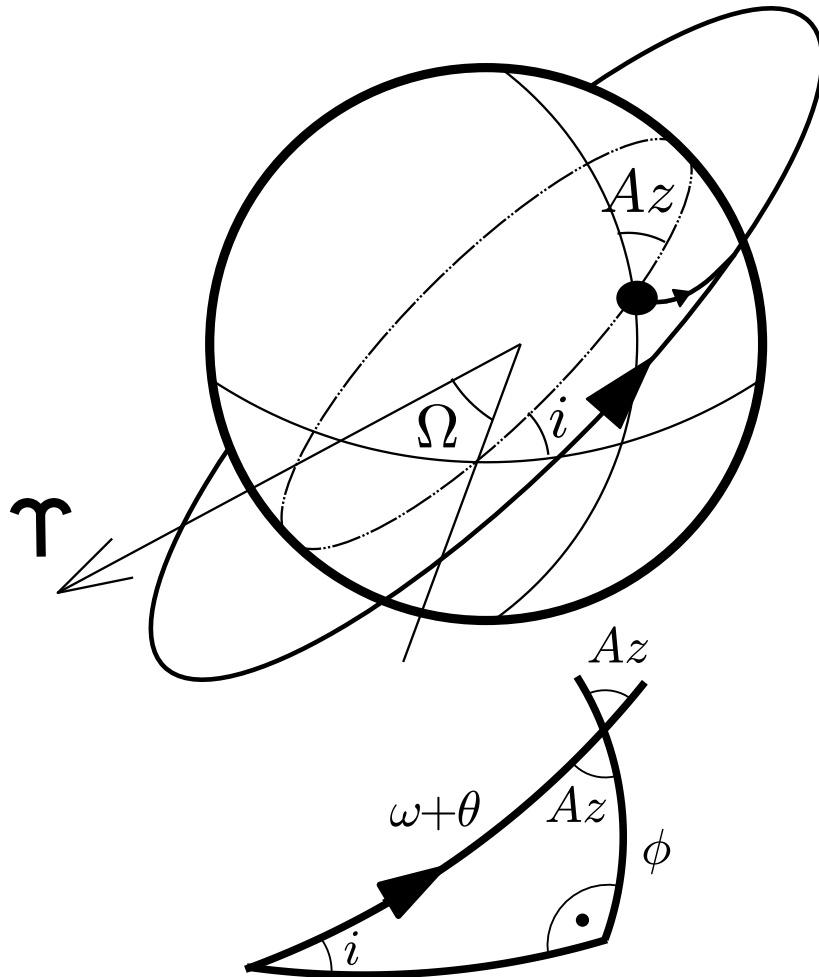
de donde despejamos la latitud como

$$\text{sen } \phi = \text{sen}(\omega + \theta) \text{sen } i$$



Trigonometría Esférica: Lanzamiento I

- **Segunda Aplicación:** Determinar la inclinación de una órbita a partir del azimut de lanzamiento y la latitud de la base de lanzamiento.



- Hipótesis:
 - La trayectoria de lanzamiento es coplanaria con la órbita.
 - Se desprecia el efecto de rotación de la Tierra.
- En este caso, $\gamma = 90^\circ$, $a = \phi$, $\beta = Az$, $\alpha = i$ y $c = \omega + \theta$.
- Aplicamos la ley de cosenos a i :

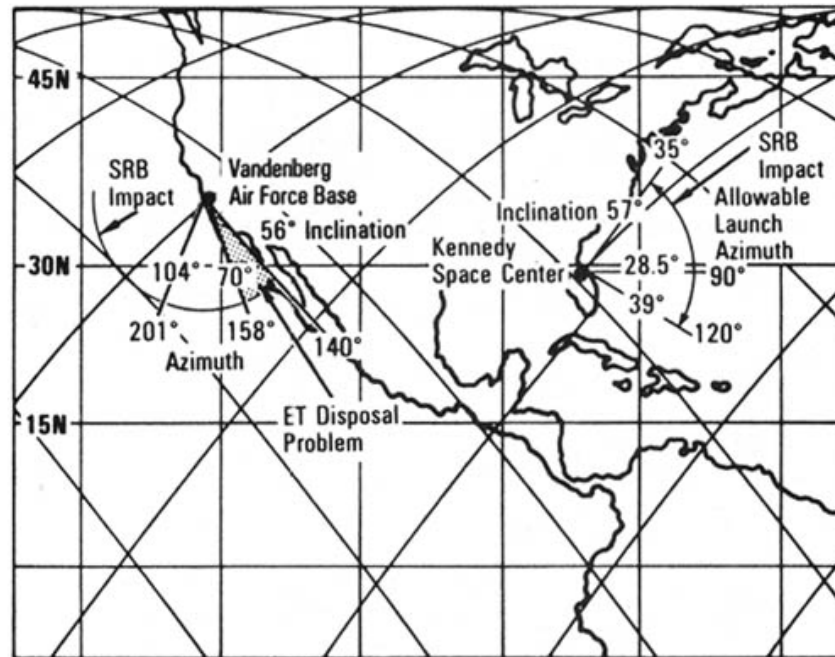
$$\cos i = -\cos Az \cos 90^\circ + \sin Az \sin 90^\circ \cos \phi$$

de donde $\cos i = \sin Az \cos \phi$



Trigonometría Esférica: Lanzamiento II

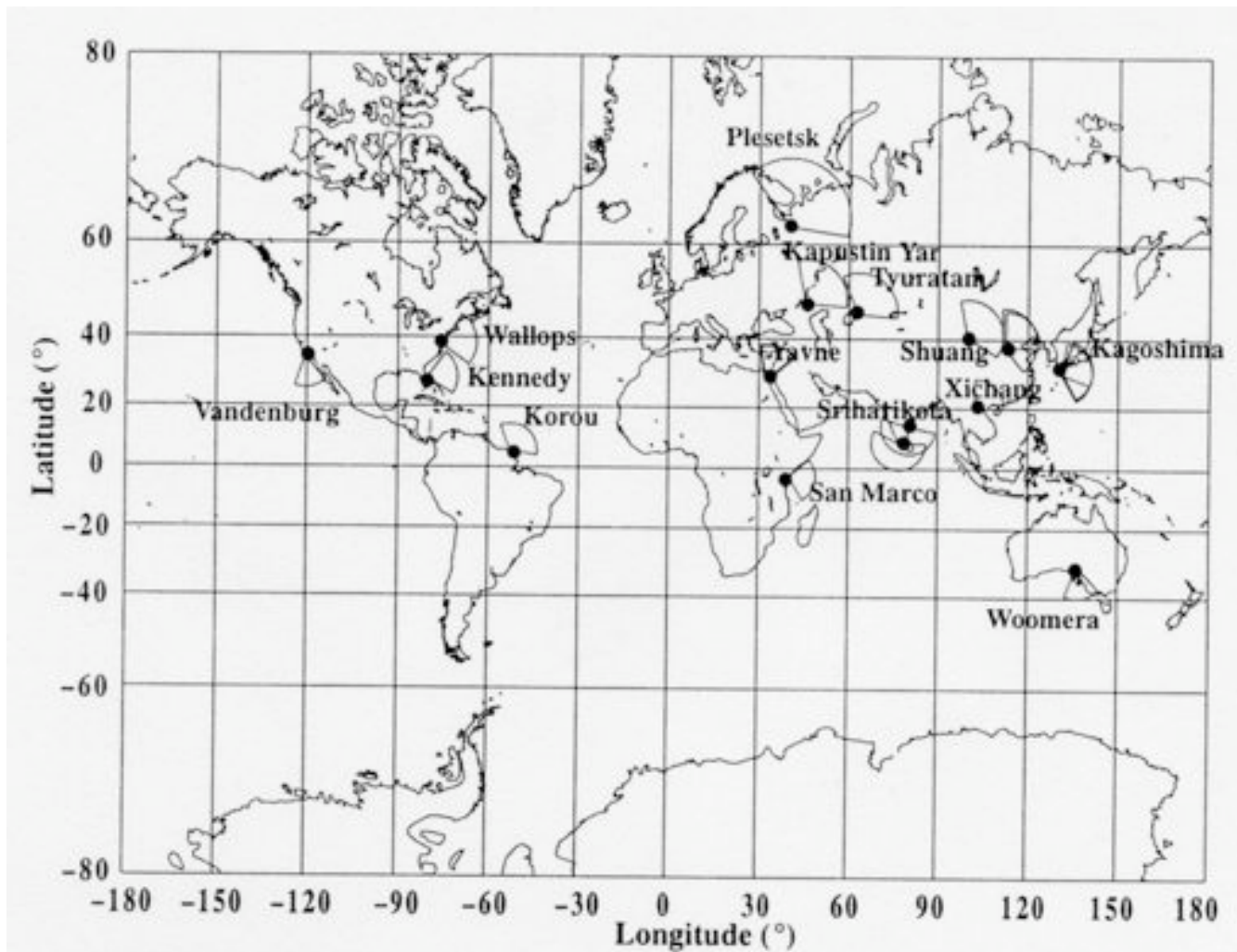
- Puesto que $\cos i = \sin Az \cos \phi$, con $Az = 90^\circ$ (lanzamiento hacia el Este) se tiene $i = \phi$. En cualquier otro caso, $i > \phi$.
- Cada base posee un azimuth máximo y mínimo de lanzamiento por razones geográficas, estratégicas y de seguridad.
- Habría que añadir la velocidad de rotación de la Tierra en la base, que es $v_L = \omega_{\oplus} r \cos \phi \approx \omega_{\oplus} R_{\oplus} \cos \phi$, con dirección Este.



Space Shuttle Launch Sites

Trigonometría Esférica: Lanzamiento III

■ Sitios de Lanzamiento:



Trigonometría Esférica: Lanzamiento IV

■ Sitios de Lanzamiento:

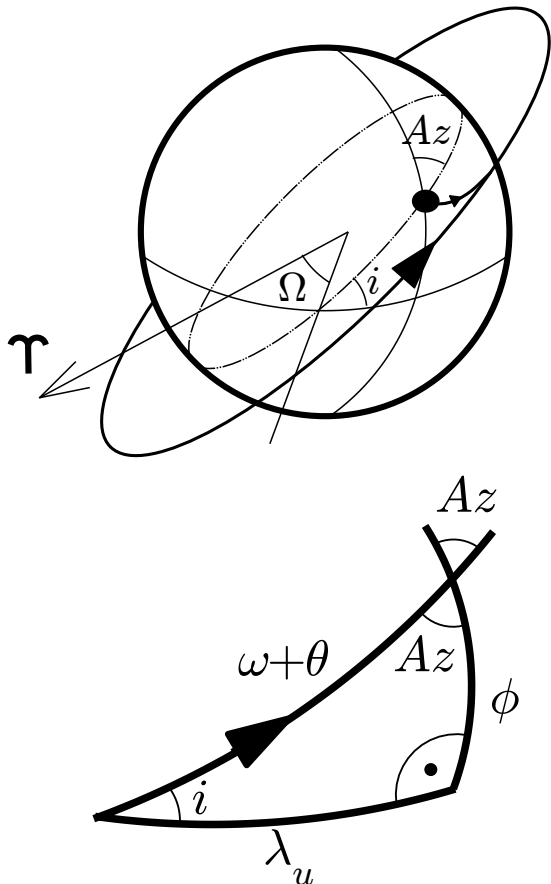
TABLE 6-2. Locations of Selected Launch Sites. Minimum and maximum azimuth values are usually determined so launches don't fly over populated areas. [Source: Larson and Wertz (1992, 679–681) and Chiulli (1994)]

Site	Latitude (°)	Longitude (°)	Azimuth Min (°)	Azimuth Max (°)
Vandenberg	34.600 000	–120.600 000	147	201
Cape Kennedy	28.500 000	–80.550 000	37	112
Wallops	37.850 000	–75.466 67	30	125
Kourou	5.200 000	–52.800 000	340	100
San Marco	–2.933 333	40.200 000	50	150
Plesetsk	62.800 000	40.600 000	330	90
Kapustin Yar	48.400 000	45.800 000	350	90
Tyuratam	45.600 000	63.400 000	340	90
Sriharikota	13.700 000	80.250 000	100	290
Shuang-Ch'Eng-Tzu	40.416 667	99.833 333	350	120
Xichang	28.250 000	102.200 000	94	105
Tai-yuan	37.766 667	112.500 000	90	190
Kagoshima	31.233 333	131.083 333	20	150
Woomera	–30.950 000	136.500 000	350	15
Yavne	31.516 667	34.450 000	350	120



Trigonometría Esférica: Lanzamiento V

- **Ventanas de Lanzamiento:** Determinar la hora del lanzamiento de forma que Ω sea la deseada.



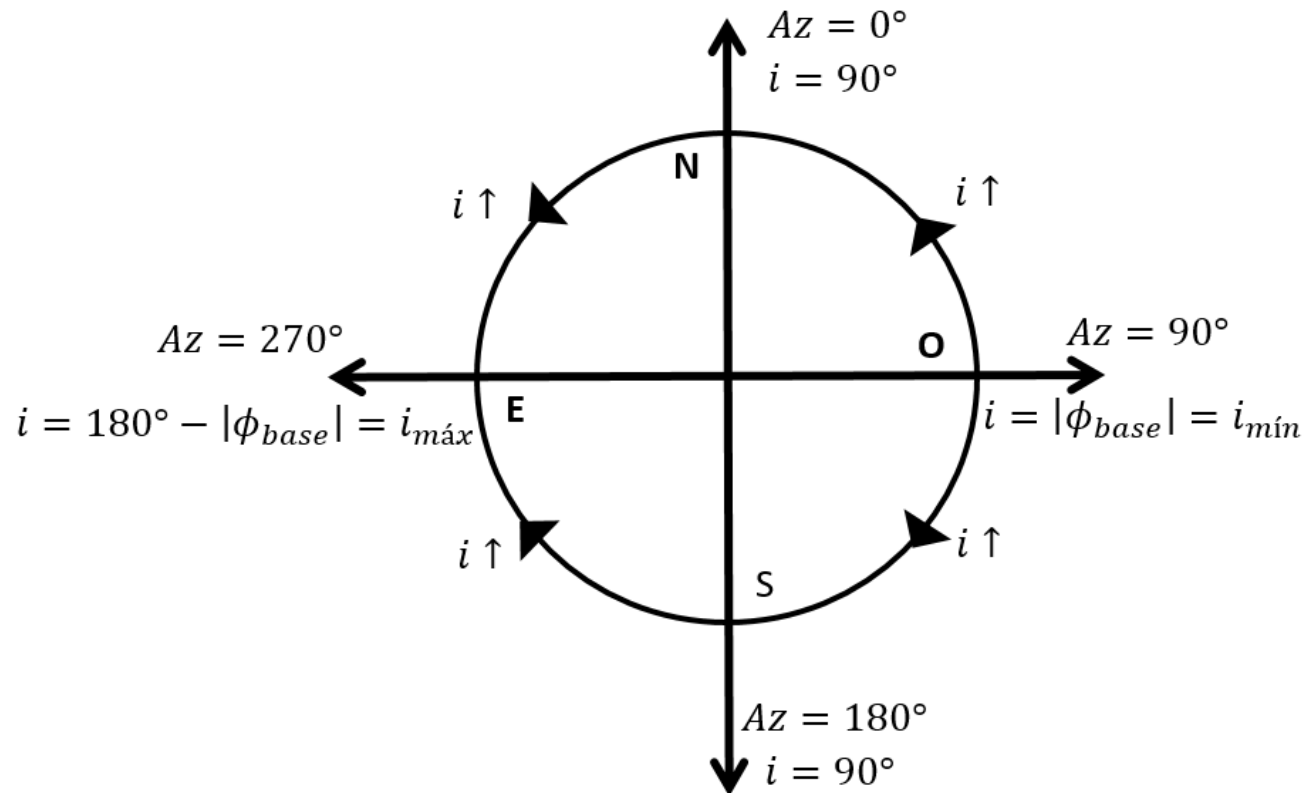
- El ángulo formado entre la base y Υ será $\Omega + \lambda_u$, donde λ_u está definida en la figura. Por definición dicho ángulo es LST.
- Encontramos λ_u de la siguiente fórmula

$$\cos Az = -\cos i \cos 90^\circ + \sin i \sin 90^\circ \cos \lambda_u$$
 de donde $\cos \lambda_u = \frac{\cos Az}{\sin i}$. Para decidir la solución del arco coseno se usa $\sin \lambda_u = \frac{\sin Az \sin \phi}{\sin i}$.
- Luego $\Omega + \lambda_u = \text{LST} = \text{GST} + \lambda = \text{GST}_0 + \lambda + \omega_\oplus t$.
- Por tanto: $t = \frac{\Omega + \lambda_u - \lambda - \text{GST}_0}{\omega_\oplus}$.
- La “ventana de lanzamiento” Δt vendrá dada por la tolerancia $\Delta \Omega$.

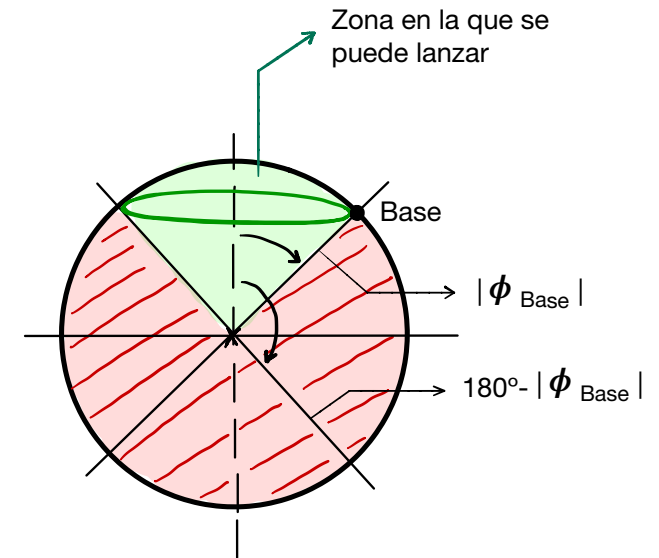
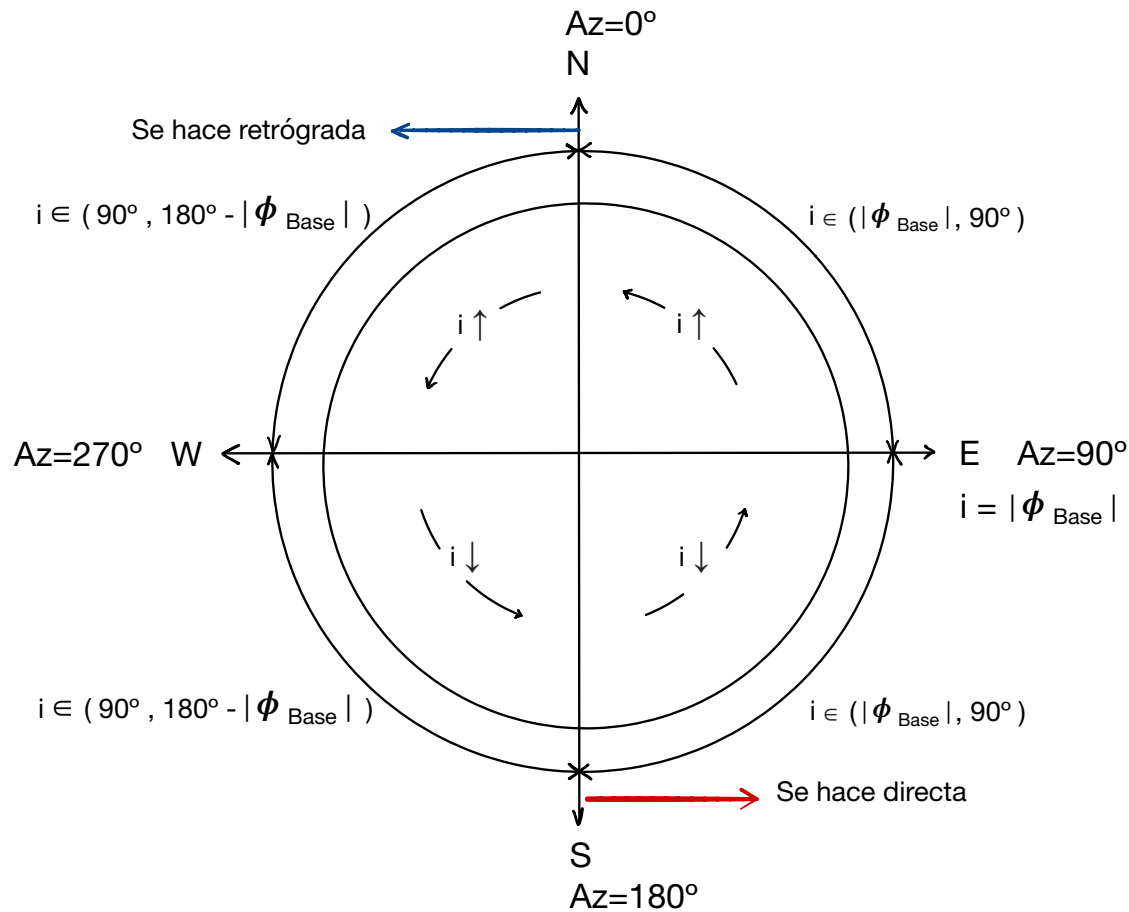


Trigonometría Esférica: Lanzamiento VI

- **Azimuts de Lanzamiento:** Determinar el ángulo de lanzamiento de forma que i sea la deseada o lo más cercana posible, partiendo de $\cos i = \sin Az \cos \phi_{base}$, con $i \in (0^\circ, 180^\circ)$, y $Az \in (0^\circ, 360^\circ)$ desde el Norte en sentido horario. Se sigue un procedimiento.



Trigonometría Esférica: Lanzamiento VII



Las inclinaciones alcanzables desde la base están comprendidas entre:

$$[|\phi_{Base}|, 180^\circ - |\phi_{Base}|]$$

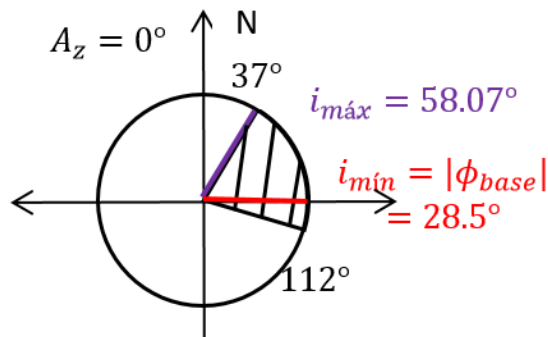
■ Ilustración adicional sobre el lanzamiento.



Trigonometría Esférica: Lanzamiento VIII

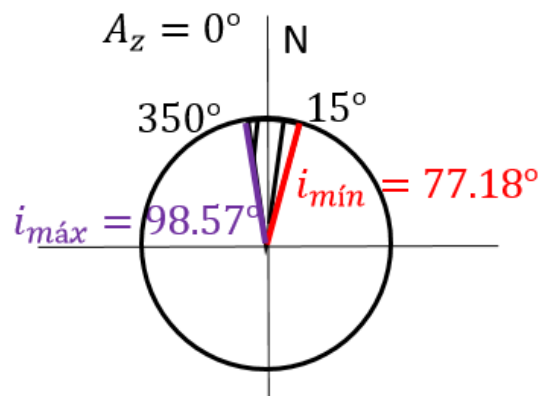
Cabo Cañaveral

$$(Az_{\min} = 37^\circ, Az_{\max} = 112^\circ)$$



Woomera

$$(Az_{\min} = 350^\circ, Az_{\max} = 15^\circ)$$

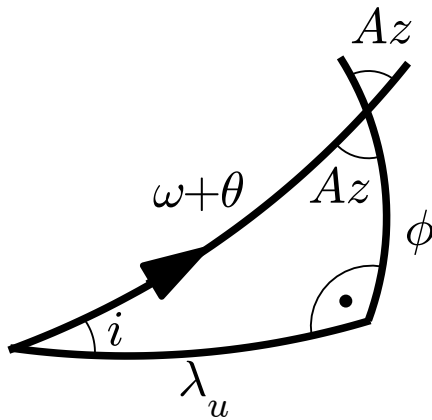


- Representar los azimuths mínimo y máximo disponibles en la base de lanzamiento.
- La inclinación máxima será la correspondiente a tener $\sin Az$ más cercano a -1 (Oeste).
- La inclinación mínima será la correspondiente a tener $\sin Az$ más cercano a 1 (Este).
- Existen algunos puntos clave:
 (Norte) $Az = 0^\circ \rightarrow i = 90^\circ$,
 (Este) $Az = 90^\circ \rightarrow i = |\phi_{base}| = i_{\min}$,
 (Sur) $Az = 180^\circ \rightarrow i = 90^\circ$,
 (Oeste) $Az = 0 \rightarrow i = 180^\circ - |\phi_{base}| = i_{\max}$
- Si no coincide con algunos de los puntos anteriores, y la inclinación es alcanzable, el azimuth necesario se obtiene de $\cos i = \sin Az \cos \phi_{base}$.



Trigonometría Esférica: Aplicaciones

- **Ascensión recta/longitud:** Determinar la ascensión recta y/o la longitud geográfica de un satélite en un cierto instante.



- Se usa la misma figura. En este caso Az será el azimut (geocéntrico inercial) con el que el satélite surca una determinada zona.
- Se calcula en primer lugar el valor de θ en el instante de tiempo y luego ϕ (o δ cuyo valor es el mismo) como antes.
- Posteriormente se aplica $\cos(\omega + \theta) = \cos \phi \cos \lambda_u$. Se encuentra entonces λ_u . Para evitar calcular ϕ se puede usar: $\tan \lambda_u = \cos i \tan(\omega + \theta)$.
- El ángulo formado entre el satélite y Υ será $\Omega + \lambda_u$. Por tanto dicho ángulo es la ascensión recta del satélite:
 $AR = \Omega + \arctan(\cos i \tan(\omega + \theta))$.
- Se calcula λ de la fórmula $\Omega + \lambda_u = GST_0 + \lambda + \omega_{\oplus} t$, luego:
 $\lambda = \Omega - GST_0 - \omega_{\oplus} t + \arctan(\cos i \tan(\omega + \theta))$.



Ejemplo: Ascensión Recta y Declinación del Sol I

- Problema: determinar la **Ascensión recta y declinación** del Sol un cierto día D a la hora t (UT).
- Datos: D , t , y la fecha del Equinoccio de Primavera de dicho año t_{γ} .
- Con los datos calculamos ΔT (en días) como la diferencia entre la fecha actual y la del Equinoccio de Primavera (se suele despreciar t). Se hace la hipótesis de que un año tropical = 365.25 días.
- Método 1: Si sólo hace falta la AR del Sol, se puede aproximar por la AR del Sol Medio, que será $GST + 15(12 - t)$, donde t se escribe en horas. Error máximo 5 grados.
- Método 2: Suponiendo que la órbita de la Tierra es circular. Entonces $u_{\odot} = \frac{\Delta T}{365,25}$. De las fórmulas vistas anteriormente: $AR_{\odot} = \arctan(\cos \epsilon \tan(u_{\odot}))$ (resolver ambigüedad según la época del año) y $\delta_{\odot} = \arcsen(\sin \epsilon \sin u_{\odot})$. Se comete un pequeño error (máximo 2 grados).



Ejemplo: Ascensión Recta y Declinación del Sol II

- Método 3: Si se considera tanto la inclinación como la excentricidad de la Tierra, hay que usar la ecuación de Kepler.
- Llamar θ_{γ} a la anomalía verdadera de la Tierra en el equinoccio de Primavera. Se tiene $\theta_{\gamma} = 180 - \omega_{\oplus}$ (porque $u_{\gamma} = 180$ desde el punto de vista del Sol). Calcular con leyes horarias ΔT_{γ} (tiempo entre perihelio y equinoccio).
- El tiempo transcurrido desde perihelio es $\Delta T_{\oplus} = \Delta T + \Delta T_{\gamma}$; calcular con leyes horarias $\theta_{\oplus}(\Delta T_{\oplus})$.
- Se tiene $u_{\oplus} = \omega_{\oplus} + \theta_{\oplus}$ y $u_{\odot} = 180 + u_{\oplus}$.
- Finalmente: $AR_{\odot} = \arctan(\cos \epsilon \tan(u_{\odot}))$ (resolver ambigüedad según mes) y $\delta_{\odot} = \arcsin(\sin \epsilon \sin u_{\odot})$. Error muy pequeño (sobre todo si no se desprecia t).
- Se puede afinar aún más (p.ej. para calcular eclipses) incluyendo la precesión de los equinoccios y perturbaciones.
- Otros datos de entrada pueden ser las fechas de afelio, perihelio, solsticios...

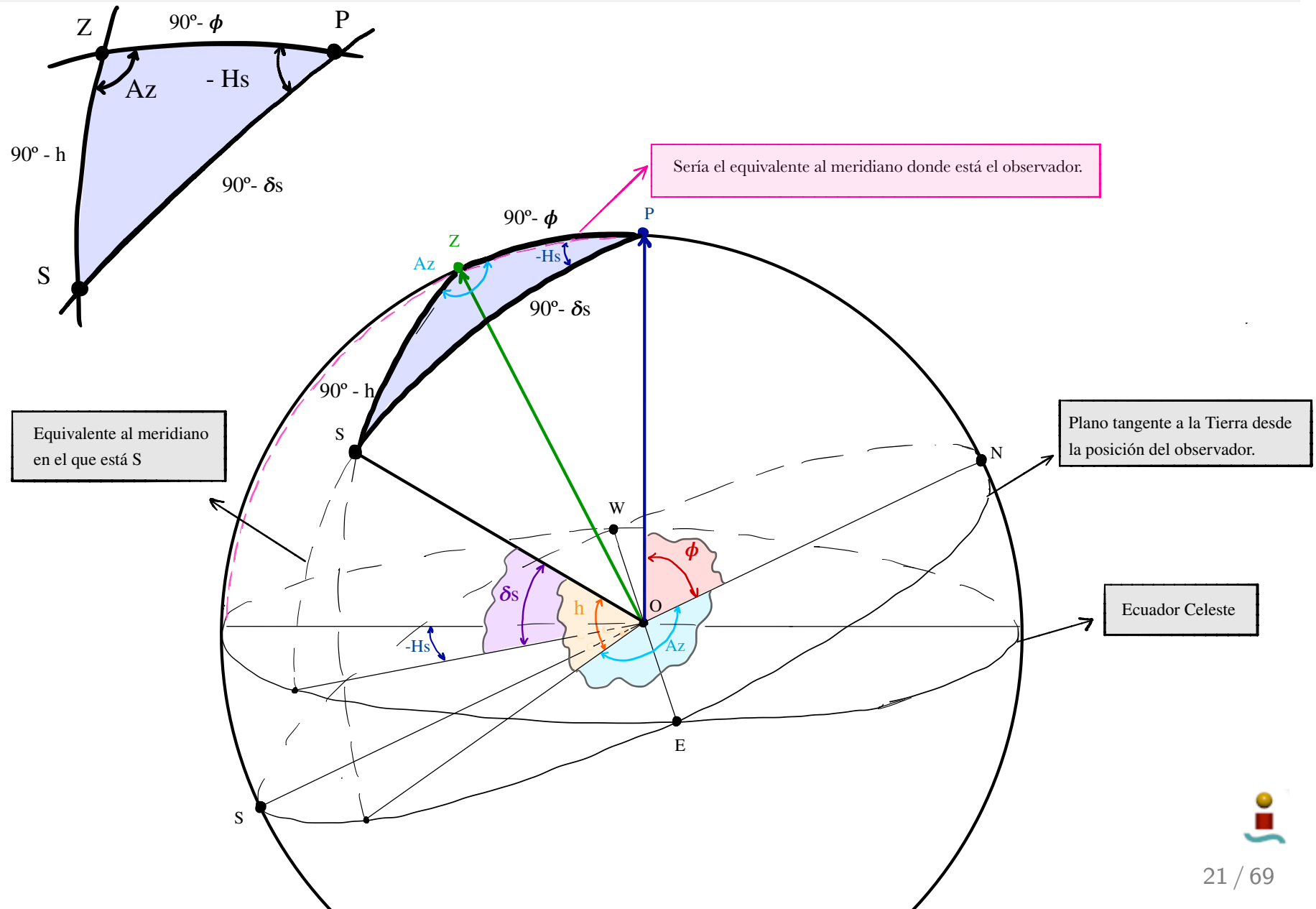


El triángulo astronómico I

- La aplicación más importante de la trigonometría esférica a la astronomía es el llamado “triángulo astronómico”. Permite resolver los problemas de la astronomía esférica que planteamos en el Tema 1.
- Sea un cuerpo S “infinitamente” distante de la Tierra, con declinación δ_S , cuyas coordenadas topocéntricas respecto a un observador O son su elevación h y azimut Az . El observador se encuentra en un punto de la Tierra de latitud ϕ , y el ángulo horario de S respecto al observador es H_S .
- Recordemos que el ángulo horario es la diferencia entre el meridiano del observador y el meridiano en el que se encuentra S , de forma que
$$H_S = LST - AR_S = GST_0 + \lambda + \omega_{\oplus} t - AR_S).$$
- El triángulo astronómico permite obtener una pareja de datos (coordenadas de S topocéntricas o geocéntricas, coordenadas del observador) a partir del resto.

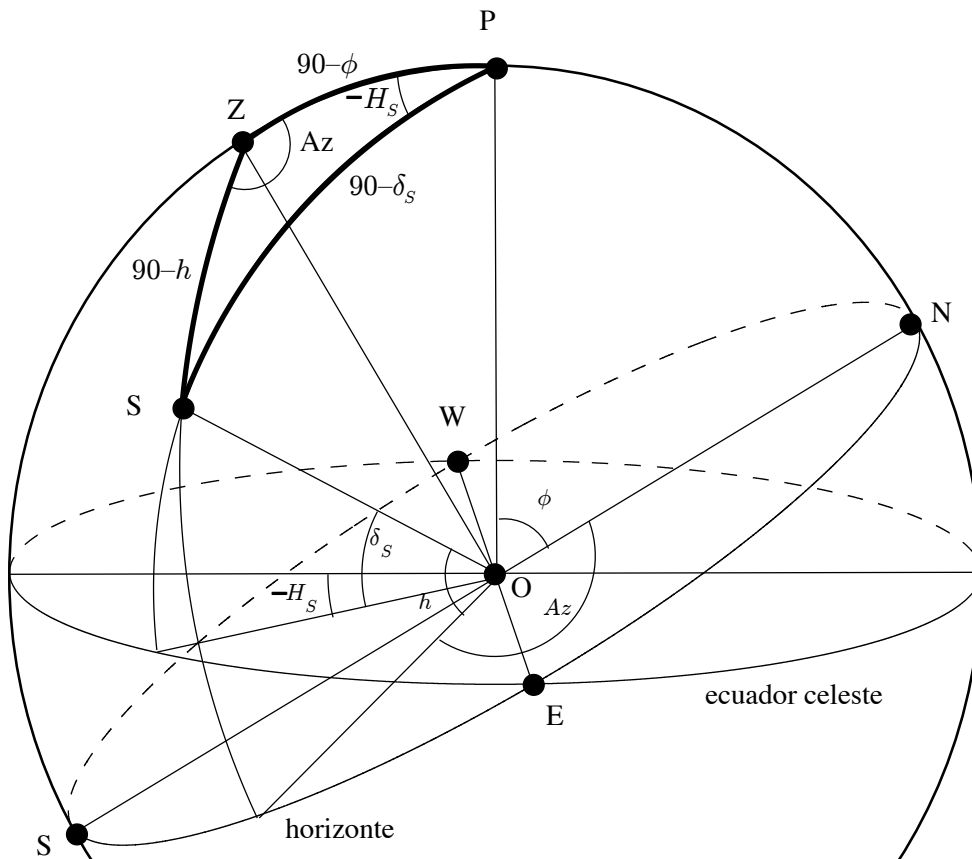


El triángulo astronómico II



El triángulo astronómico III

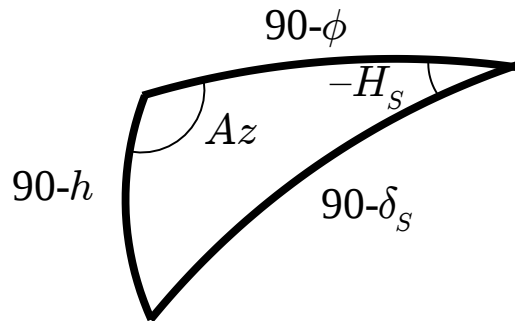
- La clave para plantear el triángulo consiste en desplazar el centro del sistema de referencia geocéntrico al observador; no se alteran las coordenadas angulares de S por la hipótesis de estar “infinitamente” distante de la Tierra.



- En la figura, Z es el zenit, N,S,E,W los puntos cardinales, y P la dirección del eje de la Tierra (hacia la estrella polar).
- Si el cuerpo S fuera próximo a la Tierra, el planteamiento no es válido; el problema hay que resolverlo con vectores.



El triángulo astronómico IV



- Del triángulo, obtenemos aplicando dos veces la ley de cosenos y recordando que $\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$ y $\cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$, se tiene:

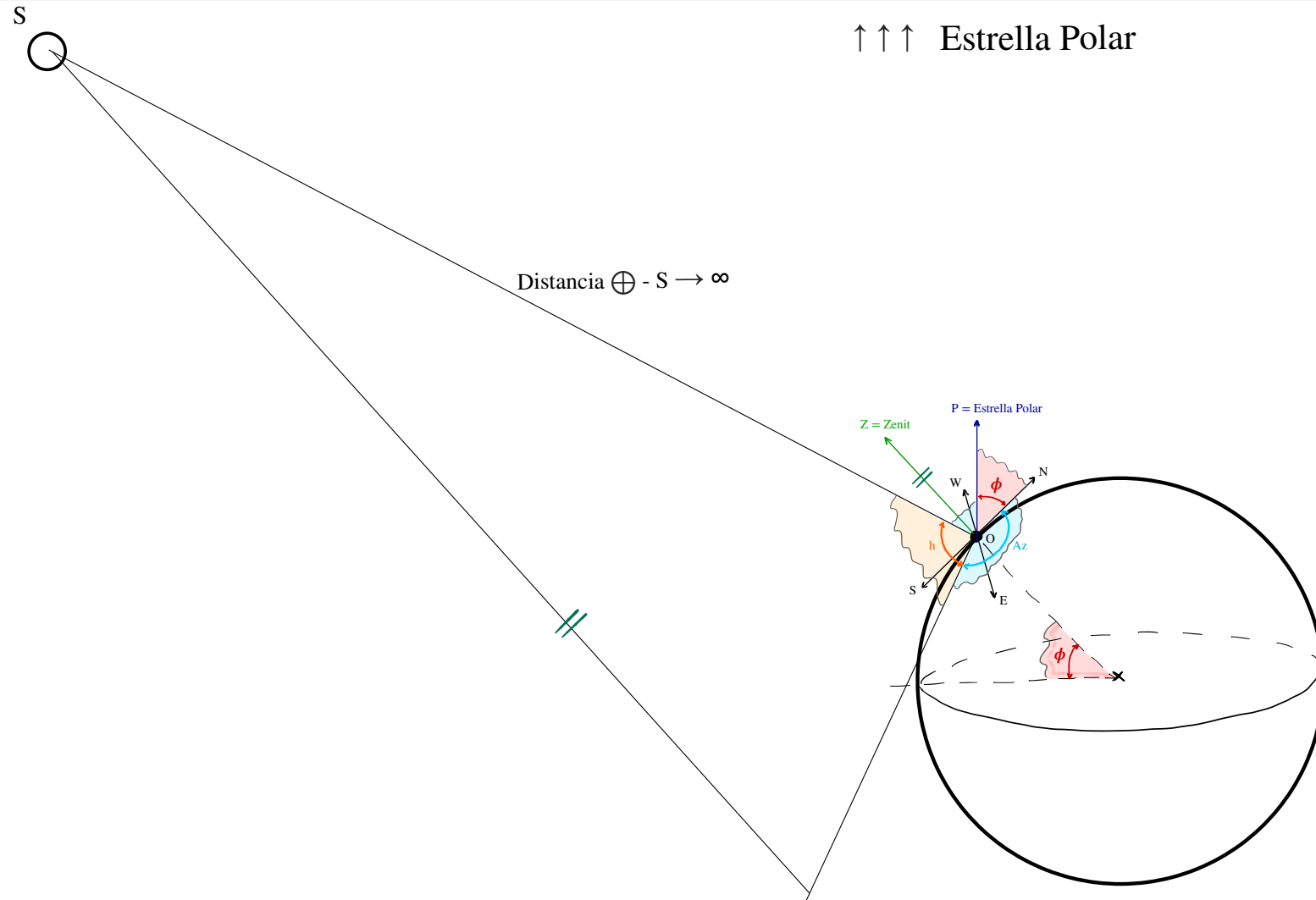
$$\sin \delta_S = \sin \phi \sin h + \cos \phi \cos h \cos Az,$$

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta_S + \cos \phi \cos \delta_S \cos H_S,$$

- Hay que recordar que: $H_S = \text{GST}_0 + \lambda + \omega_{\oplus} t - \text{AR}_S$.
- Usando las dos ecuaciones y sustituyendo H_S podemos obtener una pareja cualesquiera de datos:
 - Problema de posicionamiento: hallar δ_S , AR_S .
 - Problema de observación: hallar h , Az .
 - Problema de navegación: hallar ϕ , λ .
- Hay que tener cuidado con las ambigüedades de signo; se puede usar la ley de senos $\frac{\sin Az}{\cos \delta_S} = -\frac{\sin H_S}{\cos h}$ y recordar que $\delta_S, \phi, h \in [-90^\circ, 90^\circ]$.



El triángulo astronómico V



- Casos particulares: Sol al mediodía, estrella polar.

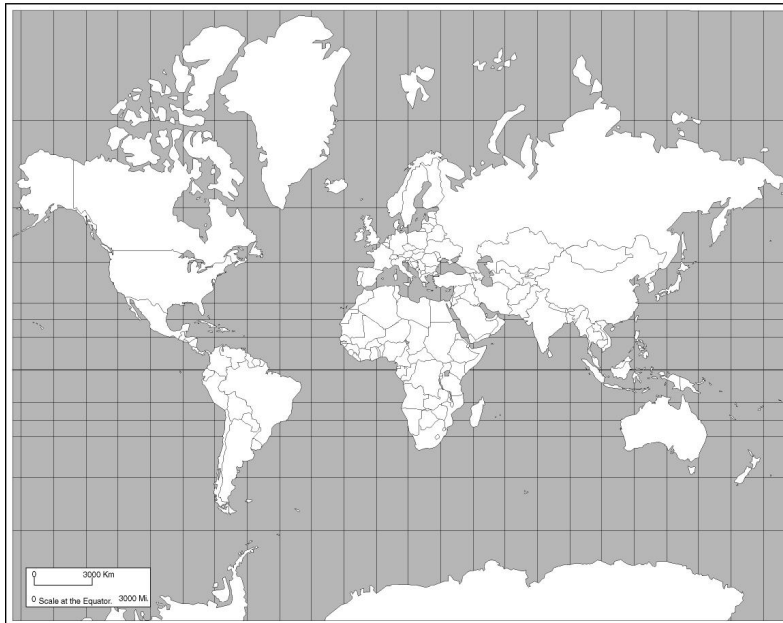
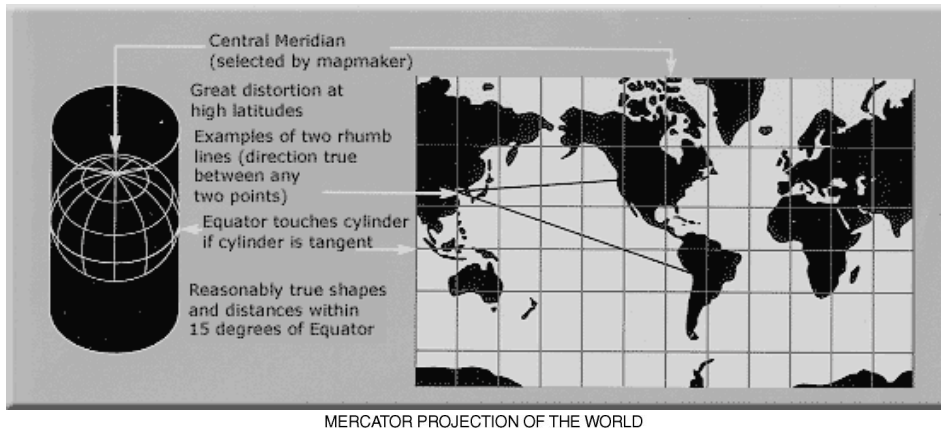


Trazas I

- **Traza:** Lugar geométrico de los puntos (llamados puntos subsatélite) de la superficie de la Tierra (u otro planeta) directamente sobrevolados por el satélite o vehículo.
- Las trazas son de gran utilidad a la hora de formular y verificar requisitos en el diseño de misiones geocéntricas o planetocéntricas, al ofrecer una representación gráfica de la órbita desde el punto de vista de la superficie.
- Debida a la combinación del movimiento (posiblemente excéntrico) del satélite y de la Tierra, además del efecto de las perturbaciones, el cómputo de la traza no es trivial.
- Se suelen representar en una proyección terrestre tipo cilíndrica.



Proyecciones I

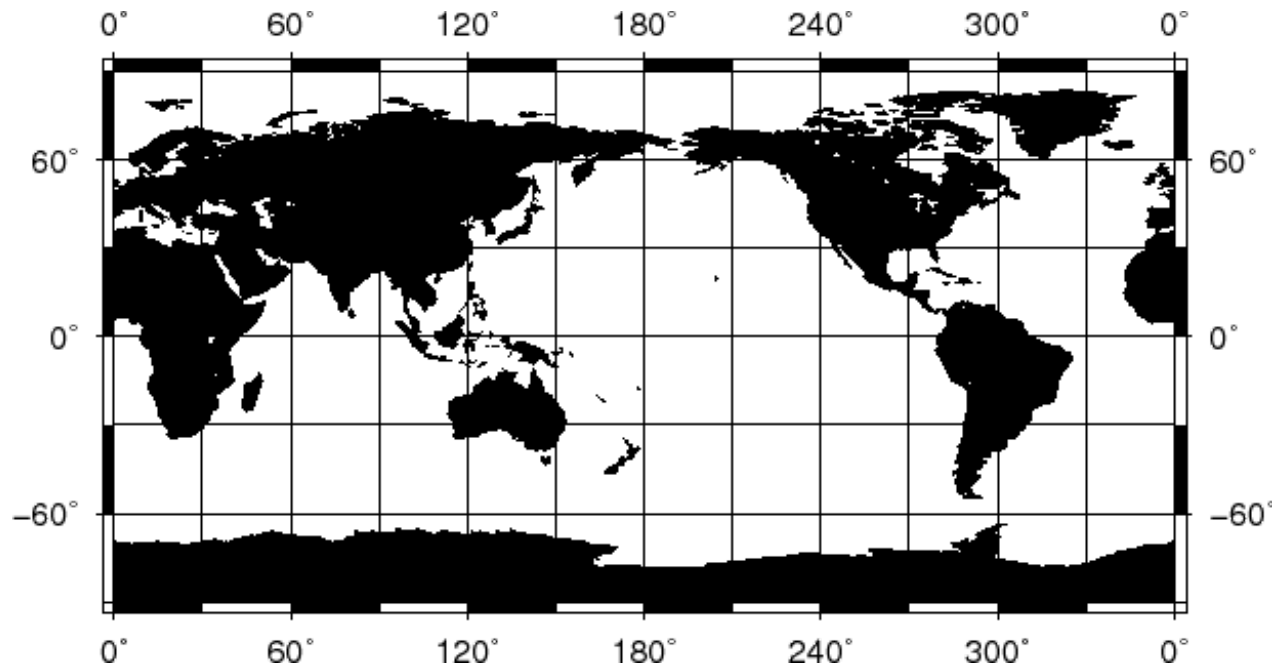


Produced by the Cartographic Research Lab
University of Alabama

- La proyección de **Mercator** es una proyección cilíndrica definida por una transformación **conforme**.
- Por tanto, tiene la propiedad de que los ángulos medidos en la proyección corresponden con ángulos reales.
- Además, tiene la propiedad de que las líneas de rumbo constante son líneas rectas.
- No obstante, lejos del Ecuador la proyección no es fidedigna, y los puntos cercanos a los polos (que se proyectan en el infinito) quedan a alturas muy elevadas.



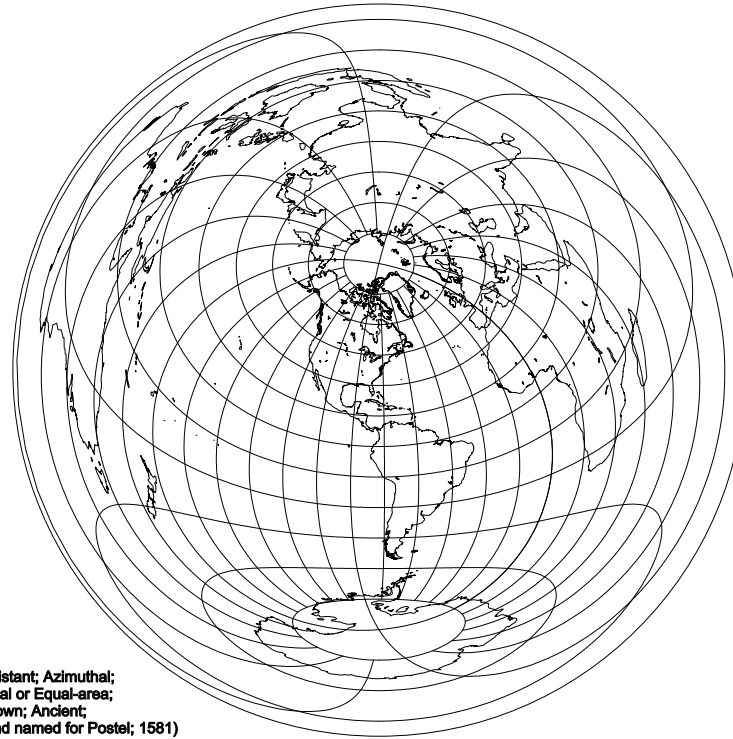
Proyecciones II



- La proyección **cilíndrica equidistante** escala los paralelos de forma que ángulos iguales abarcan distancias iguales. Por tanto longitud y latitud tienen una escala lineal y uniforme.
- Por tanto, no es conforme, sin embargo permite representar toda la Tierra en una superficie finita, por lo que es más útil que la de Mercator para representar trazas.



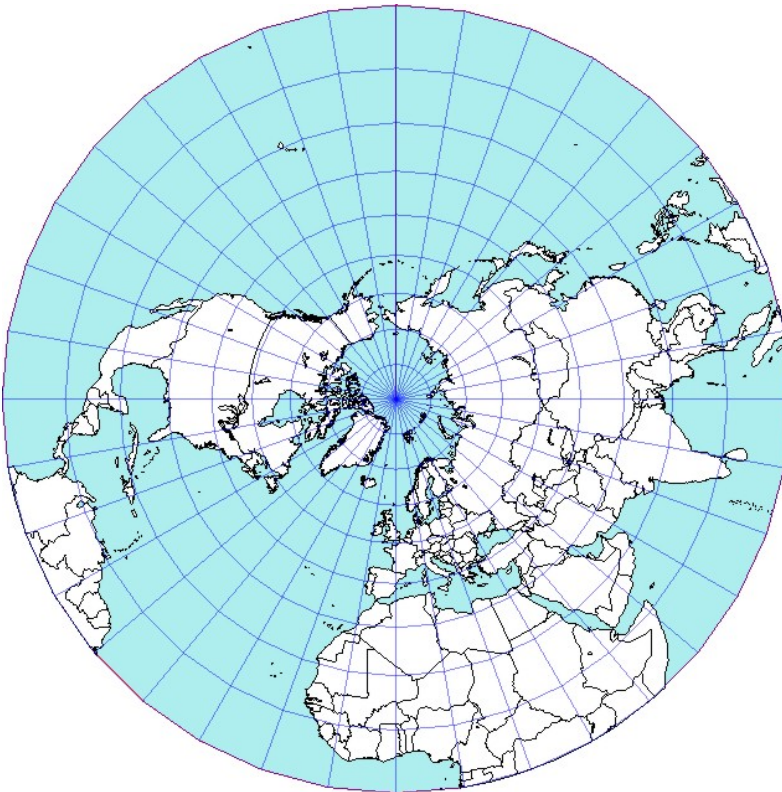
Proyecciones III



- La proyección **azimutal equidistante** es una proyección sobre un plano tangente a la Tierra.
- Es útil para observar fenómenos cercanos al punto de tangencia. Las distancias y direcciones sólo son verdaderas medidas desde el punto de tangencia.



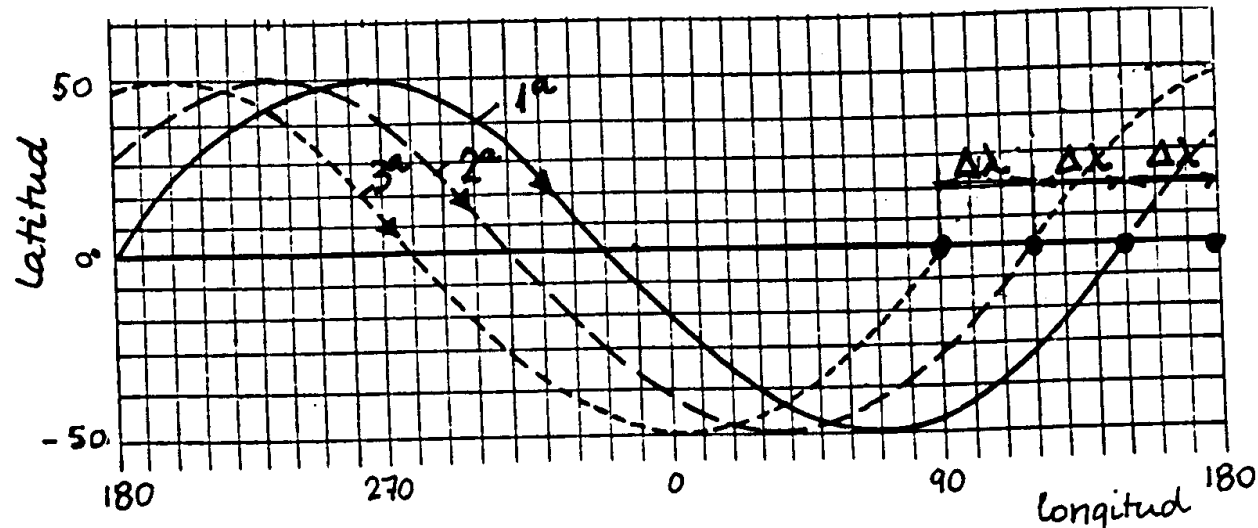
Proyecciones IV



- La proyección **estereográfica** es una proyección conforme sobre un plano tangente a la Tierra (típicamente en el polo).
- Esta proyección respeta ángulos pero no áreas, además requiere una superficie infinita ya que el punto opuesto al de tangencia se proyecta en el infinito.
- La representación es muy buena en las proximidades del punto de tangencia, con lo que se usa con frecuencia para estudiar órbitas próximas al polo, o la visibilidad de estaciones de elevada latitud.

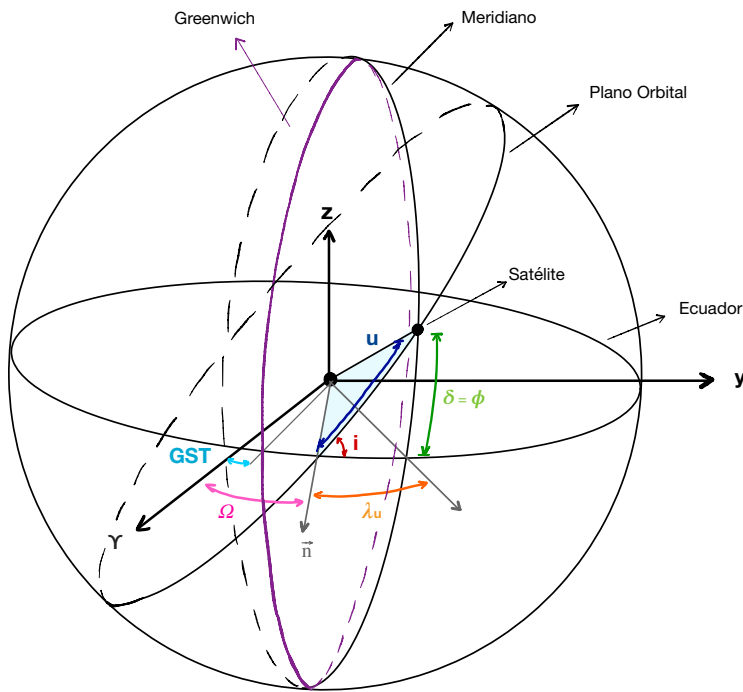


Trazas II



- La traza se representa usualmente sobre una proyección cilíndrica equidistante como una curva $(\lambda(t), \phi(t))$.
- Las latitudes máximas alcanzadas por la traza son $\pm i$ (para órbitas directas) y $\pm(180 - i)$ para órbitas retrógradas.
- Si la Tierra no rotase y en ausencia de perturbaciones, la curva se cerraría tras 1 revolución, asemejándose a una sinusoidal. En general, no se cierra, y el retraso nodal $\Delta\lambda = -\omega_{\oplus} T^{\text{SAT}}$ (en radianes por revolución). Considerando la perturbación secular del J_2 , $\Delta\lambda = -(\omega_{\oplus} - \dot{\Omega}) T_N^{\text{SAT}}$.

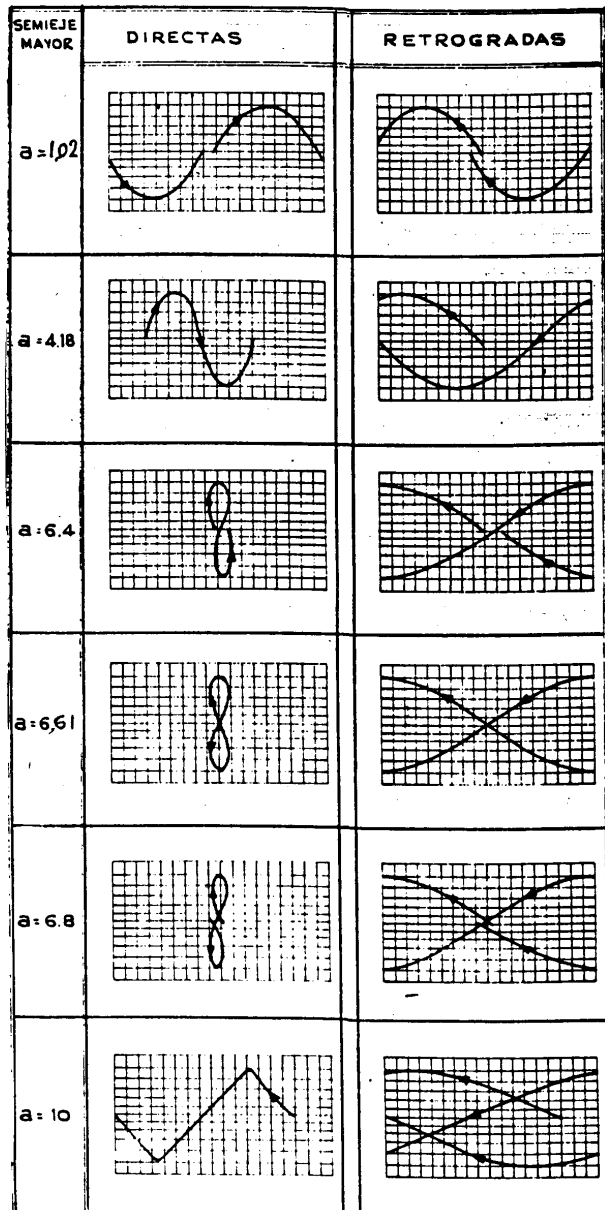
Cálculo de la Trazas I



- La traza se puede determinar analíticamente, si se conoce GST_0 y los elementos en $t = 0$. En primer lugar consideramos el modelo sin perturbaciones.
- De la figura, $u(t) = \omega + \theta(t)$ y $\sin \phi(t) = \sin u(t) \sin i$.
- Por otro lado: $\tan u(t) \cos i = \tan (GST_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda(t) - \Omega)$.
- Por tanto las ecuaciones que determinan la traza son:
$$\phi(t) = \arcsin (\sin u(t) \sin i)$$
$$\lambda(t) = \Omega - GST_0 - \omega_{\oplus} t + \arctan (\tan u(t) \cos i).$$
- Queda determinar $u(t)$ en función de t . Si la órbita es circular, $u(t) = \omega + \theta_0 + nt$.



Cálculo de la Taza II



- En el caso circular, las ecuaciones son, por tanto:

$$\phi(t) = \arcsin \left(\sin \left[\omega + \theta_0 + t \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^3}} \right] \sin i \right)$$

$$\lambda(t) = \Omega - GST_0 - \omega_{\oplus} t + \arctan \left(\tan \left[\omega + \theta_0 + t \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^3}} \right] \cos i \right)$$
- Al aumentar la altura, aumenta el periodo y por tanto aumenta el retraso nodal
 $\Delta\lambda = -\omega_{\oplus} T_{SAT}$, hasta llegar a la altura geoestacionaria, donde es exactamente 360° .
- Para alturas mayores, la órbita es “supersíncrona” y la mayor parte de la traza es retrógrada.



Cálculo de la Taza III

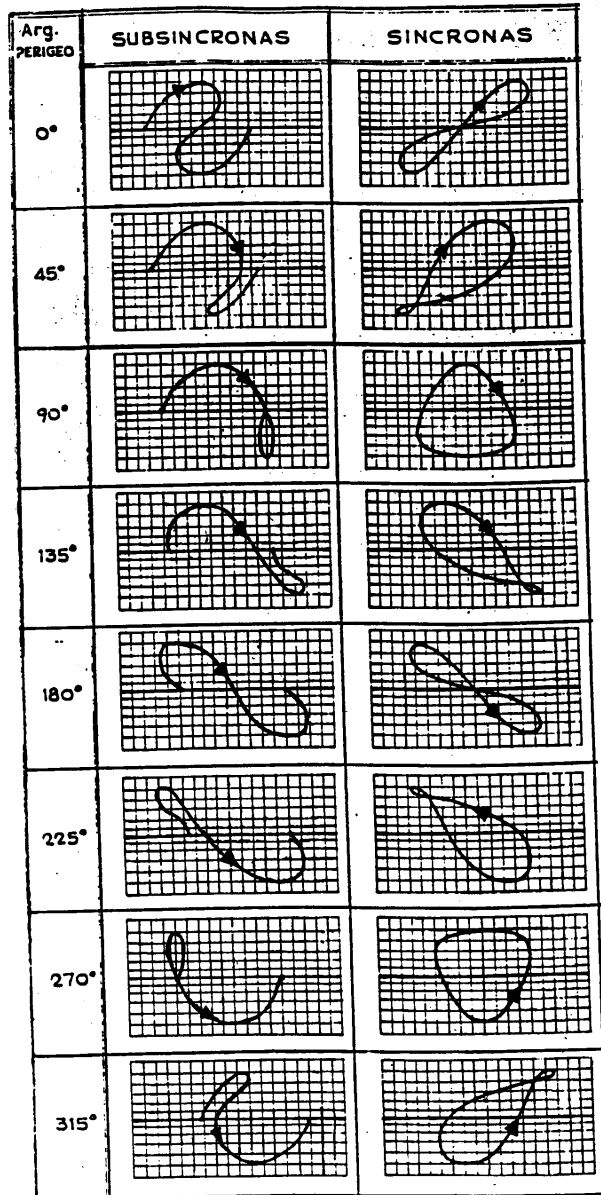


Fig. 5.- Influencia del argumento del perigeo

- En el caso excéntrico, sería necesario emplear la Ecuación de Kepler para obtener θ en cada instante.
- Las órbitas de pequeña excentricidad no se diferencian mucho de las circulares.
- Las de elevada excentricidad modifican mucho su aspecto debido a los cambios de velocidad, además de introducir una dependencia en el argumento del perigeo del aspecto de la traza.
- En la figura, un ejemplo con $i = 50^\circ$ y $e = 0,75$. Obsérvese el movimiento retrógrado en las proximidades del apogeo.



Cálculo de la Traza IV

Determinación de la **velocidad aparente** del satélite sobre la traza.

- Queremos calcular $\dot{\phi}$ y $\dot{\lambda}$. Se pueden calcular geoméricamente, pero lo más sencillo es tomar derivada temporal en $\phi(t) = \arcsin(\sin u(t) \sin i)$ y $\lambda(t) = \Omega - GST_0 - \omega_{\oplus} t + \arctan(\tan u(t) \cos i)$.
- Llegamos a: $\dot{\phi}(t) = \frac{\cos u(t) \sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 u(t) \sin^2 i}} \dot{u}(t)$ y $\dot{\lambda}(t) = -\omega_{\oplus} + \frac{1 + \tan^2 u(t)}{1 + \tan^2 u(t) \cos^2 i} \dot{u}(t) \cos i = -\omega_{\oplus} + \frac{\dot{u}(t) \cos i}{1 - \sin^2 u(t) \sin^2 i}$.
- Recordando $\sin \phi(t) = \sin u(t) \sin i$:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\cos u(t) \sin i}{\cos \phi(t)} \dot{u}(t) = \frac{\tan \phi(t)}{\tan u(t)} \dot{u}(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\omega_{\oplus} + \frac{\cos i}{\cos^2 \phi(t)} \dot{u}(t)$$

- Se tiene de problemas que $\dot{u}(t) = \dot{\theta}(t) = n \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$.



Cálculo de la Traza V

- En un punto dado se puede calcular el Azimut relativo o aparente con el que el satélite cruza el cielo como:
 $\tan Az_{AP} = \cos \phi \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\phi}}$. Este es diferente del Azimuth en proyección que sería simplemente $\tan Az = \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\phi}}$.
- De la expresión $\sin \phi(t) = \sin u(t) \sin i$ se calculan la máxima y mínima latitud ($\phi = \pm i$); se tendrán cuando $u(t) = \pm 90^\circ$.
- Órbitas retrógradas: se tendrán cuando $\dot{\lambda}(t) < 0$, es decir:

$$\frac{\cos i}{\cos^2 \phi(t)} \dot{u}(t) < \omega_{\oplus}$$

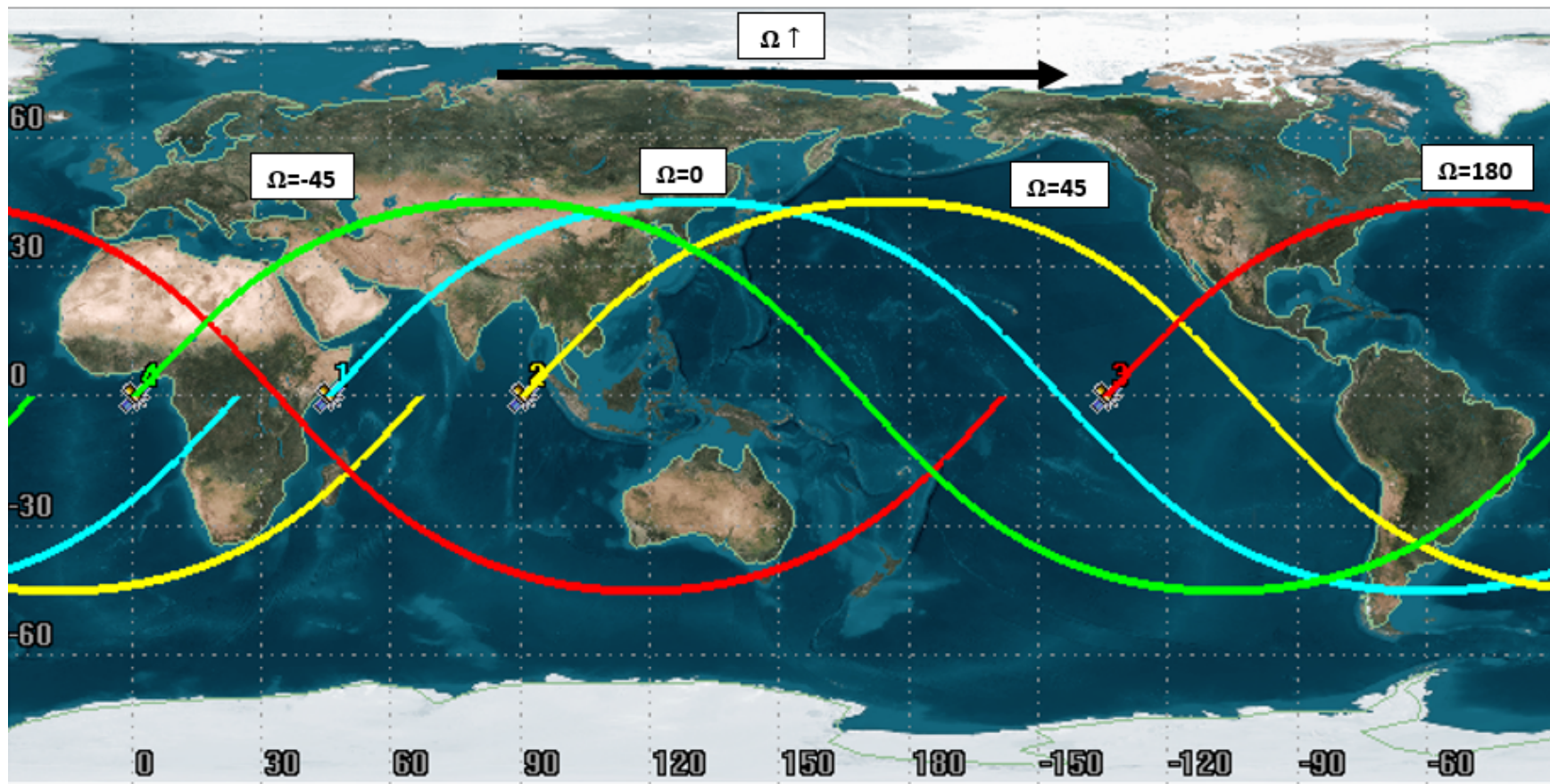
- Si $i \geq 90^\circ$ entonces la traza siempre es retrógrada.
- Si existen puntos donde $\frac{\cos i}{\cos^2 \phi(t)} \dot{u}(t) = \omega_{\oplus}$ en dichos puntos la traza cambia de dirección.
- Para órbitas circulares:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\tan \phi(t)}{\tan(\omega + \theta_0 + nt)} n, \quad \dot{\lambda}(t) = -\omega_{\oplus} + \frac{\cos i}{\cos^2 \phi(t)} n$$



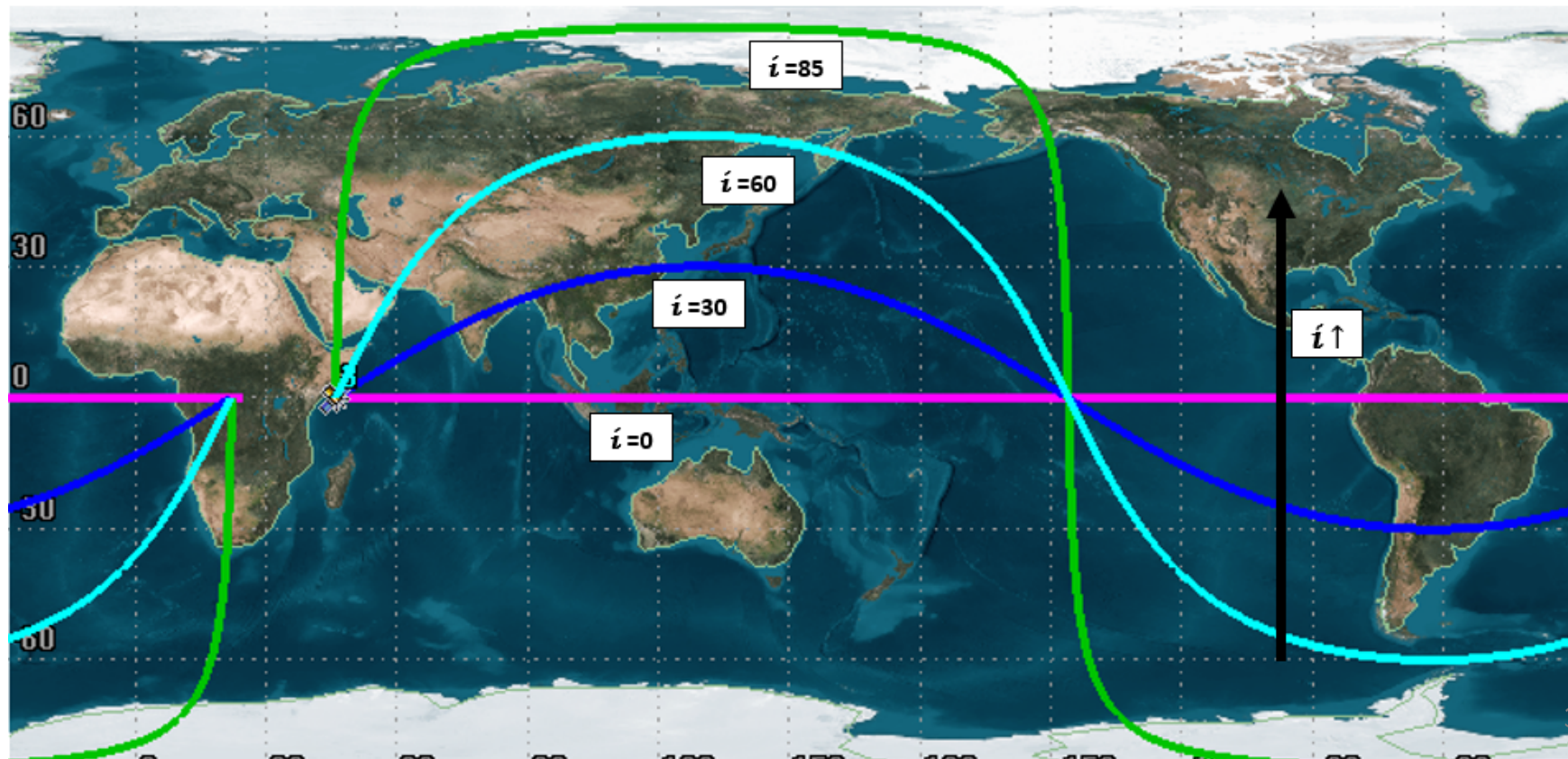
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza I

- El elemento orbital Ω es sencillo de cuantificar; cambios en Ω simplemente desplazan la traza hacia el Este (una translación simple) tantos grados como grados se modifique Ω .



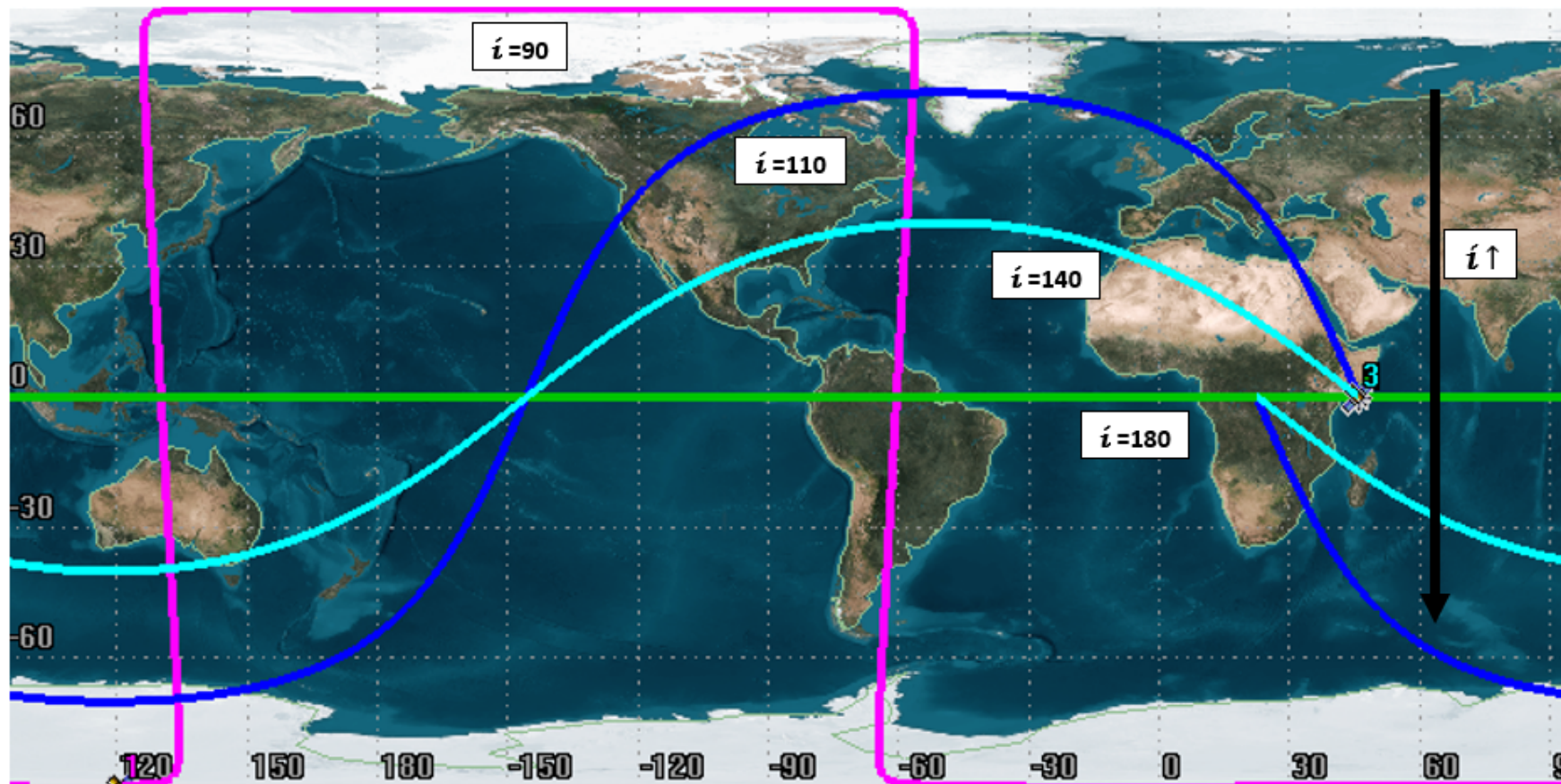
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza II

- Cambios en la inclinación (cuando esta es menor de 90°) elevan la “amplitud” de la traza (se alcanzan latitudes mayores en el hemisferio norte y menores en el sur). Al mismo tiempo se distorsiona la forma de la traza debido a que el movimiento de la Tierra es más lento en mayores latitudes.



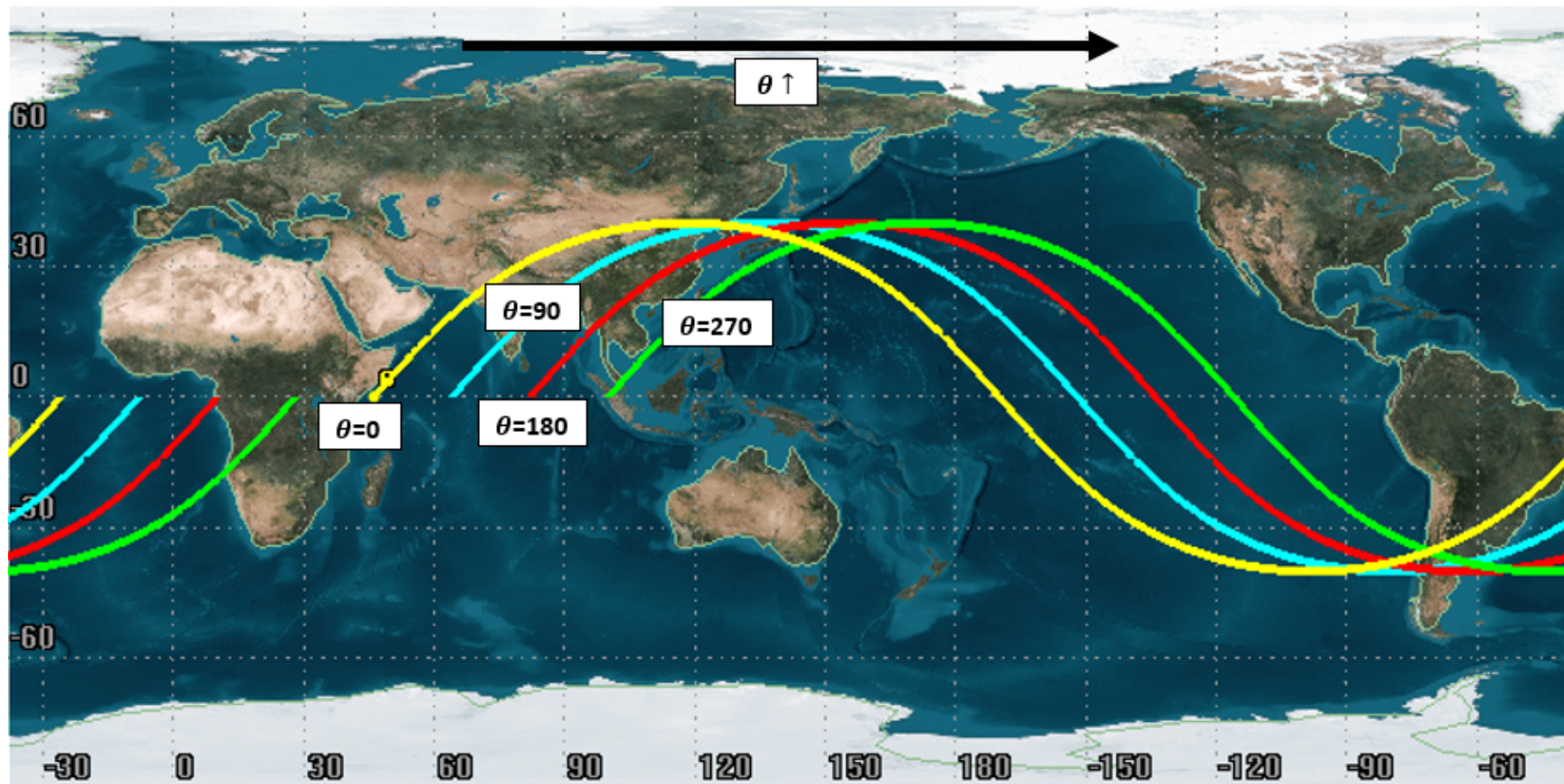
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza II

- Si la inclinación es mayor de 90° el efecto es inverso y toda la traza se vuelve retrógrada (siempre avanza hacia el Oeste).



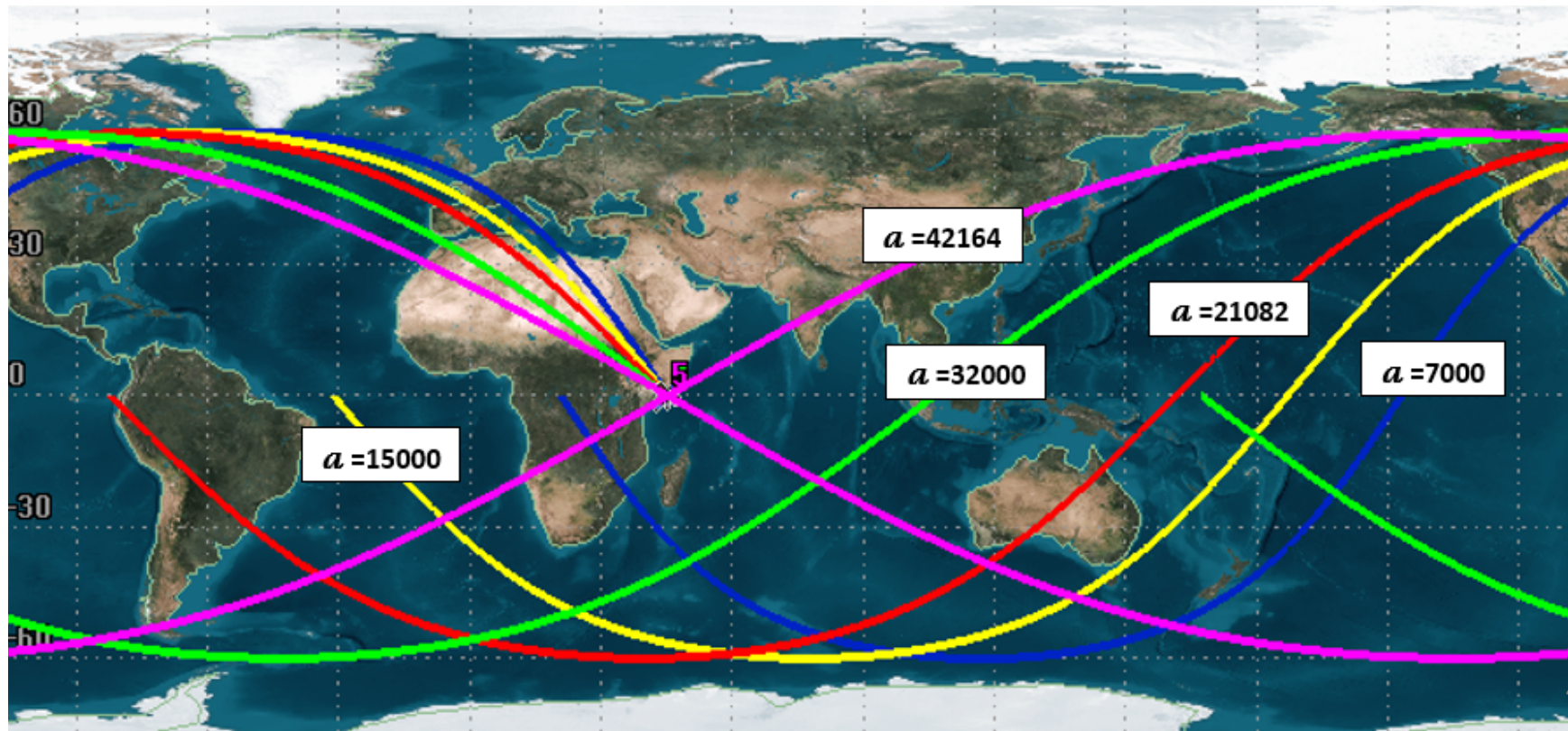
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza III

- Cambios en θ “mueven” el vehículo sobre su traza y la desplazan.



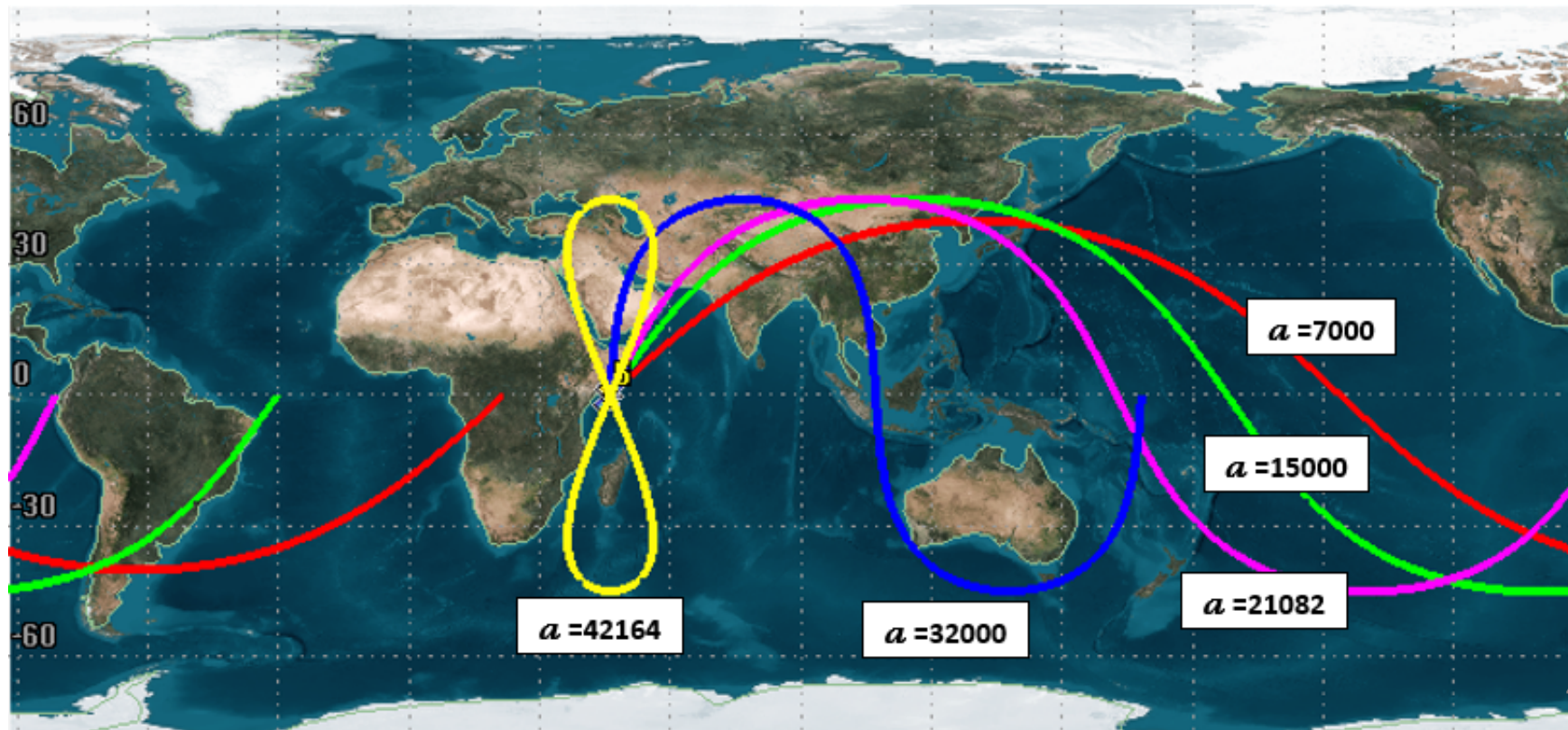
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza IV

- Cambios en a aumentan el retraso nodal y por tanto acortan la traza (si $i < 90^\circ$) o la alargan (si $i > 90^\circ$). Ajustándolo se puede conseguir una traza que se repita (ver problema 9).
- Si $i > 90^\circ$:



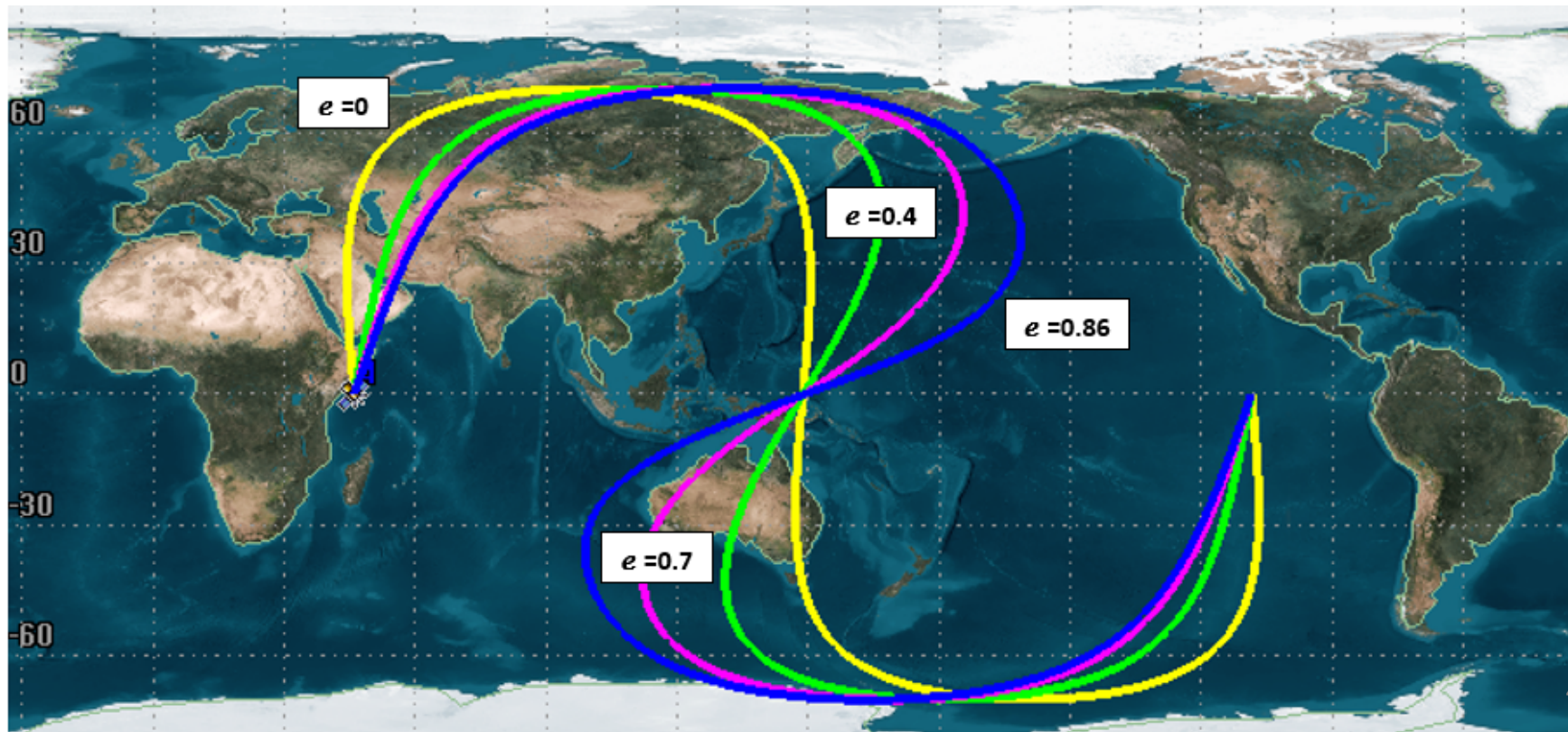
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza IV

- Si $i < 90^\circ$: Si a aumenta mucho puede llegar a producir zonas de movimiento retrógrado aparente incluso para órbitas directas (por disminución de la velocidad angular) en combinación con valores apropiados de i .



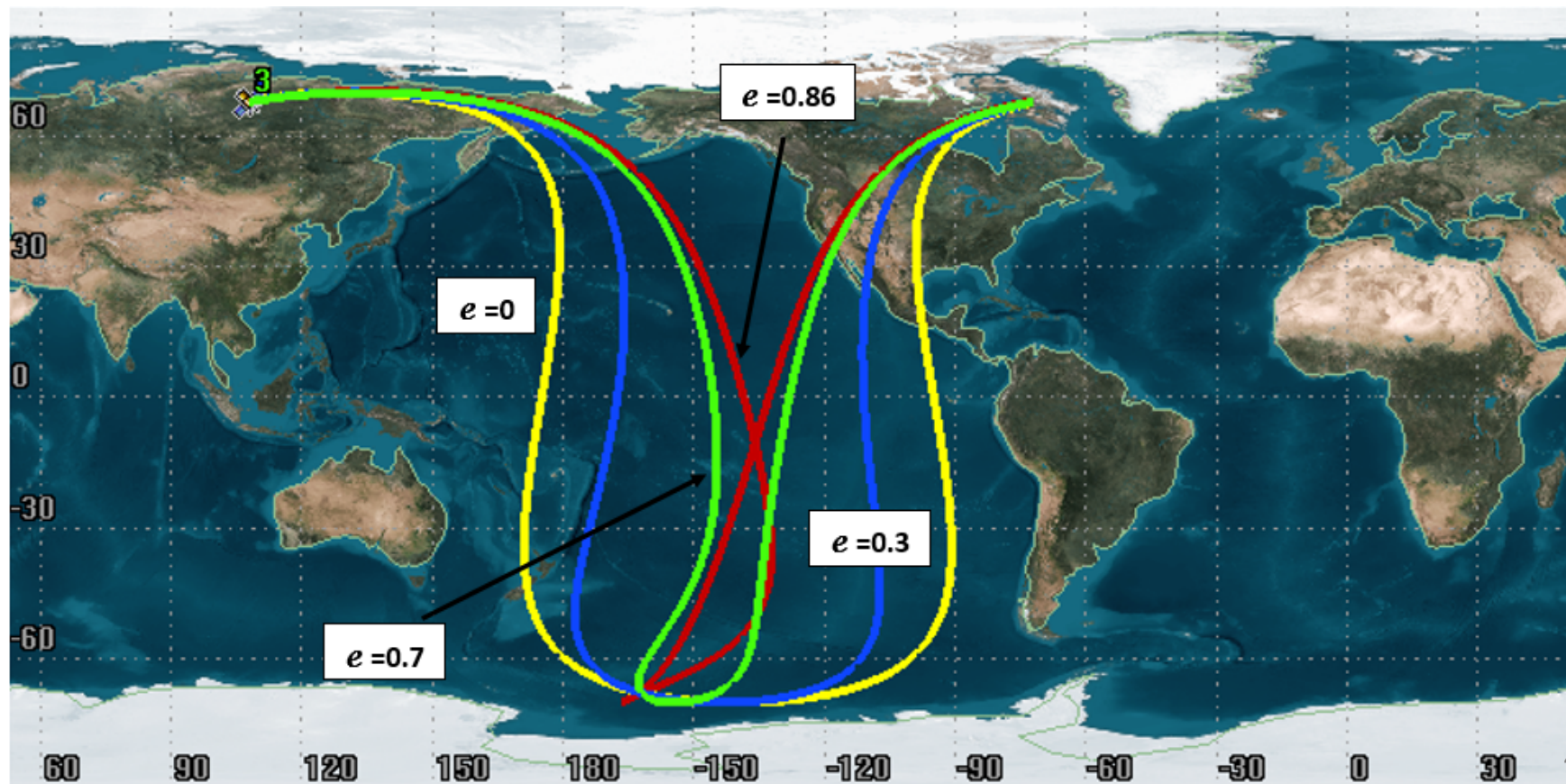
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza V

- Aumentos de excentricidad e deforman la traza y pueden provocar también zonas de movimiento retrógrado (fundamentalmente en las proximidades del apogeo).
- Para $\omega = 0^\circ$:



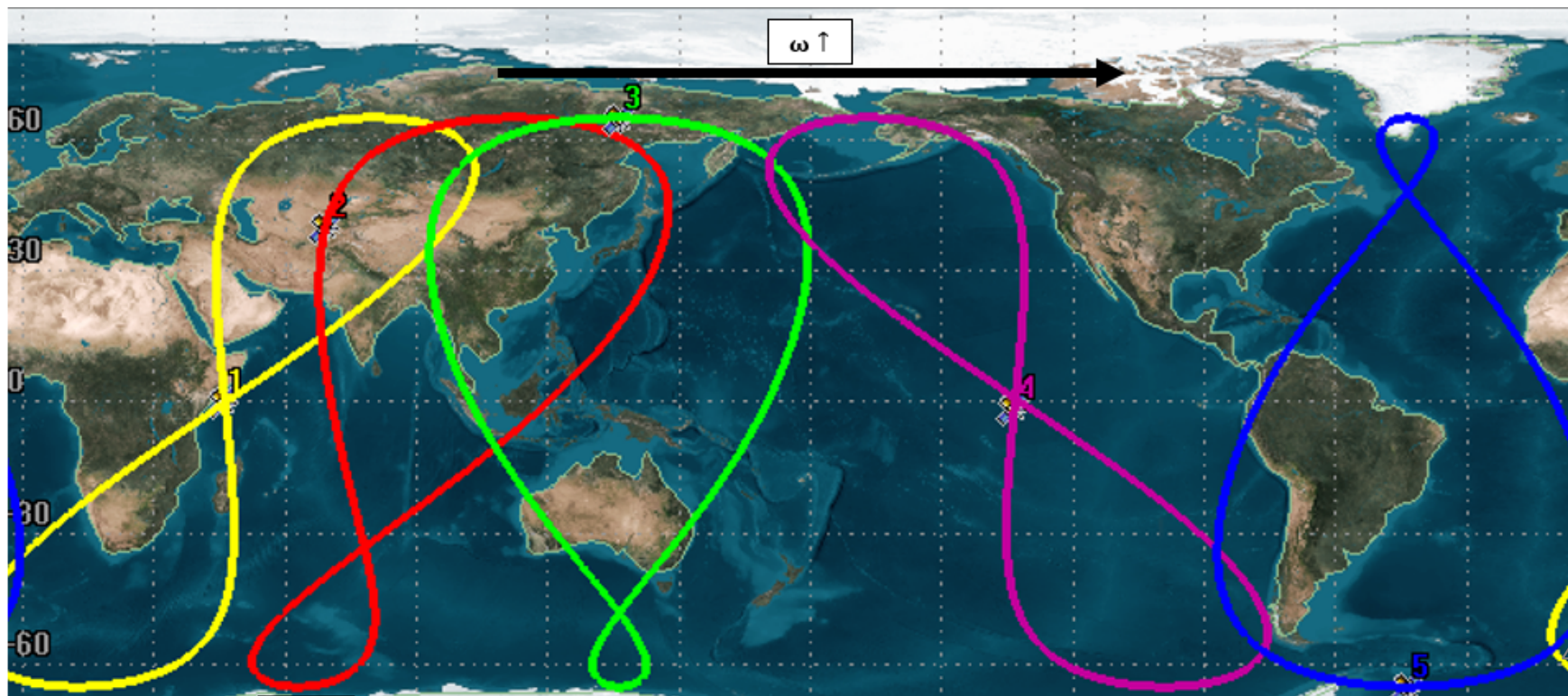
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza V

- Cambios en el argumento del perigeo modifican considerablemente la forma de la traza.
- Para $\omega = 70^\circ$:



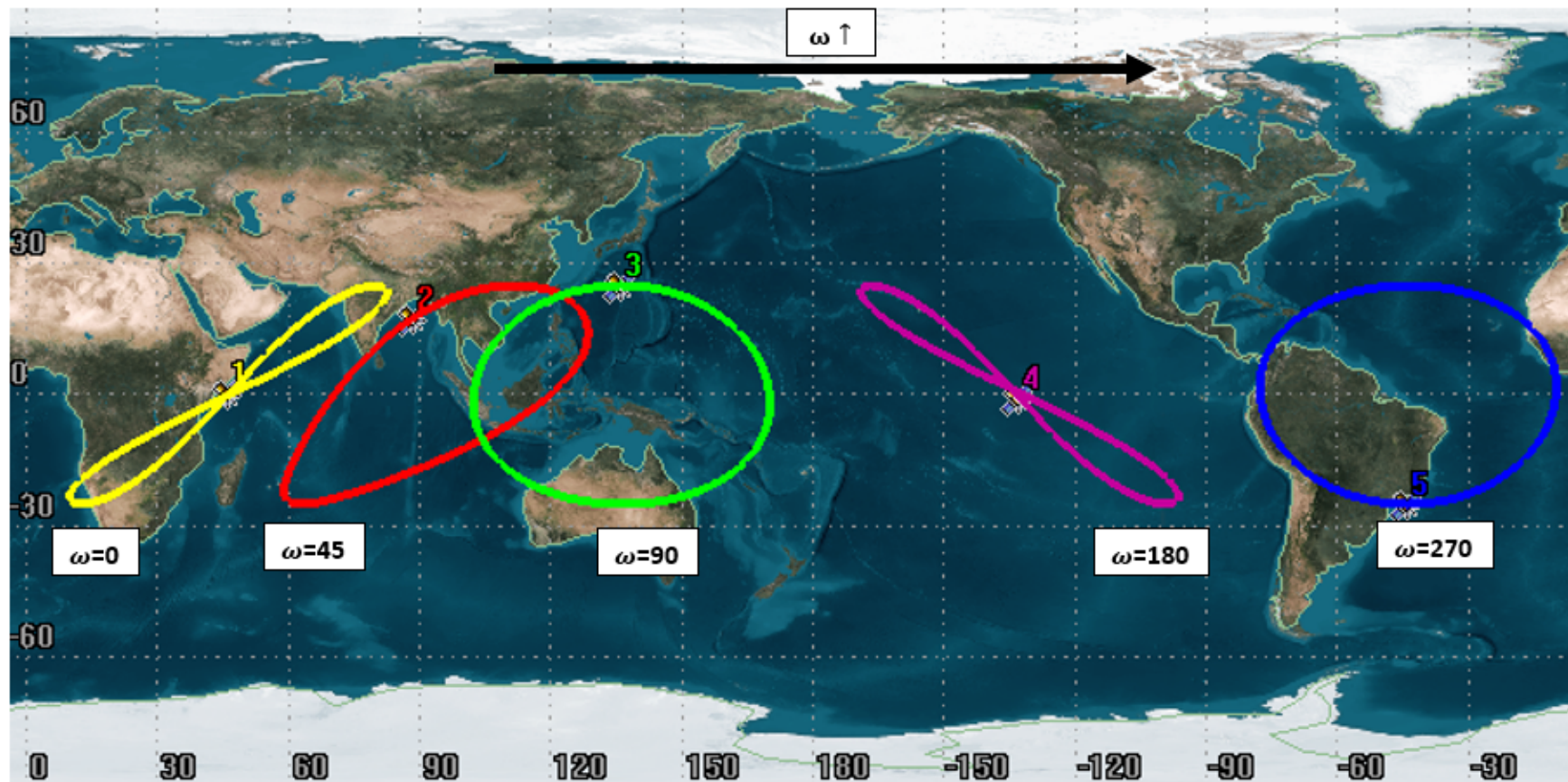
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza VI

- Cambios en ω (sólo tiene sentido si $e > 0$) modifican la simetría Norte-Sur y Este-Oeste de la traza. Si $\omega = 0^\circ, 180^\circ$ (apogeo o perigeo en nodo ascendente) la traza conserva simetría N-S. Si $\omega = 90^\circ, 270^\circ$ (apogeo o perigeo en el punto de mayor latitud) la traza conserva simetría E-O.
- Para valores de i elevados:



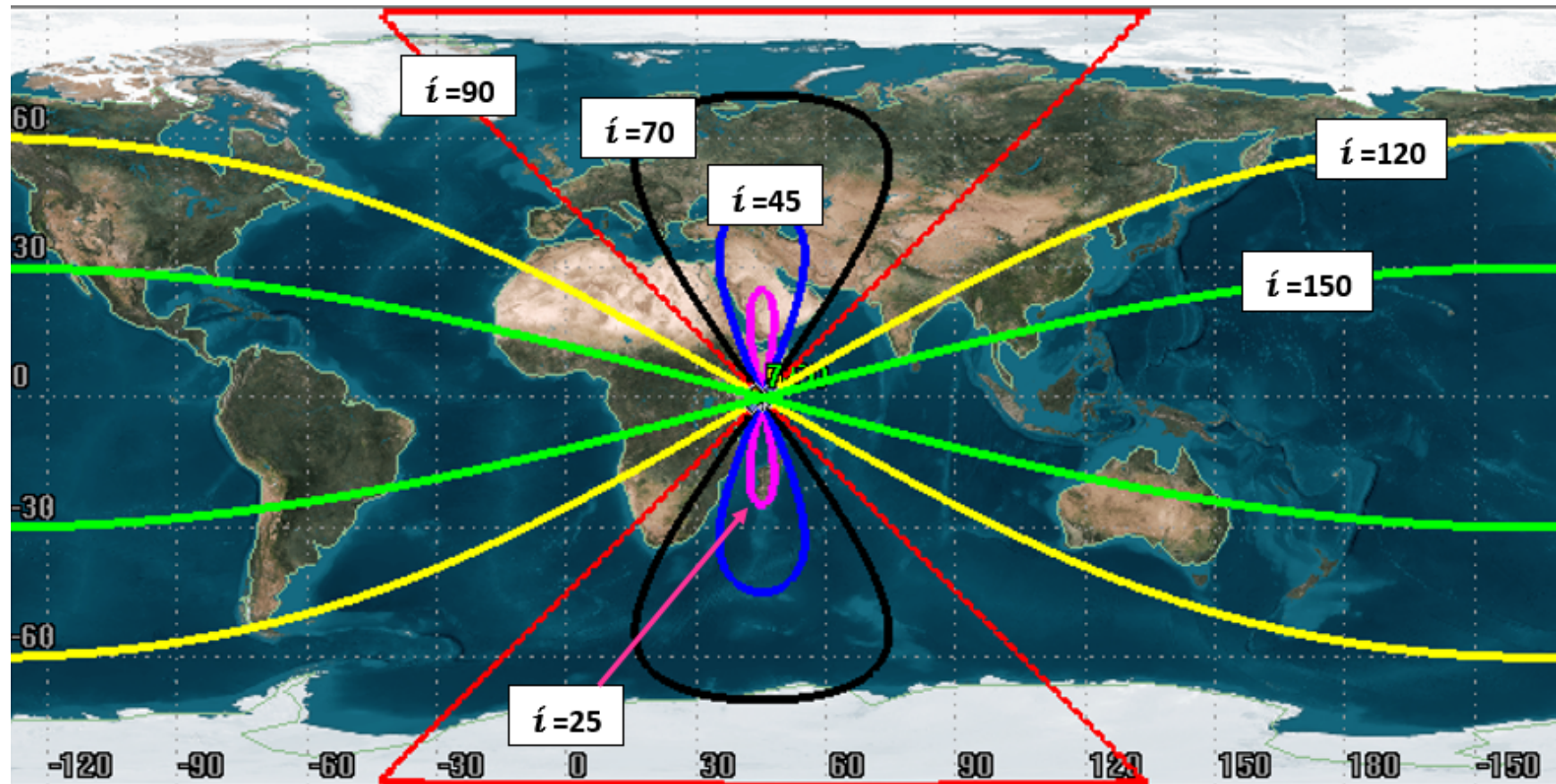
Efecto de los elementos orbitales sobre la Traza VI

- Para valores de i pequeños:



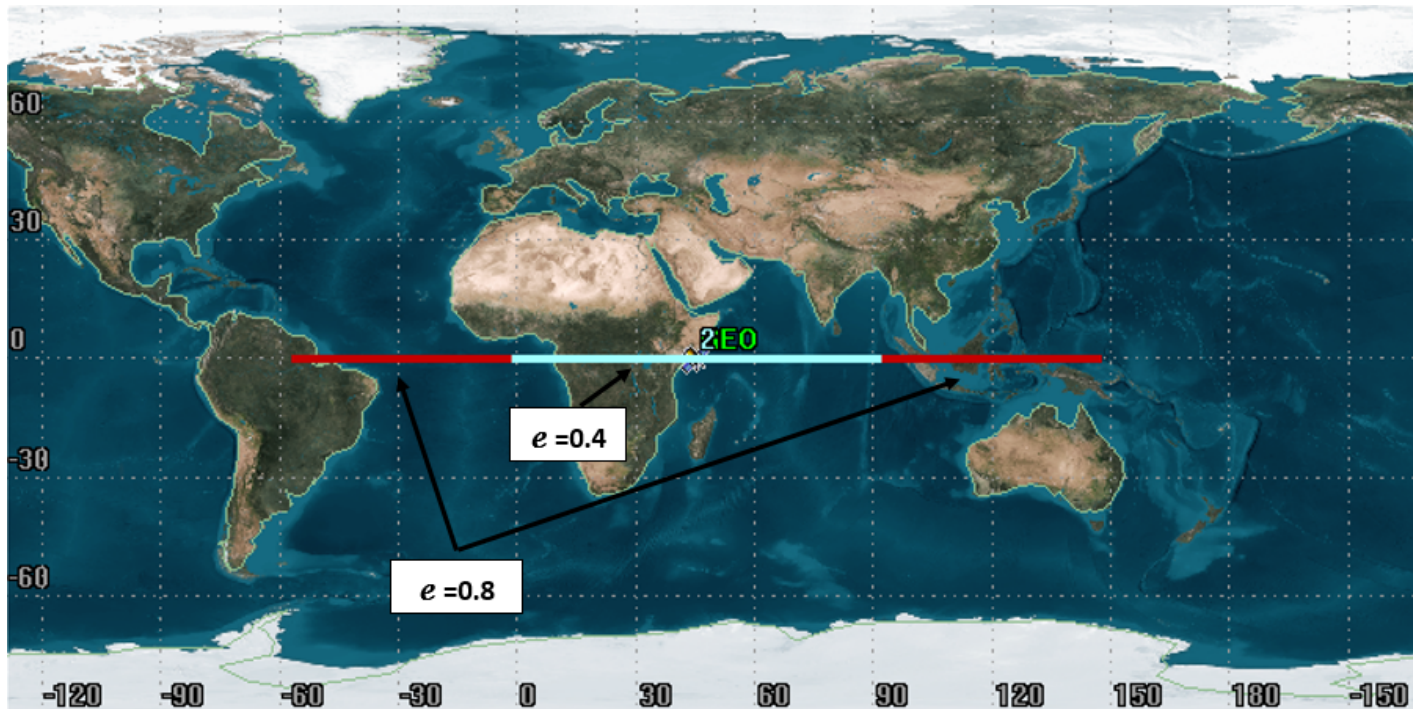
Aplicación: Órbita geosíncrona circular con inclinación

- Al aumentar la inclinación el satélite deja de ser geoestacionario y adopta estas formas características.



Aplicación: Órbita geosíncrona ecuatorial con excentricidad

- Cambios en la excentricidad producen movimientos oscilantes sobre el ecuador en torno a un punto.



- En prácticas y en problemas se investigarán algunas trazas típicas y/o interesantes, además de otros fenómenos como trazas repetidas o cómo conseguir que varios satélites compartan la misma traza.

Cómputo de una posición sobre la Traza I

- Como hemos visto se usan las ecuaciones:

$$\sin \phi(t) = \sin u(t) \sin i, \quad \lambda(t) = \Omega - GST_0 - \omega_{\oplus} t + \lambda_u,$$

- En estas ecuaciones $u(t) = \omega + \theta(t)$ representa el “ángulo recorrido sobre la traza” a partir del nodo ascendente.
- $u = 0^\circ$ es por tanto el nodo ascendente, $u = 180^\circ$ el descendente, $u = 90^\circ$ es el punto de mayor latitud, $u = 270^\circ$ el punto de menor latitud. Cuando $u \in (-90^\circ, 90^\circ)$ la traza se mueve de Sur a Norte, y cuando $u \in (90^\circ, 270^\circ)$ la traza se mueve de Norte a Sur.
- Si la órbita es polar ($i = 90^\circ$) las ecuaciones resultan singulares. Para estas órbitas $\phi(t) = u(t)$ cuando $u \in (-90^\circ, 90^\circ)$ y $\phi(t) = 180^\circ - u(t)$ cuando $u \in (90^\circ, 270^\circ)$.
- Si la órbita es excéntrica no olvidar que $\theta(t)$ (y por tanto $u(t)$) evoluciona de acuerdo a las leyes horarias!

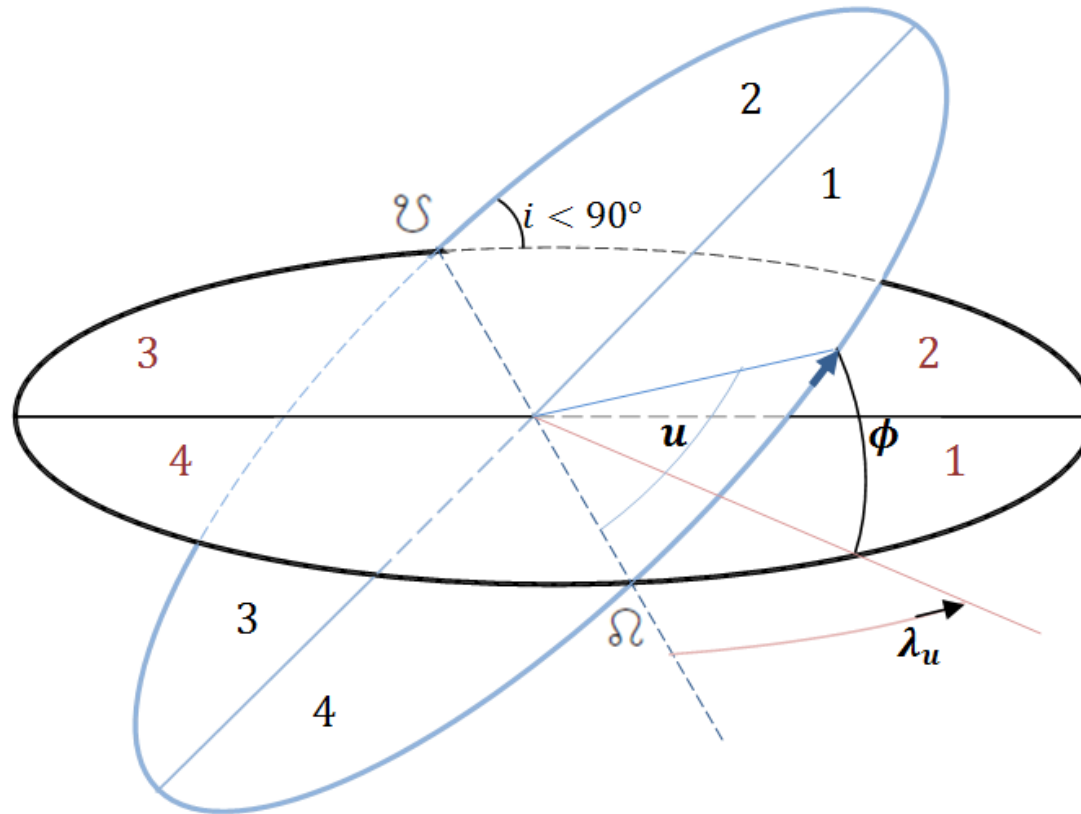


Cómputo de una posición sobre la Traza II

- El ángulo $\lambda_u(t)$ representa el ángulo que la traza proyectada sobre el Ecuador recorre, a partir del nodo ascendente, hacia el Este, y sin tener en cuenta el movimiento de la Tierra. Se puede calcular del triángulo de varias formas, por ejemplo $\tan \lambda_u(t) = \tan u(t) \cos i$ o $\cos \lambda_u(t) = \frac{\cos u(t)}{\cos \phi(t)}$.
- Es importante para corregir la solución obtenida tener en cuenta que, si la órbita es directa, $u(t)$ y $\lambda_u(t)$ están en el mismo cuadrante, mientras que si la órbita es retrógrada están en cuadrantes opuestos (en este sentido, el primer cuadrante es opuesto al cuarto y el segundo opuesto al tercero).
- Si la órbita es polar ($i = 90^\circ$) las ecuaciones resultan singulares. Para estas órbitas $\lambda_u(t) = 0^\circ$ cuando $u \in (-90^\circ, 90^\circ)$ y $\lambda_u(t) = 180^\circ$ cuando $u \in (90^\circ, 270^\circ)$. Es decir sólo son posibles dos valores.



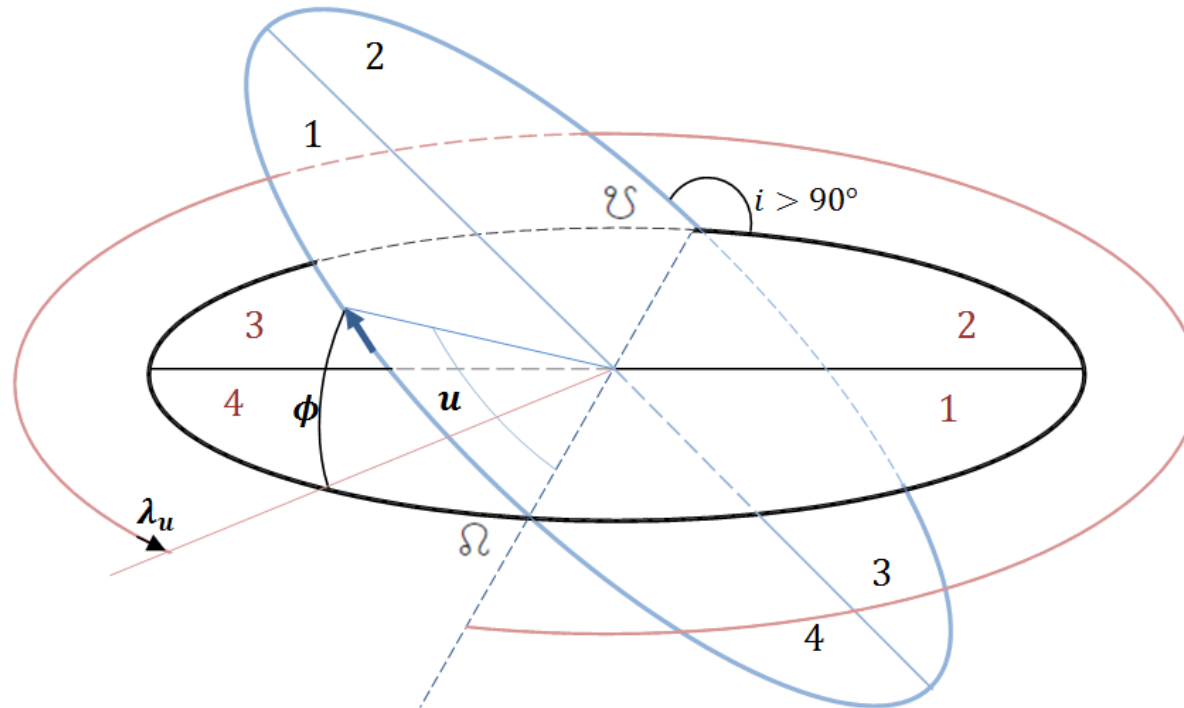
Cómputo de una posición sobre la Trazas III



- Figura que ilustra el caso directo (sistema de referencia inercial). u (rojo) y λ_u (azul) recorren los mismos cuadrantes en el mismo orden. Se observa que los puntos especiales (0° , 90° , 180° , 270°) se alcanzan simultáneamente.



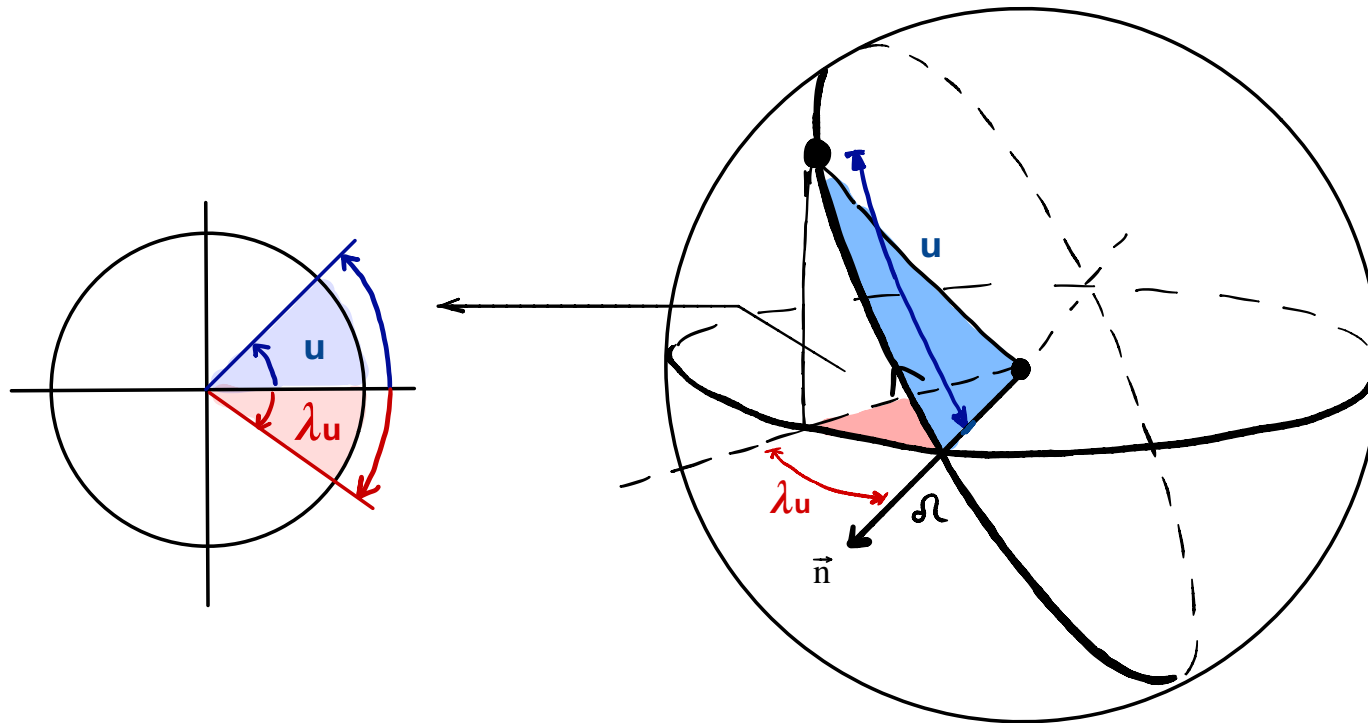
Cómputo de una posición sobre la Traza IV



- Figura que ilustra el caso retrógrado (sistema de referencia inercial). u (rojo) y λ_u (azul) recorren los cuadrantes en orden opuesto. Se observa que los puntos especiales para u (0° , 90° , 180° , 270°) son opuestos para λ_u (0° , 270° , 180° , 90°).

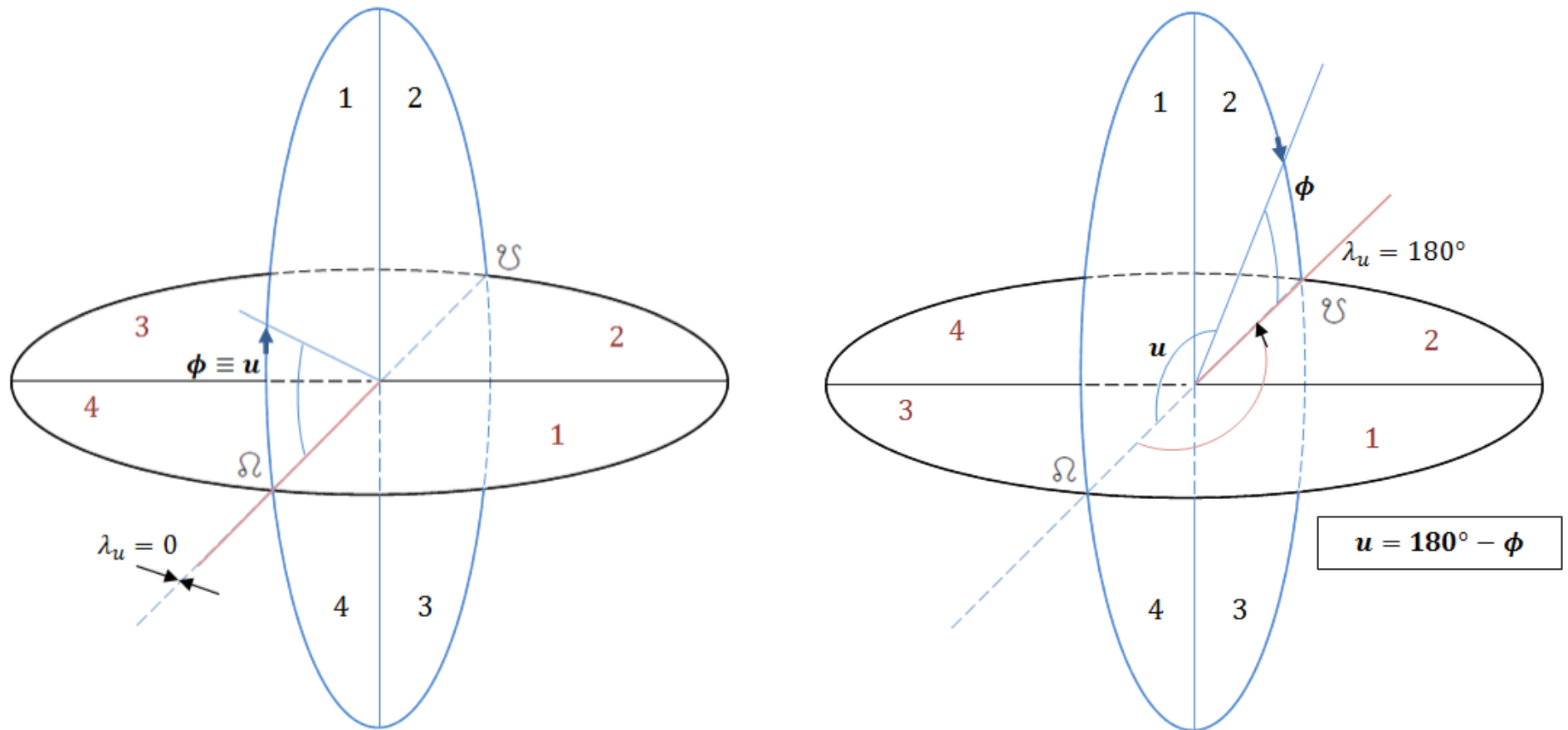


Caso retrógrado



- Otra ilustración del caso retrógrado.

Cómputo de una posición sobre la Traza V

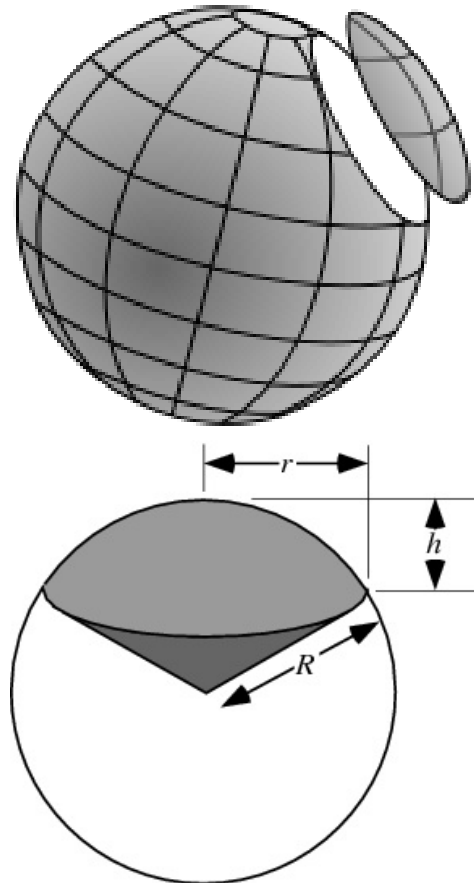


- Figuras que ilustran el caso polar, cuando se recorre de Sur a Norte (izquierda) y de Norte a Sur (derecha).



Círculos esféricos

Un círculo esférico viene dado por el corte de una esfera con un plano arbitrario.

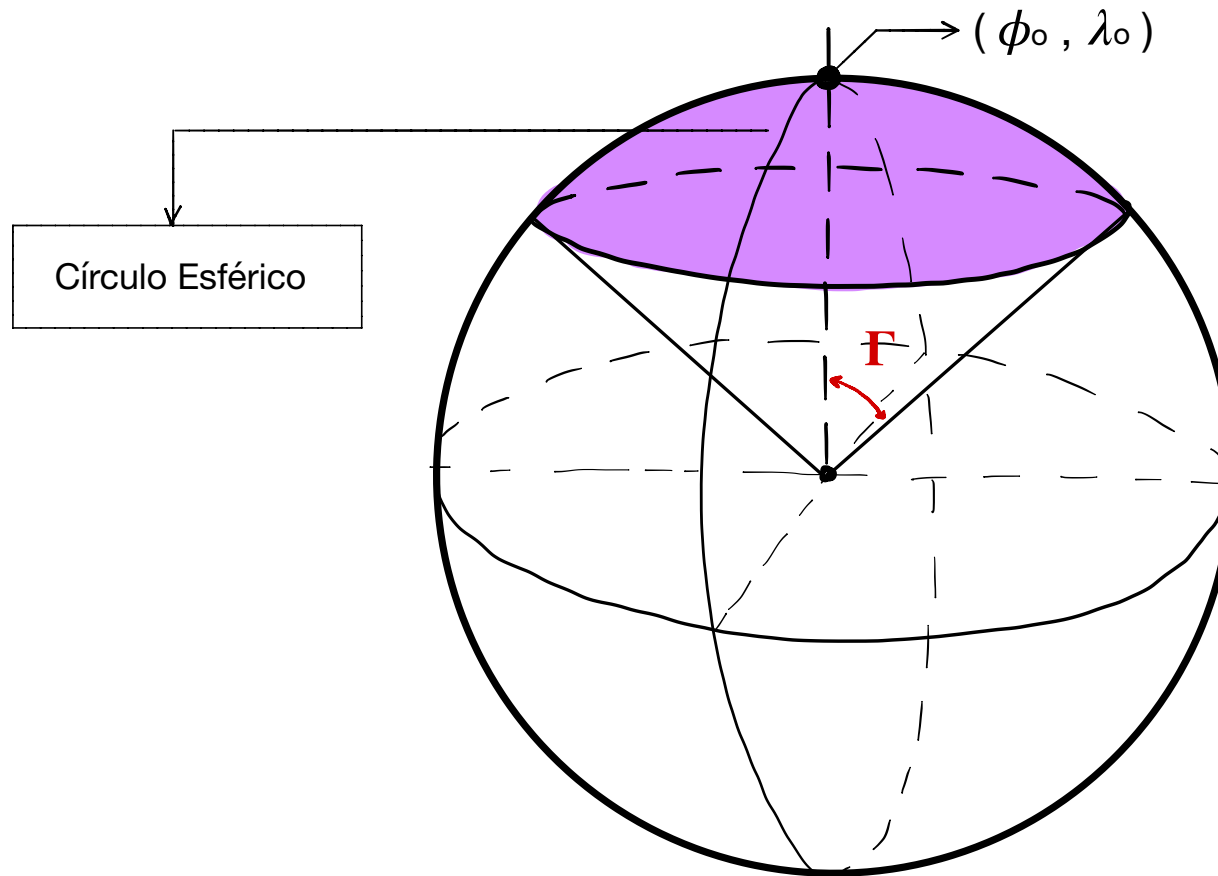


spherical cone

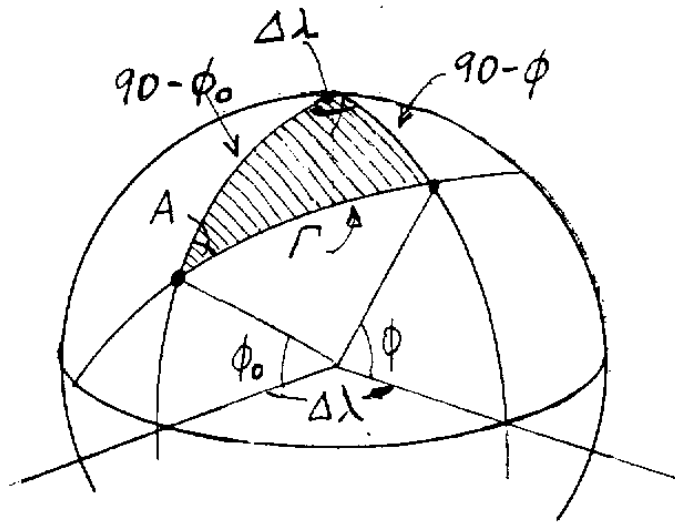
- Si el plano no pasa por el centro de la esfera, se trata de un “círculo menor”.
- Un círculo esférico vendrá dado por su centro (en la superficie de la esfera, dado usualmente en coordenadas esféricas ϕ_0, λ_0) y su radio (normalmente dado como un ángulo Γ).
- La mejor forma de visualizarlo es como la intersección de la esfera con un cono recto de vértice el centro de la esfera, ángulo Γ y cuyo eje pasa por el centro del círculo esférico.



Círculos esféricos



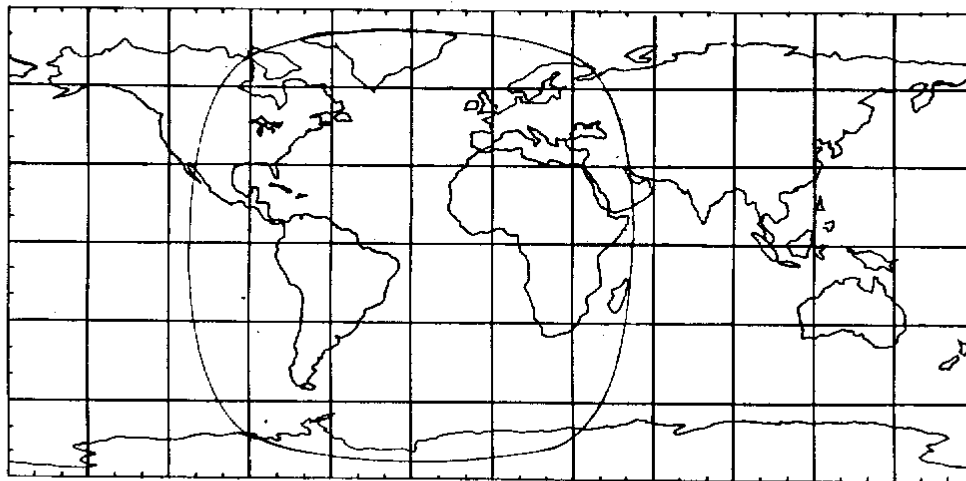
Cálculo de círculos esféricos con trigonometría esférica



- Dado el centro en (λ_0, ϕ_0) se calculan las coordenadas (λ, ϕ) de la circunferencia.
- Para cada valor de azimuth $A \in [0, 360^\circ]$:

$$\cos(90 - \phi) = \cos(90 - \phi_0) \cos \Gamma + \sin(90 - \phi_0) \sin \Gamma \cos A$$
es decir: $\sin \phi = \sin \phi_0 \cos \Gamma + \cos \phi_0 \sin \Gamma \cos A$
- Por otro lado:

$$\cos \Gamma = \cos(90 - \phi_0) \cos(90 - \phi) + \sin(90 - \phi_0) \sin(90 - \phi) \cos \Delta \lambda$$
es decir: $\cos \Delta \lambda = \frac{\cos \Gamma - \sin \phi_0 \sin \phi}{\cos \phi_0 \cos \phi}$



- Se calcula λ de la siguiente forma:
Si $A \in [0, 180^\circ]$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$. Si $A \in [180^\circ, 360^\circ]$, $\lambda = \lambda_0 - \Delta \lambda$.
- También válido en la esfera celeste (cambiar λ por AR y ϕ por δ).
- Área: $2\pi R^2(1 - \cos \Gamma)$.



Pertenencia de un punto a un círculo esférico

- Problema: Dado un círculo esférico de centro (λ_0, ϕ_0) y de radio Γ , determinar si otro punto (λ, ϕ) pertenece al círculo esférico.
- Método 1: Usando las fórmulas que parametrizan la circunferencia. En primer lugar si $\phi > \phi_0 + \Gamma$ o $\phi < \phi_0 - \Gamma$, tenemos garantía de que no pertenece a la circunferencia. En otro caso, tomando $\cos \Delta\lambda = \frac{\cos \Gamma - \sin \phi_0 \sin \phi}{\cos \phi_0 \cos \phi}$, si $\lambda \in [\lambda_0 - \Delta\lambda, \lambda_0 + \Delta\lambda]$, entonces el punto pertenece al círculo.
- Método 2: Usando la fórmula que define la distancia angular ortodrómica α sobre una esfera (ver problemas), $\cos \alpha = \sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi \cos(\lambda_0 - \lambda)$. Si $\alpha \leq \Gamma$ entonces el punto se encuentra dentro del círculo.

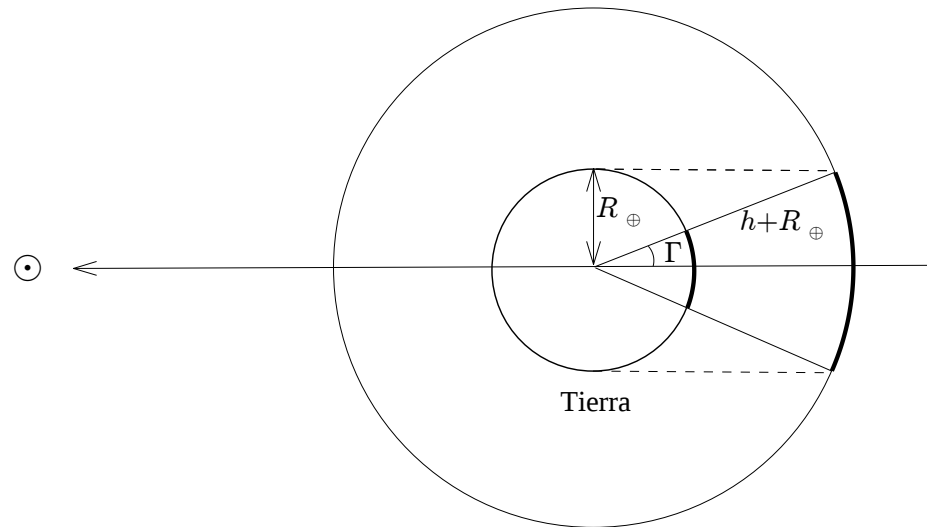


Aplicación: cálculo de la circunferencia de eclipse

- El objetivo es encontrar la circunferencia esférica que forma la sombra de la Tierra, a una determinada altura h , un cierto día del año.
- Los eclipses son fundamentales para los vehículos espaciales: gradientes de temperaturas, inutilización de paneles solares, etc...
- Hipótesis: Se considera la Tierra esférica, se desprecian los efectos de refracción, se supone que el Sol está a una distancia “infinita”.
- Además se supone el Sol inmóvil durante todo el día; en realidad la circunferencia se desplaza lentamente.
- Datos del problema: Coordenadas del sol $\delta_{\odot}$ y $AR_{\odot}$ para el día dado (se supone constante), altura h .



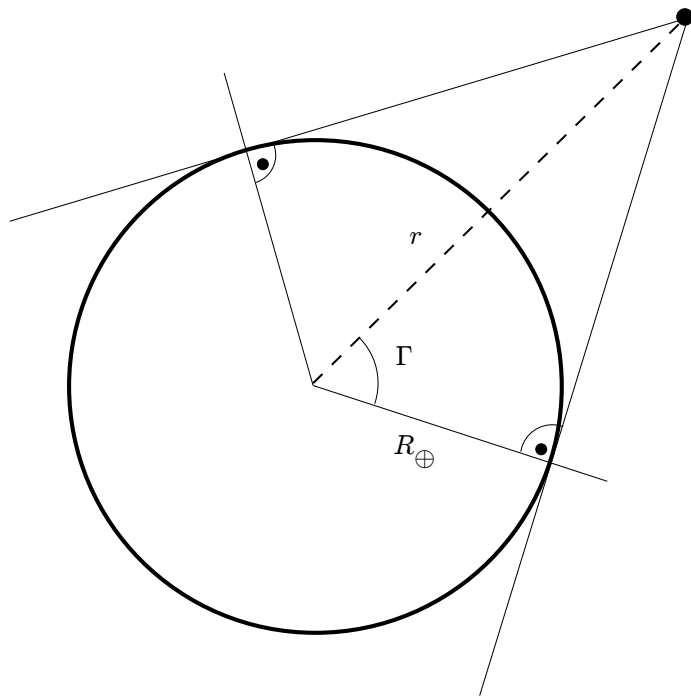
Aplicación: cálculo de la circunferencia de eclipse



- Obsérvese que se usa el sistema geocéntrico inercial ecuatorial para no tener que incluir la rotación de la Tierra.
- En primer lugar se calcula Γ . De la figura, $\text{sen } \Gamma = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}$.
- Llamemos O al punto antipodal al punto solar ($\delta_O = -\delta_{\odot}$, $\text{AR}_O = \text{AR}_{\odot} + 180^\circ$),
- Para cada valor de azimuth $A \in [0, 360^\circ]$ se tendrá:
 $\text{sen } \delta = \text{sen } \delta_O \cos \Gamma + \cos \delta_O \text{sen } \Gamma \cos A$, $\cos \Delta \text{AR} = \frac{\cos \Gamma - \text{sen } \delta_O \text{sen } \delta}{\cos \delta_O \cos \delta}$
- Esto delimita totalmente la circunferencia donde se experimentaría eclipse a altura h .



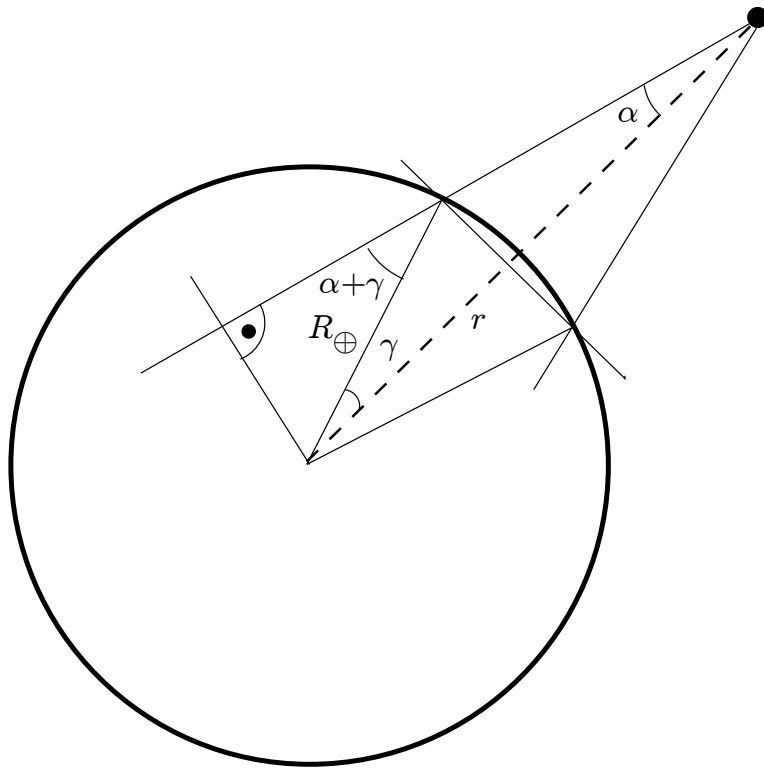
Cobertura geográfica I



- Se denomina **cobertura geográfica** de un satélite la zona de la Tierra visible por dicho satélite para cada instante.
- Dicha zona estará delimitada por la circunferencia terrestre donde es tangente a la esfera de la Tierra un cono de vértice el satélite.
- Desde un punto de esta circunferencia se vería el satélite justo en el horizonte.
- El “radio angular” Γ de dicha circunferencia viene dado por $\cos \Gamma = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}$.
- En la lección de trigonometría esférica (círculos esféricos) se vio como calcular este tipo de circunferencias.



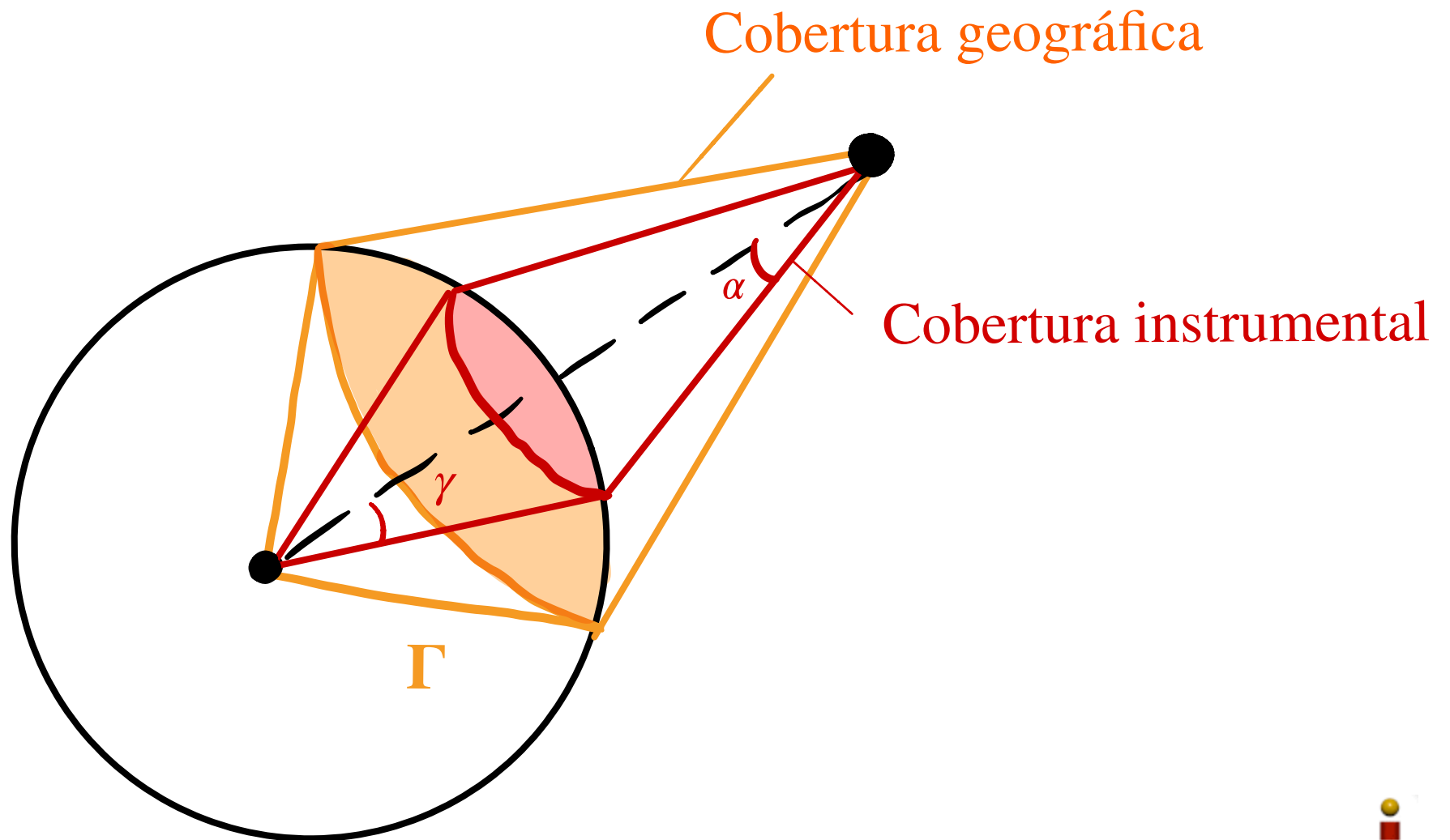
Cobertura instrumental



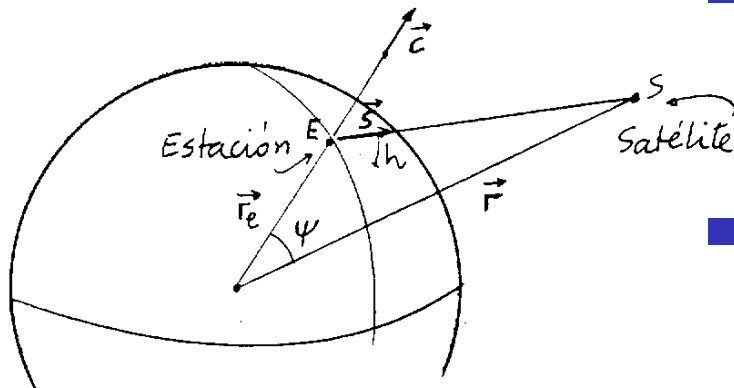
- Considerando el caso más realista de un instrumento (antena o sensor) con un ángulo de visibilidad más estrecho (α), se determina una circunferencia de “radio angular” $\gamma \leq \Gamma$ como en la figura.
- Se tiene que $(R_{\oplus} + h) \sin \alpha = R_{\oplus} \sin(\alpha + \gamma)$, luego $\gamma = \arcsin \left(\frac{R_{\oplus} + h}{R_{\oplus}} \sin \alpha \right) - \alpha$.
- Además, se define el “ancho de huella” w como la longitud del arco máximo tendido por la circunferencia de cobertura del instrumento. Se tiene pues que $w = 2R_{\oplus}\gamma$ (si γ está expresado en radianes).



Cobertura geográfica vs. instrumental



Visibilidad I



- Un satélite es visible desde una estación si el vector estación-satélite $\vec{s}$ está por encima del horizonte geográfico de la estación.
- La condición matemática es que el ángulo de $\vec{s}$ sobre el horizonte (elevación, h) debe ser mayor que un valor h_{min} , determinado por la instrumentación y topografía.
- De la figura, $h = \arcsin(\vec{s} \cdot \vec{c})$ donde $\vec{c} = \frac{\vec{r}_e}{R_{\oplus}}$ apunta al cenit de la estación. Por otro lado $\vec{s} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_e}{\sqrt{r^2 + R_{\oplus}^2 - 2R_{\oplus}r \cos \Psi}}$.
- Por tanto: $h = \arcsin \left(\frac{r \cos \Psi - R_{\oplus}}{\sqrt{r^2 + R_{\oplus}^2 - 2R_{\oplus}r \cos \Psi}} \right)$ y la condición de visibilidad queda $h > h_{min}$.
- Puesto que $\vec{r} \cdot \vec{c} = r \cos \Psi$ podemos hallar Ψ a partir de $\vec{r}$ y $\vec{c}$.



Visibilidad II

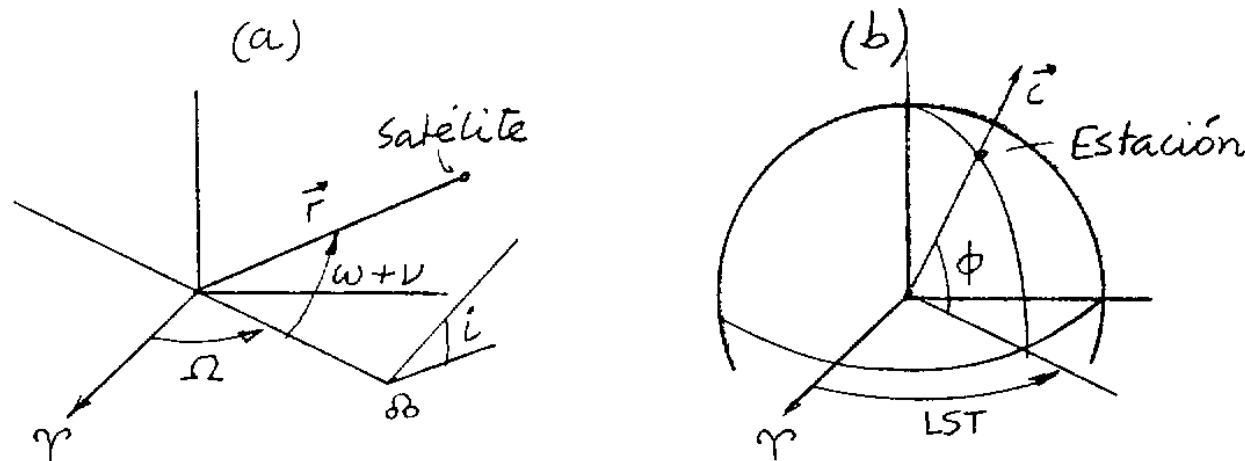


Fig. 11.- Coordenadas del satélite (a) y de la estación (b)

- Para $\vec{r}$ se tiene, usando los ángulos de Euler de la órbita:

$$[r]^R = r[T]^{RF}(\Omega, i, \omega + \theta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} c\Omega c(\omega + \theta) - s\Omega s(\omega + \theta)ci \\ s\Omega c(\omega + \theta) + c\Omega s(\omega + \theta)ci \\ s(\omega + \theta)si \end{bmatrix}$$

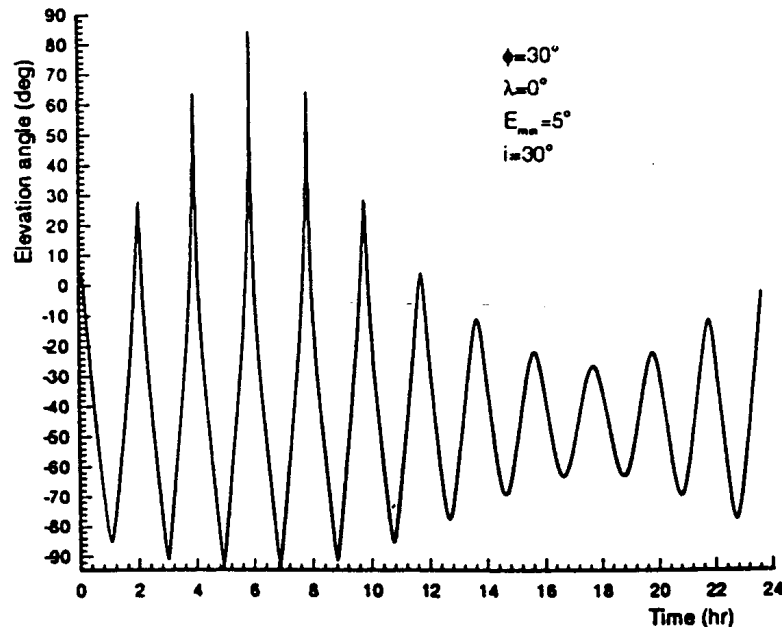
- Por otro lado, para $\vec{c}$: $[c]^R = \begin{bmatrix} c(LST)c\phi \\ s(LST)c\phi \\ s\phi \end{bmatrix}$ donde

$LST = GST_0 + \lambda + \omega_{\oplus} t$ es el tiempo sidéreo local de la estación.

- Se deduce: $\cos \Psi = c\phi [c(LST - \Omega)c(\omega + \theta) + s(LST - \Omega)s(\omega + \theta)ci] + s(\omega + \theta)sis\phi$



Visibilidad III



- Las anteriores relaciones permiten calcular, para cada instante (recordando que LST , θ y r son función de t) la llamada “función de visibilidad”, que proporciona la elevación para cada t .
- Sólo cuando $h > h_{min}$ el satélite será visible.
- Estas ideas se pueden aplicar no sólo a satélites, sino a cualquier cuerpo observable desde la Tierra. El análisis será más o menos complicado según la complejidad del movimiento del cuerpo.
- Para un satélite en órbita circular este análisis se puede simplificar y obtener directamente de la representación de las trazas del satélite.



Visibilidad IV

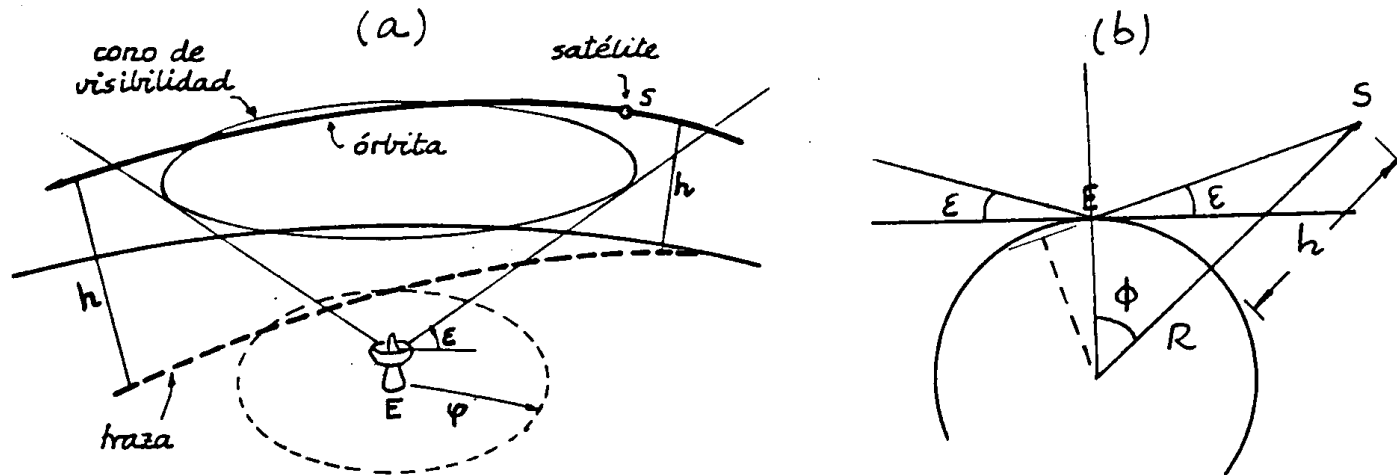


Fig. 13.- Círculo de visibilidad para un satélite en órbita circular

- Para el caso circular la circunferencia de visibilidad será la intersección entre el cono de visibilidad (de ángulo $90^\circ - h_{min}$ y vértice la estación) y una esfera de radio $R_{\oplus} + h_{SAT}$, que luego hay que proyectar sobre la Tierra. En la figura $\epsilon = h_{min}$.
- El “radio angular” Φ del círculo de visibilidad se obtiene de la fórmula $\Phi = \arccos \left(\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h_{SAT}} \cos h_{min} \right) - h_{min}$. Con dicho ángulo se pueden emplear las mismas fórmulas explicadas en cobertura para dibujar la circunferencia.



Visibilidad V

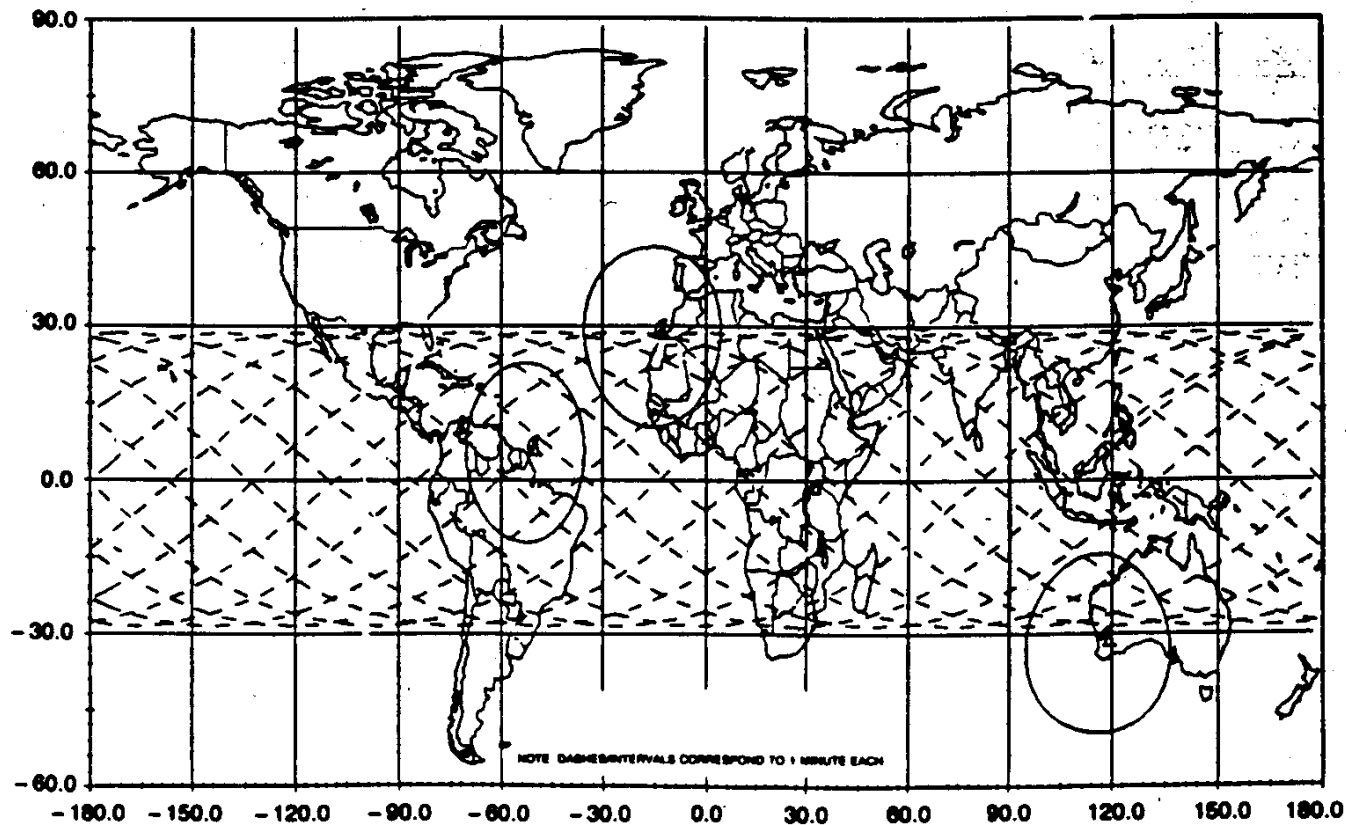


Fig. 14.- Visibilidad de la plataforma europea EURECA a lo largo de un día

- Ejemplo circular: la plataforma EURECA (1992-1993) [European REtrievable CArrier].



Visibilidad VI

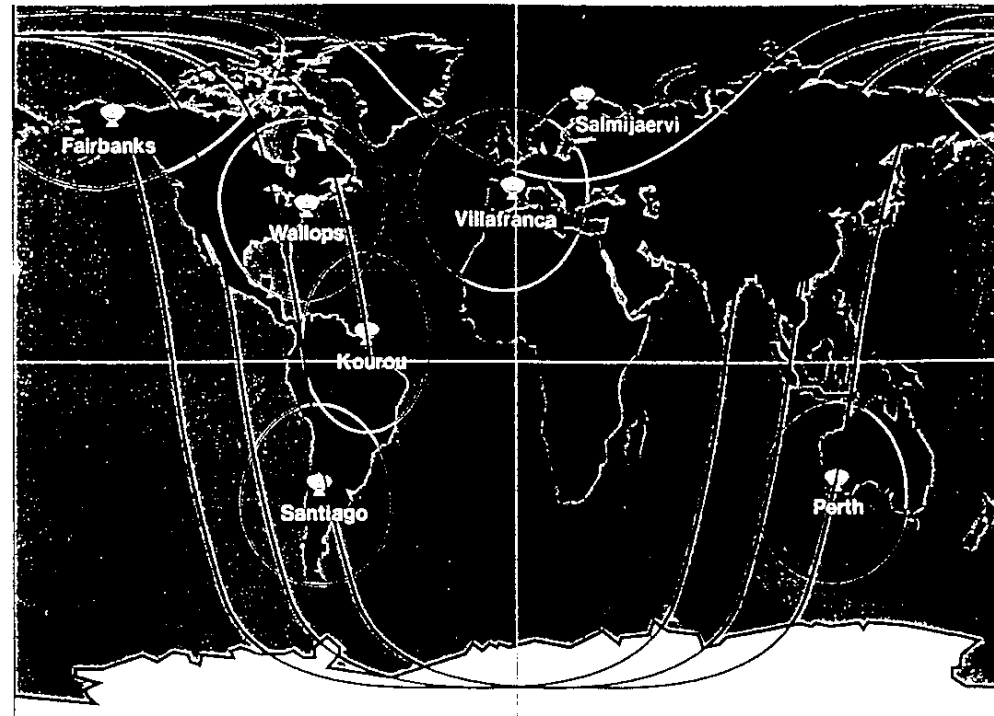


Fig. 15.- Proyección rectangular de la fase LEOP del ERS-1

- Ejemplo circular: satélite europeo de recursos ERS-1 con órbita polar.
- Obsérvese la deformación de los círculos cerca de los polos.



Visibilidad VII

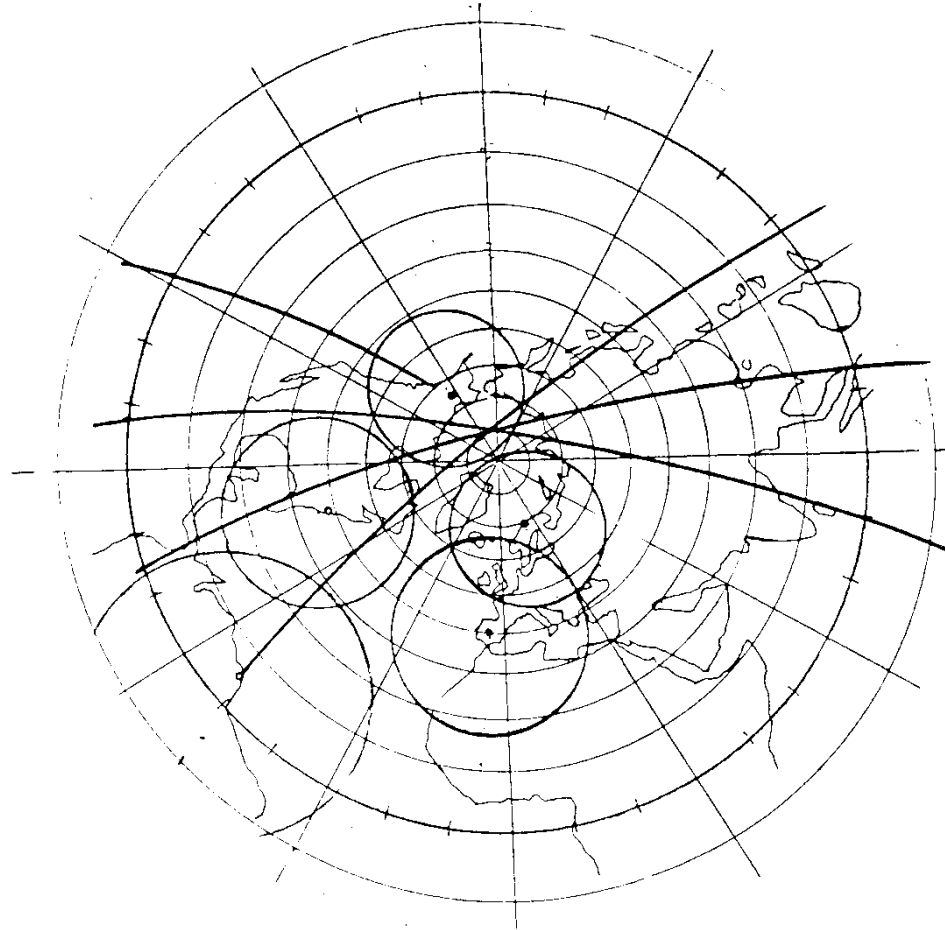


Fig. 16.- Proyección estereográfica polar de la fase LEOP del ERS-1

- Proyección estereográfica polar para el estudio de la visibilidad en las cercanías del polo.

