

# Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales

## Tema 8: Análisis y Diseño de Misiones Lunares e Interplanetarias

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

19 de septiembre de 2018



## Misiones Lunares: Introducción e hipótesis de partida



- Una misión lunar tiene uno de los siguientes objetivos:
  - “Sobrevolar” la Luna.
  - Orbitar de forma “permanente” en torno a la Luna.
  - Impactar o alunizar en la Luna.
- Las misiones lunares se pueden clasificar en tripuladas (las únicas han sido las Apollo) y no tripuladas.
- Cálculo **preliminar**, hipótesis:
  - La órbita de la Luna es kepleriana y circular, de radio  $a_{\zeta} = 384400$  km.
  - La sonda lunar parte de una órbita de aparcamiento circular de radio  $r_0$ , ya en el plano orbital de la Luna.
  - No se considera ningún tipo de perturbación adicional a la presencia de los cuerpos Tierra y Luna.



# Órbitas de intercepción I

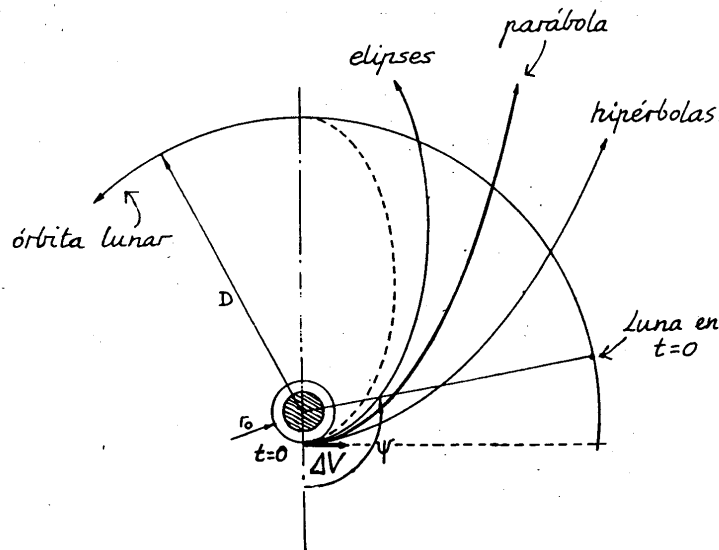
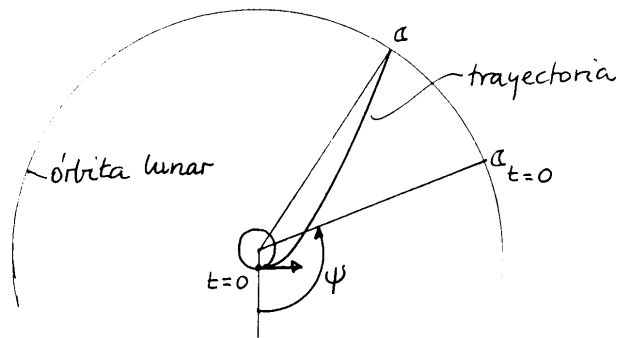


Fig. 1.- Órbitas de alcance a la Luna

- En un primer análisis se desprecia la atracción gravitatoria de la Luna y se estudia la transferencia desde la órbita de aparcamiento a la posición de la Luna.
- Posibles trayectorias:
  - Órbita de mínima energía: su apogeo corresponde con la posición de la Luna.
  - Otras órbitas elípticas más excéntricas.
  - Órbita de escape parabólica.
  - Órbita de escape hiperbólica.
- El ángulo  $\psi$  en la figura es el llamado **ángulo de fase**, que es el que forma la Luna con la posición de partida de la sonda lunar; este ángulo se determina para que la Luna se encuentre en la posición de la sonda cuando ésta llegue a su órbita.
- El valor de  $\psi$  determina las ventanas de lanzamiento (cuando la posición relativa de la sonda y la Luna forma dicho ángulo).

## Órbitas de intercepción II



- Sea  $a$  el semieje mayor de la órbita de transferencia. Se tendrá que

$$\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_0} - \frac{\mu_{\oplus}}{a}} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_0}}.$$

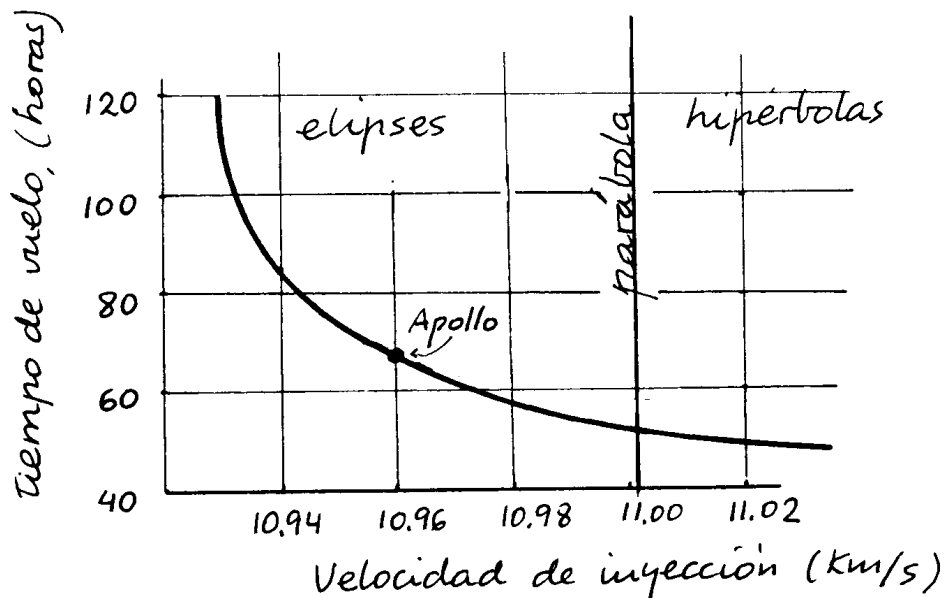
- Para la transferencia de mínima energía,  $a_{\min} = \frac{r_0 + a_{\zeta}}{2}$ . Se llega con  $\theta_F = 180^\circ$ ,

$$\text{luego el tiempo de vuelo } T_{\text{trans}} = \pi \sqrt{\frac{a_{\min}^3}{\mu_{\oplus}}}.$$

- En otras trayectorias elípticas se tiene  $a \in (a_{\min}, \infty)$ : crece  $\Delta V$  y baja  $\theta_f$  y por tanto el tiempo de transferencia  $T_{\text{trans}}$  (a calcular con la ecuación de Kepler).
- Para la parabólica,  $\Delta V_P = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_0}} (\sqrt{2} - 1)$ , las transferencias hiperbólicas serán con  $\Delta V > \Delta V_P$ , bajando aún más  $T_{\text{trans}}$ .
- Para calcular el ángulo de fase  $\Psi$ , se obtiene  $n_{\zeta} = \sqrt{\mu_{\oplus}/a_{\zeta}^3}$  y se aplica  $\Psi + T_{\text{trans}} n_{\zeta} = \theta_F$ .



## Órbitas de intercepción III



- En la figura se han representado los tiempos de transferencia y velocidades de inyección, para  $r_0 = 180$  km, luego  $V_{\text{park}} = 7,796$  km/s
- La velocidad de inyección es  $V_{\text{iny}} = V_{\text{park}} + \Delta V_{\text{trans}}$ , el impulso total que habrá que darle a la sonda desde Tierra.
- Se observa que con un pequeño incremento de velocidad de inyección respecto a la transferencia de mínima energía, se consigue una gran disminución en  $T_{\text{trans}}$ .
- Por otro lado, los tiempos de transferencia parabólicos o hiperbólicos no suponen una gran mejora; por eso se usan transferencias elípticas más rápidas que la de mínima energía.



## Esfera de Influencia I

- Para estudiar en más detalle una misión lunar necesitamos incluir la gravedad lunar; un primer paso consiste en estudiar las “esferas de influencia”.
- Éste concepto fue originalmente inventado por Laplace.
- Consideremos un vehículo espacial sometido a la influencia de dos cuerpos masivos 1 y 2, separados por una distancia  $r_{12}$ .
  - 1 Si se encuentra en las proximidades de 1, entonces la influencia de 2 se puede considerar como una perturbación:  $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}'_2$ , donde  $g_1 = \frac{\mu_1}{r_1^2}$  y  $g'_2 = \mu_2 \left| \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right|$ .
  - 2 Si se encuentra en las proximidades de 2, entonces la influencia de 1 se puede considerar como una perturbación:  $\vec{g} = \vec{g}_2 + \vec{g}'_1$ , donde  $g_2 = \frac{\mu_2}{r_2^2}$  y  $g'_1 = \mu_1 \left| \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right|$ .
- Cuando  $\frac{g'_2}{g_1} = \frac{g'_1}{g_2}$ , entonces los dos puntos de vista son igualmente válidos; esa condición determina un lugar geométrico que separa la “zona de influencia 1” de la “zona de influencia 2”.

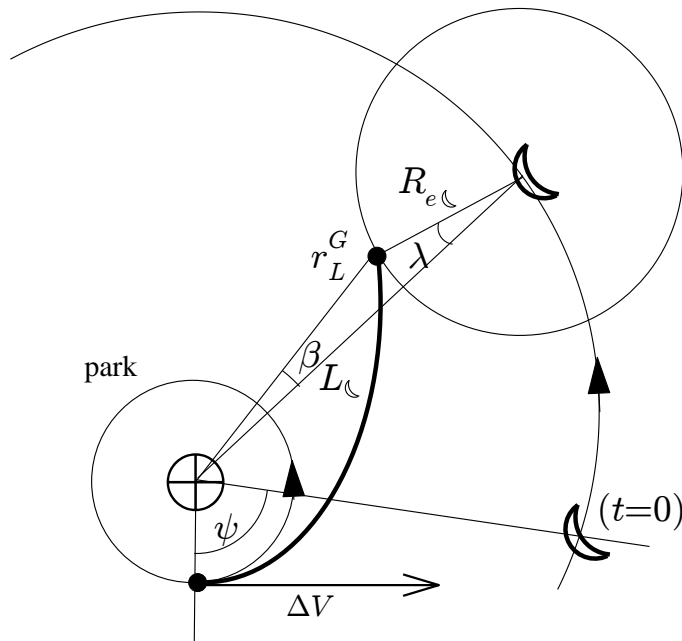


## Esfera de Influencia II

- En el caso (usual) de que uno de los cuerpos (por ejemplo, el 1) sea mucho más masivo que el otro, el lugar geométrico de separación de zonas de influencia es aproximadamente una esfera, que rodea al cuerpo menos masivo (en este caso, el 2).
- Por tanto el espacio se divide en dos: una “burbuja” en torno al cuerpo 2 (donde predomina la atracción del cuerpo 2) y el exterior de la “burbuja” donde predomina la atracción de 1.
- El radio de la esfera se obtiene de
$$R_e = L \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{2/5} = L \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{2/5},$$
  $L$  es la distancia entre los cuerpos 1 y 2.
- Caso Tierra-Luna:  $L_{\zeta} = 384400$  km, luego la esfera de influencia lunar tiene de radio  $R_{e\zeta} = 66183$  km.
- Por tanto, en una esfera de este radio centrada en la Luna (y que se mueve con ella), la influencia gravitatoria lunar es más importante que la terrestre, mientras que en el resto del espacio domina la atracción terrestre.



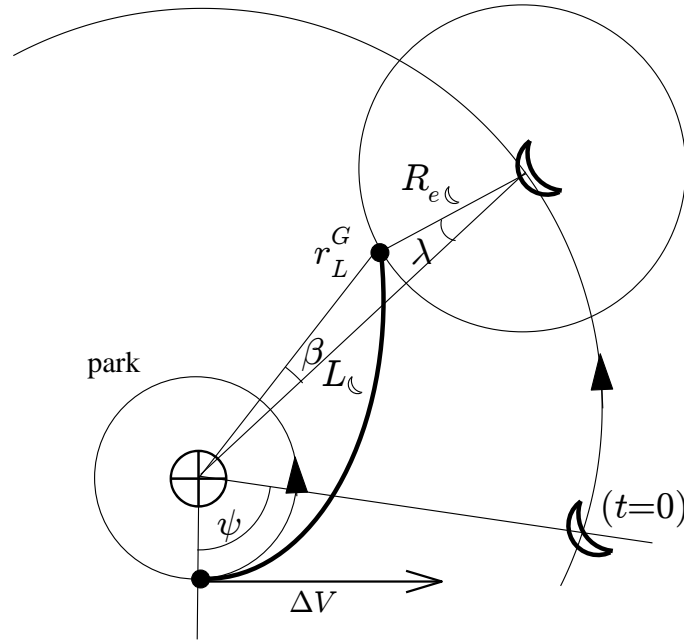
## Ajuste de cónicas I



- El concepto de esfera de influencia nos permite prediseñar una misión lunar usando el modelo de los dos cuerpos.
- Se divide la misión en partes. La primera parte es una órbita geocéntrica (sub/superíndice G) desde la órbita de aparcamiento hasta la esfera de influencia lunar; la única fuerza es la atracción terrestre.
- Una vez se entra en la esfera de influencia lunar, se estudia una órbita selenocéntrica (sub/superíndice S) sólo sometida a la atracción lunar.
- Ambas órbitas estarán conectadas de forma que, por continuidad, la posición y velocidad finales en la órbita geocéntrica serán las iniciales en la selenocéntrica. Este proceso se llama “ajuste de cónicas”.



# La órbita geocéntrica I



## ■ Datos de entrada

- $r_0$ : radio de la órbita de aparcamiento
- Velocidad de inyección  $V_i$  ( $V_i = V_0 + \Delta V$ )
- $\lambda$ : ángulo de intersección con la esfera de influencia lunar (supuesto conocido a priori).

- Tenemos  $a_G = \frac{1}{\frac{2}{r_0} - \frac{V_i^2}{\mu_\oplus}}$ ,  $e_G = 1 - \frac{r_0}{a_G}$ .

- Además:  $r_L^G = \sqrt{L_\zeta^2 + R_{e\zeta}^2 - 2L_\zeta R_{e\zeta} \cos \lambda}$ . También

$$V_L^G = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_L^G} - \frac{\mu_\oplus}{a_G}}, \cos \theta_L^G = \frac{a_G(1-e_G^2) - r_L^G}{e_G r_L^G}, \tan \gamma_L^G = \frac{e_G \sin \theta_L^G}{1 + e_G \cos \theta_L^G},$$

$$\tan E_L^G / 2 = \sqrt{\frac{1-e_G}{1+e_G}} \tan \theta_L / 2, t_v = \frac{E_L^G - e \sin E_L^G}{n}, n = \sqrt{\mu_\oplus / a_G^3}.$$

- Para la luna,  $\Psi = \theta_L - \beta - n_\zeta t_v$ , donde  $n_\zeta = \sqrt{\mu_\oplus / L_\zeta^3}$ , y donde  $\beta$  se obtiene de  $r_L^G \sin \beta = R_{e\zeta} \sin \lambda$ .



## La órbita geocéntrica II

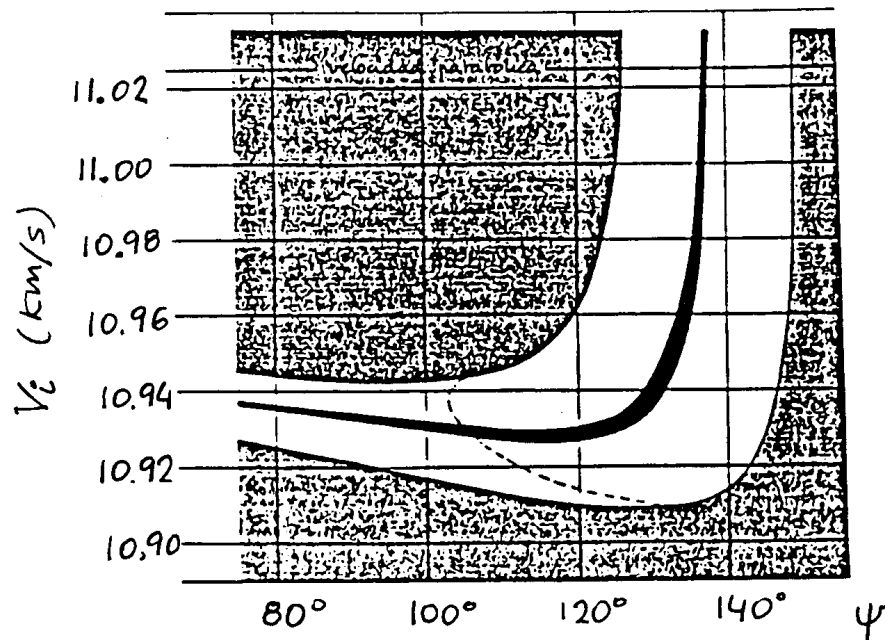
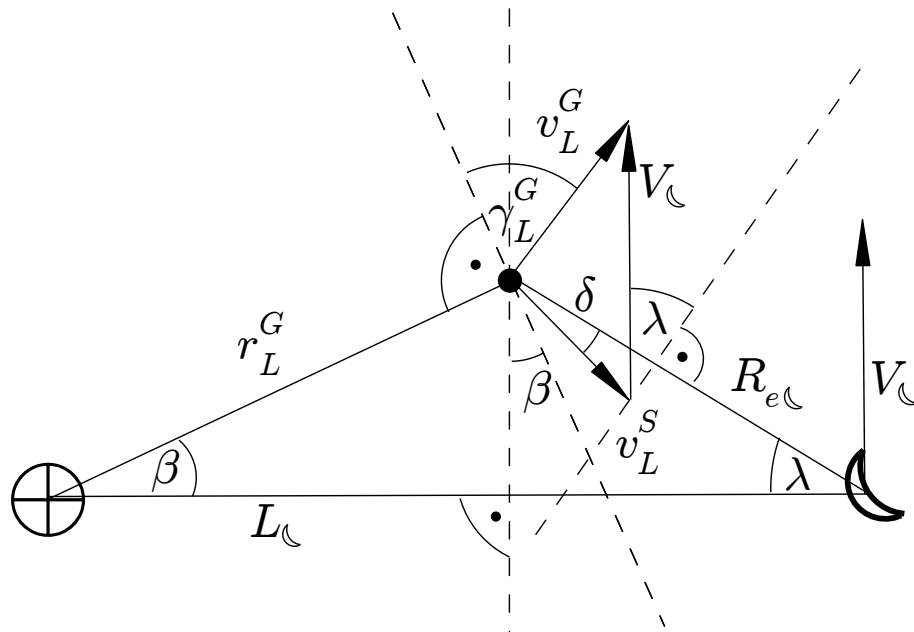


Fig. 5.- La llegada a la esfera de influencia lunar

- Por tanto, a partir de  $(r_0, V_i, \lambda)$  obtenemos los datos de la trayectoria  $(r_L^G, v_L^G, \gamma_I^G)$  en el punto de contacto con la esfera de influencia lunar y el ángulo de fase  $\psi$ .
- En realidad el ángulo  $\psi$  es el dato de entrada natural, pero entonces el problema tiene que ser resuelto numéricamente.
- En el gráfico se representa, para  $r_0 = 180$  km, la solución para posibles pares  $(V_i, \psi)$ : la zona oscura responde a condiciones que no dan lugar a intercepción lunar; la zona clara a condiciones que sí producen intercepción; y la zona negra a condiciones que dan lugar a **impacto** lunar.

## Ajuste de cónicas II



- Para el proceso de ajuste, partimos de  $(V_L^G, \gamma_L^G, r_L^G, \beta, \lambda)$  y queremos obtener  $(V_L^S, \gamma_L^S)$ . Ya sabemos que  $r_L^S = R_{e\zeta}$ .
- Hay que considerar que estamos en otro sistema de referencia, ahora centrado en la Luna **y por tanto móvil**.

- Por tanto, hay que considerar la velocidad  $V_{\zeta} = \sqrt{\mu_{\oplus}/L_{\zeta}}$  de este nuevo sistema de referencia y se tiene:  $\vec{V}_L^S = \vec{V}_L^G - \vec{V}_{\zeta}$ .  
(Este es un punto clave del ajuste de cónicas).

- Aplicando el teorema del coseno:

$$V_L^S = \sqrt{(V_L^G)^2 + V_{\zeta}^2 - 2V_L^G V_{\zeta} \cos(\gamma_L^G - \beta)}.$$

- De la figura  $\gamma_L^S = \delta - 90^\circ$ .

- Para hallar  $\delta$ :  $V_L^S \sin \delta = V_{\zeta} \cos \lambda - V_L^G \cos(\gamma_L^G - \lambda - \beta)$ .



# Órbita selenocéntrica I

- Egorov demostró que, debido a la velocidad de la luna respecto a la Tierra, la órbita selenocéntrica es siempre hiperbólica.
- De la ecuación de las fuerzas vivas  $(V_L^S)^2 = \frac{2\mu_{\zeta}}{r_L^S} - \frac{\mu_{\zeta}}{a_S}$  se obtiene  $a_S$ , mientras que la excentricidad  $e_S$  se deduce a partir de  $h_S = \sqrt{\mu_{\zeta} a_S (1 - e_S^2)} = r_L^S V_L^S \cos \gamma_L^S$ .
- Del valor del radio de periapsis  $r_p^S = a_S (1 - e_S)$  podemos deducir:
  - Si  $r_p^S < R_{\zeta} = 1738$  km entonces se produce impacto.
  - Una misión de orbitación lunar requerirá convertir la hipérbola selenocéntrica en una elipse alrededor de la Luna (requiere otra maniobra).
  - Una misión de sobrevuelo permitirá que la hipérbola escape una vez más de la esfera lunar, con lo que se debe volver a realizar el ajuste de cónicas a la salida.



## Órbita selenocéntrica II

- Ejemplo de misión de sobrevuelo (diseñada por Egorov):

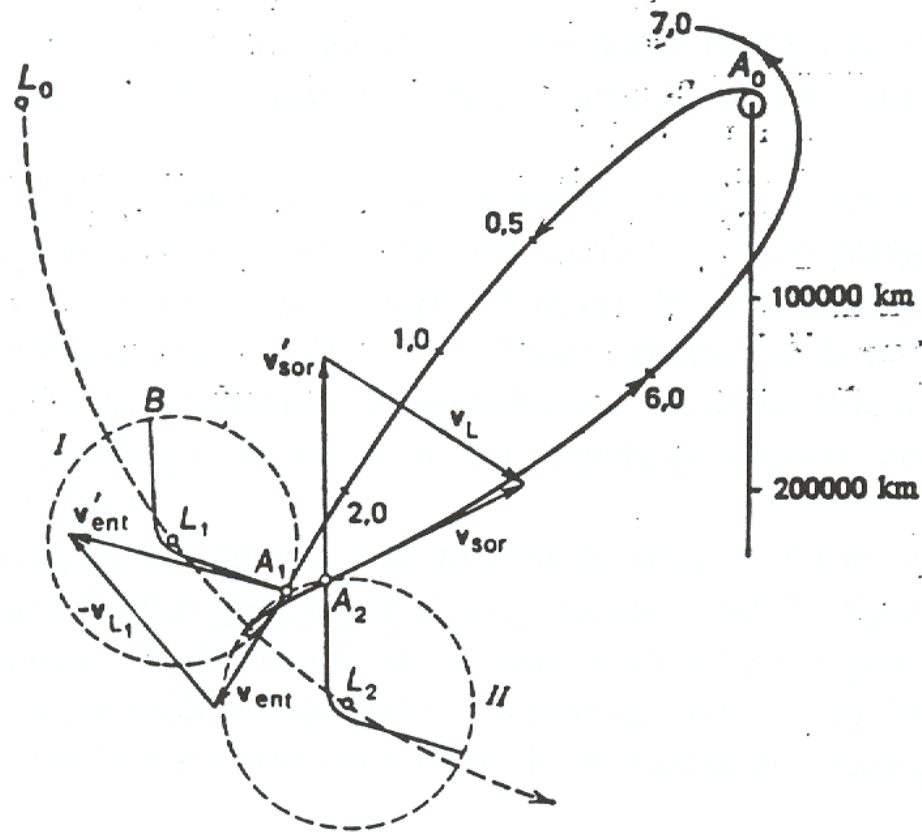
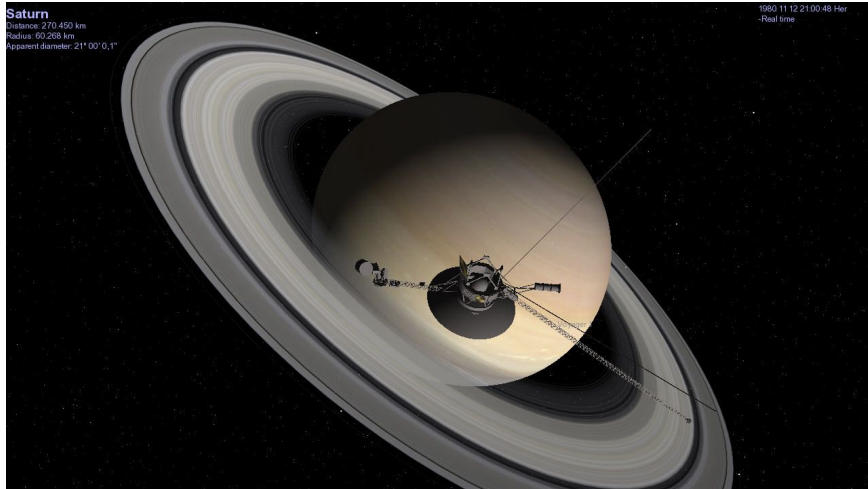


Fig. 7.- Trayectoria alrededor de la Luna según Egorov



## Misiones interplanetarias: Introducción, hipótesis de partida



- Como en el caso lunar, una misión interplanetaria puede tener como objetivo:
  - Un sobrevuelo de un planeta.
  - Orbitar de forma “permanente” en torno al planeta.
  - Misiones de impacto o “aterrizaje”.
- Además, una misión interplanetaria puede visitar varios planetas en su trayectoria para realizar la “maniobra asistida por gravedad” (y de camino obtener datos científicos).
- Hipótesis básicas de cálculo:
  - Las órbitas de los planetas son circulares y coplanarias.
  - La sonda interplanetaria parte de una órbita de aparcamiento de radio  $r_0$  circular en el plano de la eclíptica.
  - No se considera ningún tipo de perturbación adicional a la presencia de los tres cuerpos (Tierra, Sol, planeta de destino).



## Esferas de Influencia I

- La esfera de influencia respecto al Sol de un planeta  $P$  se calcula como  $R_{eP} = L_P \left( \frac{\mu_P}{\mu_{\odot}} \right)^{2/5}$ , donde  $L_P$  es la distancia entre el Sol y el planeta.
- En la siguiente tabla se representan datos para los diferentes planetas del sistema solar:

	radio esfera infl. (km×10 <sup>6</sup> )	distancia media (km×10 <sup>6</sup> )	radio planetario (km)
MERCURIO	0.11	58	2439
VENUS	0.62	108	6051
LA TIERRA	0.93	150	6378
MARTE	0.58	228	3397
JÚPITER	48	778	71398
SATURNO	55	1426	60330
URANO	52	2868	25400
NEPTUNO	87	4494	24300
PLUTÓN	36	5896	1600



## Esferas de Influencia II

- En todos los casos  $R_P \ll R_{eP} \ll L_P$ . Esto nos permite introducir las siguientes hipótesis simplificativas:
  - Desde el punto de vista de las trayectorias heliocéntricas, las esferas de influencia se pueden considerar puntos (despreciando  $R_{eP}$ ).
  - Desde el punto de vista de las trayectorias planetocéntricas, las esferas de influencia se pueden considerar con radio infinito.
- Estas dos hipótesis permiten simplificar el proceso de ajuste de cónicas, ya que eliminan  $R_{eP}$  del cálculo:
  - Las órbitas planetocéntricas serán hiperbólicas y entrarán o saldrán de la esfera de influencia, ya que es supuesta infinita, por las asíntotas.
  - La órbita heliocéntrica será una elipse de transferencia entre dos puntos (sin necesidad de introducir los ángulos del caso lunar).



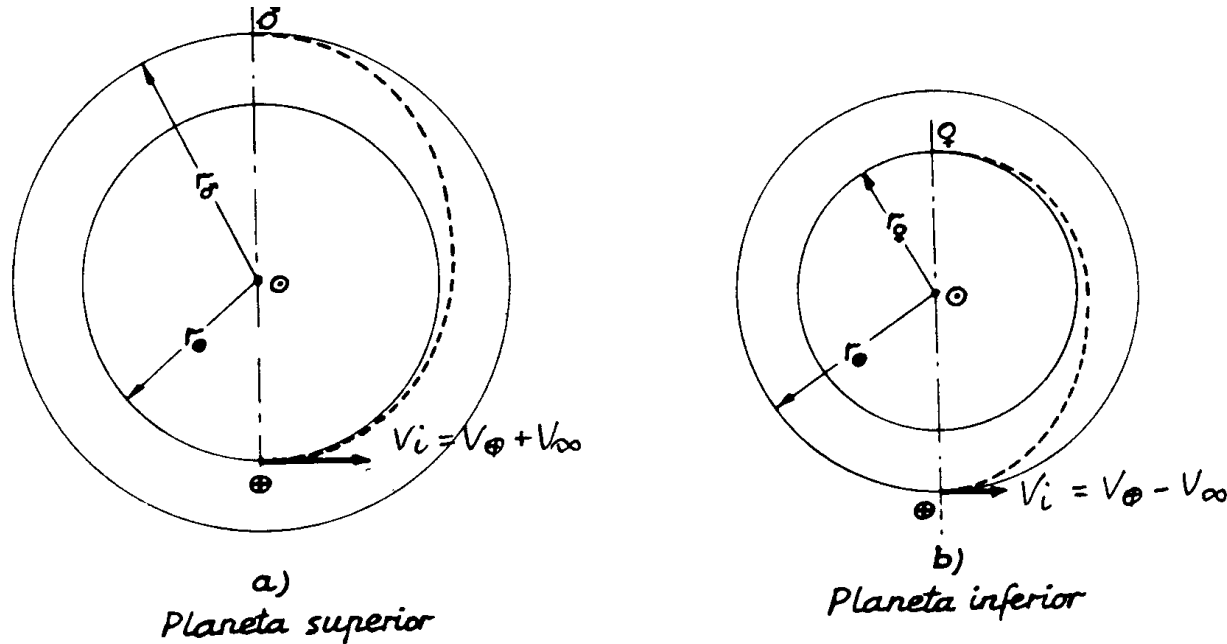


# Órbitas de intercepción e impulsos mínimos I

- La órbita geocéntrica inicial es la de aparcamiento, de radio  $r_0$  y velocidad  $V_0 = \sqrt{\mu_{\oplus}/r_0}$ .
- Supongamos que aplicamos un impulso tangencial  $\Delta V$ , suficiente para obtener una trayectoria hiperbólica:  
 $\Delta V > (\sqrt{2} - 1)V_0$ .
- La velocidad a la salida de la esfera de influencia será aproximadamente la velocidad de exceso hiperbólica  $V_{\infty}$ .
- De la ecuación de las fuerzas vivas:  $V_{\infty}^2 = (V_0 + \Delta V)^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{r_0}$ .  
Se define  $C_3 = V_{\infty}^2$ , parametro característico de la misión.
- Por tanto, si conocemos la  $V_{\infty}$  deseada, el impulso inicial requerido será  $\Delta V = \sqrt{V_{\infty}^2 + 2V_0^2} - V_0 = \sqrt{C_3 + 2V_0^2} - V_0$ .
- Una vez fuera de la esfera de influencia terrestre, es necesario situarse en el sistema de referencia heliocéntrico; en este sistema de referencia,  $r_i = L_{\oplus}$ ,  $\vec{v}_i = \vec{V}_{\infty} + \vec{V}_{\oplus}$ , donde  $V_{\oplus} = \sqrt{\mu_{\odot}/L_{\oplus}} \approx 29,74$  km/s.

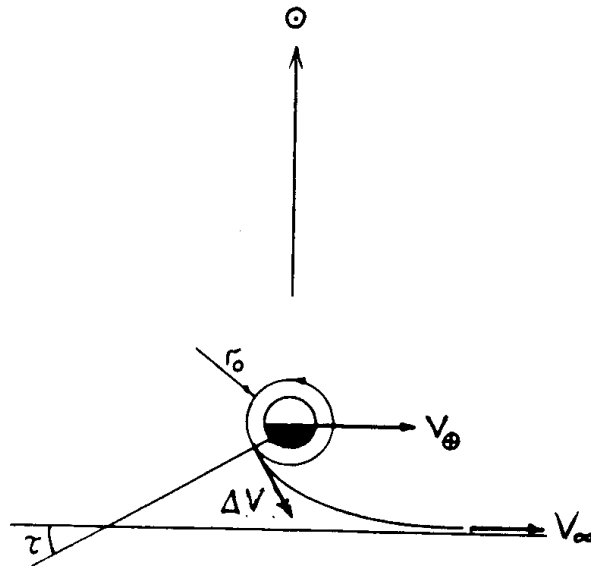


## Órbitas de intercepción e impulsos mínimos II

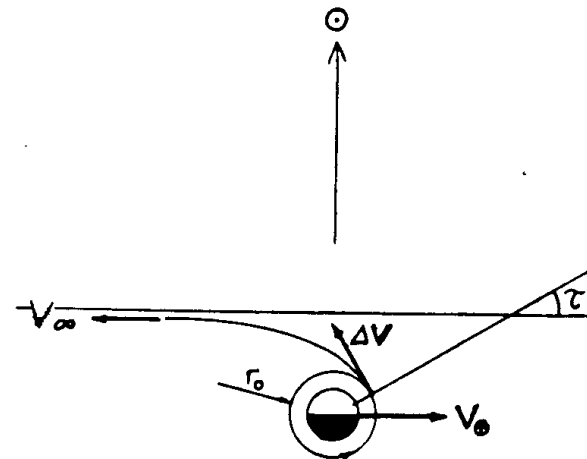


- Obsérvese que  $V_{\infty}$  actúa como un  $\Delta V$  en una maniobra; altera la órbita heliocéntrica de la sonda apartándola de la Tierra.
- Analicemos los  $V_{\infty}$  mínimos para ir a un planeta; se considera una transferencia tipo Hohmann, en torno a una **conjunción de referencia**.
- Según el planeta objetivo sea superior o inferior (ver figura),  $\vec{V}_{\infty}$  debe tener la misma dirección o dirección opuesta a  $\vec{V}_{\oplus}$ .

# Órbitas de intercepción e impulsos mínimos III



a) Planeta superior



b) Planeta inferior

- Por tanto la hipérbola de salida se debe diseñar para que su asíntota esté alineada con la velocidad de la Tierra.
- En la figura se puede observar como es necesario diseñar la hipérbola de salida en relación a la posición del Sol, según los casos.
- El ángulo  $\tau$  de la figura (del perigeo respecto al vector velocidad de la Tierra) es igual a  $180 - \theta_{\infty}$ .



# Órbitas de intercepción e impulsos mínimos IV

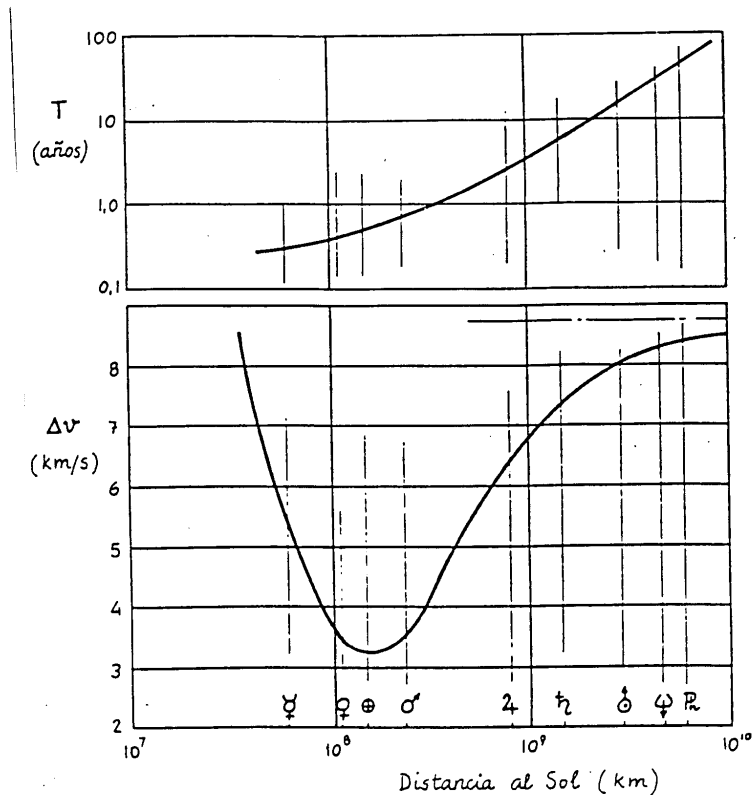


Fig. 3.- Impulsos mínimos necesarios y tiempos de vuelo correspondientes

- En la figura se ha calculado, para cada órbita en torno al Sol y para la transferencia tipo Hohmann, el coste energético ( $\Delta V$  en la órbita de aparcamiento) y el tiempo de transferencia (despreciando los tiempos de salida de la esfera de influencia).
- Observaciones:
  - Las misiones a planetas exteriores requieren de un tiempo muy largo.
  - El interior del Sistema Solar es energéticamente muy costoso.

- Por tanto, para hacer viables las misiones interplanetarias es necesario un método adicional que reduzca tiempo y coste, como veremos más adelante.



# Ajuste de cónicas I

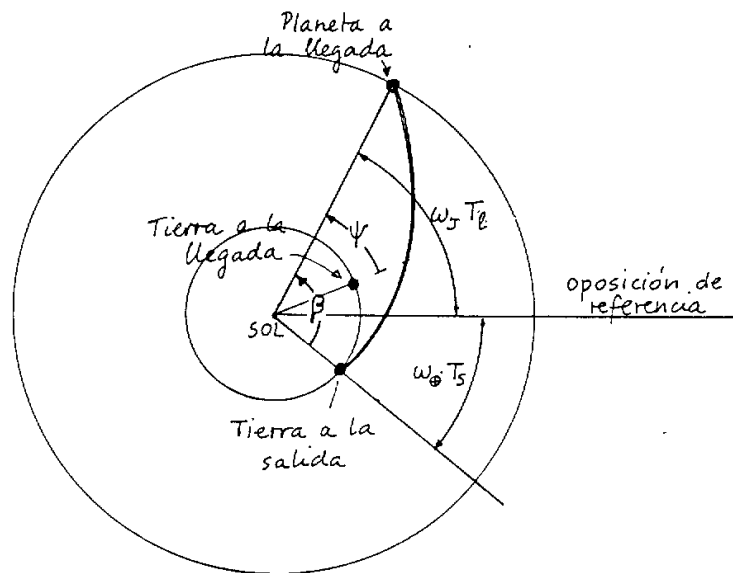
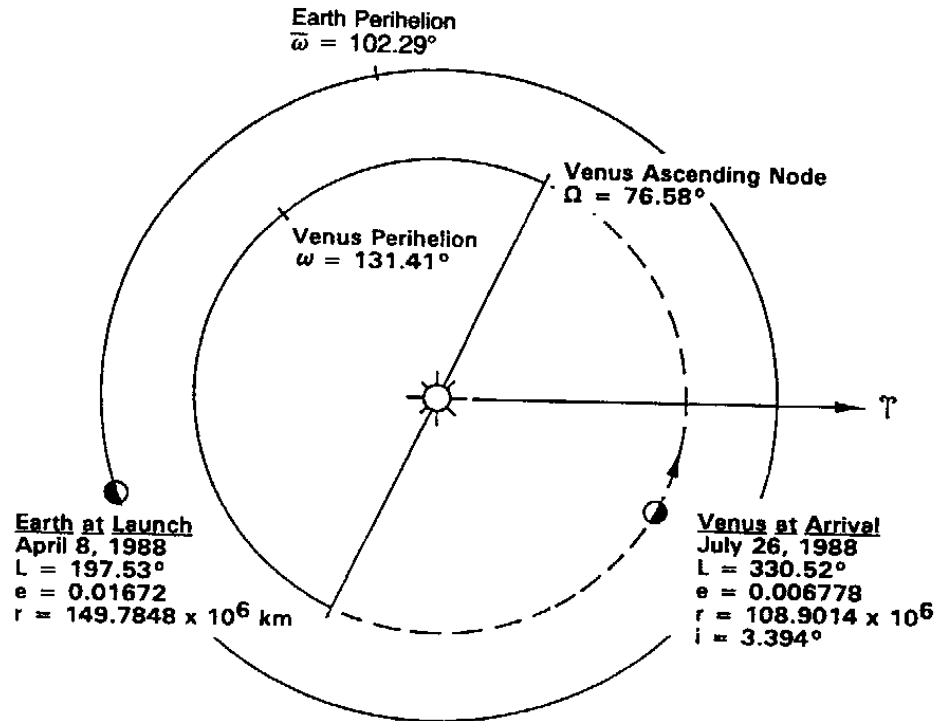


Fig. 1.- Trayectoria a un planeta exterior

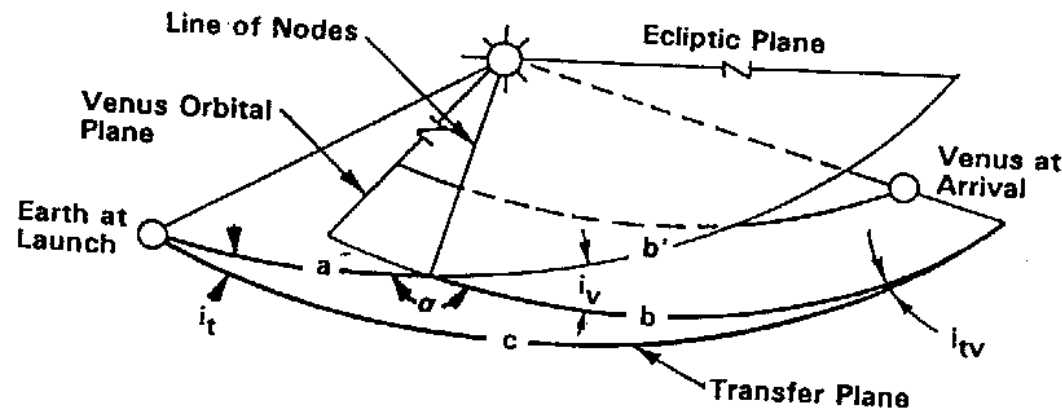
- Si bien una misión interplanetaria realmente requiere resolver un problema de 4 (o más) cuerpos, el ajuste de cónicas produce unos resultados excelentes a todos los efectos excepto los de muy gran precisión (astronavegación).
- Se descompone el problema en tres partes: hipérbola de salida, elipse heliocéntrica e hipérbola de llegada.
- Es posible emplear estas técnicas incluyendo una configuración más realista: las inclinaciones de los planos de otros planetas (se resuelve usando trigonometría esférica para calcular los cambios de plano), teniendo en cuenta la posición real de los planetas (usando las efemérides).



## Ajuste de cónicas II



- Complicaciones en el diseño: uso de la órbita real de los planetas, teniendo en cuenta las diferentes inclinaciones de los planos orbitales.



# Trayectoria heliocéntrica I

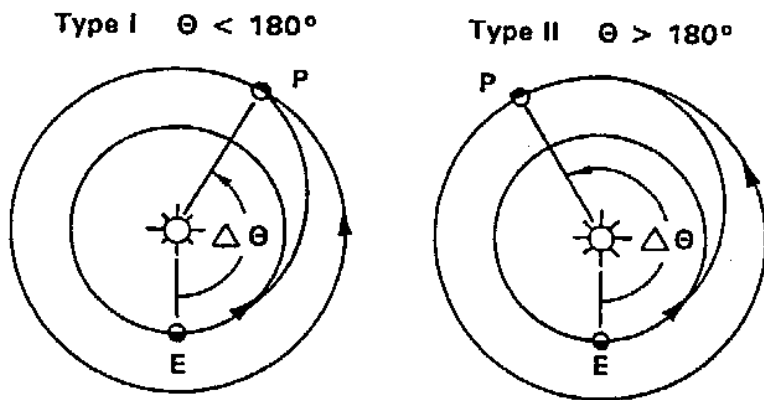


Table 6.4 Synodic periods

Planet	$S$ , days
Mercury	116
Venus	584
Mars	780
Jupiter	399
Saturn	378
Uranus	370
Neptune	367
Pluto	367
Moon	30

- Se calcula la trayectoria heliocéntrica alrededor de una conjunción de referencia. Hay dos tipos de trayectoria: tipo I ( $\Delta\theta < 180^\circ$ ) y tipo II ( $\Delta\theta > 180^\circ$ ). En la práctica nunca se usa una transferencia de Hohmann exacta.
- Estas conjunciones de referencia determinan las “ventanas de oportunidad” para el lanzamiento, y se repiten con el periodo sinódico del planeta,  $T_p^{\text{sin}}$  que se define como el tiempo que tarda en repetirse una configuración angular (ángulo de fase) determinada:

$$T_p^{\text{sin}} = \frac{2\pi}{|n_\oplus - n_P|} = \frac{1}{|1/T_\oplus^H - 1/T_P^H|}$$



## Trayectoria heliocéntrica II

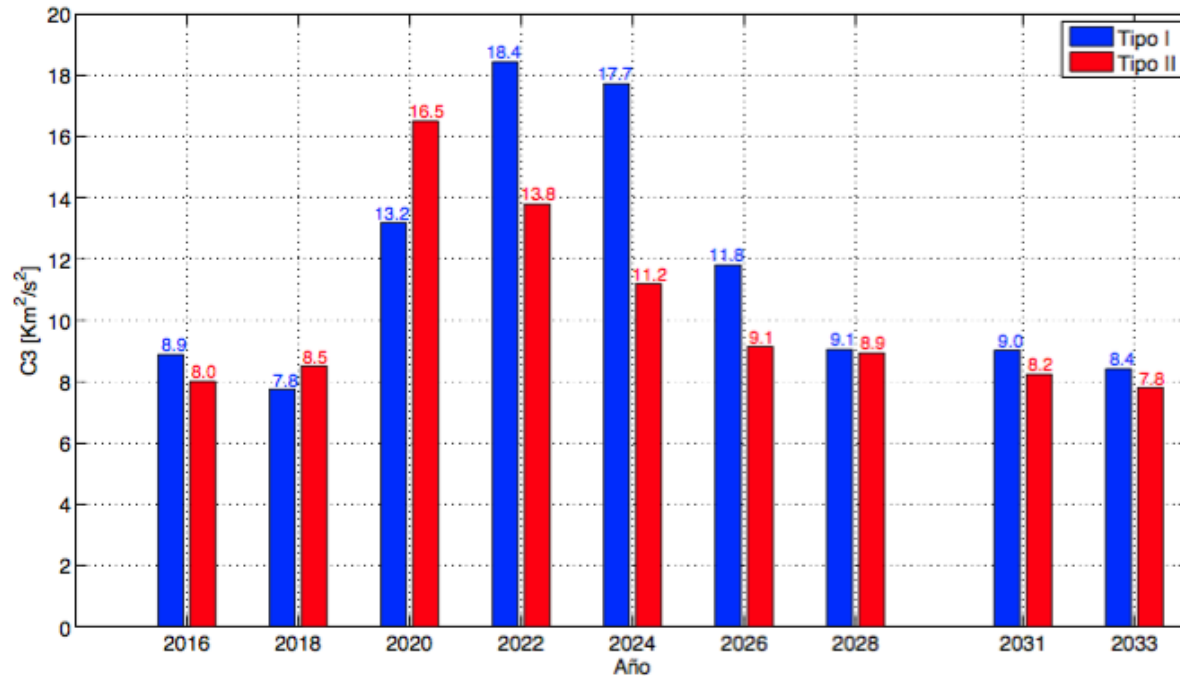


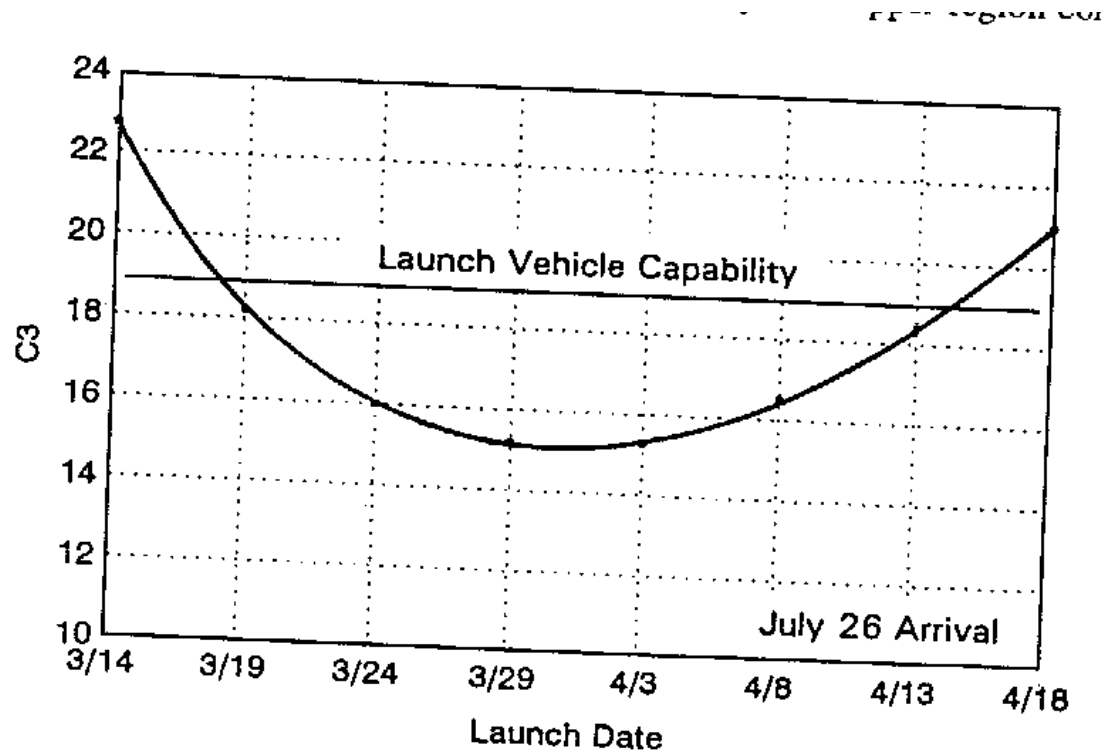
Figura 4.2.4: Evolución del  $C_3$  mínimo entre los años 2014 y 2033

- Si se tiene en cuenta la órbita real de los planetas (diferencias de inclinación, excentricidad), la mínima energía necesaria depende también del año; y según el año, será más favorable una trayectoria tipo I o tipo II. Figura: transferencia a Marte (TFG A. Lobato).





## Trayectoria heliocéntrica III



- Estos diagramas se pueden afinar en torno a una fecha de llegada, para determinar con precisión una ventana de oportunidad de salida; si se pospone el lanzamiento, habrá que esperar un periodo sinódico para repetirlo.



## Trayectoria heliocéntrica IV

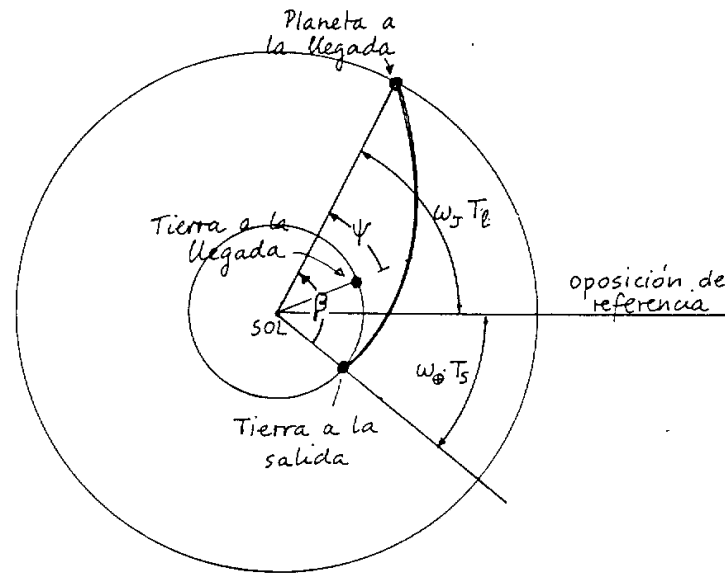


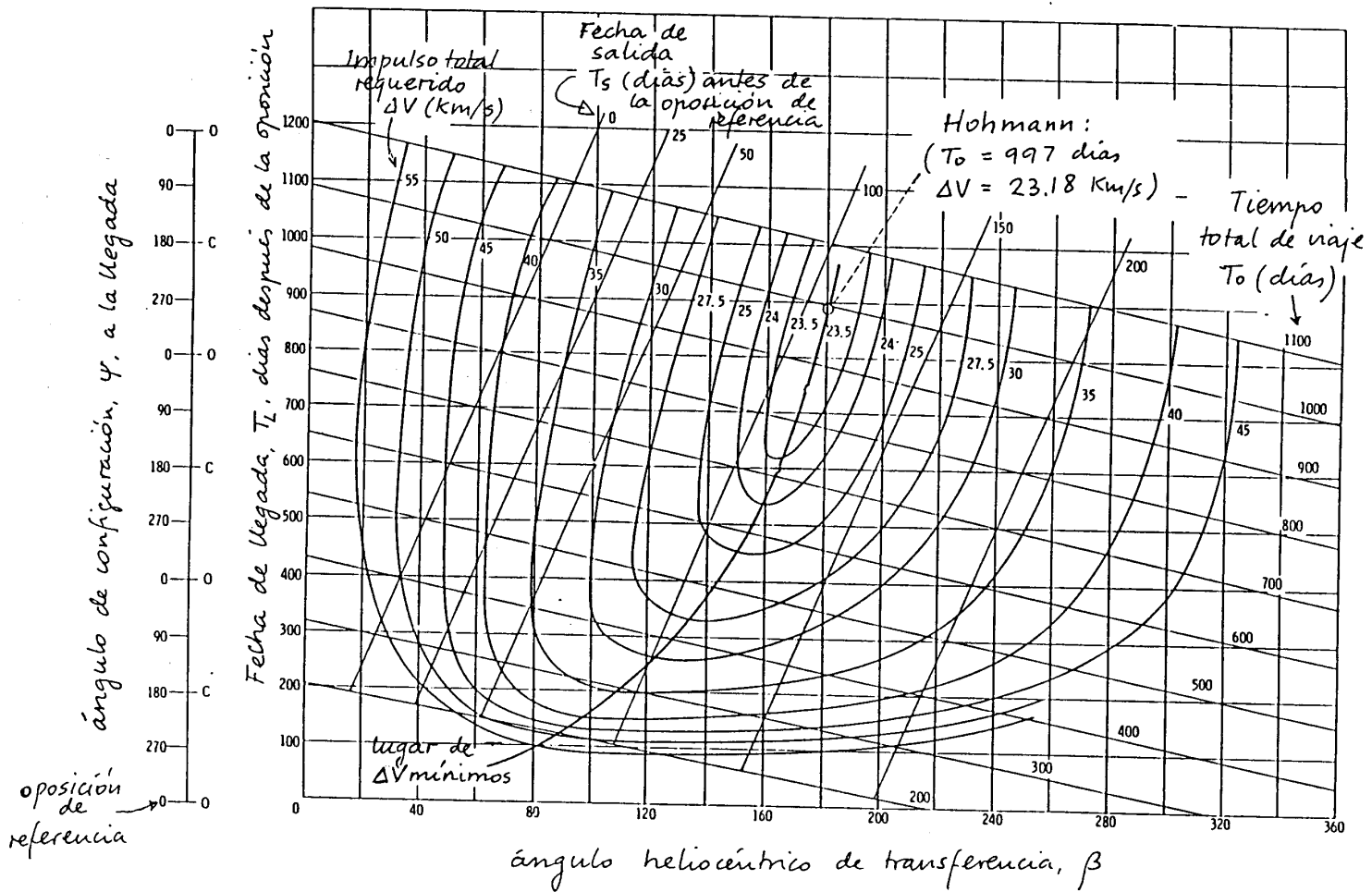
Fig. 1.- Trayectoria a un planeta exterior

- En la práctica no se utiliza una maniobra de tipo Hohmann; en torno a la conjunción de referencia se resuelve el problema de Lambert, para una variedad de tiempos de vuelo y posiciones relativas de los planetas; con la solución se hace una gráfica y se escoge la solución más favorable.

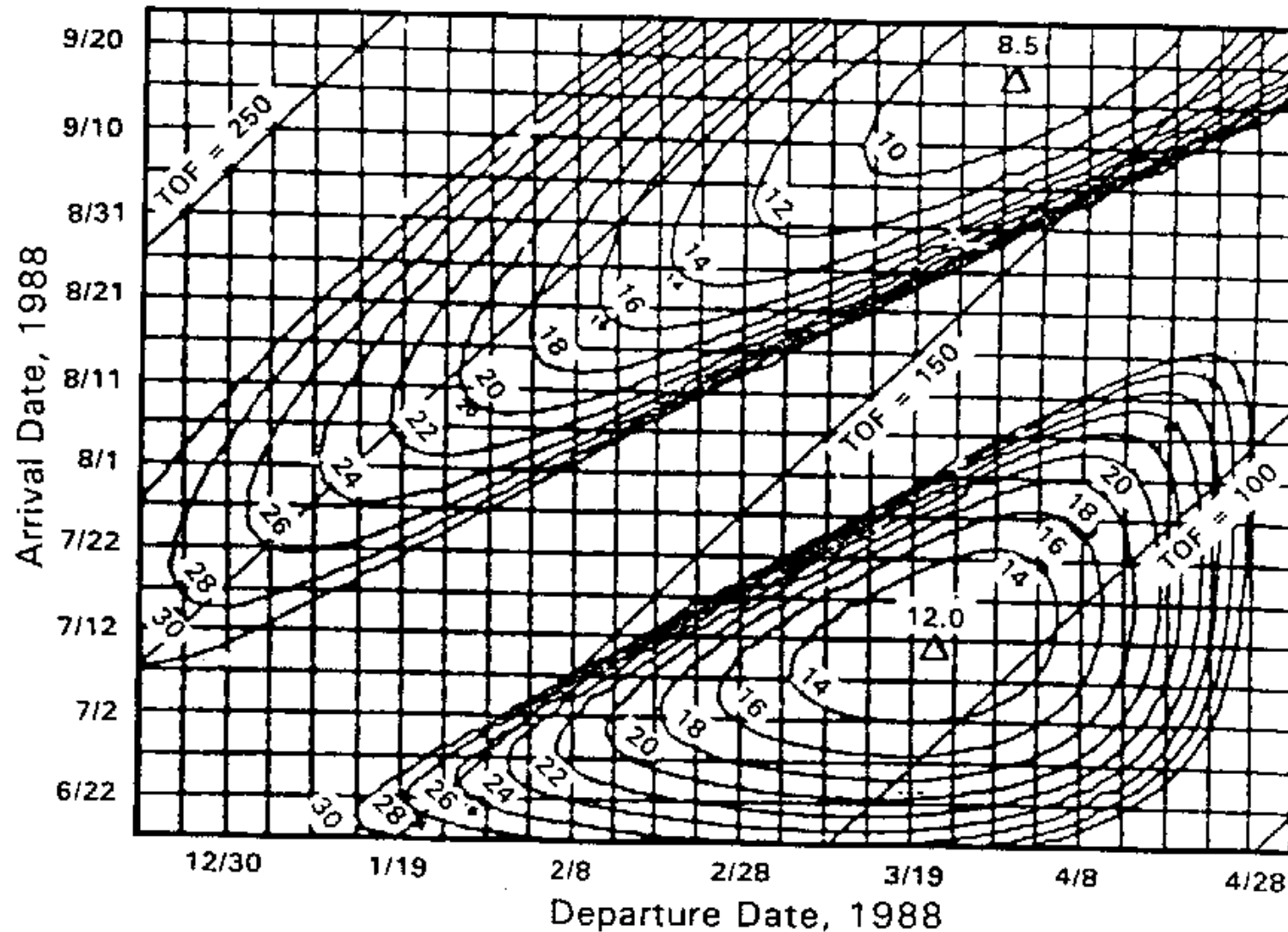


# Trayectoria heliocéntrica V

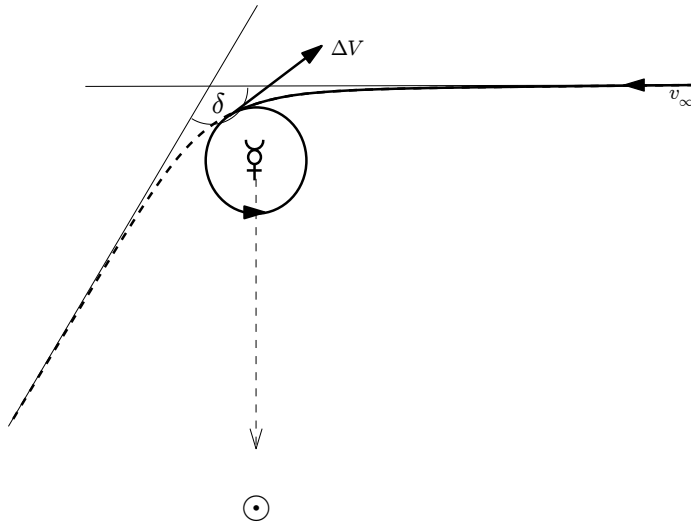
Fig. 3.- Impulso total ( $\Delta V$ ) para una orbitación en Júpiter



# Trayectoria heliocéntrica VI



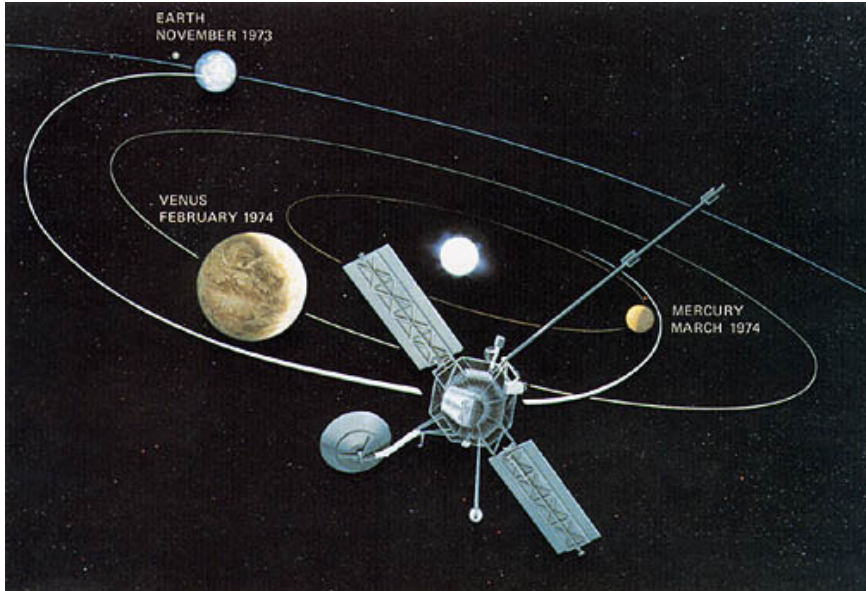
# Órbita de Llegada



- La Llegada, de la misma forma que la salida, será por las asíntotas de una órbita hiperbólica.
- Por el cambio de sistema de referencia, dada la velocidad heliocéntrica a la llegada  $\vec{V}_2^H$  hay que calcular  $\vec{V}_\infty = \vec{V}_2^H - \vec{V}_P$ .
- El radio de periapsis de la órbita de llegada no está determinado y es prefijado por el diseñador (se realizan pequeñas correcciones a lo largo de la órbita heliocéntrica para asegurar la situación deseada al final)
- Si se quiere obtener una órbita en torno al planeta, será necesario realizar una maniobra para frenar el vehículo.
- Esta maniobra se puede realizar empleando la atmósfera del planeta (aerobraking) caso de que dicha atmósfera exista y sea lo suficientemente densa.



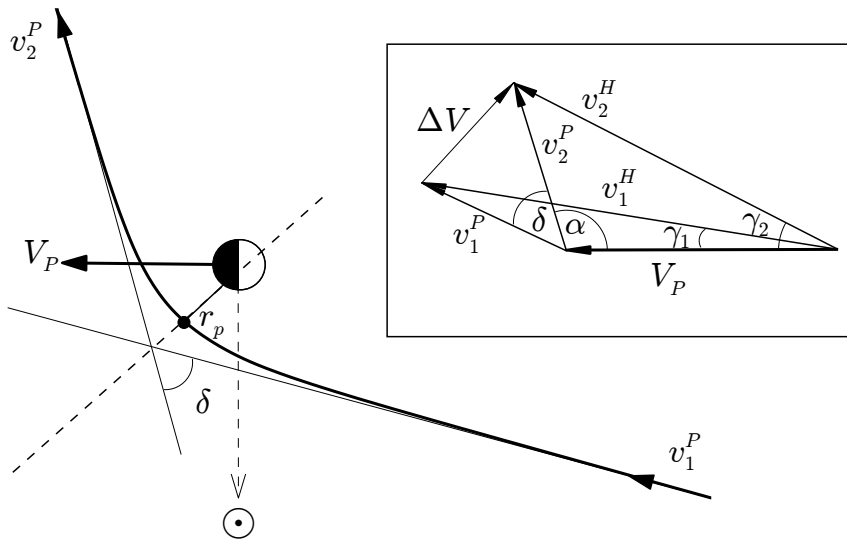
# Maniobra asistida por gravedad I



- El elevado coste energético de una misión interplanetaria puede ser mitigado usando la maniobra asistida por gravedad.
- Tras 20 años de debate e incredulidad, en 1974 la Mariner 10 realizó esta maniobra para alcanzar Mercurio vía Venus.
- Esta maniobra cambia la velocidad de un vehículo relativa al Sol (la velocidad relativa al planeta permanece constante).
- La maniobra se realiza acercándose a un planeta dado, lo que también se puede aprovechar desde el punto de vista científico (ningún planeta ha sido visitado “demasiadas veces”).
- Ya en el siglo XIX se había observado que los cometas, al acercarse a Júpiter, modificaban considerablemente su órbita.



## Maniobra asistida por gravedad II



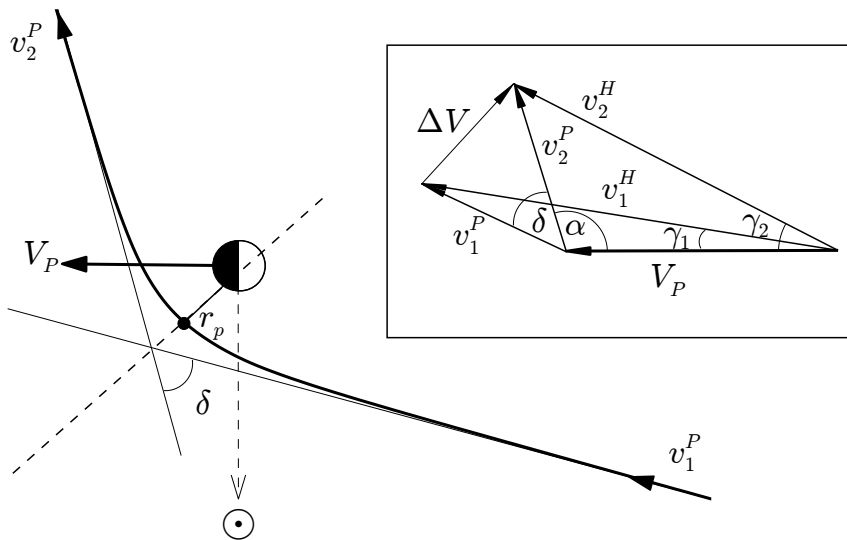
- Llamemos  $\vec{v}_1^H$  y  $\vec{v}_2^H$  a las velocidades antes y después de la maniobra, en el sistema de referencia heliocéntrico.
- Igualmente, llamemos  $\vec{v}_1^P$  y  $\vec{v}_2^P$  a las velocidades antes y después, en el sistema de referencia planetocéntrico.
- La velocidad del planeta respecto al Sol se denomina  $\vec{V}_p$ .

- Recordemos que  $\delta$  es el ángulo entre las asíntotas de la hipérbola.
- Se tiene que  $\vec{v}_1^P = \vec{v}_1^H - \vec{V}_p$  y que  $\vec{v}_2^H = \vec{v}_2^P + \vec{V}_p$ .
- Por otro lado  $v_1^P = v_2^P = v_\infty = \sqrt{-\frac{\mu_p}{a}}$ ,  $a = \frac{r_p}{1-e}$ ,  $\sin \delta/2 = \frac{1}{e}$ .
- De la figura:  $\Delta V = 2v_\infty \sin \delta/2$ . Operando, llegamos a:  

$$\Delta V = 2v_\infty \frac{1}{1+r_p v_\infty^2 / \mu_p}$$



## Maniobra asistida por gravedad III



- En la expresión  $\Delta V = 2v_{\infty} \frac{1}{1+r_p v_{\infty}^2 / \mu_p}$  tenemos como datos de entrada  $v_{\infty} = |\vec{v}_1^H - \vec{V}_P|$  y el radio de acercamiento máximo  $r_p$ .
- Se observa que  $\Delta V$  es decreciente con  $r_p$ . El máximo pues se dará para el menor valor (teórico) posible de  $r_p$ , que es  $r_p = R_p$ , el radio del planeta.
- Maximizando  $\Delta V$  con respecto a  $V_{\infty}$ , se llega a que el máximo  $\Delta V$  se obtiene cuando  $V_{\infty} = \sqrt{\mu_p / R_p}$ ,  $e = 2$ ,  $\delta = 60^\circ$ . Entonces  $\Delta V_{\text{MAX}} = \sqrt{\mu_p / R_p}$ .
- Es decir el máximo  $\Delta V$  teórico es la velocidad circular en periapsis, cuando la periapsis es la mínima posible ( $R_p$ ).
- Variante: para aumentar la velocidad de salida se puede aumentar  $V_{\infty}$  con un impulso en periapsis de la maniobra.

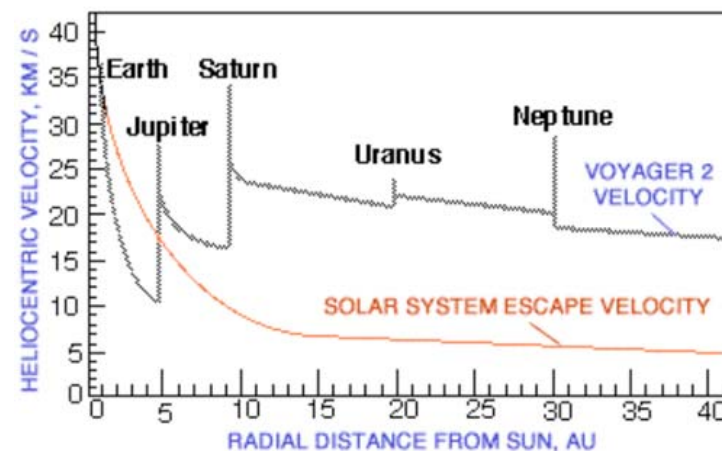
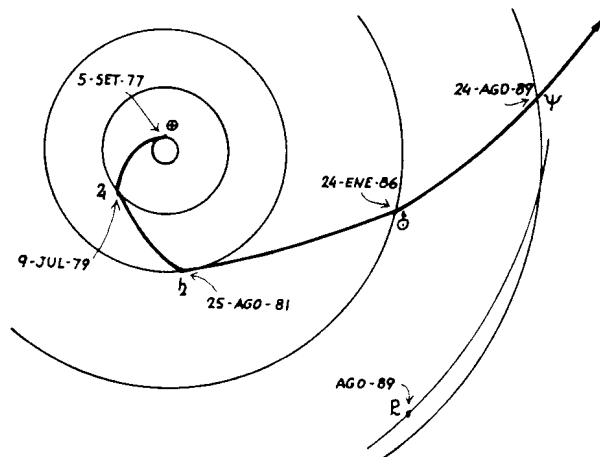




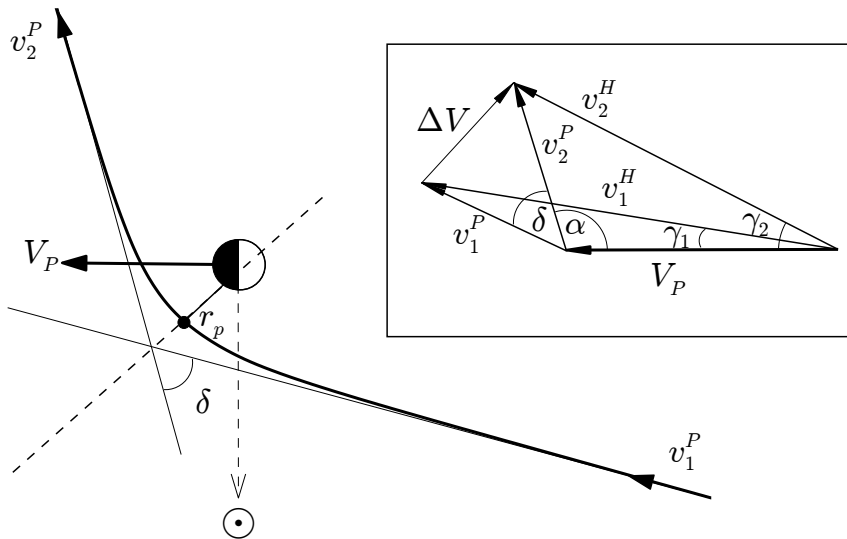
# Maniobra asistida por gravedad IV

	$\Delta V$ (km/s)
Mercurio	3.00
Venus	7.28
La Tierra	7.90
Marte	3.54
Júpiter	43.0
Saturno	26.6
Urano	15.6
Neptuno	17.6

- En la tabla se puede ver el valor de  $\Delta V_{max}$  para los diferentes planetas.
- Este valor está limitado en la práctica por el acercamiento máximo posible (p.ej. por atmósfera o por peligro de radiación).
- La Voyager II pudo alcanzar la velocidad de escape del Sistema Solar realizando varias maniobras consecutivas (el “grand tour”), aprovechando una configuración planetaria que sólo se repite cada 176 años.



## Maniobra asistida por gravedad V



- Es importante obtener la velocidad y el ángulo de trayectoria tras la maniobra.
- Aplicando el teorema del coseno en el triángulo superior,

$$v_2^H = \sqrt{V_P^2 + v_\infty^2 - 2V_P v_\infty \cos \alpha}. \text{ Del teorema del seno, } \sin \gamma_2 = \frac{v_\infty \sin \alpha}{v_2^H}.$$

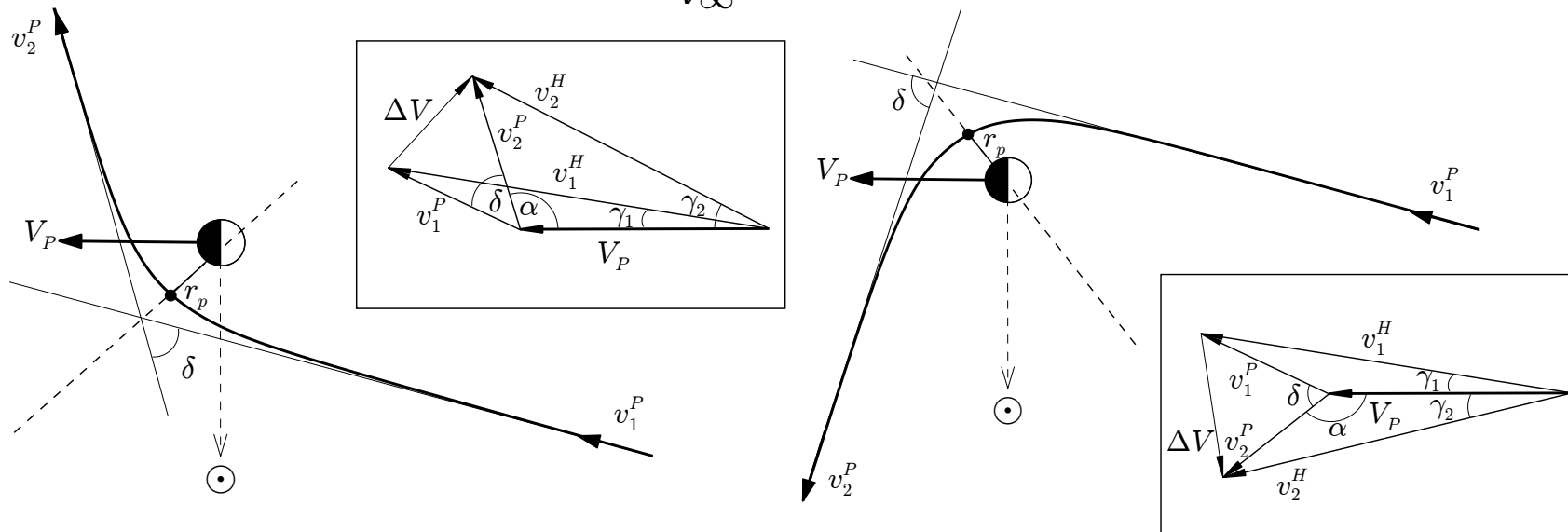
- Por tanto hay que calcular  $\alpha$ . Del triángulo inferior,  $\sin(\delta + \alpha) = \frac{v_1^H \sin \gamma_1}{v_\infty}$ .
- Teniendo  $v_2^H$ ,  $\gamma_2$  y la distancia del planeta al Sol,  $L_P$ , se tiene la órbita heliocéntrica a la salida de la maniobra.
- Obsérvese que no sólo es importante el aumento de  $v_2^H$ , sino también el cambio en  $\gamma$ , que desvía la trayectoria heliocéntrica y puede permitir acercarse a un planeta.



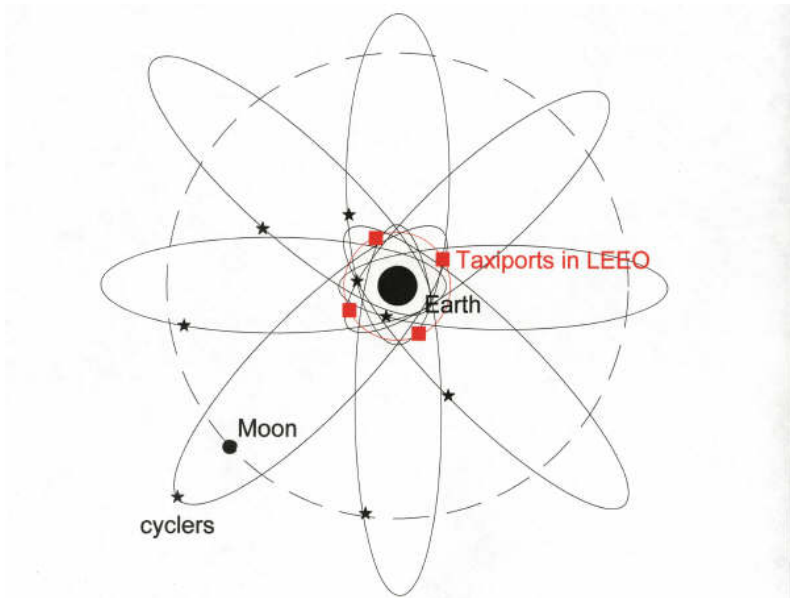
## Maniobra asistida por gravedad VI

- Existen dos posibles configuraciones para realizar la maniobra asistida por gravedad. El diseñador de la maniobra deberá decidir cual es la que conviene.
- La primera configuración transcurre por la “cara iluminada” (por el Sol) del planeta. La segunda, por la “cara oscura”.
- Obsérvese que el triángulo de velocidades cambia en la segunda configuración; para este triángulo,

$$\text{sen}(2\pi - (\delta + \alpha)) = \frac{v_1^H \text{sen } \gamma_1}{v_\infty}$$

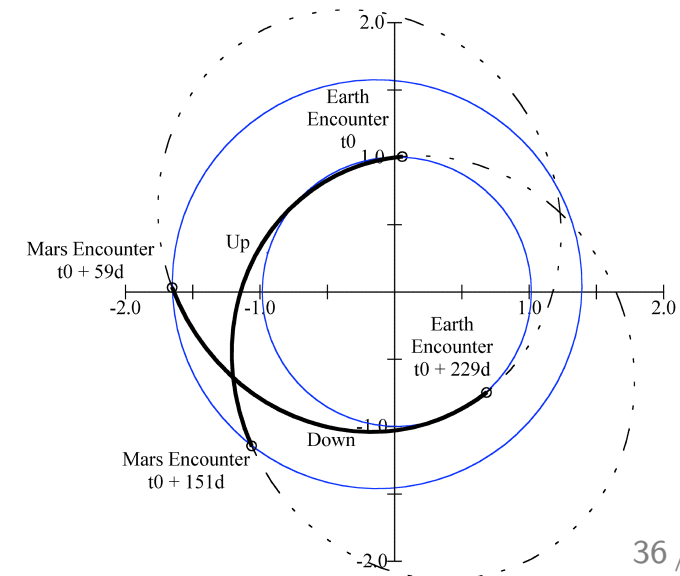


## Maniobra asistida por gravedad VII

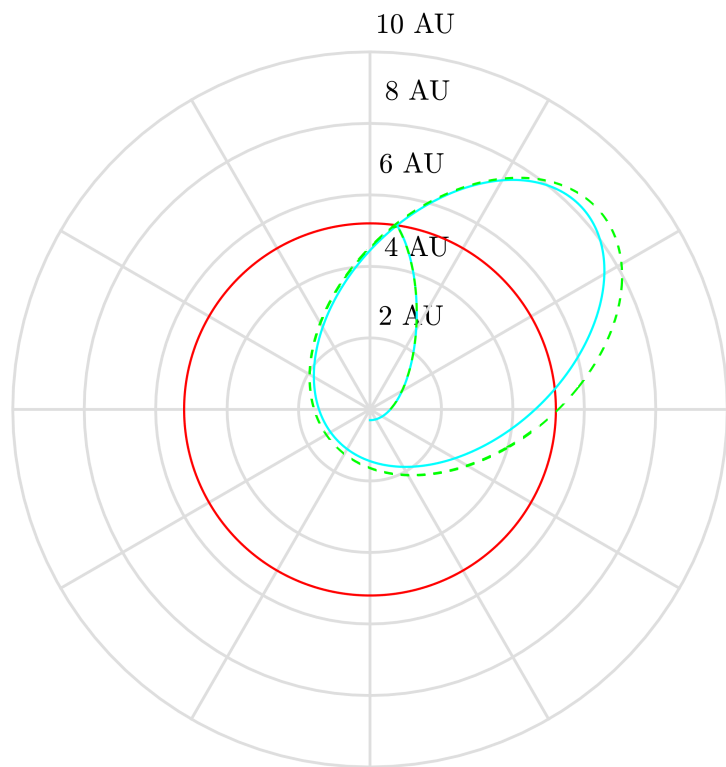


- Un concepto avanzado basado en la maniobra asistida por gravedad es el de las órbitas cíclicas o “cyclers orbits”.
- La idea es tener una serie de vehículos espaciales en órbitas en torno a dos cuerpos que se repiten periódicamente; cada sobrevuelo a un cuerpo arroja al vehículo a una órbita en torno al otro.

- Un ejemplo clásico de órbitas cíclicas se debe al astronauta Buzz Aldrin.
- Aldrin diseñó dos órbitas acopladas entre Marte y la Tierra; en cada órbita hay siempre un vehículo, uno de ellos se usaría para viajar a Marte desde la Tierra (147 días) y el otro para volver (170 días).



## Maniobra asistida por gravedad: validez



- En realidad para tratar el problema con mayor realismo sería necesario resolver un problema de 3 o 4 cuerpos (ver tema 9).
- Una comparativa numérica (C. Duran) permitió comprobar que el ajuste de cónicas constituye una buena aproximación al Problema de los Tres Cuerpos (Circular Restringido) con diferencias razonablemente pequeñas, pero que crecen si disminuye el radio de aproximación (particularmente Júpiter).
- En la figura se puede ver una comparativa típica entre el ajuste de cónicas (línea continua) y el problema de los tres cuerpos (línea discontinua).

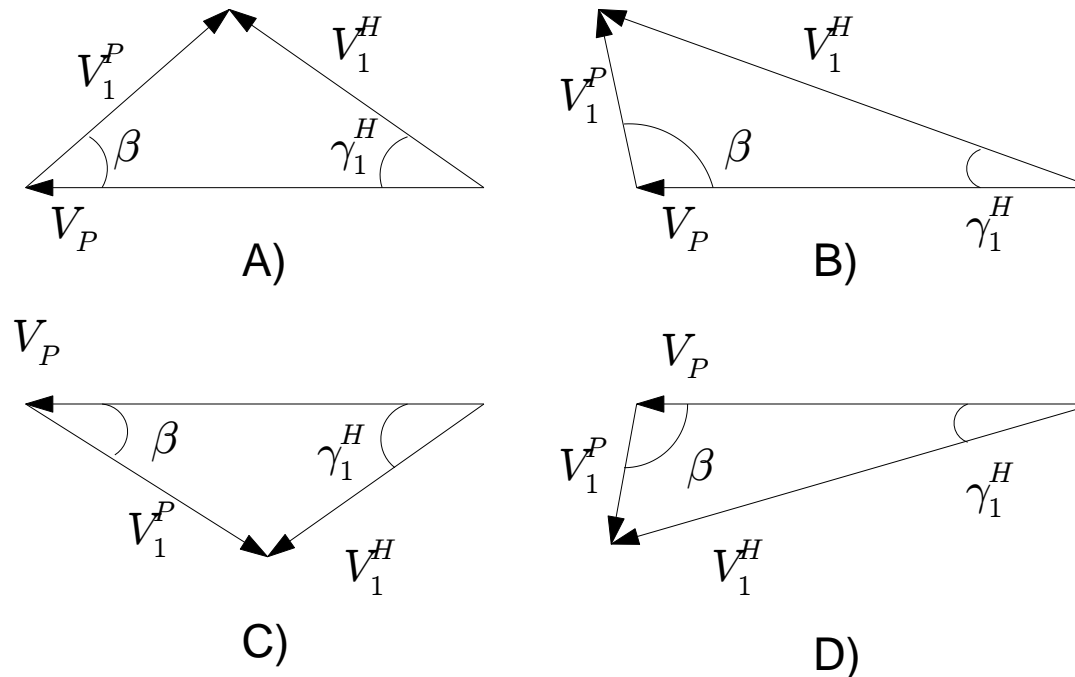


## Anexo: resolución de triángulos

- Existen varios métodos para resolver los triángulos que surgen en las maniobras asistidas por gravedad:
  - Trigonometría plana
  - Vectores
  - Fasores
- A continuación se explicarán el primer y último métodos. El método basado en vectores es análogo al basado en fasores.
- La base de la resolución son las ecuaciones  $\vec{V}_1^P = \vec{V}_1^H - \vec{V}_P$ ,  $\vec{V}_2^H = \vec{V}_2^P + \vec{V}_P$ , y recordar que  $\vec{V}_2^P$  es  $\vec{V}_1^P$  girado un ángulo  $\delta$ .
- Típicamente los datos de entrada son  $V_1^H$ ,  $V_P$ ,  $\gamma_1^H$  y el radio al que se efectúa la maniobra asistida por gravedad.
- Normalmente será necesario encontrar  $V_2^H$  y  $\gamma_2^H$ , que permitirán determinar la cónica a la salida de la maniobra, aunque se pueden pedir otros datos.



## Anexo: resolución de triángulos por trigonometría

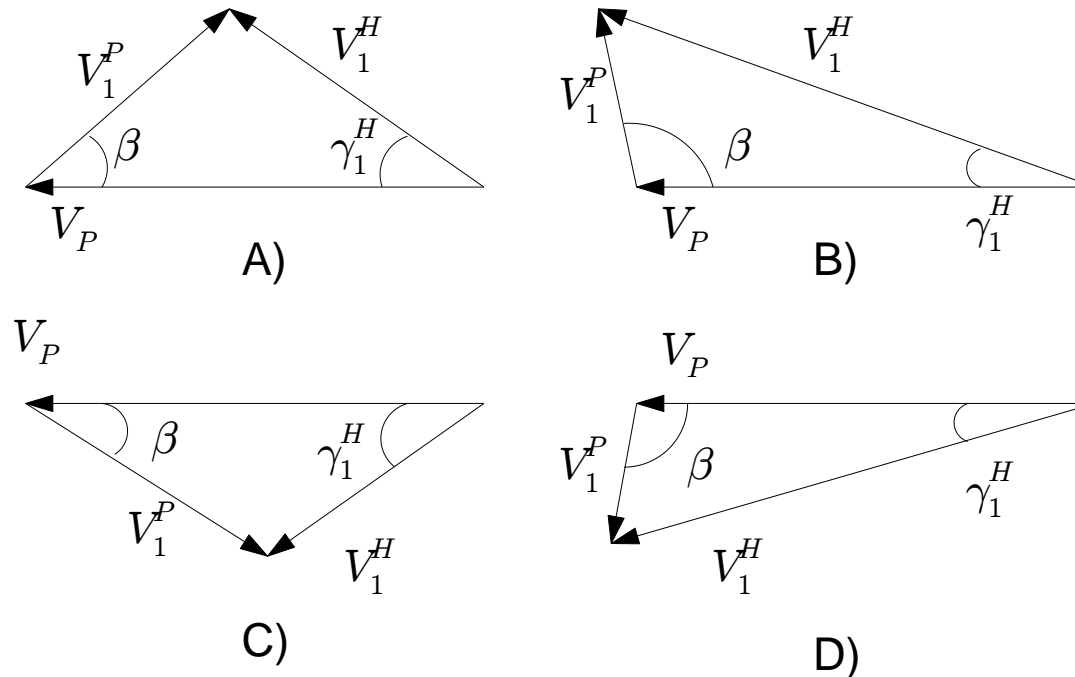


- En primer lugar, partiendo de  $V_1^H$ ,  $\gamma_1^H$  y  $V_P$  dibujamos el primer triángulo y calculamos  $V_1^P$  y  $\beta$ .
- Si  $\gamma_1^H < 0$  estamos en los casos C y D. Tomamos el valor absoluto de  $\gamma_1^H$  pero pintamos el triángulo “hacia abajo”.
- Por el teorema del coseno:  

$$(V_1^P)^2 = (V_P)^2 + (V_1^H)^2 - 2V_P V_1^H \cos \gamma_1^H.$$



## Anexo: resolución de triángulos por trigonometría



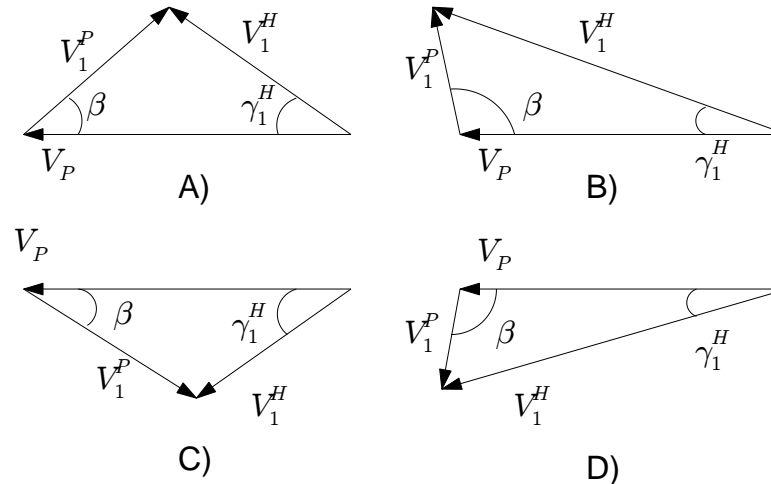
- Para calcular  $\beta$ , usamos el teorema del seno:  

$$\sin \beta = \frac{V_1^H}{V_1^P} \sin |\gamma_1^H|$$
 o del coseno: 
$$\cos \beta = \frac{(V_1^P)^2 + (V_P)^2 - (V_1^H)^2}{2V_P V_1^P}$$
- Si usamos el teorema del seno, es necesario ver si  $\beta > 90^\circ$ ; eso sucede si  $(V_1^H)^2 > (V_1^P)^2 + (V_P)^2$  (casos B y D), y entonces habría que coger la segunda solución del arco seno.





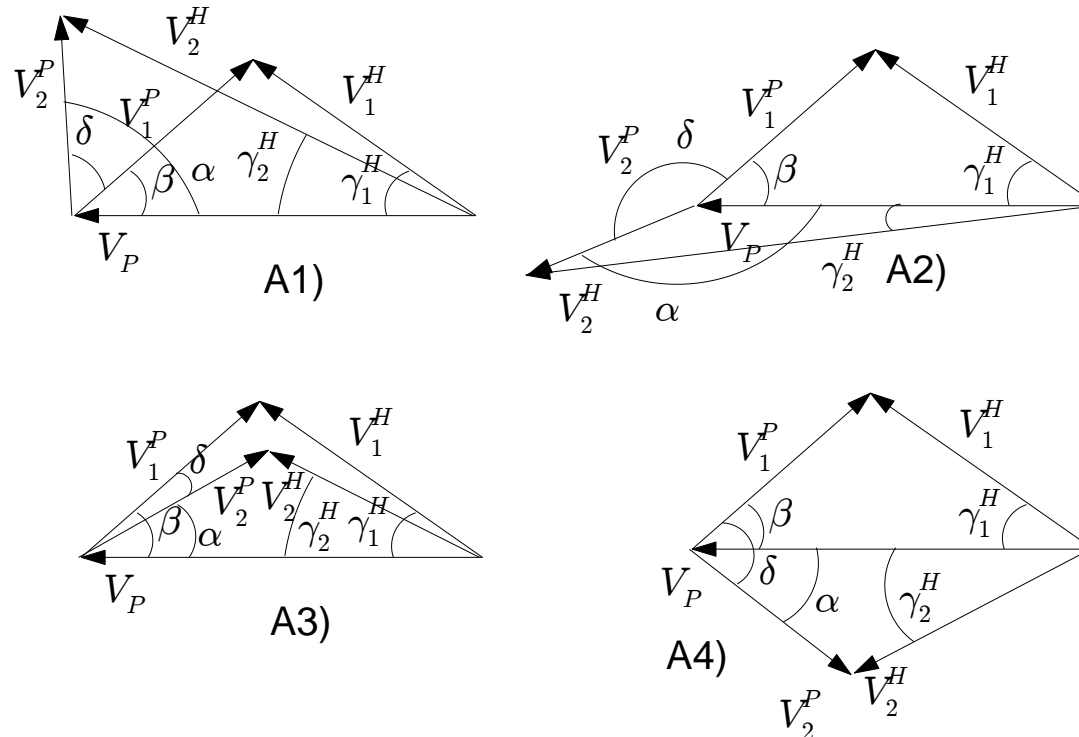
## Anexo: resolución de triángulos por trigonometría



- Una vez hallado  $V_1^P$ , identificamos  $v_\infty = V_1^P$  y calculamos los datos de la maniobra asistida por gravedad ( $\Delta V$ ,  $\delta$ ).
- Si se realizara la maniobra con propulsión adicional en periapsis, entonces habría que recalcular tanto  $v_\infty$  (que cambiaría después de la maniobra y por tanto también  $V_2^P$ ) como  $\delta$  (el  $\delta = \theta_\infty + \theta'_\infty - \pi$ , donde  $\theta_\infty$  es el de la hipérbola antes de la maniobra y  $\theta'_\infty$  después).
- A continuación se calcula el segundo triángulo. Nos centramos en el caso A, los otros casos generan posibilidades similares.



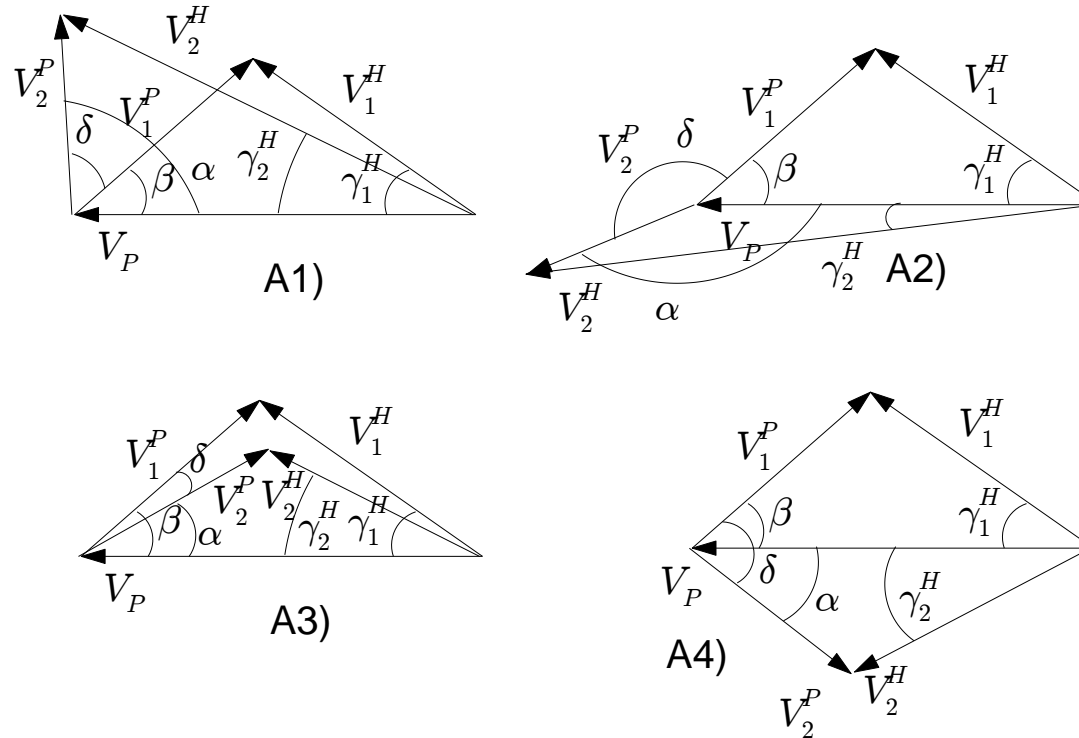
## Anexo: resolución de triángulos por trigonometría



- El segundo triángulo se monta sobre el 1°; hay que hallar  $\alpha$
- A1 y A2 tienen giro a la izquierda. En el caso A2  $\beta + \delta > 180^\circ$ . Para A1,  $\alpha = \beta + \delta$ . Para A2,  $\alpha = 360^\circ - \delta - \beta$ .
- A3 y A4 tienen giro a la izquierda. En el caso A2  $\beta - \delta < 0^\circ$ . Para A3,  $\alpha = \beta - \delta$ . Para A4,  $\alpha = \delta - \beta$ .



## Anexo: resolución de triángulos por trigonometría



- Finalmente, con  $\alpha$  hallamos  $V_2^H$  y  $\gamma_2^H$ .
- Se tiene  $(V_2^H)^2 = (V_P)^2 + (V_2^P)^2 - 2V_P V_2^P \cos \alpha$ .
- Para calcular  $\gamma_2^H$ , usamos el teorema del seno:  

$$\sin |\gamma_2^H| = \frac{V_2^P}{V_2^H} \sin \alpha.$$
- $\gamma_2^H$  es negativo si  $V_2^H$  está “por debajo” (casos A2 y A4).



## Anexo: resolución de triángulos por fasores

- Resolver el triángulo con fasores es equivalente al uso de vectores planos. Su uso no exige de dibujar el triángulo, pero simplifica los cálculos. En primer lugar se calcula  $V_1^P / \beta = V_1^H / \gamma_1^H - V_P / 0^\circ$ , aunque ahora  $\beta$  está medida respecto a la misma dirección que  $\gamma_1^H$  (es decir como  $180^\circ - \beta$  si lo comparamos con el  $\beta$  de los triángulos).
- Posteriormente se obtiene  $v_\infty = V_1^P$  y se calcula  $\delta$  de la maniobra asistida por gravedad y  $V_2^P = v_\infty$ , posiblemente modificando los valores si hubiera propulsión en periapsis.
- Finalmente  $V_2^H / \gamma_2^H = V_2^P / \beta \pm \delta + V_P / 0^\circ$ , donde los signos  $\pm$  representan los dos posibles giros.
- Obsérvese que si se usan fasores se respetan los signos de los ángulos, a diferencia del caso plano.
- Con una calculadora capaz de trabajar con fasores, el procedimiento de resolución es mucho más rápido.

