

Mecánica Orbital/Astronáutica y Vehículos Espaciales

Tema 2: Mecánica Orbital Básica

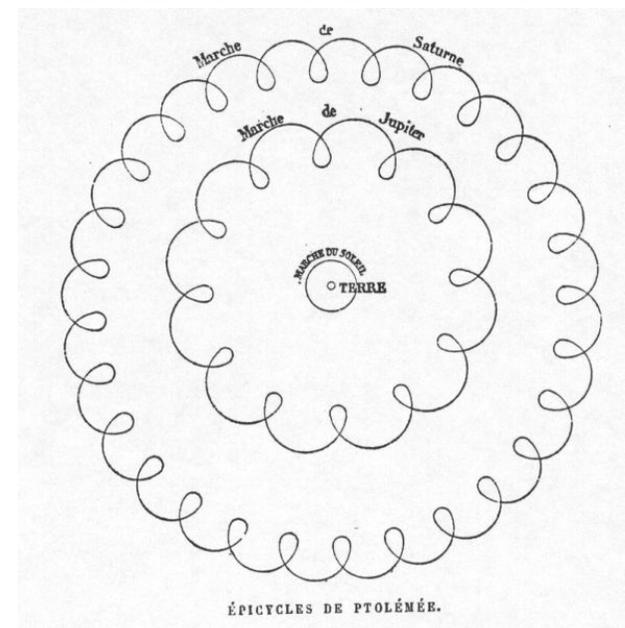
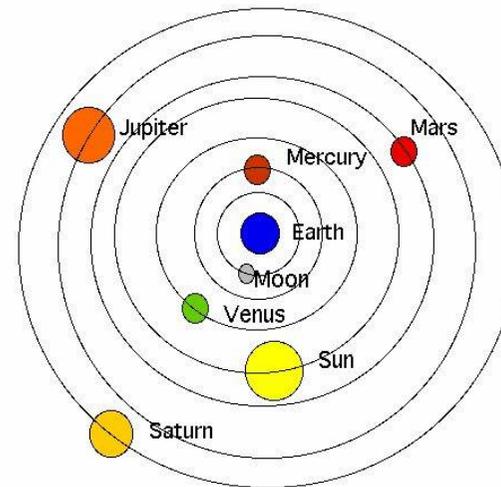
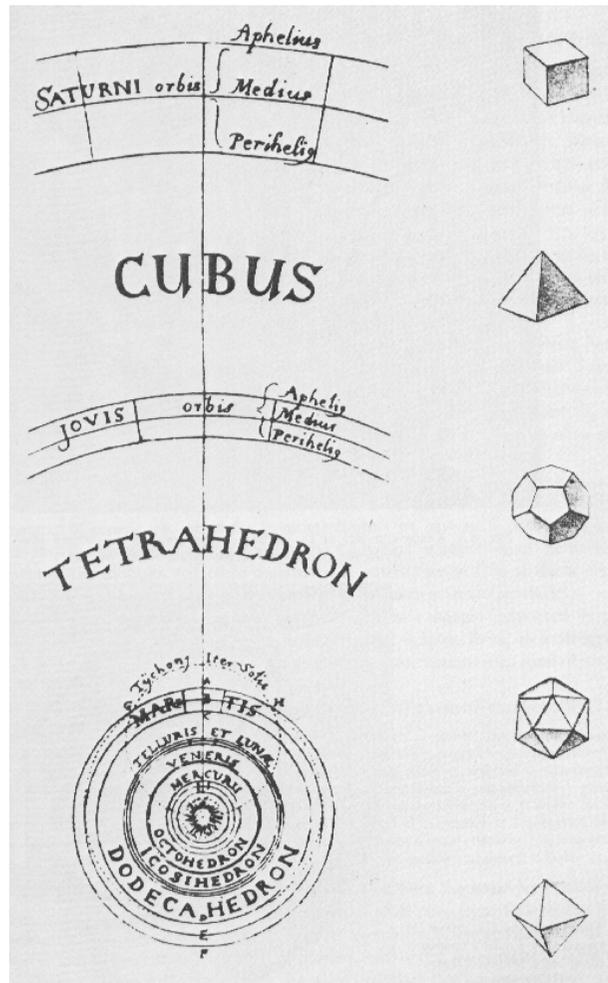
Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla
rvazquez1@us.es

21 de octubre de 2015



Introducción Histórica a la Mecánica Orbital



En los principios...

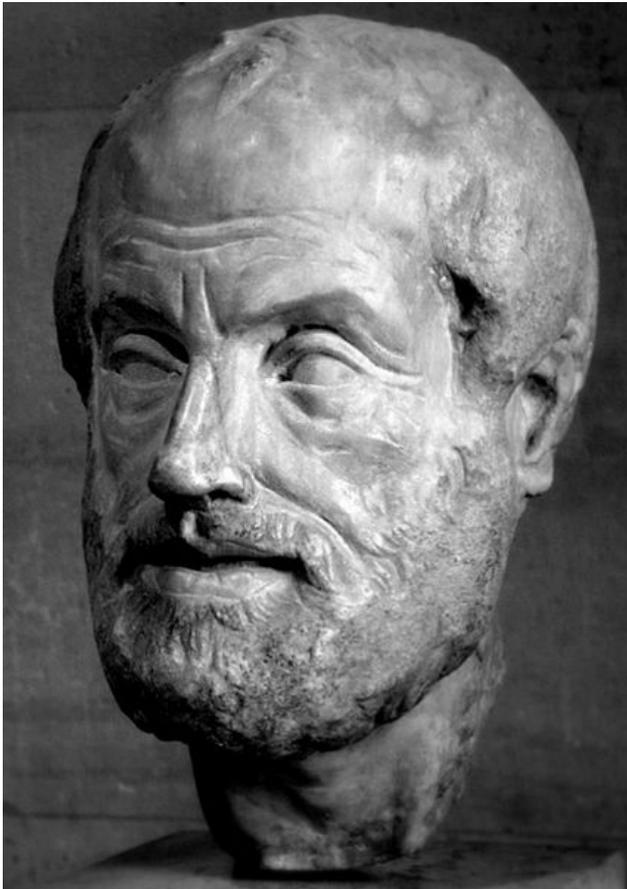
“Desde la Antigüedad, el hombre ha mirado a las estrellas” ...



- Todas las civilizaciones antiguas estuvieron interesadas en las estrellas y en la Astronomía (en muchos casos motivados por la Astrología).
- Algunas civilizaciones notables en su nivel de conocimientos astronómicos fueron la babilonia, la egipcia y la maya.
- No obstante, fueron los griegos los primeros en tratar de **explicar** como el Universo funciona, de una forma **sistemática y lógica usando observaciones y modelos**.



Aristóteles (s. IV A.C.)



- La base: “El Universo es perfecto”
- Por tanto plantea un modelo **geocéntrico** basado en la figura más perfecta, la esfera.
- Los planetas y el Sol residen en esferas “cristalinas” concéntricas centradas en la Tierra.

Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum .



Aristarco de Samos (s. III AC)

- El modelo de las esferas tiene un grave problema: **No se corresponde con las observaciones!**
- Aristarco de Samos propone por primera vez un modelo heliocéntrico.
- No obstante, el modelo es demasiado avanzado para la época, y no encaja con las teorías de Aristóteles (cuyo prestigio es ya inmenso), ni con la observación de que “todo” se mueve hacia el centro de la Tierra.
- Además, no explica la ausencia de **paralaje** de las estrellas.



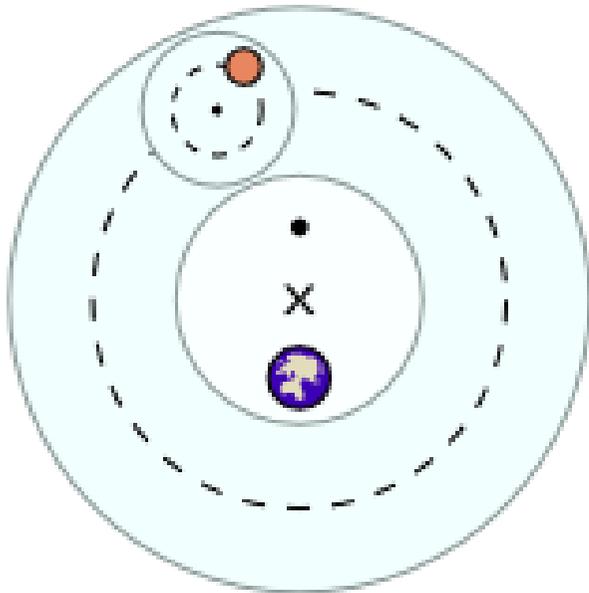
Ptolomeo de Alejandría (s. I AD)



- Ptolomeo propone un modelo geocéntrico **práctico**, el llamado **modelo ptolemaico**.
- Dicho modelo se usa a efectos de cálculo, y para ello introduce un artefacto matemático (los epiciclos, desarrollados por el también griego Apolonio de Pérgamo).
- La capacidad predictiva del modelo es buena para los instrumentos de la época. Conforme la precisión de los instrumentos va mejorando, se tratan de solucionar las discrepancias introduciendo más epiciclos.



El modelo ptolomaico

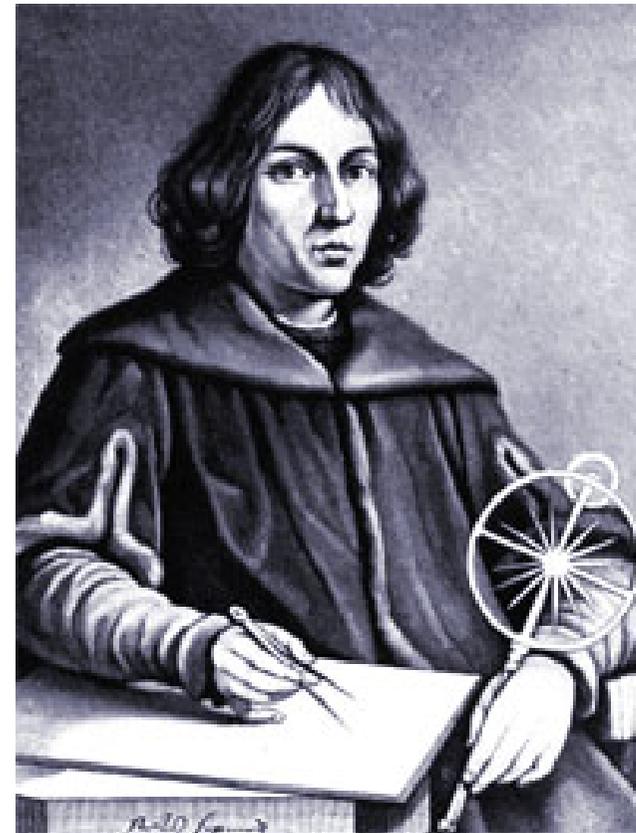


- Un epiciclo es una circunferencia que se desliza sobre otra (llamada la **deferente**).
- Para aumentar la capacidad predictiva del modelo, Ptolomeo permite que la deferente no esté centrada en la Tierra. Define un punto, el **ecuante**, tal que el centro de la deferente se encuentra en el centro del segmento definido por el ecuante y la Tierra.
- El modelo permite acomodar los movimientos retrógrados de los planetas y su brillo variable.
- Si las órbitas planetarias fueran circulares, el modelo sería cierto!



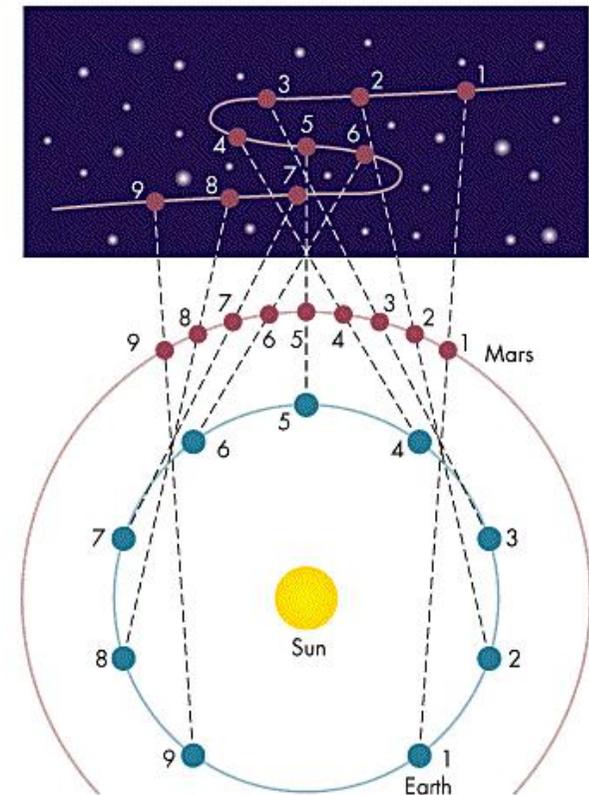
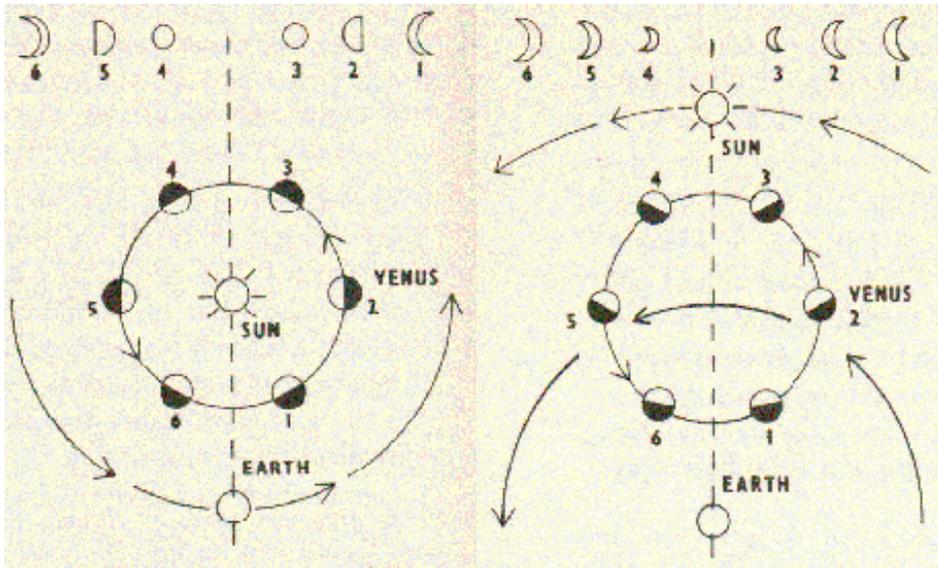
Copérnico (s. XV)

- Astrónomo y matemático polaco.
- Publica “De revolutionibus orbium coelestium”, donde propone un modelo heliocéntrico, con los planetas orbitando en **círculos** alrededor del Sol.
- El modelo no ofrece buenas predicciones; Copérnico se ve forzado a introducir epicicloides para poder ajustar los datos al modelo.



Evidencia a favor de Copérnico

- Galileo (s. XVI), que inventa el telescopio, es capaz de observar las fases de Venus, que no se pueden explicar con el modelo geocéntrico.

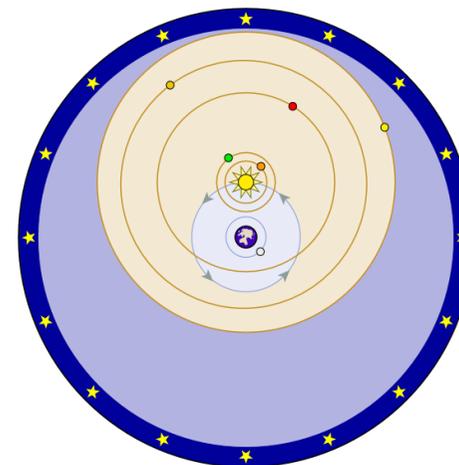


- El modelo copernicano ofrece la primera explicación sencilla al movimiento retrógrado de los planetas.

Tycho Brahe (s. XVI.)

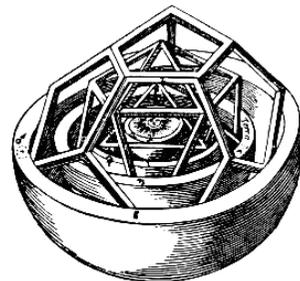


- Astrónomo danés de gran fortuna personal.
- “El hombre de la nariz de plata”
- Realiza observaciones de gran precisión (minutos de arco) con su ojo desnudo.
- Crea el modelo “ticónico”, donde el Sol gira alrededor de la Tierra, y los planetas alrededor del Sol; el modelo explica las fases de Venus!



Kepler (s. XVII)

- Matemático, astrónomo y astrólogo alemán.
- “Heredó” las medidas de Tycho Brahe, puesto que este murió poco después de contratarlo como asistente.
- Inicialmente trató de encontrar modelos basados en los sólidos platónicos.



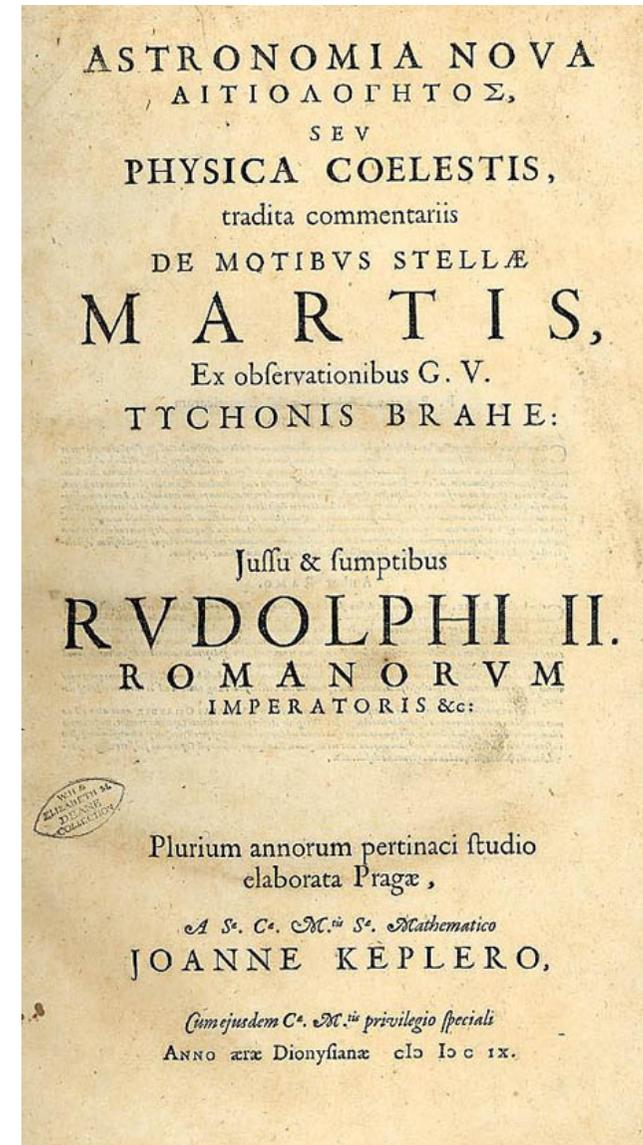
- Tras años de intentos fallidos, encontró un modelo que se ajustaba perfectamente a los datos y formuló sus famosas tres leyes.



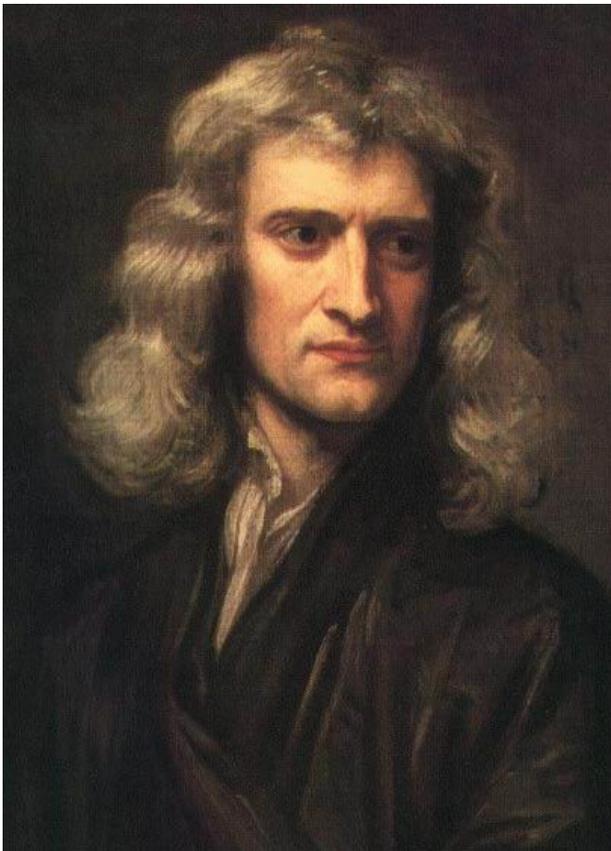
Las Tres Leyes de Kepler

Leyes del Movimiento Planetario

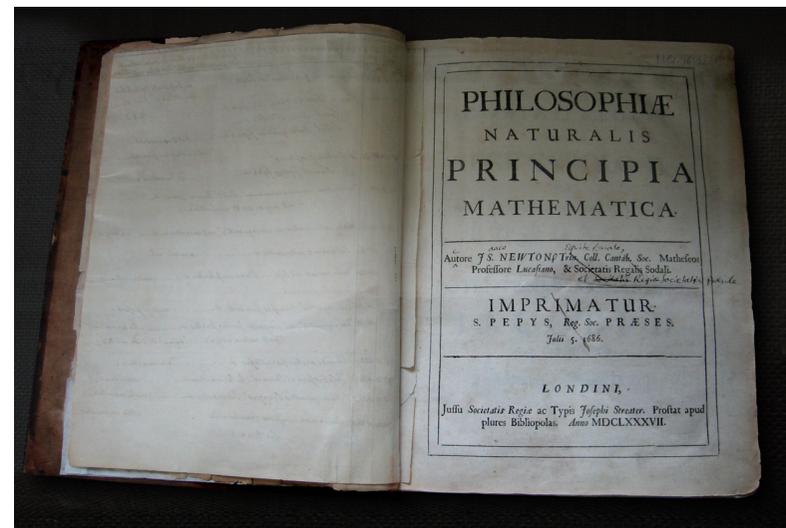
- 1 La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos.
- 2 Una línea que una el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (Ley de Áreas).
- 3 El cuadrado del periodo orbital de cada planeta es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse de la órbita del planeta.



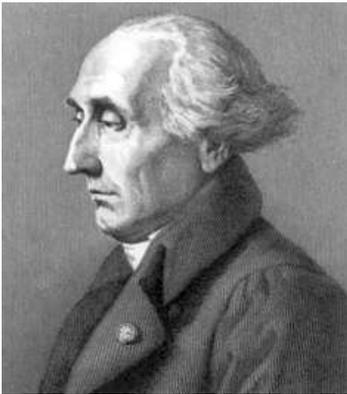
Newton (s. XVII)



- Publica los “Principia” donde **demuestra** las Leyes de Kepler.
- La demostración se basa en principios físicos básicos (introducidos por él mismo) y en el cálculo infinitesimal (también inventado por él).



Otros científicos que trabajaron en Mecánica Orbital



Lagrange

- Francia, s.XVII
- Estabilidad; puntos de Lagrange.
- Movimiento lunar.
- Teoría de perturbaciones.



Laplace

- Francia, s.XVII
- Teoría del potencial, armónicos esféricos.
- Formulación moderna de la mecánica celeste.



Gauss

- Alemania, s.XVIII
- Determinación de órbitas (Ceres).
- Mínimos cuadrados.
- Teoría de perturbaciones.



Poincaré

- Francia, s.XIX
- Formulación moderna del problema de los tres cuerpos.
- Órbitas no triviales, caos.



Einstein (s. XX)

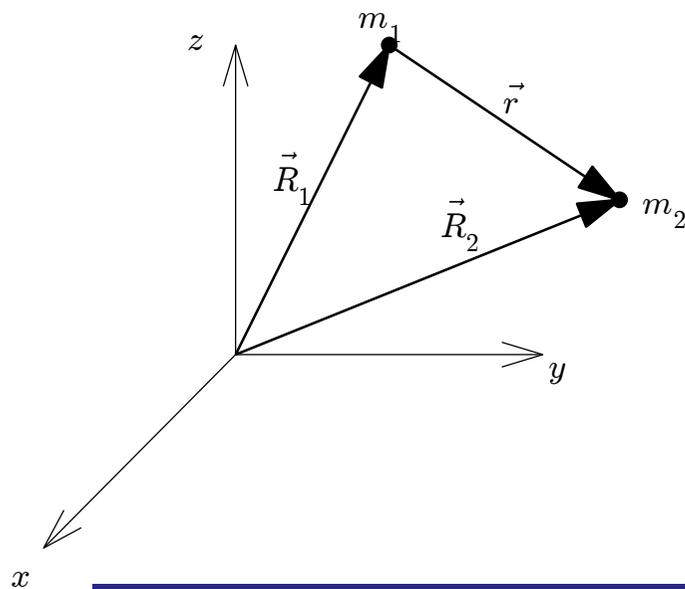


- Demostró que todos los anteriores estaban equivocados!
- No obstante la Teoría de la Relatividad no juega un papel importante en la astronáutica, excepto en aplicaciones muy específicas (p.ej. en la red de satélites GPS, por precisión).



Hipótesis generales

Problema: Estudiar el movimiento de dos cuerpos masivos en el espacio, sometidos a la fuerza de la gravedad.



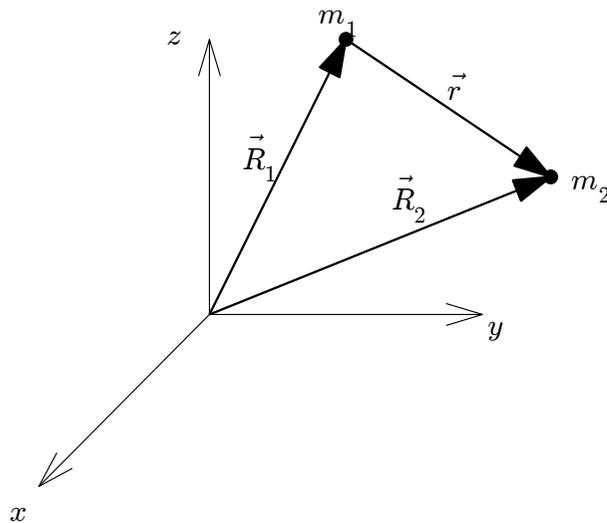
- Se considera el sistema aislado del resto del Universo (no hay más fuerza que la atracción gravitatoria mutua entre los dos cuerpos).
- Las masas se pueden considerar puntuales y localizadas en el centro de masas de cada cuerpo. Las denominamos m_1 y m_2 .

Teorema (Newton)

Un cuerpo rígido con forma esférica y densidad constante genera el mismo campo gravitatorio que una partícula, situado en el centro de dicha esfera, con la misma masa del cuerpo.



Ecuación del movimiento I



- La fuerza en cada partícula es la atracción gravitatoria ejercida por la otra partícula:

$$\vec{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$
$$\vec{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

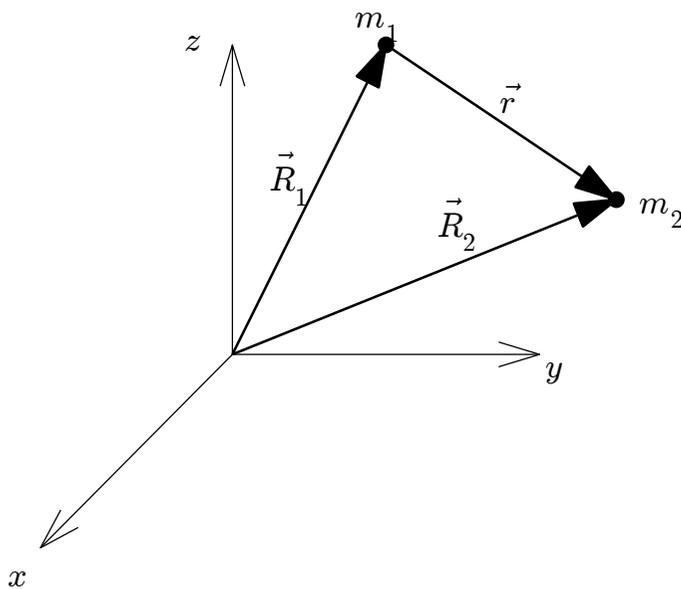
donde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ y
 $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$.

- Por tanto, la ecuación del movimiento de cada partícula es, respecto al sistema de referencia inercial:

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = \vec{F}_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{R}}_1 = \frac{Gm_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$
$$m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = \vec{F}_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{R}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



Ecuación del movimiento II



- Consideremos la ecuación que verifica el centro de masas (CM) cuya posición viene definida por $\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{m_1 + m_2}$.

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_{CM} &= \frac{m_1 \ddot{\vec{R}}_1 + m_2 \ddot{\vec{R}}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1 \frac{Gm_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - m_2 \frac{Gm_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}}{m_1 + m_2} = \vec{0}.\end{aligned}$$

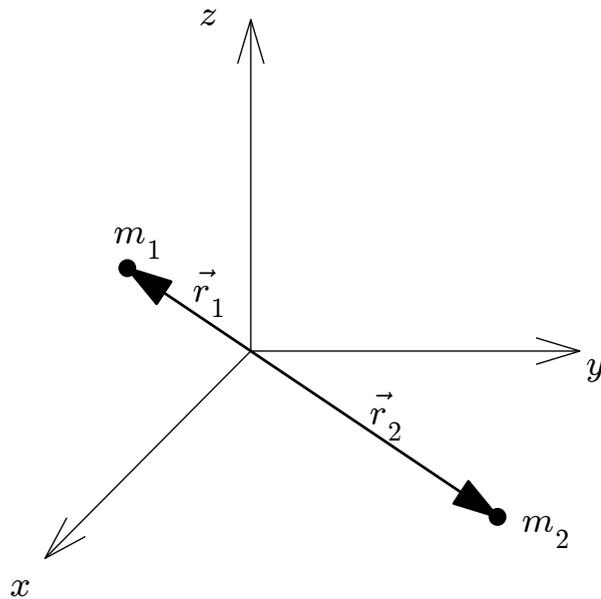
- Por tanto, integrando, la posición del CM viene dada por:

$$\vec{R}_{CM}(t) = \vec{V}_{CM}(0)t + \vec{R}_{CM}(0)$$

es decir, un movimiento rectilíneo y uniforme.



Ecuación del movimiento III



- Si desplazamos el origen del sistema de referencia al CM, el nuevo sistema de referencia sigue siendo inercial. En el nuevo sistema, la posición de los cuerpos viene definida por los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 :

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R}_{CM} = \left(\vec{R}_1 - \vec{R}_2 \right) \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_{CM} = \left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1 \right) \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

- Por tanto, conocido \vec{r} se obtienen \vec{r}_1 y \vec{r}_2 :

$$\vec{r}_1 = -\vec{r} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r} \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

- Obsérvese que si $m_1 \gg m_2$, entonces $\vec{r}_1 \approx \vec{0}$ ($\vec{R}_1 \approx \vec{R}_{CM}$) y $\vec{r}_2 \approx \vec{r}$. Es decir el movimiento se puede aproximar por el “problema de un cuerpo”, alrededor del cuerpo masivo.



Ecuación del movimiento IV

- De la definición de \vec{r} :

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1 = -\frac{Gm_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - \frac{Gm_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ &= -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}$$

- $\mu = G(m_1 + m_2)$ es el **Parámetro Gravitacional de las Masas Combinadas**. Si $m_1 \gg m_2$, entonces $\mu \approx \mu_1 = Gm_1$.
- Por ejemplo, dado que $m_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg, $m_{\oplus} = 6 \times 10^{24}$ kg, y $m_{\zeta} = 7,3 \times 10^{22}$ kg, se tiene que en el estudio del movimiento de la Tierra respecto al Sol:

$$\mu \approx \mu_{\odot} = 132712439935,5 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

En el estudio del movimiento de la Luna en torno a la Tierra:

$$\mu \approx \mu_{\oplus} = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$$



Conservación de la energía

- Por tanto la ecuación del movimiento es $\ddot{\vec{r}} = -\mu\vec{r}/r^3$.
- Definimos $r = |\vec{r}|$ y $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Obsérvese que $v = |\vec{v}| \neq \dot{r}$.
- Tomando producto escalar de la ecuación del movimiento con $\dot{\vec{r}}$, se tiene que

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3}$$

- Se tiene que $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{r} \cdot \vec{v} = r\dot{r}$ ¿Por qué? Por tanto, $\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\mu\dot{r}/r^2$.
- Puesto que $d/dt(v^2) = d/dt(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\mu\frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{cte.} = \epsilon$$

donde ϵ = energía específica.



Conservación del momento cinético

- Tomando producto vectorial de \vec{r} con la ecuación del movimiento:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} = \vec{0}$$

- Puesto que $d/dt(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v} = \overrightarrow{\text{cte.}} = \vec{h}$$

donde \vec{h} =momento cinético específico.

- $h = |\vec{h}|$ se denomina constante de las áreas.
- Se tiene que $\vec{r} \cdot \vec{h} = 0$ y $\vec{v} \cdot \vec{h} = 0$, con \vec{h} constante; por tanto el movimiento es plano, es decir, está confinado a un plano perpendicular a \vec{h} .



Descripción del movimiento I

- Tomando producto vectorial de la ecuación del movimiento con \vec{h} :

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\mu \frac{\vec{r} \times \vec{h}}{r^3}$$

- Puesto que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, obtenemos que

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\mu \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v})}{r^3} = -\mu \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{v}}{r^3} = -\mu \frac{r\dot{r}\vec{r} - r^2\vec{v}}{r^3}$$

- Además $d/dt(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{h}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h}$. Por tanto

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{h}) = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = -\mu \frac{r\dot{r}\vec{r} - r^2\vec{v}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu\vec{r}}{r} \right)$$

- Por tanto, integrando:

$$\vec{v} \times \vec{h} - \frac{\mu\vec{r}}{r} = \vec{cte.} = \mu\vec{e}$$

donde \vec{e} =vector de Laplace o vector excentricidad.



Descripción del movimiento II

- Finalmente, tomando producto escalar de la última ecuación con \vec{r} :

$$\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} - \frac{\mu \vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = \mu \vec{e} \cdot \vec{r}$$

- Obsérvese que $\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2$.
- Definimos $|\vec{e}| = e$ (excentricidad) y θ (llamada la anomalía verdadera) como el ángulo que forma \vec{r} con \vec{e} . Por tanto $\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos \theta$, y llegamos a

$$h^2 - \mu r = \mu r e \cos \theta$$

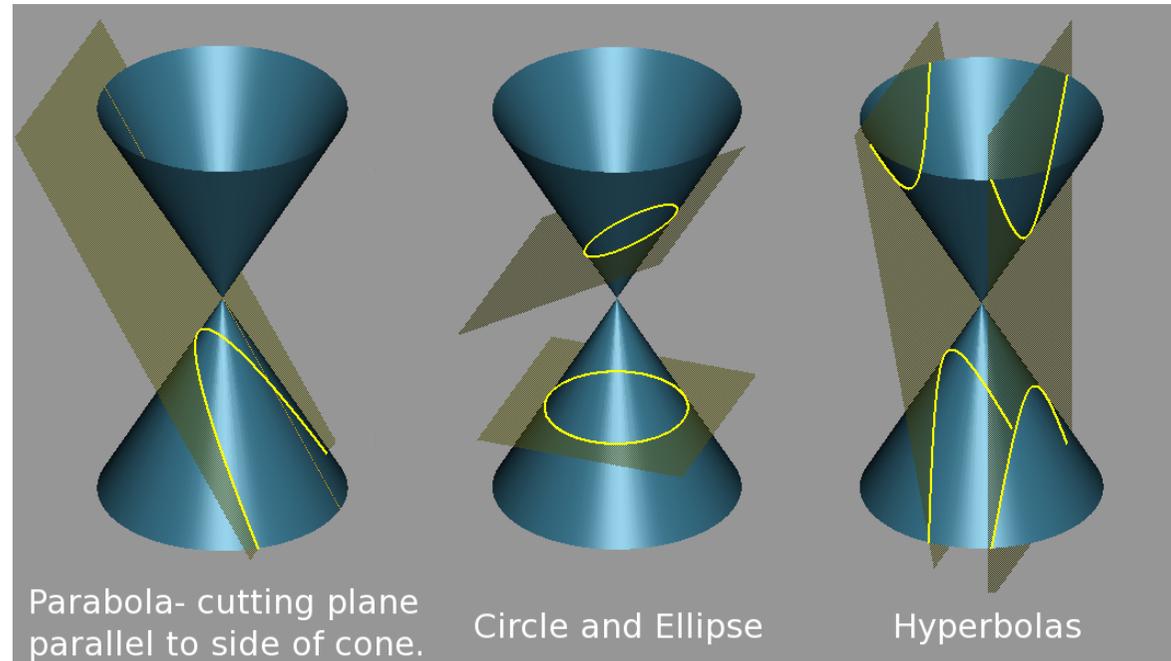
- Despejando r :

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

donde p es el llamado “parámetro”. Esta es la ecuación de una **cónica**.



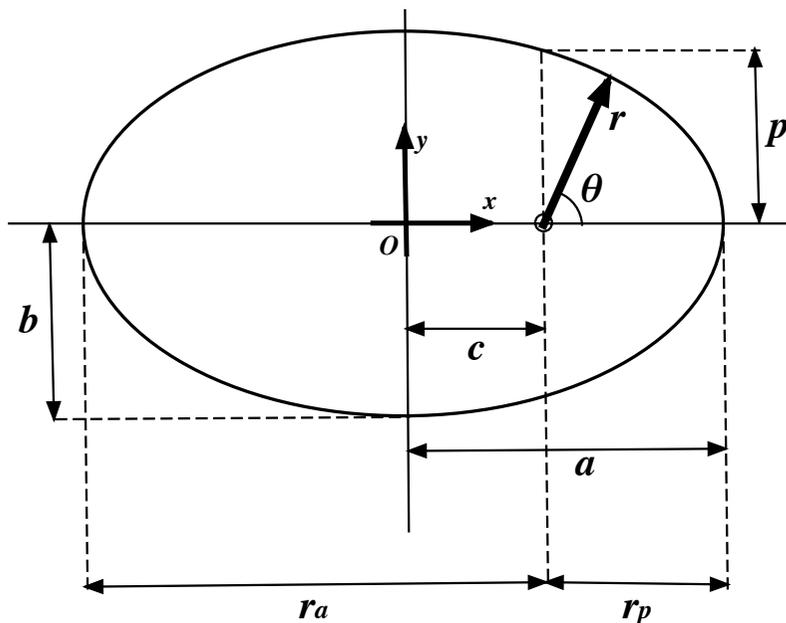
Cónicas



- La ecuación $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ corresponde a la ecuación de una cónica (elipse, parábola o hipérbola) en coordenadas polares.
- Las secciones cónicas las describió Apolonio en el s. II AC en su tratado “*Cónicas*”, el cual Kepler conocía. Se obtienen como las intersecciones de un cono circular recto con un plano oblicuo a su eje.



Elipse I



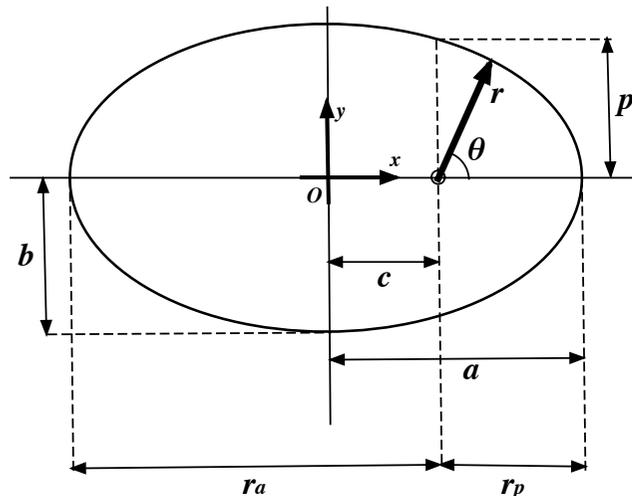
- Ecuación en cartesianas (con origen en el centro de la elipse): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor.
- Ecuación en polares (con origen en uno de los focos): $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, donde $p > 0$ es el “semilatus-rectum” y $e \in [0, 1)$.

- Se define el punto de periapsis (simplemente, periapsis/periápside) como el de mínima distancia al foco; en tal caso, $\theta = 0$ y $r_p = \frac{p}{1+e}$ es el radio de periapsis.
- Se define el punto de apoapsis (simplemente, apoapsis/apoápside) como el de máxima distancia al foco; en tal caso, $\theta = \pi$ y $r_p = \frac{p}{1-e}$ es el radio de apoapsis



Elipse II

Los parámetros de la elipse se expresan en función de a y e .



- De la figura, $r_p = a - c$ y $r_a = a + c$.
- Por tanto, $r_p + r_a = 2a$, y de la definición en polares, $r_p + r_a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$, luego:

$$p = a(1 - e^2).$$

- Por tanto, $r_p = a(1 - e)$ y $r_a = a(1 + e)$.

- Puesto que $r_a - r_p = 2c$ y de la definición en polares $r_p - r_c = \frac{p}{1+e} - \frac{p}{1-e} = \frac{2pe}{1-e^2}$, luego $c = p \frac{e}{1-e^2}$ y usando la definición de p en función de e y a : $c = ae$.

- Finalmente, puesto que se tiene $a^2 = b^2 + c^2$, obtenemos que

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

- Para $e = 0$, se obtiene una circunferencia de radio $R = p = a = b$, con $c = 0$.



Elipse III

Nombres que reciben periapsis y apoapsis según a qué cuerpo celeste se refieren:

Cuerpo	Máxima aproximación(periapsis)	Máximo alejamiento(apoapsis)
Galaxia	Perigalácticon	Apogalácticon
Estrella	Periastro	Apoastro
Agujero negro	Perimelasma/Perinigricon	Apomelasma/Aponigricon
Sol	Perihelio	Afelio
Mercurio	Perihermo	Afhermo
Venus	Pericitera	Apocitera
Tierra	Perigeo	Apogeo
Luna	Periselenio/Pericintio/Perilunio	Aposelenio/Apocintio/Apolunio
Marte	Periareion	Apoarerion
Júpiter	Perijovio	Apojovio
Saturno	Pericrono/Perisaturnio	Apokrono/Aposaturnio
Urano	Periurano	Apouranio
Neptuno	Periposeidinion	Apoposeidinion
Plutón	Perihadio	Apohadio

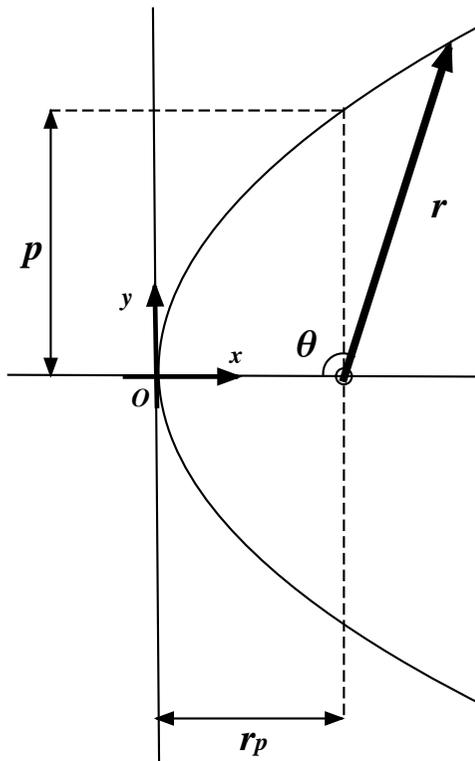
Fuentes:

<http://www.astronoo.com/es/articulos/caracteristicas-de-los-planetas.html>

<https://es.wikipedia.org/wiki/Apside>



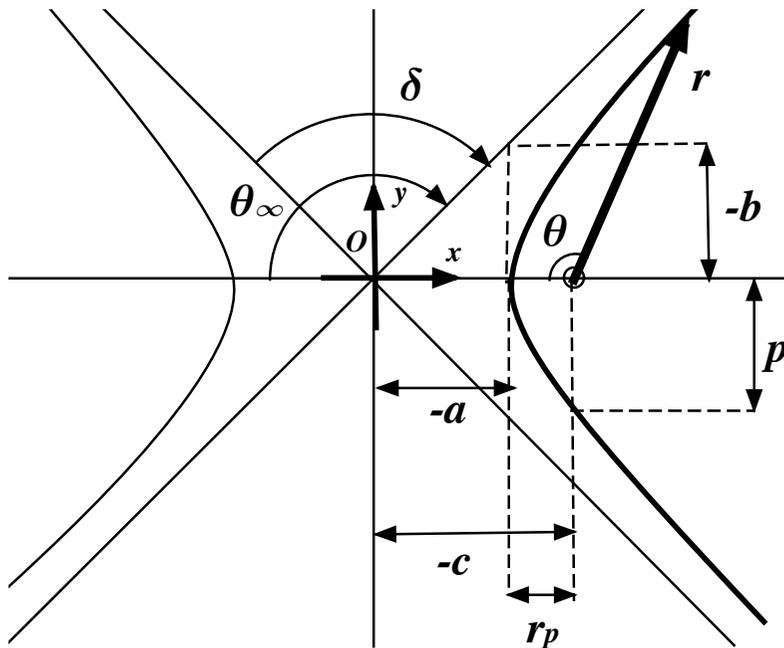
Parábola



- Ecuación en cartesianas (con origen en un extremo de la parábola): $y^2 = \alpha x$.
- Ecuación en polares (con origen en el foco): $r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$, donde $p > 0$ es el “semilatus-rectum”.
- En el caso de la parábola, $r_p = p/2$ y $\alpha = 2p$
- Obsérvese que $a = r_a = \infty$ (la trayectoria no es cerrada), y $e = 1$.
- Nota: Para $p = 0$ y $e = 1$ se tiene una trayectoria rectilínea (un caso degenerado que nunca aparece en la práctica).



Hipérbola I



- Ecuación en cartesianas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor, que por definición **son negativos**.
- Ecuación en polares (con origen en uno de los focos): $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, donde $p > 0$ es el “semilatus-rectum” y $e > 1$.

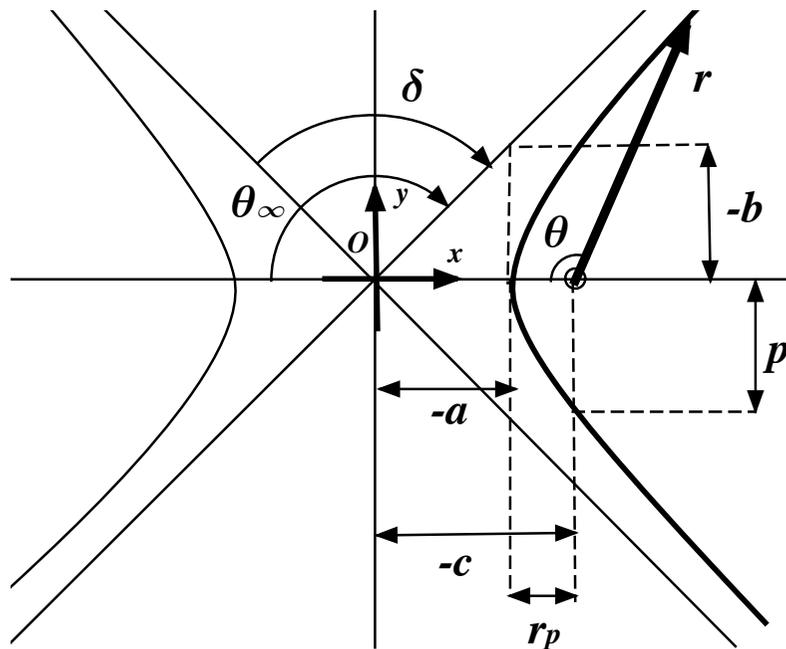
- Se verifican relaciones similares a la elipse: $p = a(1 - e^2)$,

$$r_p = a(1 - e), \quad c = ae, \quad b = a\sqrt{e^2 - 1}.$$

- Sin embargo $r_a = \infty$, ya que la trayectoria no es cerrada.



Hipérbola II



- El ángulo θ_∞ que forma la asíntota con el eje x se obtiene buscando el valor de θ que hace que $r \rightarrow \infty$. Este valor es $\theta_\infty = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{e} \right)$.
- Por otro lado, el ángulo entre las asíntotas $\delta = 2\theta_\infty - \pi$, por tanto $\delta = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{e} \right)$.
- Estos ángulos son importantes en las maniobras asistidas por gravedad.
- Obsérvese que la hipérbola tiene dos ramas; sólo la rama que “rodea” al foco donde se ubica el cuerpo central es una solución válida de la ecuación. La otra rama representa soluciones para fuerzas repulsivas (p.ej. las fuerzas electromagnéticas que se dan en un acelerador de partículas)



Demostración de las Leyes de Kepler I

Primera ley de Kepler: “La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos” .

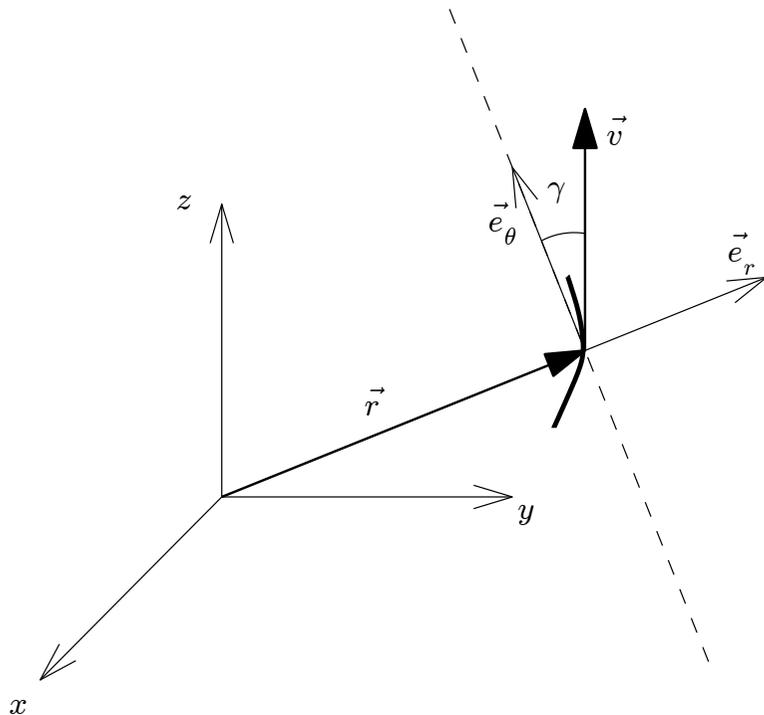
Demostración

- Puesto que el Sol es mucho más masivo que los planetas, se puede considerar el centro de masas del sistema Sol-planeta centrado en el Sol y éste inmóvil.
- Por tanto el movimiento del planeta es una cónica con el Sol en uno de sus focos.
- Observacionalmente, sabemos que las órbitas de los planetas son cerradas. Por tanto, ya que la única cónica cerrada es la elipse, las órbitas deben ser elipses.



Demostración de las Leyes de Kepler II

Segunda ley de Kepler: “Una línea que una el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales”. Es decir, la velocidad con la que el vector \vec{r} barre áreas (**velocidad areolar**) es constante.



- Para la demostración, definimos un nuevo sistema de referencia **local** en el plano orbital, con origen cada punto de la trayectoria $\vec{r}(t)$, de forma que el eje \vec{e}_r es paralelo a \vec{r} y el otro eje, \vec{e}_θ , define la horizontal local, y está orientado “a la izquierda” (en la dirección contraria a las agujas de un reloj) respecto a \vec{e}_r .
- El ángulo entre \vec{v} y \vec{e}_θ es γ , el ángulo de trayectoria (flight path angle).
- Por tanto $\vec{r} = r\vec{e}_r$ y
$$\vec{v} = v \sin \gamma \vec{e}_r + v \cos \gamma \vec{e}_\theta.$$



Demostración de las Leyes de Kepler III

Segunda ley de Kepler: “La velocidad areolar es constante”.

Demostración

- Calculemos $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ usando los ejes locales.
$$\vec{h} = vr \sin \gamma (\vec{e}_r \times \vec{e}_r) + vr \cos \gamma (\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) = vr \cos \gamma \vec{e}_z.$$
- Por otro lado, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, luego repitiendo el cálculo obtenemos $\vec{h} = r^2\dot{\theta}\vec{e}_z$.
- Por tanto $h = r^2\dot{\theta} = vr \cos \gamma = \text{cte.}$
- El área se define como
$$A(t) = \int_0^{\theta(t)} \int_0^{r(\psi)} \rho d\rho d\psi = \int_0^{\theta(t)} \frac{r(\psi)^2}{2} d\psi.$$
- Por tanto, $\frac{d}{dt}A(t) = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2} = \text{cte.}$

La Segunda Ley de Kepler se cumple para todas las cónicas!



Demostración de las Leyes de Kepler IV

Tercera ley de Kepler: “El cuadrado del periodo orbital de cada planeta es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse de la órbita del planeta”.

Demostración

- Puesto que conocemos \dot{A} , el periodo será:

$$T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h}.$$

- En las definiciones de la elipse, tenemos que $b = a\sqrt{1 - e^2}$.
Por otro lado, definimos $p = \frac{h^2}{\mu}$, luego $h = \sqrt{p\mu}$ y de la definición de p , $h = \sqrt{a(1 - e^2)\mu}$.

- Por tanto $T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a(1 - e^2)\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$

- Finalmente llegamos a $T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$.



Ecuación de las “fuerzas vivas”

- El término fuerza viva es una forma arcaica de denominar a la energía cinética.

- Obtuvimos la ecuación de la energía $\epsilon = v^2/2 - \mu/r = \text{cte}$.
En periapsis: $\epsilon = v_p^2/2 - \mu/r_p$. Sabemos que $r_p = a(1 - e)$.
Por otro lado, puesto que en periapsis $\gamma_p = 0$ o π , se tiene
que $h = r_p v_p$ y por tanto $v_p = \frac{h}{r_p} = \frac{\sqrt{a(1-e^2)\mu}}{a(1-e)}$.

- Se tiene pues que

$$\epsilon = \frac{a(1-e^2)\mu}{2a^2(1-e)^2} - \frac{\mu}{a(1-e)} = \frac{(1+e)\mu}{2a(1-e)} - \frac{\mu}{a(1-e)} = \frac{\mu}{a} \frac{1+e-2}{2(1-e)}, \text{ y}$$

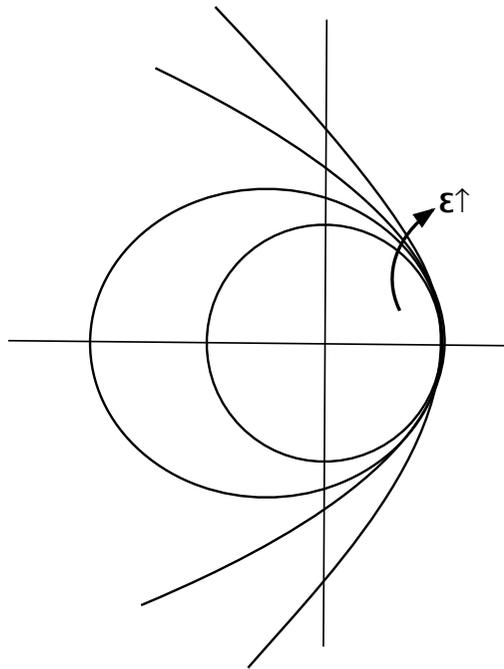
operando llegamos a $\epsilon = -\frac{\mu}{2a}$.

- Sustituyendo en la ecuación de la energía: $v^2/2 - \mu/r = -\frac{\mu}{2a}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}.$$



Clasificación de Órbitas



- Para un valor fijo de p (es decir, de h), las órbitas se pueden clasificar de menos a más energía específica:

- 1 Órbitas circulares: $e = 0$, $R = p$,
 $\epsilon_C = -\frac{\mu}{2R} < 0$.

- 2 Órbitas elípticas no circulares: $0 < e < 1$,
 $a = \frac{p}{1-e^2}$, $\epsilon_E = -\frac{\mu}{2a} < 0$. Se tiene que
 $\epsilon_E > \epsilon_C$.

- 3 Órbitas parabólicas: $e = 1$, $\epsilon_P = 0$.

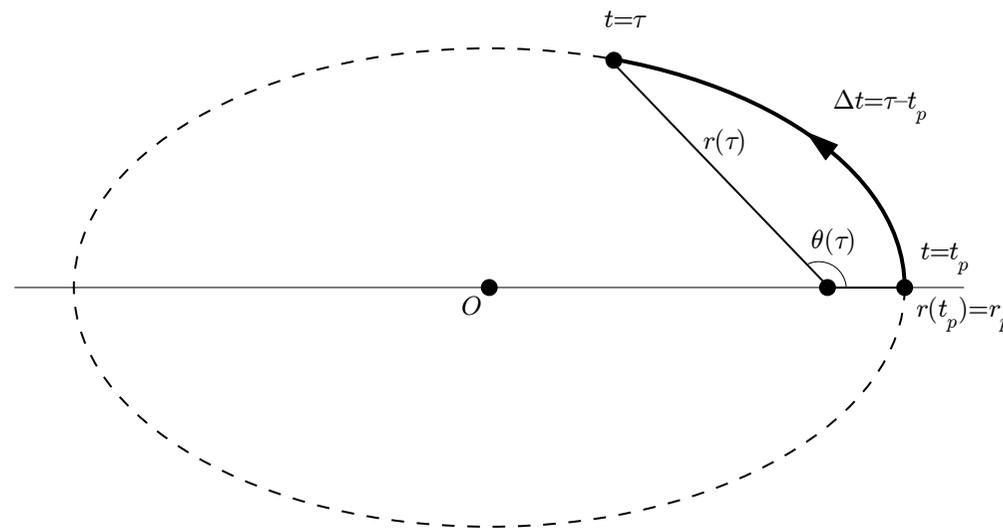
- 4 Órbitas hiperbólicas: $e > 1$, $a = \frac{p}{1-e^2}$,
 $\epsilon_H = -\frac{\mu}{2a} > 0$.

- En órbitas circulares la velocidad es $v_c(R) = \sqrt{\mu/R} = \text{cte}$.
- En órbitas parabólicas se tiene que $v_p = \sqrt{2\mu/r} = \sqrt{2}v_c(r)$; ésta es la conocida como velocidad de “escape”.
- Para hipérbolas se define la velocidad de “exceso” como
 $v_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} v = \sqrt{-\mu/a}$. En el caso parabólico $v_\infty = 0$.

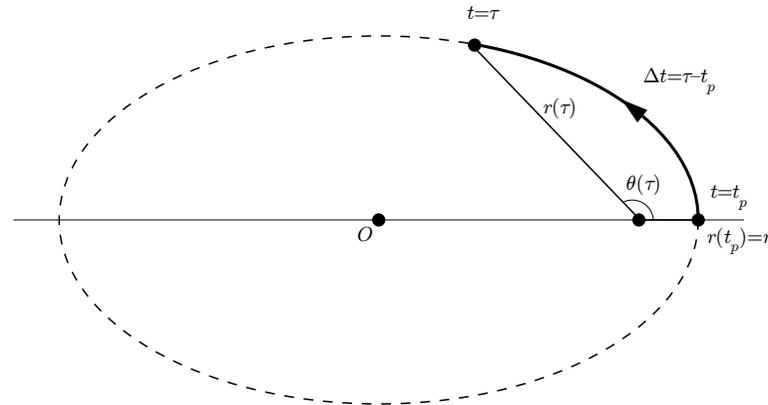


Leyes Horarias I

- Hemos demostrado las Leyes de Kepler y en concreto que las trayectorias orbitales son cónicas.
- No obstante, al resolver de la ecuación del movimiento se ha eliminado la dependencia del tiempo. Es necesario un método para localizar a un cuerpo en su órbita en un instante dado.
- Éste problema es trivial sólo en el caso circular.
- Fijamos como punto de referencia el punto de periapsis. Denominamos t_p al tiempo de paso por periapsis.



Leyes Horarias II



Sea $\Delta t = \tau - t_p$ el tiempo desde el último paso por periapsis.

Leyes Horarias: Problemas

- **Problema 1:** Dada una órbita (a, e) [o (p, e)] y una anomalía verdadera θ en el instante τ , encontrar $\Delta t(\theta)$.
- **Problema 2:** Dada una órbita (a, e) [o (p, e)] y Δt , encontrar $\theta(\Delta t)$ (es decir, localizar el cuerpo en el instante τ).

Nota: Si la órbita se recorre en sentido opuesto, sólo cambia el signo de θ ; por tanto consideramos el sentido de la figura.



Leyes Horarias: Caso Parabólico I

El caso parabólico es el único que se puede resolver analíticamente.

- Partimos de la identidad derivada en la demostración de la segunda ley de Kepler: $h = r^2 \dot{\theta}$.
- Usando la definición de $h = \sqrt{\mu p}$ y la ecuación de la cónica $r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$ llegamos a $\sqrt{\mu p} = \frac{p^2 \dot{\theta}}{(1 + \cos \theta)^2}$.
- Obsérvese que $1 + \cos \theta = 1 + \cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2 = 2 \cos^2 \theta/2$.
- Por otro lado, $\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1$. Por tanto $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$.
- Combinando las dos identidades anteriores, $1 + \cos \theta = \frac{2}{1 + \tan^2 \theta/2}$. Sustituyendo esta identidad en la ecuación del segundo punto, se obtiene $\sqrt{\mu p} = \frac{p^2 (1 + \tan^2 \theta/2)^2 \dot{\theta}}{4}$. Ésta es una ecuación diferencial que se puede integrar.



Leyes Horarias: Caso Parabólico II

- Separando variables, llegamos a $4\sqrt{\mu p} dt = p^2(1 + \tan^2 \theta/2)^2 d\theta$.
- Por tanto, integrando desde el paso por el perigeo, se obtiene: $4\sqrt{\mu p}(\tau - t_p) = \int_0^\theta p^2(1 + \tan^2 \psi/2)^2 d\psi$.
- Recuérdese la identidad $\frac{d}{d\theta} \tan \theta/2 = \frac{1 + \tan^2 \theta/2}{2}$. Por tanto, realizando el cambio de variable $x = \tan \psi/2$, obtenemos que $\int_0^\theta p^2(1 + \tan^2 \psi/2)^2 d\psi = \int_0^{\tan \theta/2} p^2(1 + x^2)2dx = 2p^2x + \frac{2}{3}p^2x^3 \Big|_0^{\tan \theta/2} = 2p^2(\tan \theta/2 + \frac{\tan^3 \theta/2}{3})$.
- Sustituyendo el resultado de la integral, obtenemos que $2\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(\tau - t_p) = \tan \theta/2 + \frac{\tan^3 \theta/2}{3}$.
- Definamos $B = 3\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(\tau - t_p)$. La ecuación que hay que resolver es entonces $2B = 3 \tan \theta/2 + \tan^3 \theta/2$, conocida como la “Ecuación de Barker”.



Leyes Horarias: Caso Parabólico III

Resolución de $2B = 3 \tan \theta/2 + \tan^3 \theta/2$.

- Dado θ es fácil obtener B (es decir, $\tau - t_p$). Sin embargo, dado B , es complicado obtener θ ; hay que resolver una cúbica.
- Para resolver el problema introducimos la variable z , definida de modo que $\tan \theta/2 = z - 1/z$. Por tanto,
 $2B = 3(z - 1/z) + (z - 1/z)^3$. Operando, se llega a
 $2B = z^3 - 1/z^3$, es decir, $z^6 - 2Bz^3 - 1 = 0$. Resolviendo:
 $z^3 = B \pm \sqrt{B^2 + 1}$, de donde (tomando la solución positiva)
 $z = \sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 + 1}}$.
- Por tanto, la solución final de la ecuación de Barker es

$$\theta = 2 \arctan \left(\sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 + 1}}} \right)$$



Leyes Horarias: Caso Elíptico I

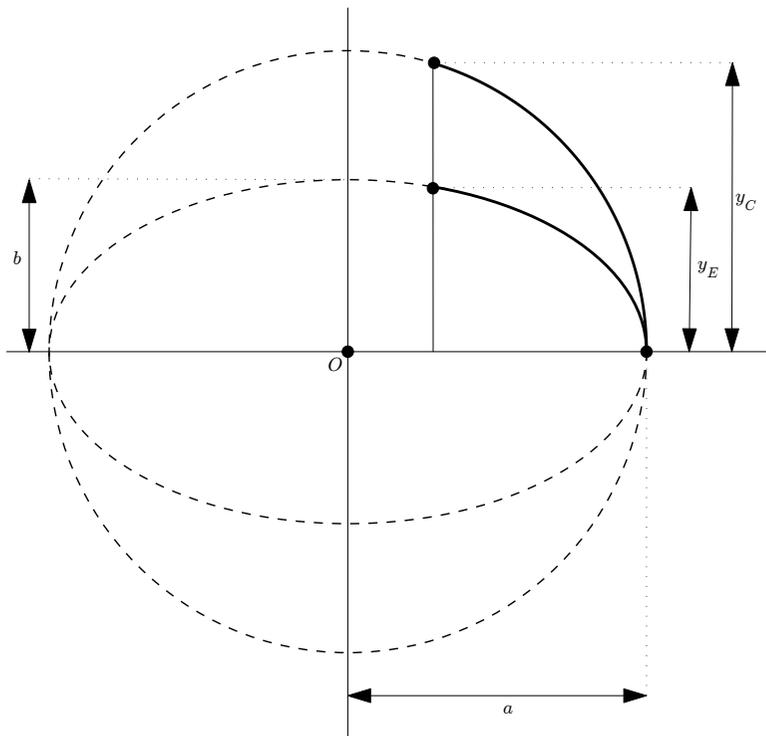
En el caso elíptico (órbitas cerradas), el problema es más complejo. Introducimos algunos conceptos nuevos:

- **Velocidad orbital media:** $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. Ésta velocidad coincide con la velocidad angular real en el caso de órbitas circulares. Obsérvese que $T = 2\pi/n$.
- Observación: Por simetría, el tiempo que tarda un cuerpo en pasar por el punto de apoapsis es igual al semiperiodo de la órbita. Es decir, $|t_a - t_p| = \frac{T}{2} = \pi/n$. Igualmente, para $\theta > \pi$, se tiene que $\Delta t(\theta) = T - \Delta t(2\pi - \theta)$.
- **Anomalía media:** $M = n\Delta t$, es decir, el ángulo que se recorrería en la órbita en un tiempo Δt si la órbita fuera circular. Por la observación anterior, $M = \theta$ solamente en periapsis y apoapsis.

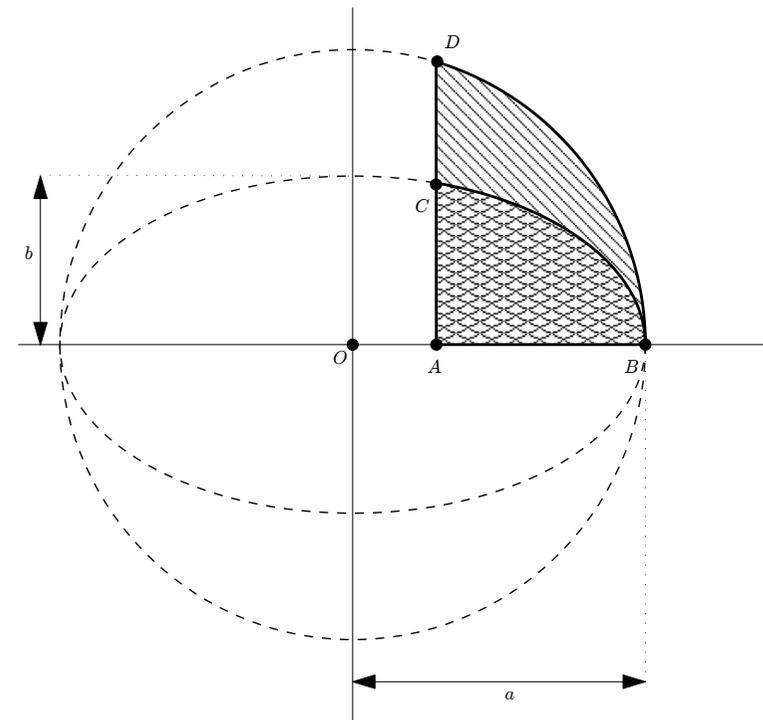


Leyes Horarias: Caso Elíptico II

Considérese un círculo auxiliar de radio a tangente a la elipse en los punto de periapsis y apoapsis. Se tienen las siguientes propiedades:



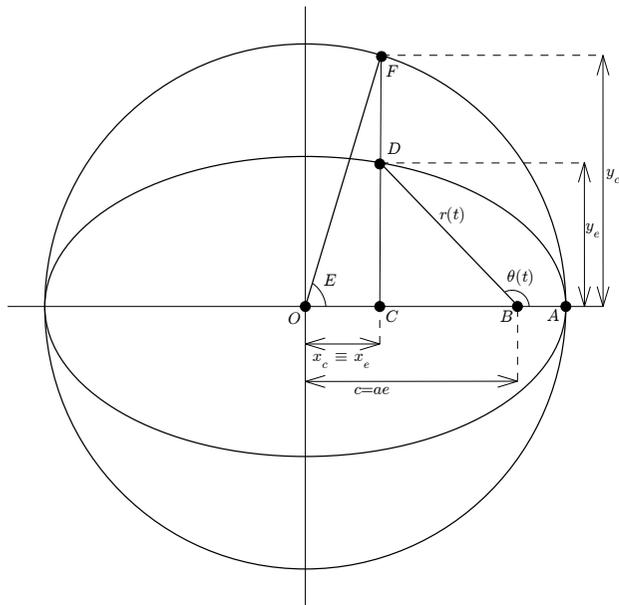
$$\frac{y_C}{y_E} = \frac{a}{b}$$



$$\frac{\text{Area } \{ABD\}}{\text{Area } \{ABC\}} = \frac{a}{b}$$



Leyes Horarias: Caso Elíptico III

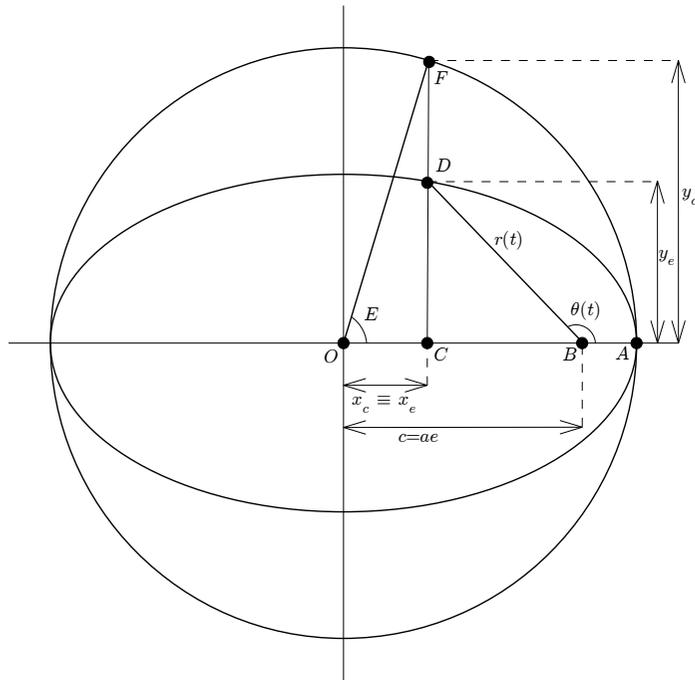


- Para un ángulo θ dado, se define la **anomalía excéntrica E** como en la figura.
- Para encontrar la relación entre E y θ , obsérvese que $y_e = r \operatorname{sen} \theta$ y $y_c = a \operatorname{sen} E$; por otro lado como $y_c/y_e = a/b$, se tiene que $a\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E = r \operatorname{sen} \theta$.
- Además, $x_c = a \cos E$ y $x_e = c + r \cos \theta$. Como $x_e = x_c$, $a \cos E - ae = r \cos \theta$.
- Sumando las dos relaciones al cuadrado:

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = a^2(1 - e^2) \operatorname{sen}^2 E + a^2(\cos E - e)^2.$$
 Luego $r^2 = a^2(\operatorname{sen}^2 E + e^2(1 - \operatorname{sen}^2 E) + \cos^2 E - 2e \cos E)$,
 de donde $r^2 = a^2(1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E) = a^2(1 - e \cos E)^2$,
 por lo que $r = a(1 - e \cos E)$.



Leyes Horarias: Caso Elíptico IV



- Por tanto obtenemos, sustituyendo r en las anteriores relaciones, $\sin \theta = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E}$, y $\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}$.

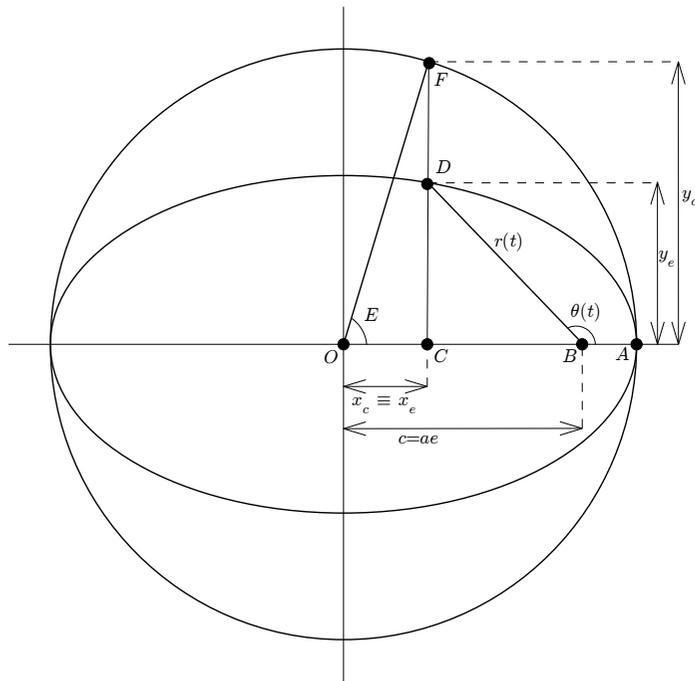
- Recordemos que $\tan \theta/2 = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}$. Sustituyendo las anteriores expresiones, $\tan \theta/2 = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E + \cos E - e} = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{(1-e)(1+\cos E)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e} \frac{\sin E}{1+\cos E}$. Por tanto,

$$\tan \theta/2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan E/2.$$

- Puesto que ya hemos obtenido E en función de θ , ahora debemos escribir Δt en función de E . Realizamos la deducción de dos formas: una geométrica y otra analítica.



Leyes Horarias: Caso Elíptico IV



- De la segunda Ley de Kepler,

$$\Delta t = \frac{\text{Area}\{BAD\}}{\dot{A}}, \text{ donde}$$

$$\dot{A} = h/2 = \sqrt{p\mu}/2 = \sqrt{a(1 - e^2)}\mu/2.$$

- De la figura,

$$\text{Area}\{BAD\} = \text{Area}\{CAD\} - \text{Area}\{CBD\}$$

y tenemos que

$$\text{Area}\{CAD\} = \frac{b}{a} \text{Area}\{CAF\},$$

$$\text{Area}\{CBD\} = \frac{(c-x_e)y_e}{2} = \frac{(c-x_c)(b/a)y_c}{2} = \frac{a^2(e-\cos E)(b/a)\sin E}{2}.$$

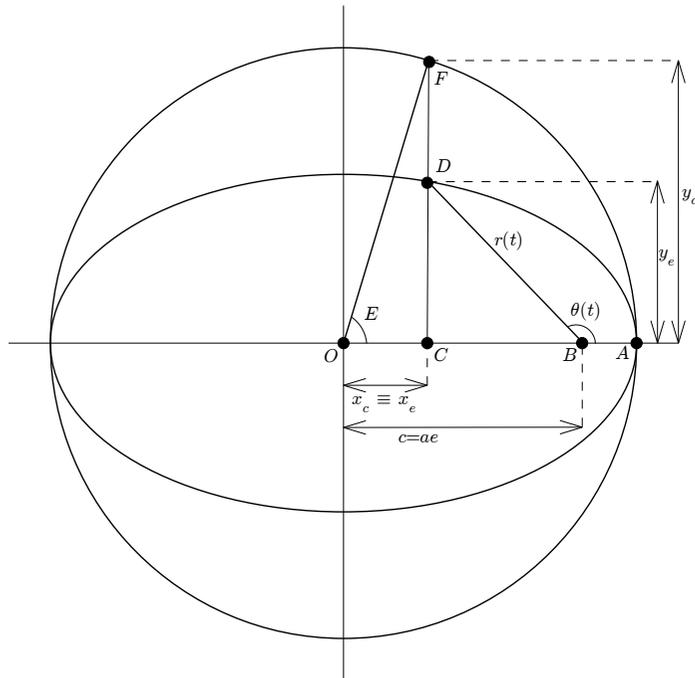
- Por otro lado $\text{Area}\{CAF\} = \text{Area}\{OAF\} - \text{Area}\{OCF\}$.

- De la figura $\text{Area}\{OAF\} = \frac{a^2 E}{2}$, mientras que

$$\text{Area}\{OCF\} = \frac{x_e y_e}{2} = \frac{a^2 \cos E \sin E}{2}$$



Leyes Horarias: Caso Elíptico V



■ Por tanto, sustituyendo las anteriores relaciones, se obtiene que $\text{Area}\{BAD\} = \frac{b}{a} \left(\frac{a^2 E}{2} - \frac{a^2 \cos E \sin E}{2} \right) - \frac{ab(e - \cos E) \sin E}{2}$

■ Luego $\text{Area}\{BAD\} = \frac{ab(E - e \sin E)}{2} = \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2} (E - e \sin E)}{2}$.

■ Por tanto, $\Delta t = \frac{\text{Area}\{BAD\}}{\dot{A}} = \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2} (E - e \sin E)}{\sqrt{a(1 - e^2)\mu}} = \frac{E - e \sin E}{\sqrt{\mu/a^3}} = \frac{E - e \sin E}{n}$.

■ Así pues, usando la definición de anomalía media $M = n\Delta t$, llegamos a $M = E - e \sin E$, la llamada ecuación de Kepler.



Leyes Horarias: Caso Elíptico VI

Deducción analítica de la ecuación de Kepler.

- Como antes, partimos de la expresión $\Delta t = \frac{\text{Area}\{BAD\}}{\dot{A}}$.
- En la demostración de la segunda ley de Kepler vimos que $\text{Area}\{BAD\} = \int_0^\theta \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta$.
- Realizamos el cambio de variable $\theta \rightarrow E$. De la ecuación $\sin \theta = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E}$, obtenemos $\cos \theta d\theta = \sqrt{1-e^2} \frac{\cos E - e}{(1-e \cos E)^2} dE$. Puesto que $\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}$, llegamos a que $d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E)} dE$
- Por tanto $\text{Area}\{BAD\} = \int_0^E \frac{r^2(E)}{2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E)} dE$ y sustituyendo la expresión $r(E) = a(1 - e \cos E)$ llegamos a $\text{Area}\{BAD\} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} \int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{2} (E - e \sin E)$.



La ecuación de Kepler I

La ecuación de Kepler nos permite resolver los problemas de leyes horarias que habíamos planteado antes.

Problema 1: Dado θ , encontrar Δt .

- El procedimiento que seguimos es $\theta \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow \Delta t$.
- En primer lugar usamos la relación $\tan \theta/2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan E/2$ para hallar la E que corresponde a θ .
- Hallamos M con la ecuación de Kepler $M = E - e \sin E$.
- Finalmente $\Delta t = M/n$.
- Este procedimiento permite calcular directamente Δt sin ambigüedades.



La ecuación de Kepler II

Problema 2: Dado Δt , encontrar θ .

- Seguimos el procedimiento opuesto: $\theta \leftarrow E \leftarrow M \leftarrow \Delta t$.
- En primer lugar, $M = n\Delta t$.
- E se calcula de $M = E - e \sin E$. Es una ecuación **transcendental**, luego hay que resolverla numéricamente.
- Conocida E , θ se calcula de $\tan \theta/2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan E/2$.
- Nota: Si $\Delta t > T$, considerar $\Delta t' = \Delta t \text{ mód } (T)$, es decir, escribir $\Delta t = qT + \Delta t'$ donde q es un entero (el número de órbitas completas recorridas) y $\Delta t' \in [0, T]$



La ecuación de Kepler III

- Para resolver numéricamente $M = E - e \sin E$ usaremos el método de Newton-Raphson (convergencia cuadrática). Con M dado, llamemos $f(E) = M - E + e \sin E$.
- Partimos de una estimación E_0 , que nos arroja un error $\varepsilon_0 = \frac{f(E_0)}{f'(E_0)}$. Típicamente este error será mayor que la precisión δE que queremos obtener.
- Iteramos el siguiente procedimiento:
 - 1 Calcular $f'(E_{k-1}) = e \cos E_{k-1} - 1$.
 - 2 $E_k = E_{k-1} - \frac{f(E_{k-1})}{f'(E_{k-1})}$
 - 3 Calcular $\varepsilon_k = f(E_k)/f'(E_k)$
 - 4 Si $|\varepsilon_k| < \delta E$, finalizar. Si no, hacer $k = k + 1$ y volver a 1.
- Obsérvese que $f(M - e) = e(1 + \sin(M - e)) \geq 0$ y $f(M + e) = e(-1 + \sin(M + e)) \leq 0 \rightarrow E \in [M - e, M + e]$. Una buena estimación inicial para E sería el punto medio, M .
- Obsérvese que ya que $e < 1$, $f'(E) = e \cos E - 1 < 0$, es decir, la curva es monótona decreciente: siempre hay solución única.



La ecuación de Kepler IV

- Otro método para resolver la ecuación de Kepler es el de las aproximaciones sucesivas.
- Partimos de una estimación que definimos como $E_0 = M$.
- Iteramos siguiendo la ecuación de Kepler:

$$E_n = M + e \operatorname{sen} E_{n-1}$$

- Por tanto los primeros términos de la iteración son:

$$E_1 = M + e \operatorname{sen} M, \quad E_2 = M + e \operatorname{sen}(M + e \operatorname{sen} M),$$

$$E_3 = M + e \operatorname{sen}(M + e \operatorname{sen}(M + e \operatorname{sen} M)), \dots$$

- Se puede demostrar que la sucesión de E_n tiende a la solución correcta en el límite; no obstante para excentricidades altas esta convergencia es lenta.



La ecuación de Kepler V

- Otro método clásico para resolver la ecuación de Kepler es el desarrollo en serie en e , supuesto e pequeño.
- Buscamos una solución del tipo serie de Taylor,
$$E = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{e^k}{k!};$$
 hay que hallar los coeficientes c_k .
- Recordemos que $c_k = \left. \frac{d^k E(e)}{de^k} \right|_{e=0}$
- Por tanto hay que tomar la ecuación de Kepler
 $E = M + e \sin E$ y, en primer lugar, sustituir $e = 0$, y después ir tomando derivadas con respecto a e y sustituir en $e = 0$.
- Sustituyendo en $e = 0$, se tiene $c_0 = E(e = 0) = M$.
- Derivando: $E' = \sin E + eE' \cos E$. Sustituyendo en $e = 0$,
 $c_1 = E'(e = 0) = \sin M$.
- Igualmente, $E'' = 2E' \cos E + eE'' \cos E - e(E')^2 \sin E$, luego
 $c_2 = E''(e = 0) = 2 \sin M \cos M = \sin 2M$.



La ecuación de Kepler VI

- Prosiguiendo hasta orden 5, se encuentra:

$$\begin{aligned}c_3 &= -\frac{3}{4} (\text{sen } M - 3 \text{ sen } 3M) \\c_4 &= -4 \text{ sen } 2M + 8 \text{ sen } 4M \\c_5 &= \frac{5}{16} (2 \text{ sen } M - 81 \text{ sen } 3M + 125 \text{ sen } 5M)\end{aligned}$$

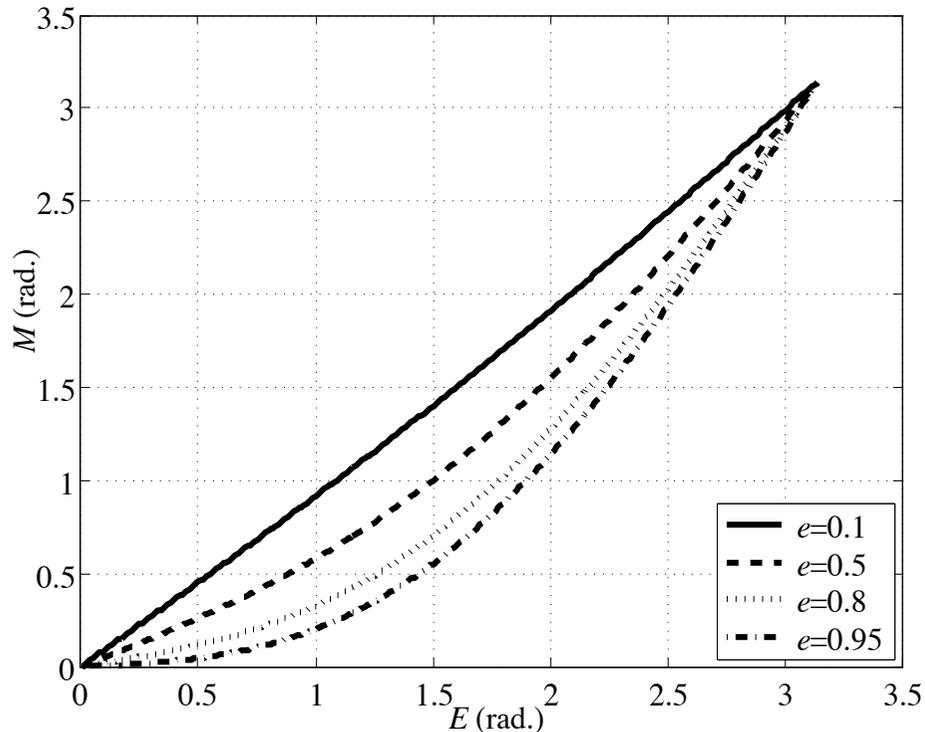
- Por tanto:

$$\begin{aligned}E &= M + e \text{ sen } M + \frac{e^2}{2} \text{ sen } 2M - \frac{e^3}{8} (\text{sen } M - 3 \text{ sen } 3M) \\&\quad - \frac{e^4}{6} (\text{sen } 2M - 2 \text{ sen } 4M) + \frac{e^5}{384} (2 \text{ sen } M - 81 \text{ sen } 3M + 125 \text{ sen } 5M) + \mathcal{O}(e^6) \\&= M + \left(e - \frac{e^3}{8} + \frac{e^5}{192} \right) \text{ sen } M + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6} \right) \text{ sen } 2M + \left(\frac{3e^3}{8} - \frac{27e^5}{128} \right) \text{ sen } 3M \\&\quad + \frac{e^4}{3} \text{ sen } 4M + \frac{125e^5}{384} \text{ sen } 5M + \mathcal{O}(e^6)\end{aligned}$$

- Esta serie, denominada serie de Lagrange, tiene el problema de que converge lentamente para valores medios de e , y de hecho diverge, como demostró Laplace, para $e \geq 0,6627434194$.



La ecuación de Kepler VII

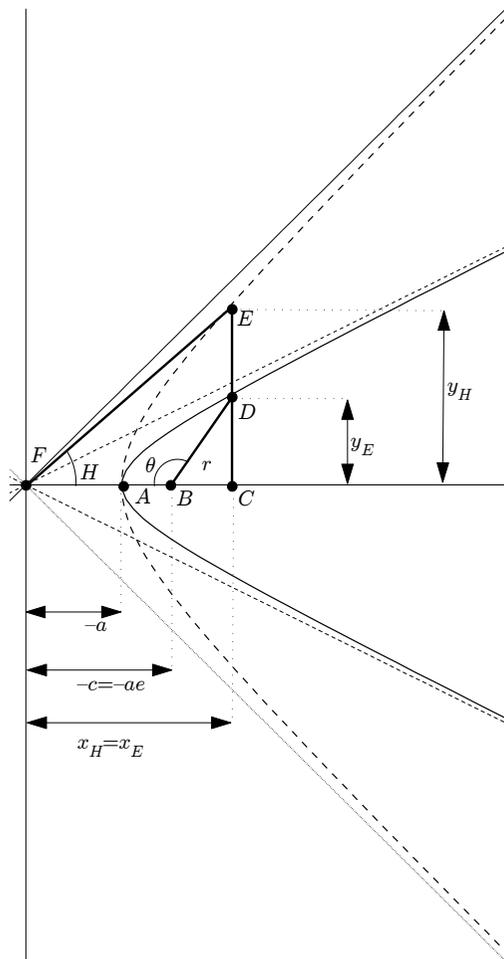


- A la izquierda se representa la función $M = E - e \sin E$ para diferentes excentricidades.
- Para excentricidades pequeñas, la función es $M \approx E$, ya que la órbita es casi una circunferencia.
- Sin embargo, para excentricidades grandes (órbita casi parabólica), la forma de la curva varía, especialmente para M cerca de 0 o π .
- En esa zona los métodos numéricos convergen lentamente, sobre todo si se quiere alcanzar mucha precisión; además para excentricidades grandes, la órbita abarca grandes distancias, con lo que un pequeño error de ángulo puede implicar un gran error en las coordenadas.



Leyes Horarias: Caso Hiperbólico I

Dada una hipérbola de semieje mayor $-a$ y semieje menor $-b$, se considera una hipérbola auxiliar **equilátera** de semieje $-a$.



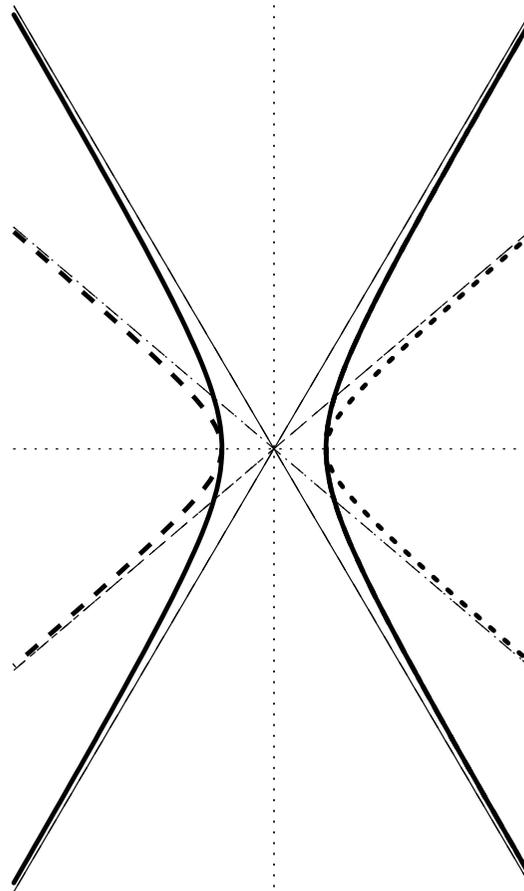
- Una hipérbola equilátera es aquella cuyas asíntotas tienen 45° de inclinación, lo que implica $a = b$, $p = -a$, $e = \sqrt{2}$.
- El “ángulo hiperbólico” H juega el papel de la anomalía excéntrica; se denomina **anomalía hiperbólica**.
- En concreto, $x_H = -a \cosh H$ e $y_H = -a \sinh H$.
- Se tienen las siguientes propiedades:

- $$\frac{y_H}{y_E} = \frac{a}{b}$$

- $$\frac{\text{Area} \{ACE\}}{\text{Area} \{ACD\}} = \frac{a}{b}$$



Leyes Horarias: Caso Hiperbólico II

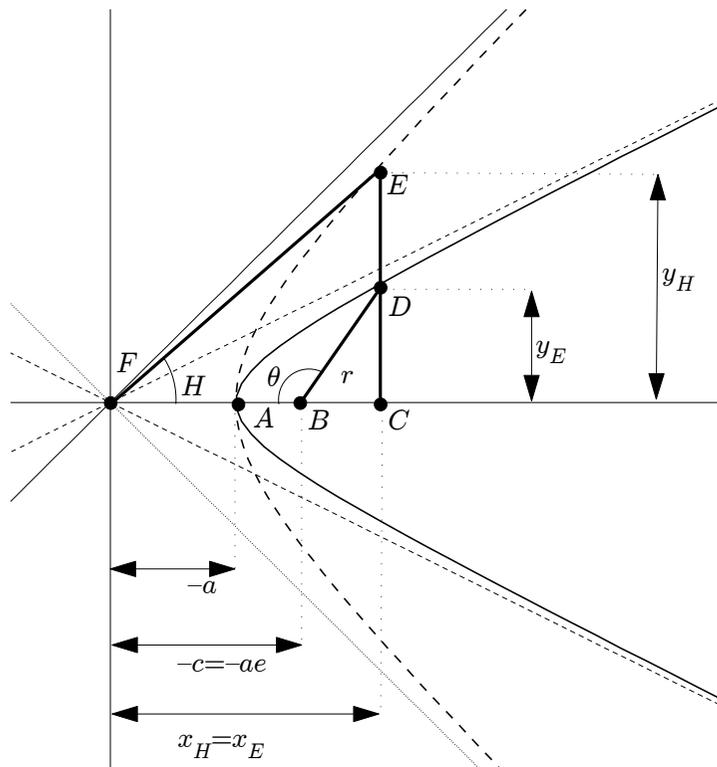


En caso de que $b > a$ (es decir, $e > \sqrt{2}$) la hipérbola auxiliar queda “por dentro” de la hipérbola de la órbita.



Leyes Horarias: Caso Hiperbólico III

Relaciones entre la “anomalía hiperbólica” H y θ y r .



- Como $x_E = -ae - r \cos \theta$ y $x_H = x_E$ se llega a: $\cosh H = e + r/a \cos \theta$
- Como $y_E = r \sen \theta$ y $y_H = (a/b)y_E$ se llega a: $\sinh H = -r/b \sen \theta$.
- Combinando ambas expresiones:

$$r^2 = a^2(\cosh H - e)^2 + b^2 \sinh^2 H = a^2(\cosh^2 H + e^2 - 2e \cosh H) + b^2 \sinh^2 H.$$
- Como $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ y $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$:

$$r = -a(e \cosh H - 1)$$

- De donde $\cosh H = e - (e \cosh H - 1) \cos \theta$ y $\sinh H = (e^2 - 1)^{-1/2}(e \cosh H - 1) \sen \theta$. Como en el caso

elíptico, se llega a:
$$\tanh H/2 = \sqrt{\frac{e-1}{1+e}} \tan \theta/2$$



Leyes Horarias: Caso Hiperbólico IV

Deducción analítica de la ecuación de Kepler hiperbólica (I).

- Como en el caso elíptico, partimos $\Delta t = \frac{\text{Area}\{BAD\}}{\dot{A}}$.
- Recordemos $\dot{A} = h/2 = \sqrt{p\mu}/2 = \sqrt{a(1-e^2)\mu}/2$
- Como antes $\text{Area}\{BAD\} = \int_0^\theta \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta$.
- Realizamos el cambio de variable $\theta \rightarrow H$. De la ecuación $\sin \theta = \frac{\sqrt{e^2-1} \sinh H}{e \cosh H - 1}$, obtenemos $\cos \theta d\theta = \sqrt{e^2-1} \frac{e - \cosh H}{(e \cosh H - 1)^2} dH$. Puesto que $\cos \theta = \frac{e - \cosh H}{e \cosh H - 1}$, llegamos a que $d\theta = \frac{\sqrt{e^2-1}}{(e \cosh H - 1)} dH$



Leyes Horarias: Caso Hiperbólico V

Deducción analítica de la ecuación de Kepler hiperbólica (II).

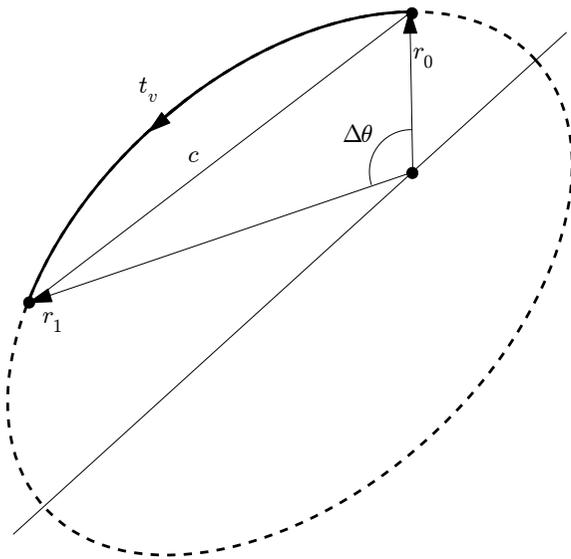
- Por tanto $\text{Area}\{BAD\} = \int_0^H \frac{r^2(H)}{2} \frac{\sqrt{e^2-1}}{(e \cosh H - 1)} dH$ y sustituyendo la expresión $r(H) = -a(e \cosh H - 1)$ llegamos a $\text{Area}\{BAD\} = \frac{a^2\sqrt{e^2-1}}{2} \int_0^H (e \cosh H - 1) dH = \frac{a^2\sqrt{e^2-1}}{2} (e \sinh H - H)$.
- Se llega a $\Delta t = \frac{a^2\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{a(1-e^2)\mu}} (e \sinh H - H) = \frac{e \sinh H - H}{\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}}$
- Definiendo $n = \sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}$ y $N = n\Delta t$ (anomalía media hiperbólica), se llega a la ecuación de Kepler hiperbólica:
$$N = e \sinh H - H$$
- Su resolución es análoga al caso elíptico



Cálculo del tiempo de vuelo

Cálculo del tiempo de vuelo

Dada una órbita (a, e) , dos radios r_0, r_1 que corresponden a puntos de la órbita, y el arco subtendido por dichos radios $\Delta\theta$ calcular el tiempo que transcurre entre ambos puntos, t_v .



- Definimos la cuerda c como la distancia entre los dos puntos. Por el teorema del coseno: $c^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2r_0r_1 \cos \Delta\theta$.
- Denotamos $s = r_0 + r_1$.
- Asumimos (de momento) que la órbita es una elipse.
- El problema es resoluble con leyes horarias, pero el **Teorema de Lambert** lo resuelve de forma directa.



El Teorema de Lambert I

Solución al problema del cálculo del tiempo de vuelo.

Teorema de Lambert

El tiempo de vuelo t_v entre dos puntos r_0 y r_1 de una elipse depende solamente de la cuerda c , la suma $s = r_0 + r_1$ y el semieje mayor de la elipse a .

Observación: t_v no depende de e ! Procedimiento de cálculo de t_v :

- Calcular los ángulos α y β de las siguientes expresiones:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{s + c}{2a}$$

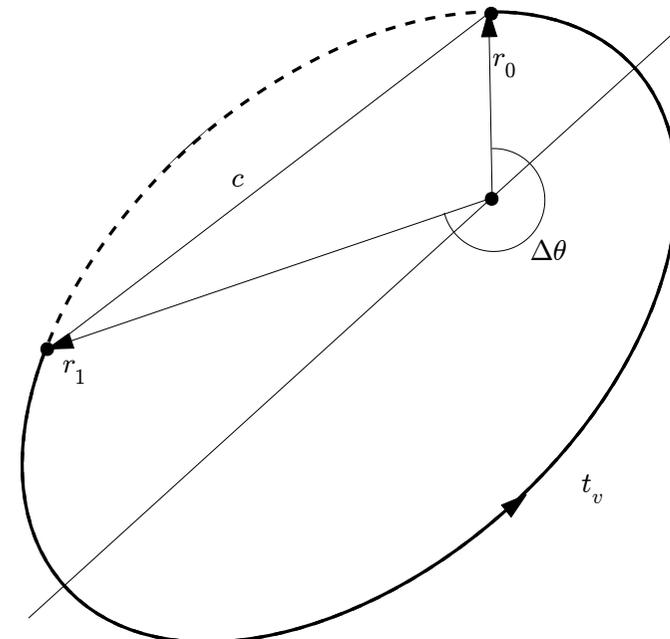
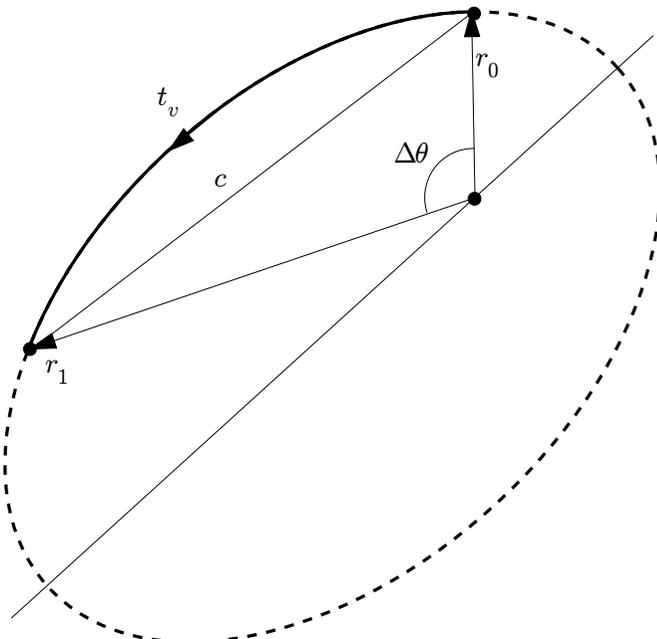
$$\cos \beta = 1 - \frac{s - c}{2a}$$

- Usando α y β , el tiempo de vuelo es $t_v = \frac{(\alpha - \operatorname{sen} \alpha) - (\beta - \operatorname{sen} \beta)}{n}$.



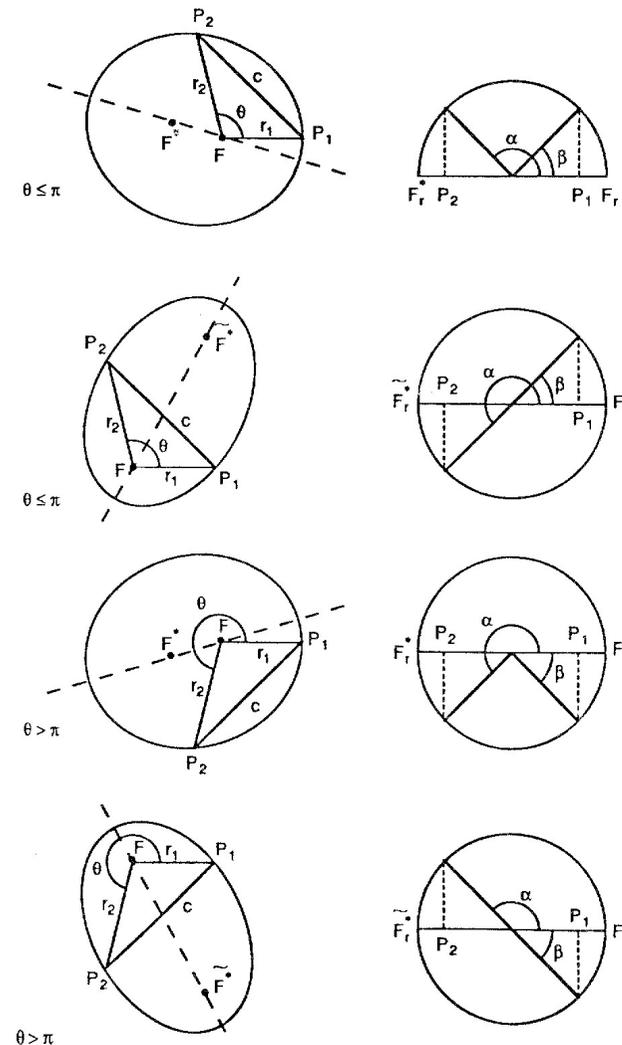
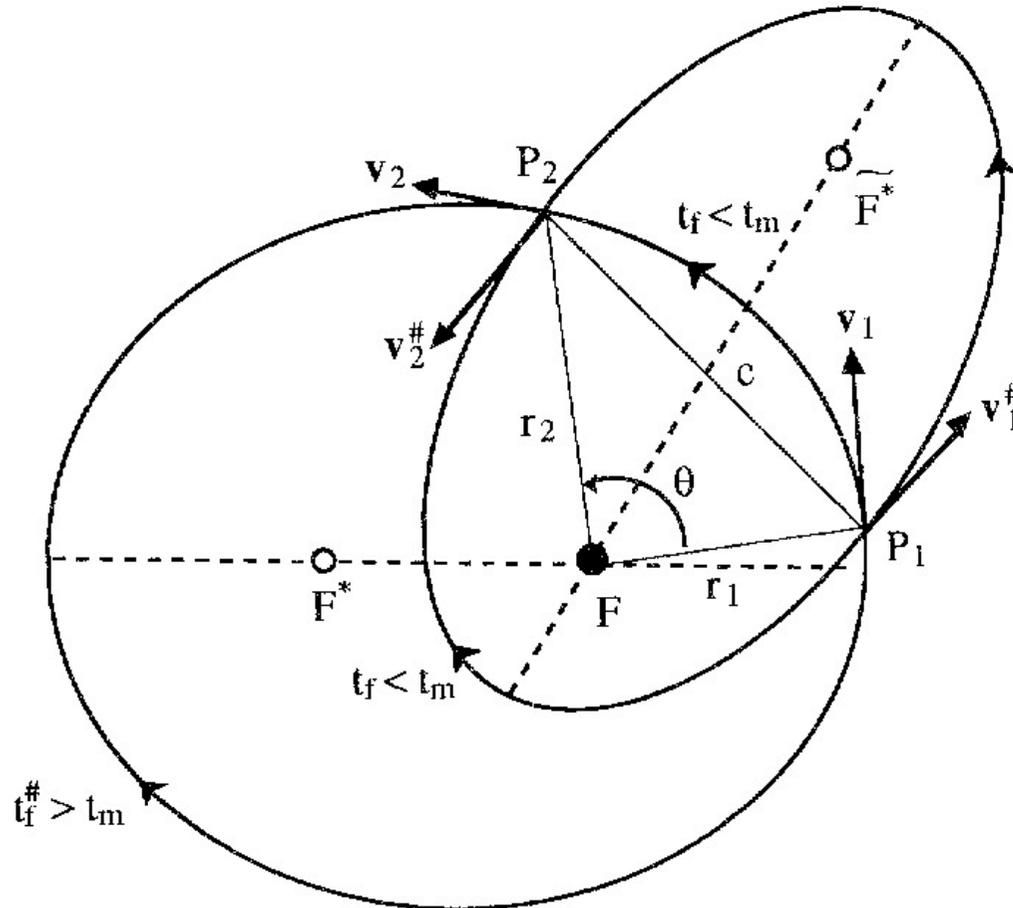
El Teorema de Lambert II

El teorema de Lambert arroja cuatro posibles soluciones; por un lado existe dos soluciones distintas, que corresponden a los dos posibles modos de recorrer la elipse. Por otro lado, existe otra elipse que también resuelve el problema. Las soluciones vienen dadas por (α, β) , $(\alpha, -\beta)$, $(2\pi - \alpha, \beta)$, $(2\pi - \alpha, -\beta)$. La forma de diferenciar las soluciones se explica en las notas “El teorema de Lambert: diferenciar las soluciones”.



El Teorema de Lambert III

Representación gráfica de las soluciones múltiples:



El Teorema de Lambert IV

Teorema de Lambert (órbitas parabólicas)

El tiempo de vuelo t_v entre dos puntos r_1 y r_2 de una parábola depende solamente de la cuerda c y la suma $s = r_1 + r_2$.

El Teorema (y una expresión para t_v) se puede deducir teniendo en cuenta que una parábola es el límite de una elipse cuando $a \rightarrow \infty$.

- Puesto que $\cos \alpha = 1 - \frac{s+c}{2a} \rightarrow 1$ y $\cos \beta = 1 - \frac{s-c}{2a} \rightarrow 1$, se tiene que α y β son pequeños. Por tanto, $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ y $\cos \beta \approx 1 - \beta^2/2$. Luego $\alpha \approx \sqrt{\frac{s+c}{a}}$ y $\beta \approx \sqrt{\frac{s-c}{a}}$.

- Por otro lado, $t_v = \frac{(\alpha - \text{sen } \alpha) - (\beta - \text{sen } \beta)}{n}$ y podemos aproximar $\text{sen } \alpha \approx \alpha - \alpha^3/6$ y $\text{sen } \beta \approx \beta - \beta^3/6$, de donde

$$t_v \approx \frac{\alpha^3 - \beta^3}{6n} \approx \frac{\left(\frac{s+c}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{s-c}{a}\right)^{3/2}}{6\sqrt{\mu/a^3}} = \frac{(s+c)^{3/2} - (s-c)^{3/2}}{6\sqrt{\mu}}$$

- Tomando límite, se llega a

$$t_v = \frac{(s+c)^{3/2} - (s-c)^{3/2}}{6\sqrt{\mu}}$$



El Teorema de Lambert V

Teorema de Lambert (órbitas hiperbólicas)

El tiempo de vuelo t_v entre dos puntos r_1 y r_2 de una elipse depende solamente de la cuerda c , la suma $s = r_1 + r_2$ y el semieje mayor de la hipérbola $-a$.

Procedimiento de cálculo de t_v :

- Calcular los “ángulos hiperbólicos” α y β de las siguientes expresiones:

$$\cosh \alpha = 1 + \frac{s + c}{-2a}$$

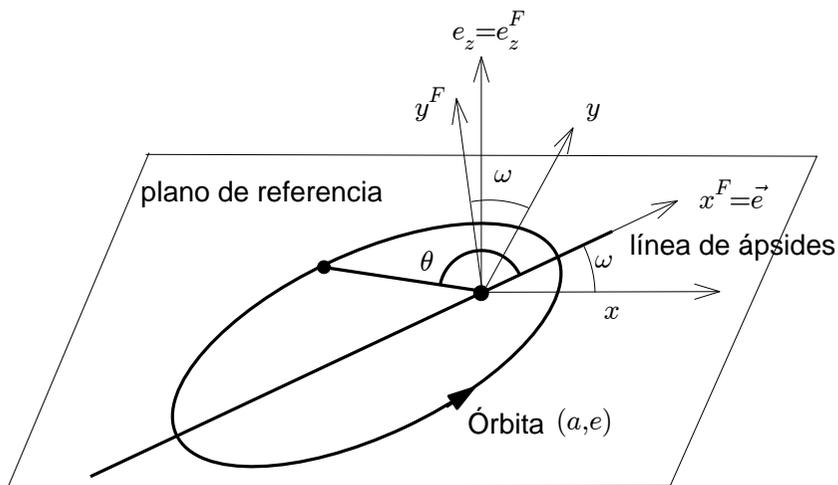
$$\cosh \beta = 1 + \frac{s - c}{-2a}$$

- El tiempo de vuelo es $t_v = \frac{(\sinh \alpha - \alpha) - (\sinh \beta - \beta)}{n}$.



Órbita en un plano. Sistema de referencia perifocal.

Dado el plano de la órbita y un sistema de referencia $Ox^Oy^Oz^O$ centrado en el foco tal que el plano Ox^Oy^O coincide con el plano de la órbita, son necesarios tres valores para determinar la órbita.

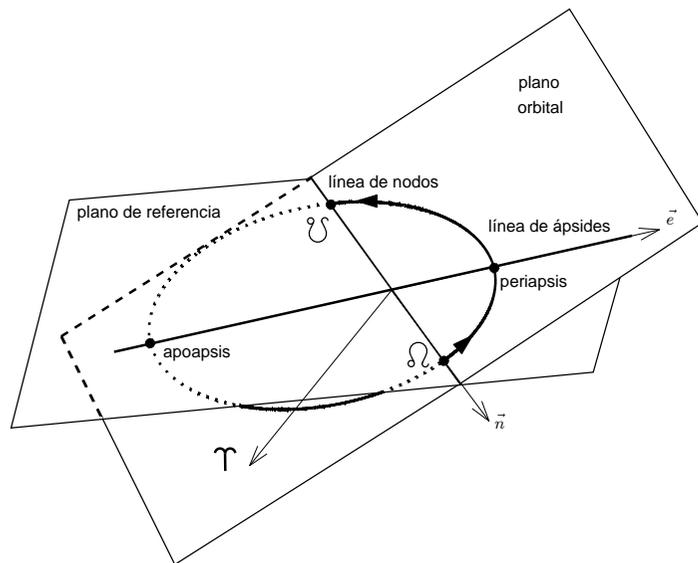


- Los parámetros a (o p) y e determinan el tipo de órbita y su forma y tamaño.
- El parámetro ω , llamado el argumento del periapsis (o de periapsis) orienta la línea de ápsides (en la dirección del vector excentricidad \vec{e} , que apunta al periapsis).
- Además, un cuarto parámetro (θ , E , M o Δt) determina la posición del cuerpo.
- El **Sistema de referencia perifocal** $Ox^Fy^Fz^F$ está centrado en el foco, con Ox^F apuntando hacia periapsis, y el eje Oz^F hacia "arriba" (paralelo al vector \vec{h}).



Determinación de una órbita en el espacio

Para una órbita arbitraria en el espacio, además de los 4 parámetros anteriores, es necesario ubicar el plano orbital respecto a un plano de referencia; para ello son necesarios dos parámetros más. Los 6 parámetros resultantes reciben el nombre de **elementos orbitales**.

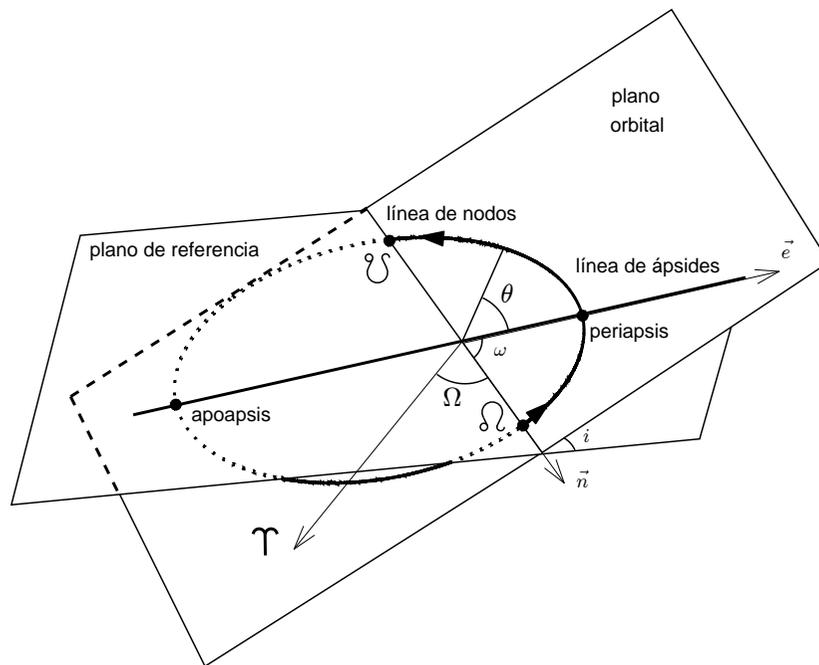


- El plano de referencia será:
 - Para órbitas planetocéntricas: el plano ecuatorial del planeta.
 - Para órbitas heliocéntricas: el plano de la eclíptica.
- La intersección entre el plano orbital y el de referencia determina la llamada **línea de nodos**.
 - La órbita corta la línea de nodos en dos puntos, los nodos. Aquel donde la trayectoria “asciende” (de abajo a arriba) es el **nodo ascendente** (Ω); el otro es el **nodo descendente** (\cap).
 - El vector nodo \vec{n} es un vector unitario en la dirección de Ω .



Los elementos orbitales I

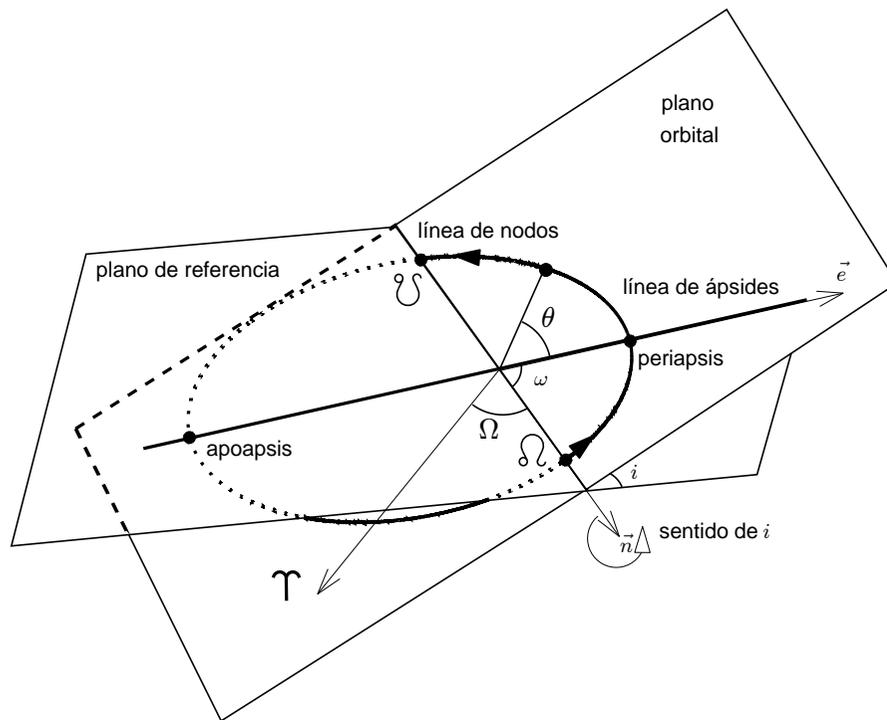
Es el conjunto mínimo de datos que, junto a la época (tiempo inicial t_0) permite determinar la posición de un cuerpo en una órbita en cualquier instante de tiempo. Es decir, 6 datos (más t_0). Los elementos clásicos (keplerianos) son los siguientes:



- Ω : Ascensión recta del nodo ascendente (RAAN). Es el ángulo, medido en el sentido contrario de las agujas del reloj, entre Υ y \vec{n} .
- ω : Argumento de periapsis (o del perigeo/perihelio). Es el ángulo, medido en el plano orbital y en **la dirección del movimiento**, entre \vec{n} y \vec{e} .



Los elementos orbitales II



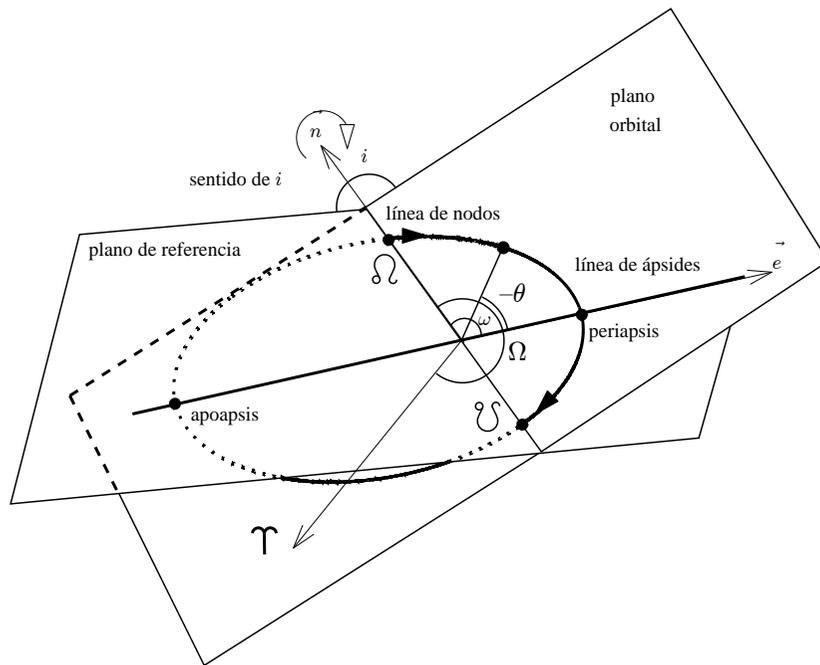
- i : Inclinación de la órbita entre 0 y π , mide el ángulo entre el plano de referencia y el plano orbital, con el sentido indicado por \vec{n} .
- a , e : Determinan la forma y tamaño de la órbita. A veces a se sustituye por p , T o n .
- θ : Determina la posición del cuerpo en la órbita (para la época). Se puede sustituir por Δt , M o $E(H)$.

- Las órbitas con inclinación $i = 0^\circ$ se denominan ecuatoriales, mientras que si $i \approx 90^\circ$ las órbitas se llaman polares. Si $i < 90^\circ$ la órbita es directa, mientras que si $i > 90^\circ$ la órbita es retrógrada.



Los elementos orbitales III

Ejemplo de órbita retrógrada



- Ésta órbita es la misma que en la anterior figura pero con sentido contrario en su movimiento.
- Puesto que el nodo ascendente se encuentra opuesto al caso anterior, el ángulo se mide al revés, obteniéndose $i > 90^\circ$.
- Dado que Ω está en el lado opuesto, Ω es π mayor que en la figura anterior, mientras que ω es el complementario de la figura anterior y θ cambia de signo.
- El término retrógrado se debe a que el movimiento del cuerpo se opone a la rotación del cuerpo central.



Los elementos orbitales IV

Existen casos especiales en los que algún elemento no está bien definido; estos casos son importantes porque se dan en la práctica.

- Órbitas elípticas ecuatoriales: ni Ω ni ω están bien definidos (no existe línea de nodos). Se sustituyen por el ángulo ϖ (longitud del perigeo) entre Υ y \vec{e} , medido en el sentido contrario de las agujas del reloj, de forma que $\varpi = \Omega + \omega$.
- Órbitas circulares no ecuatoriales: ω y θ no están bien definidos (no existe línea de ápsides). Se sustituyen por el ángulo $u = \omega + \theta$ (el argumento de la latitud) para medir la posición del cuerpo desde Ω en el sentido del movimiento.
- Órbitas circulares ecuatoriales: no existe ni línea de nodos ni línea de ápsides. Por tanto ni Ω , ni ω ni θ están bien definidos. Se sustituyen por $\lambda_{\mathcal{T}} = \Omega + \omega + \theta$, la longitud verdadera, que es la que forma el cuerpo con Υ , medido en el sentido contrario de las agujas del reloj.



Conversión entre representaciones de una órbita I

Problema I: $(\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)) \rightarrow (\Omega, \omega, i, a, e, \theta)$

- En primer lugar se determina $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ y $\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h} - (\mu/r)\vec{r}}{\mu}$.
- Se tiene $e = |\vec{e}|$. Aplicamos $\epsilon = v^2/2 - \mu/r$ y $a = -\mu/2\epsilon$.
Obtenemos $\cos \theta = \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}$ (si $\vec{r} \cdot \vec{v} < 0$ entonces $\theta \in [\pi, 2\pi]$).
- Puesto que \vec{h} es perpendicular al plano orbital, se obtiene que $\cos i = \vec{h} \cdot \vec{k}_R / |\vec{h}| = h_z / |\vec{h}|$ ($i \in [0, \pi]$), y por otro lado $\vec{n} = \vec{k}_R \times \vec{h} / |\vec{k}_R \times \vec{h}| = [-h_y / \sqrt{h_x^2 + h_y^2}, h_x / \sqrt{h_x^2 + h_y^2}, 0]$.
- Ω se obtiene de $\cos \Omega = n_x$ (si $n_y < 0$, $\Omega \in [\pi, 2\pi]$).
- Finalmente ω es el ángulo entre \vec{n} y \vec{e} , luego $\cos \omega = \vec{e} \cdot \vec{n} / e$ (si $e_z < 0$, $\omega \in [\pi, 2\pi]$).



Corrección de cuadrantes

- Dados los vectores $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, determinar el ángulo α entre \vec{a} y \vec{b} medido desde \vec{a} en un sentido dado.
- El ángulo siempre viene dado por $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.
- El problema es que la función arc cos ofrece un resultado $\alpha_1 \in [0, \pi]$, pero $\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$ también es solución. ¿Cuál elegir? Según la geometría planteamos una condición.
 - θ : Si $\vec{r} \cdot \vec{v} < 0$, entonces el ángulo de trayectoria es negativo, ya que $\vec{r} \cdot \vec{v} = vr \sin \gamma$: se está viajando de apoapsis a periapsis, luego $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Esto se deduce de la expresión $\tan \gamma = e \sin \theta / (1 + e \cos \theta)$.
 - Ω : Si $n_y < 0$, el vector \vec{n} está “a la izquierda” de Υ , luego $\Omega \in [\pi, 2\pi]$.
 - ω : Si $e_z < 0$, el perigeo (periapsis) está por debajo del plano de referencia: $\omega \in [\pi, 2\pi]$.



Conversión entre representaciones de una órbita II

Problema II: $(\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)) \leftarrow (\Omega, \omega, i, a, e, \theta)$

- Usamos el sistema de referencia perifocal. Sabemos $\vec{r} = r\vec{e}_r$,
 $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_r^F = [\cos \theta, \sin \theta, 0]^T$, $\vec{e}_\theta^F = [-\sin \theta, \cos \theta, 0]^T$.
- Calculemos $p = a(1 - e^2)$. Entonces $r = p/(1 + e \cos \theta)$.
También $h = \sqrt{p\mu} = r^2\dot{\theta}$, luego $r\dot{\theta} = \frac{\sqrt{p\mu}}{r} = (1 + e \cos \theta)\sqrt{\frac{\mu}{p}}$.
- Finalmente
 $\dot{r} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} r(\theta) = \dot{\theta} \frac{ep \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = r\dot{\theta} \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta$
- Operando se llega a:

$$\vec{r}^F = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}^F = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ e + \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



Ángulos de Euler de una órbita I

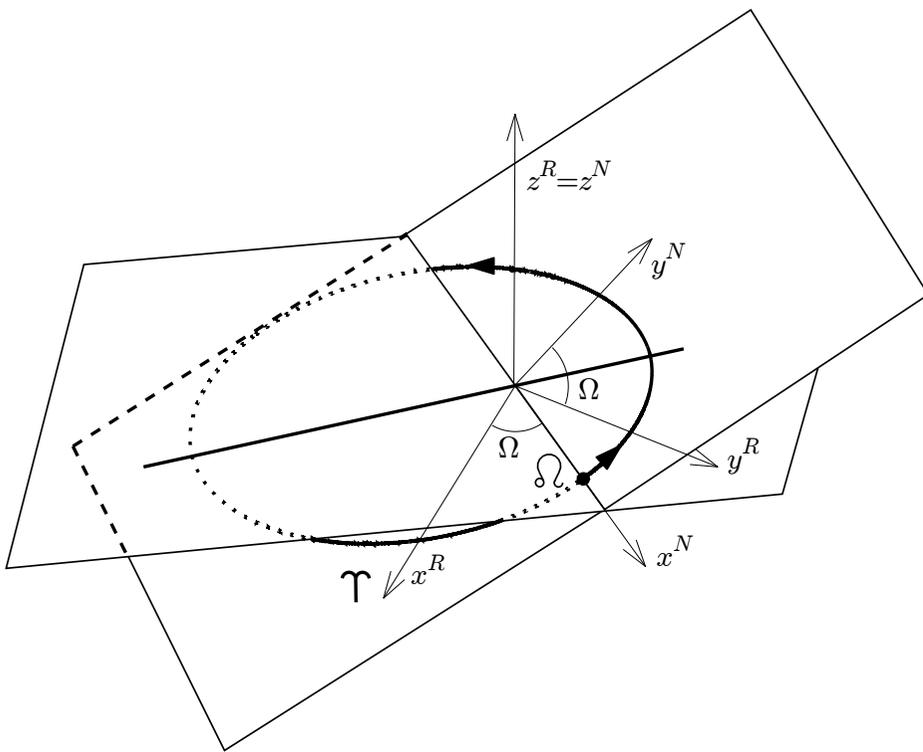
Para pasar del s.d.r perifocal (F) al geocéntrico ecuatorial o heliocéntrico (R), calculamos primero el cambio inverso desde R a F, ya que es más sencillo. Para ello usamos tres rotaciones:

- La primera rotación es en torno al eje z^R con ángulo Ω .
- La denotamos

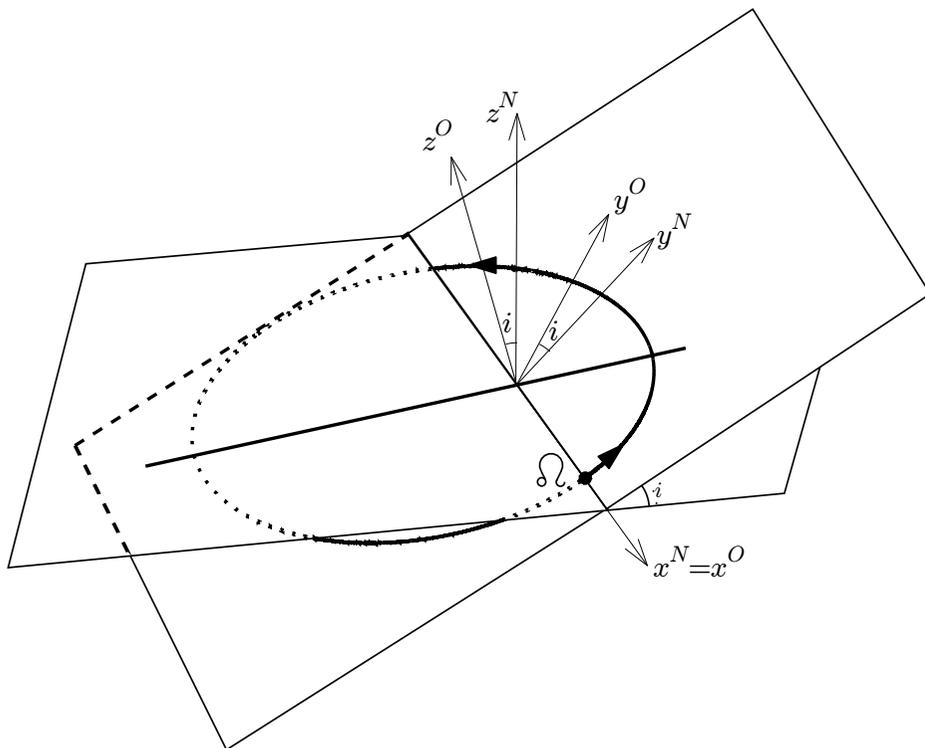
$$R \xrightarrow[z^R]{\Omega} N$$

- Su matriz es

$$C_R^N(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \text{sen } \Omega & 0 \\ -\text{sen } \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = C_3(\Omega)$$



Ángulos de Euler de una órbita II



- La segunda rotación es en torno al eje x^N con ángulo i .
- La denotamos

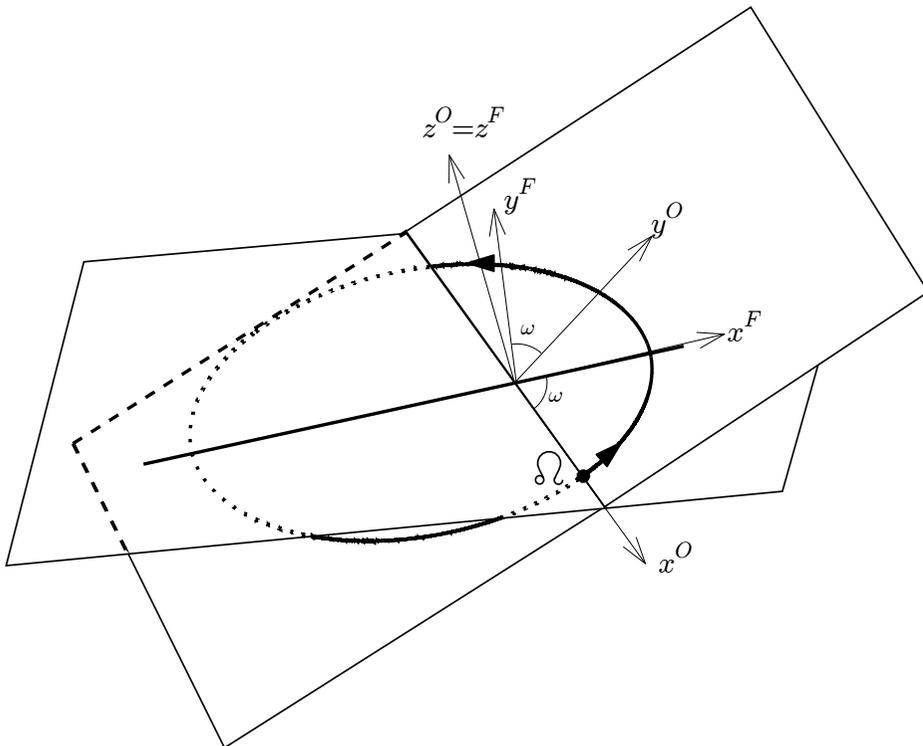
$$N \xrightarrow[x^N]{i} O$$

- Su matriz es

$$\begin{aligned} C_N^O(i) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \text{sen } i \\ 0 & -\text{sen } i & \cos i \end{bmatrix} \\ &= C_1(i) \end{aligned}$$



Ángulos de Euler de una órbita III



- La tercera rotación es en torno al eje z^O con ángulo ω .
- La denotamos

$$O \xrightarrow[\substack{\omega \\ z^O}]{} F$$

- Su matriz es

$$C_O^F(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & \text{sen } \omega & 0 \\ -\text{sen } \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = C_3(\omega)$$



Ángulos de Euler de una órbita IV

- La rotación completa será pues.

$$R \xrightarrow[z^R]{\Omega} N \xrightarrow[x^N]{i} O \xrightarrow[z^O]{\omega} F$$

- Su matriz es

$$\begin{aligned} C_R^F(\omega, i, \Omega) &= C_O^F C_N^O C_R^N \\ &= C_3(\omega) C_1(i) C_3(\Omega) \\ &= \begin{bmatrix} c\Omega c\omega - s\Omega s\omega c i & s\Omega c\omega + c\Omega s\omega c i & s\omega s i \\ -c\Omega s\omega - s\Omega c\omega c i & -s\Omega s\omega + c\Omega c\omega c i & c\omega s i \\ s\Omega s i & -c\Omega s i & c i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $s\varphi = \sin \varphi$ y $c\varphi = \cos \varphi$.



Conversión entre representaciones de una órbita III

Problema II (cont.): $(\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)) \leftarrow (\Omega, \omega, i, a, e, \theta)$

- Puesto que ya conocemos \vec{r}^F y \vec{v}^F , sólo tenemos que usar la matriz de rotación que nos lleva los ejes F a los R .
- Por las propiedades de las matrices de rotación, $C_F^R = (C_R^F)^{-1} = (C_R^F)^T$. Por tanto:

$$\vec{r}^R = C_F^R \vec{r}^F = \frac{p}{1 + e \cos \theta} (C_R^F)^T \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\vec{v}^R = C_F^R \vec{v}^F = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (C_R^F)^T \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ e + \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



Determinación de órbitas: el Problema de Lambert I

- El problema de determinar una órbita a partir de un cierto número de datos (observaciones) fue considerado ya por Kepler y más adelante por Newton.
- Por ejemplo, Newton propuso un método práctico basado en tres observaciones, que Edmond Halley (s. XVII-XVIII) empleó para realizar predicciones sobre un cometa—hoy conocido como el cometa Halley.
- Si el problema está sobredeterminado, son necesarios métodos estadísticos; Gauss desarrolló el método de los mínimos cuadrados para resolver el problema, y alcanzó la fama en el campo de la astronomía cuando fue capaz de predecir la órbita de Ceres.
- Un caso de interés es el llamado **problema de Lambert**: encontrar una órbita conocidos dos puntos y el tiempo de tránsito (tiempo de vuelo) entre ambos.



Determinación de órbitas: el Problema de Lambert II

Problema de Lambert

Dados \vec{r}_0 , \vec{r}_1 y t_v encontrar una órbita tal que si $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, entonces $\vec{r}(t_v) = \vec{r}_1$.

- Aplicaciones
 - Determinar la órbita de un cuerpo a partir de dos observaciones y el tiempo transcurrido entre ambas.
 - Diseño de misiones: dado un origen en $t = 0$ y un destino en $t = t_v$, encontrar una órbita de transferencia, para realizar una maniobra (e.g. ir de la Tierra a la Luna u otro planeta).
 - Intercepción y rendez-vous (encuentro): dado un cuerpo orbitando y un origen, diseñar una órbita de intercepción.
- Trabajando en el plano definido por el origen, \vec{r}_0 y \vec{r}_1 , el problema se reduce a uno plano; el problema se puede resolver numéricamente.



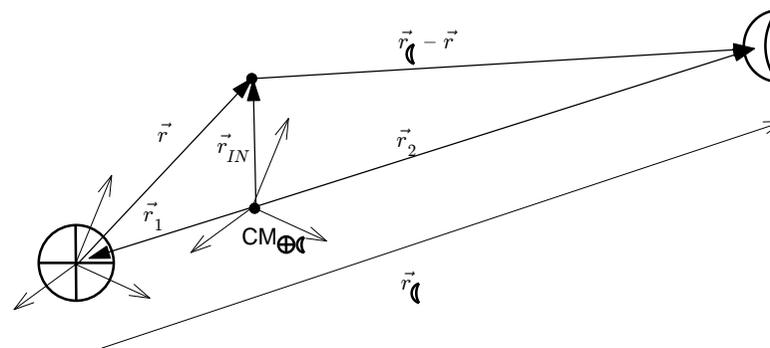
Crítica al problema de los dos cuerpos

- El modelo de los dos cuerpos es **poco realista**.
- Recordemos las hipótesis principales:
 - 1 Se considera el sistema aislado del resto del Universo.
 - 2 Las masas se pueden considerar puntuales y localizadas en el centro de masas de cada cuerpo.
- La primera suposición permite reducir las fuerzas que actúan a las gravitatorias entre los cuerpos. Pero existen otras fuerzas:
 - La fuerza gravitatoria ejercida por otros cuerpos.
 - La resistencia atmosférica en órbitas bajas.
 - Fuerzas propulsivas (especialmente durante maniobras).
 - La presión de radiación solar.
- La segunda suposición es sólo válida si los cuerpos son esferas macizas y homogéneas. No obstante:
 - Los planetas (o el Sol) no son esferas perfectas. En concreto la Tierra está achatada.
 - Los vehículos espaciales no son esferas perfectas. Un vehículo no esférico se ve afectado por el **gradiente gravitatorio**.



Efecto de un tercer cuerpo I

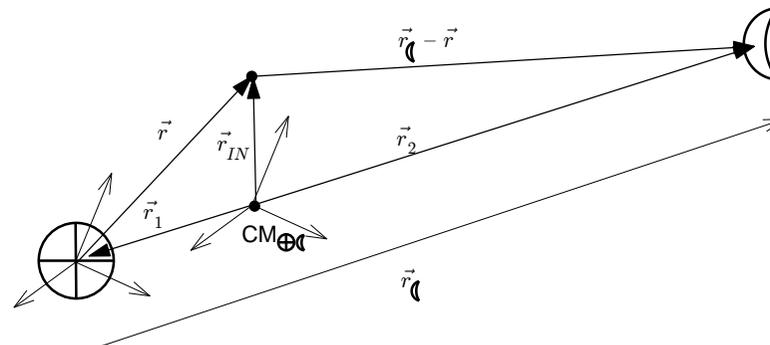
Consideramos como ejemplo de perturbaciones un cuerpo en órbita en torno a la Tierra, pero afectado por la atracción gravitatoria de la Luna:



- El vector \vec{r}_{\lrcorner} representa el vector posición de la Luna respecto de la Tierra.
- Al incluir el efecto de la Luna, tenemos también que considerar que la Tierra ya no es el centro de un sistema de referencia inercial, sino que se debe considerar el centro de masas Tierra-Luna, $CM_{\oplus\lrcorner}$.



Efecto de un tercer cuerpo II



- La ecuación del movimiento, escrita en el sistema de referencia inercial centrado en $CM_{\oplus\zeta}$, es

$$\ddot{\vec{r}}_{IN} = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3}$$

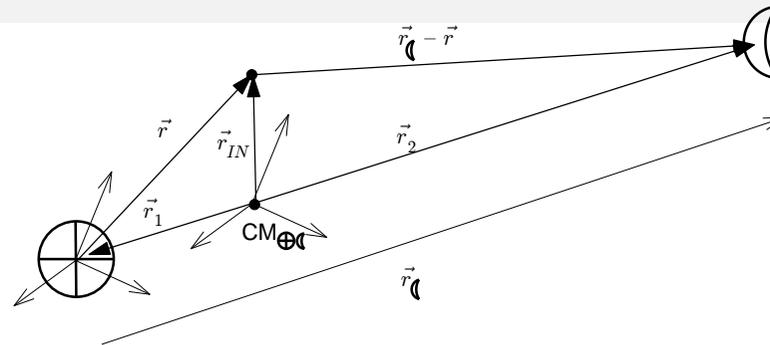
- Por otro lado, $\vec{r}_{\zeta} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, y se tiene que $m_{\oplus}\vec{r}_1 + m_{\zeta}\vec{r}_2 = \vec{0}$. Luego $\vec{r}_1 = -\frac{m_{\zeta}}{m_{\zeta} + m_{\oplus}}\vec{r}_{\zeta}$. La ecuación del movimiento de la

Luna dicta que $\ddot{\vec{r}}_{\zeta} = -\frac{G(m_{\oplus} + m_{\zeta})\vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3}$. De donde

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_{\zeta}}{m_{\zeta} + m_{\oplus}}\ddot{\vec{r}}_{\zeta} = \frac{m_{\zeta}}{m_{\zeta} + m_{\oplus}} \frac{G(m_{\oplus} + m_{\zeta})\vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} = \frac{\mu_{\zeta}\vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3}.$$



Efecto de un tercer cuerpo III



- Puesto que $\vec{r}_{IN} = \vec{r} + \vec{r}_1$, llegamos a que

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_{\zeta} \vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} = \vec{\gamma}_K + \vec{\gamma}_P,$$

- $\vec{\gamma}_K$ es la fuerza kepleriana clásica: $\vec{\gamma}_K = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3}$.
- $\vec{\gamma}_P$ es la fuerza de perturbación debida al tercer cuerpo:

$$\vec{\gamma}_P = \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_{\zeta} \vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3}.$$

- Usando que si $\vec{b} \approx \vec{0}$, se tiene que $\frac{1}{|\vec{a} - \vec{b}|^n} \approx \frac{1}{a^n} + n \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^{n+2}}$, podemos aproximar a primer orden en \vec{r} en la fuerza de perturbación:

$$\frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} \approx \frac{\vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} + 3\vec{r}_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} \cdot \vec{r}}{r_{\zeta}^5} - \frac{\vec{r}}{r_{\zeta}^3}.$$



Efecto de un tercer cuerpo IV

- Se llega a la estimación $\vec{\gamma}_P \approx \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} \left[3\vec{r}_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} \cdot \vec{r}}{r_{\zeta}^2} - \vec{r} \right]$.
- Si \vec{r}_{ζ} y \vec{r} están alineados, el corchete valdrá $2\vec{r}$. Si son ortogonales, $-\vec{r}$. El orden de magnitud de γ_P será $\mu_{\zeta} r / r_{\zeta}^3$.
- Podemos estimar el orden de magnitud de la perturbación con respecto a la fuerza kepleriana $\vec{\gamma}_K = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3}$ como
 $|\gamma_P / \gamma_K| \approx (\mu_{\zeta} / \mu_{\oplus}) (r / r_{\zeta})^3$. En órbita baja,
 $|\gamma_P / \gamma_K| \approx 10^{-7}$, pero en geostacionaria, $|\gamma_P / \gamma_K| \approx 10^{-5}$.
- Igualmente considerando el efecto del Sol,
 $|\gamma_P / \gamma_K| \approx (\mu_{\odot} / \mu_{\oplus}) (r / r_{\odot})^3$, y se tiene que en órbita baja,
 $|\gamma_P / \gamma_K| \approx 5 \times 10^{-8}$, y en geostacionaria, $|\gamma_P / \gamma_K| \approx 5 \times 10^{-6}$.
- Como comparación, Venus produciría un efecto del orden de 5×10^{-10} en órbita geostacionaria.
- Por tanto las perturbaciones (por tercer cuerpo) más importantes en satélites en órbitas geocéntricas son debidas al Sol y Luna. Se llaman **lunisolares**.



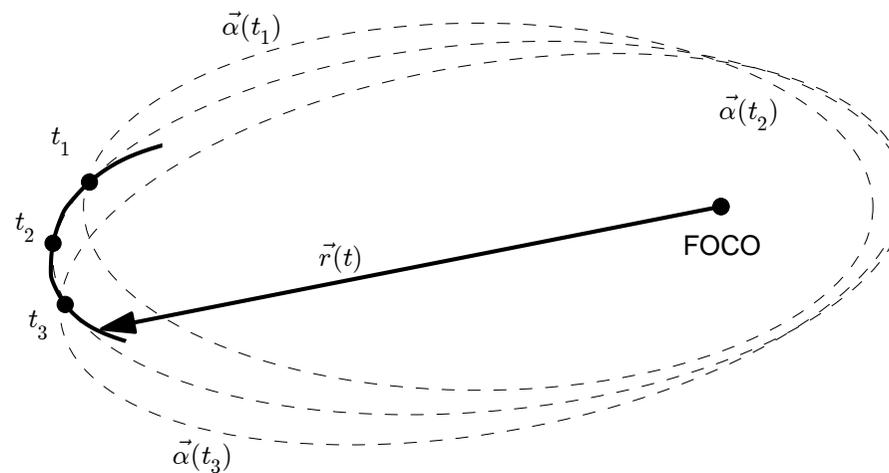
Análisis matemático/numérico de perturbaciones

- Para tratar los efectos de perturbación hay esencialmente dos metodologías:
 - Método de perturbaciones generales: emplea los elementos orbitales como base, estudiando su variación con el tiempo. El que usaremos en la asignatura y desarrollado en posteriores transparencias.
 - Método de perturbaciones especiales: no emplea elementos orbitales sino directamente las ecuaciones del movimiento. A su vez se divide en dos posibles formas de tratar el problema:
 - Método de Encke: Resolución directa de las ecuaciones del movimiento, incluyendo las perturbaciones y tantos cuerpos como sea necesario. El más usado en la actualidad.
 - Método de Cowell: Resuelve las ecuaciones de una corrección $\delta\vec{r}$ sobre una solución de referencia de los dos cuerpos $\ddot{\vec{r}} = -\mu\vec{r}/r^3$. Si la corrección crece, es necesario recalcular la solución de referencia. Poco usado hoy en día.

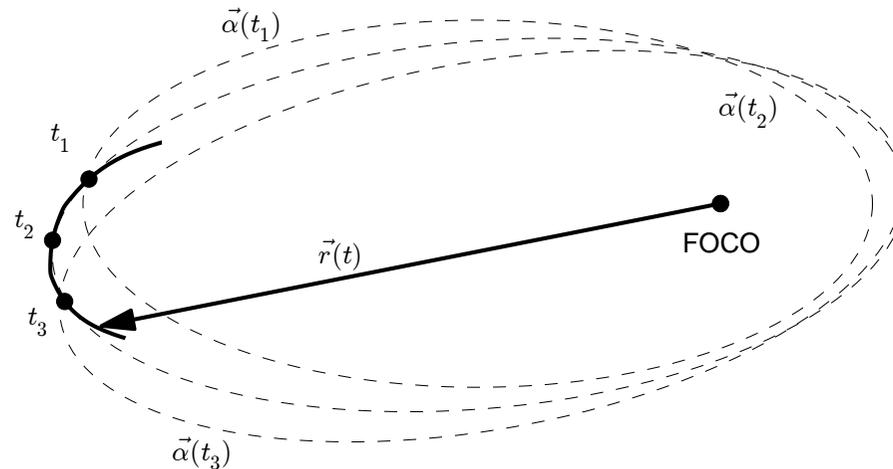


Órbitas Keplerianas y no Keplerianas I

- El llamado método de las perturbaciones generales (utilizado clásicamente antes de disponer de computadores suficientemente potentes) se basa en la siguiente idea:
- Las perturbaciones modifican las ecuaciones del movimiento, cambiando la solución. La órbita resultante se denomina **no Kepleriana**. Dado que estos efectos son pequeños, la órbita “se parecerá” a una Kepleriana.
- Consideremos una órbita Kepleriana (**órbita osculante**) en cada instante, que va cambiando con el tiempo.



Órbitas Keplerianas y no Keplerianas II



- Llamemos $\vec{\alpha} = [\Omega, i, \omega, a, e, M]$ el vector de elementos orbitales, donde se ha escrito M por comodidad. Recordemos que $\vec{\alpha}$ es equivalente a $\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)$.
- Para una órbita Kepleriana:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = 0,$$

y se podría escribir $\frac{dM}{dt} = n$.

- Para una órbita no Kepleriana, $\dot{\vec{\alpha}}(t)$ determina la órbita.



Teoría de Perturbaciones aplicada a Mecánica Orbital

- Encontrar $\dot{\vec{\alpha}}$, en función de la propia α y de la perturbación $\vec{\gamma}_P$, es decir encontrar $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{F}(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}_P)$, no es trivial.
- El sistema de ecuaciones $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{F}(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}_P)$ se denomina **Ecuaciones Planetarias**, ya que permiten predecir el movimiento de los planetas, incorporando fuerzas adicionales a la atracción gravitatoria del Sol como perturbaciones.
- En el caso de que $\vec{\gamma}_P$ derive de un potencial $\vec{\gamma}_P = \nabla U_p$, las ecuaciones se pueden escribir como $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{F}(\vec{\alpha}, U_p)$. En tal caso se denominan las **Ecuaciones Planetarias de Lagrange**.
- Observación: en Astronomía/Astronáutica no se usa la convención de Mecánica $F = -\nabla U$.
- En caso contrario consideramos $\vec{\gamma}_P = R\vec{e}_r + S\vec{e}_\theta + W\vec{e}_z$. Las ecuaciones escritas como $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{F}(\vec{\alpha}, R, S, W)$ se denominan las **Ecuaciones Planetarias de Gauss**.
- La deducción de las ecuaciones se puede solicitar al profesor.



Ecuaciones Planetarias, forma de Lagrange

- Hipótesis: podemos escribir $\vec{\gamma}_P = \nabla U_p$ y consideramos U_p como función de los elementos orbitales, es decir, $U_p = U_p(\vec{\alpha})$.

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial U_p}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial U_p}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U_p}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \left(\frac{\partial U_p}{\partial \Omega} + \cos i \frac{\partial U_p}{\partial \omega} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial U_p}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U_p}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial U_p}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial U_p}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial U_p}{\partial e} \end{aligned}$$



Ecuaciones Planetarias, forma de Gauss

- Hipótesis: podemos escribir $\vec{\gamma}_P = R\vec{e}_r + S\vec{e}_\theta + W\vec{e}_z$.

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [e \operatorname{sen} \theta R + (1 + e \cos \theta) S]$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[\operatorname{sen} \theta R + \left(\frac{1 + e \cos \theta}{e} - \frac{1 - e^2}{e(1 + e \cos \theta)} \right) S \right]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na(1 + \cos \theta)} \cos(\theta + \omega) W$$

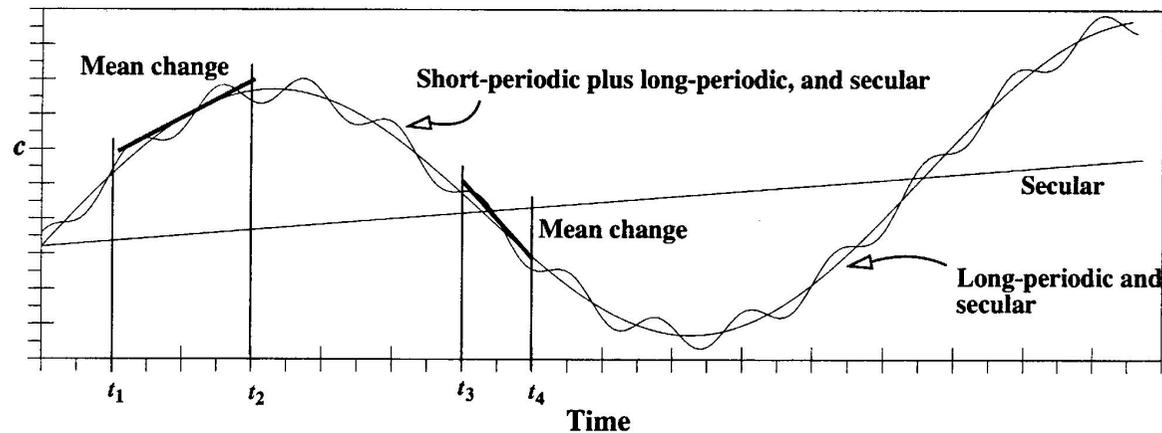
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[-\frac{\cos \theta}{e} R + \frac{\operatorname{sen} \theta}{e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos \theta} \right) S - \frac{\cos i}{\operatorname{sen} i} \operatorname{sen}(\theta + \omega) W \right]$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1}{na} \left(\frac{2(1-e^2)}{1 + e \cos \theta} - \frac{1-e^2}{e} \cos \theta \right) R - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos \theta} \right) S$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na(1 + \cos \theta)} \frac{\operatorname{sen}(\theta + \omega)}{\operatorname{sen} i} W$$



Estudio de perturbaciones I



- Los cambios en los elementos orbitales debidos a perturbaciones se clasifican como:
 - Seculares: términos de crecimiento monótono en el tiempo.
 - Periódicos (de largo período): términos cuya variación se repite con periodo largo (mayor que el periodo orbital).
 - Periódicos (de corto período): términos cuya variación se repite con periodo corto (del orden del periodo orbital).
- Por ejemplo, si $a(t) = 10000 + 3t + \sin(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ y $\omega_2 \gg \omega_1$, entonces el segundo término es secular, el tercero periódico de largo periodo, y el cuarto periódico de corto periodo.



Estudio de perturbaciones II

- Si bien los términos periódicos pueden tener interés, en general los efectos más importantes son los seculares.
- Los términos seculares y periódicos se separan realizando una **expansión en serie de Fourier** con respecto a la anomalía media M .
- En concreto el término secular es el primer coeficiente de Fourier, que es el valor medio; por tanto se encuentra promediando en cada órbita. En el ejemplo anterior, $\bar{a} = 3t$.
- En general, $\bar{\alpha}_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_j(M) dM$.
- Igualmente la **variación secular** de un elemento se encuentra promediando su derivada (obtenida de las ecuaciones planetarias): $\bar{\dot{\alpha}}_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\alpha}_j(M) dM$.
- La **variación secular por órbita** (cambio por revolución) se obtiene multiplicando $\bar{\dot{\alpha}}_j$ por el periodo orbital: $\Delta\alpha_j = T\bar{\dot{\alpha}}_j$.



Estudio de perturbaciones III

- Una forma de calcular aproximadamente las variaciones seculares es usar un modelo de perturbaciones de primer orden, donde se aproxima $a \approx \bar{a}$. Por tanto, se tendría:

$$\frac{\overline{da}}{dt} = \frac{2}{n\bar{a}} \overline{\frac{\partial U_p}{\partial M}}$$

- A la hora de promediar, la siguiente relación es útil:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(M) dM &= \int_0^{2\pi} f(E)(1 - e \cos E) dE \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{(1 - e \cos E)^2}{\sqrt{1 - e^2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

donde se utilizó: $\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$ y $\frac{p}{1 + e \cos \theta} = a(1 - e \cos E)$.



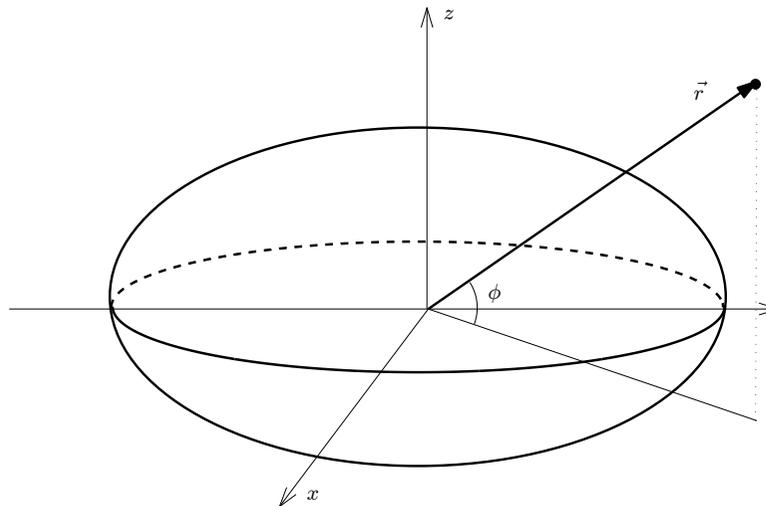
El potencial gravitatorio de un planeta no esférico

- El potencial gravitatorio U permite obtener la fuerza gravitatoria específica como $\vec{\gamma} = \nabla U$.
- Para un cuerpo esférico y homogéneo con parámetro gravitatorio μ , se tiene que su potencial gravitatorio es $U_K = \frac{\mu}{r}$, y por tanto $\vec{\gamma}_K = \nabla U_K = -\frac{\mu}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$.
- ¿Cómo se obtiene el potencial gravitatorio para un cuerpo cualquiera? El potencial gravitatorio verifica la **Ecuación de Laplace** $\nabla^2 U = 0$.
- Luego U para un cuerpo con forma arbitraria vendrá dado por la solución de la ecuación de Laplace, sujeta a condiciones de contorno dadas por la distribución de masa del cuerpo.
- En la práctica, se busca una solución en serie de potencias y se ajustan los coeficientes con datos experimentales.
- La ciencia que estudia la forma de la Tierra y sus variaciones gravitatorias se denomina **geodesia**.



Cuerpo con simetría de revolución I

- Supongamos un cuerpo cuya masa está distribuida homogéneamente con simetría de revolución (alrededor de un eje), es decir, sólo varía con ϕ (no con λ).



- En tal caso, usando coordenadas esféricas, $U = U(r, \phi)$.
- La ecuación de Laplace queda como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) = 0$$



Cuerpo con simetría de revolución II

- La solución general de la ecuación viene dada por

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n p_n(\sin \phi) \right]$$

donde

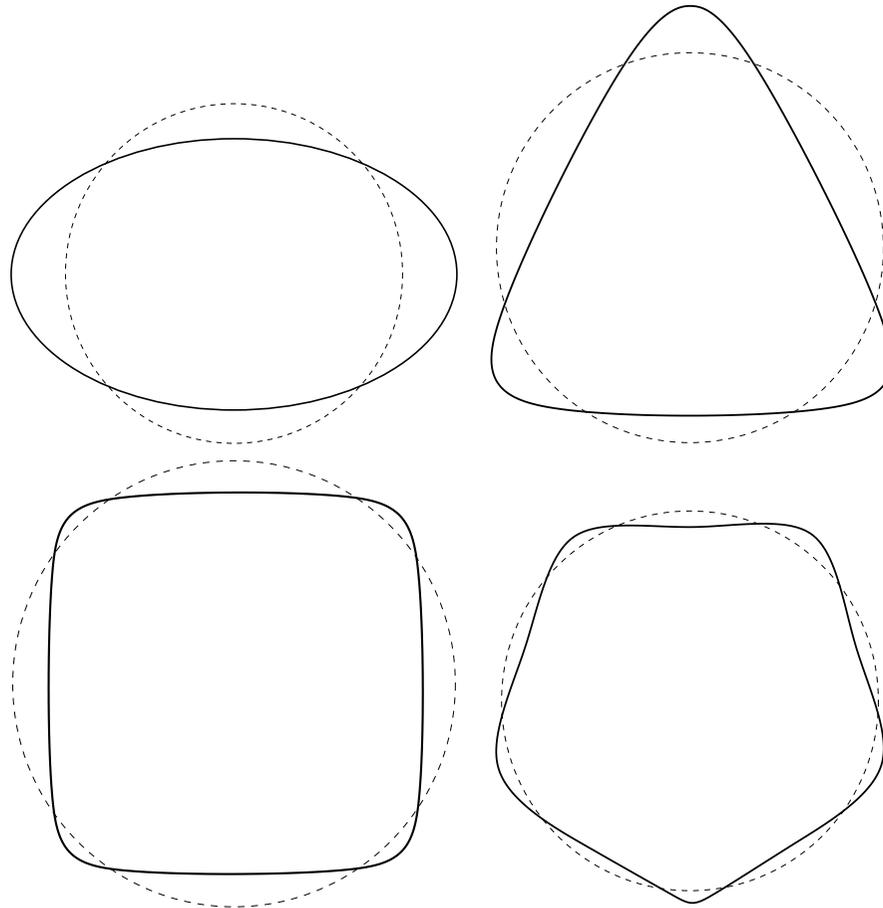
- El primer término representa el potencial de una esfera, mientras que el resto (la serie) representa la desviación del modelo esférico.
- Los coeficientes J_n son los llamados **armónicos zonales del potencial**.
- p_n es el n -ésimo polinomio de Legendre, definido recursivamente como

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x \\ p_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1} ((2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x)) \end{aligned}$$



Cuerpo con simetría de revolución III

- El significado de los diferentes armónicos se puede ver en la siguientes figuras (segundo, tercer, cuarto y quinto armónicos esféricos).



Cuerpo con simetría de revolución IV

- Los primeros armónicos son los más importantes. Para la Tierra, $J_2 = 1,083 \times 10^{-3}$, $J_3 = -2,534 \times 10^{-6}$, $J_4 = -1,620 \times 10^{-6}$, $J_5 = -2,273 \times 10^{-7} \dots$
- Un modelo frecuentemente utilizado consiste en despreciar todos los armónicos excepto el segundo, lo que equivale a considerar la tierra como un elipsoide de revolución.
- Usando la fórmula encontramos que $p_2 = \frac{3x^2-1}{2}$.
- Por tanto el modelo de potencial considerando sólo el J_2 es

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right]$$



Perturbación debida al achatamiento de la Tierra I

- El efecto más importante es el debido al J_2 . Consideremos el modelo del J_2 antes escrito:

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right]$$

donde $J_2 = 1,083 \times 10^{-3}$.

- El potencial de perturbación es:

$$U_p = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi)$$

- Es necesario expresar U_p en función de los elementos orbitales. Usando la trigonometría esférica (que se estudiará en el siguiente tema), se tiene que $\sin \phi = \sin i \sin(\omega + \theta)$. Por tanto:

$$U_p = \frac{J_2 \mu_{\oplus} R_{\oplus}^2 (1 + e \cos \theta)^3}{2a^3 (1 - e^2)^3} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta))$$



Perturbación debida al achatamiento de la Tierra II

- Calculemos ahora $\overline{U_p}$:

$$\begin{aligned}\overline{U_p} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{J_2 \mu_{\oplus} R_{\oplus}^2 (1 + e \cos \theta)^3}{2a^3 (1 - e^2)^3} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta)) dM \\ &= \frac{J_2 \mu_{\oplus} R_{\oplus}^2}{4a^3 \pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e \cos \theta}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta)) d\theta\end{aligned}$$

- Puesto que $\sin^2 \psi = \frac{1 - \cos 2\psi}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned}&(1 + e \cos \theta)(1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta)) \\ &= (1 + e \cos \theta) \left(1 - \frac{3 \sin^2 i}{2} + \frac{3 \sin^2 i \sin 2(\omega + \theta)}{2}\right)\end{aligned}$$

- Integrando y usando $n = \sqrt{\mu/a^3}$:

$$\overline{U_p} = \frac{J_2 n^2 R_{\oplus}^2}{4(1 - e^2)^{3/2}} (2 - 3 \sin^2 i)$$



Perturbación debida al achatamiento de la Tierra III

- Por tanto $\overline{U_p} = f(a, e, i)$. Esto implica que $\overline{da/dt} = \overline{di/dt} = \overline{de/dt} = 0$, es decir: el J_2 no produce variaciones seculares en a (la energía, en media, no varía) ni en la inclinación i o en e .

- Sí hay cambios seculares en ω y Ω (también en M):

$$\frac{\overline{d\Omega}}{dt} = -\frac{3J_2 n R_{\oplus}^2}{2p^2} \cos i, \quad \frac{\overline{d\omega}}{dt} = \frac{3J_2 n R_{\oplus}^2}{4p^2} (5 \cos^2 i - 1)$$

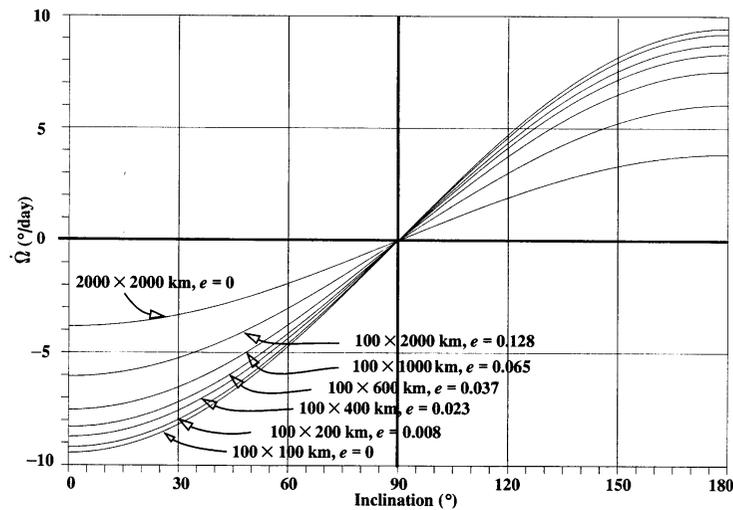
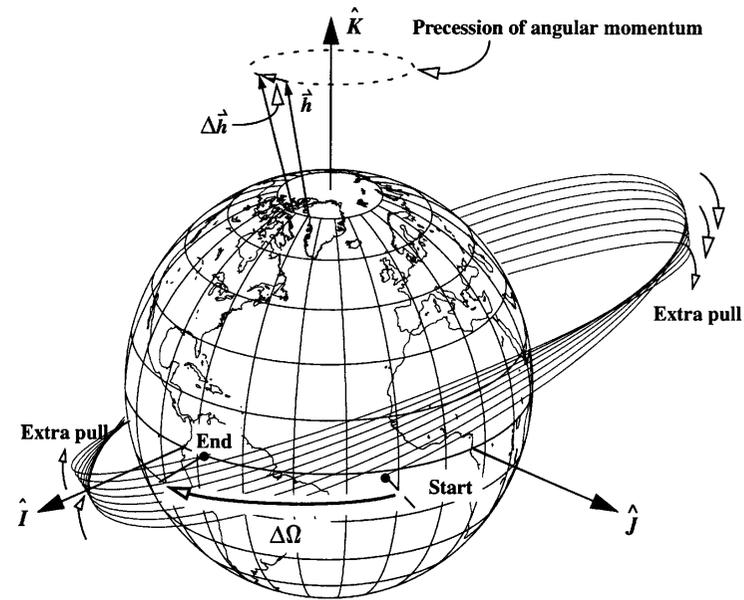
- El primer fenómeno se llama **regresión de los nodos**, y el segundo, **avance del perigeo**.
- La variación por revolución es, usando $T = 2\pi/n$:

$$\Delta\Omega = -\frac{3J_2 \pi R_{\oplus}^2}{p^2} \cos i, \quad \Delta\omega = \frac{3J_2 \pi R_{\oplus}^2}{2p^2} (5 \cos^2 i - 1)$$

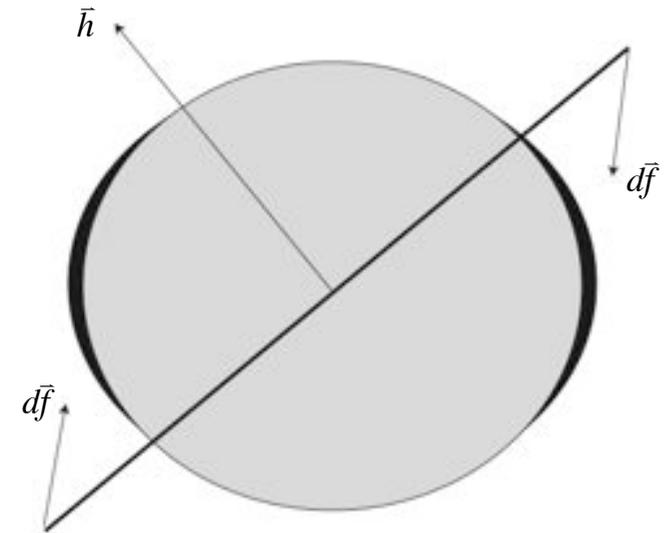
- El J_2 sí produce variaciones periódicas en todos los elementos.



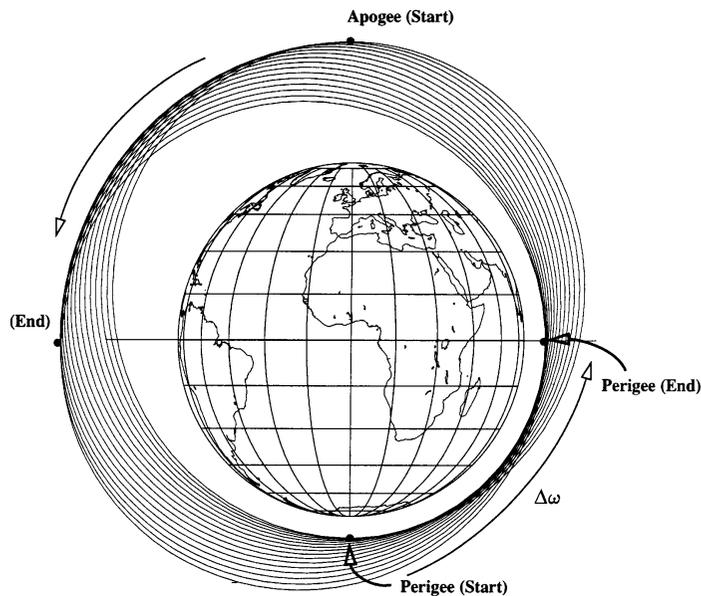
Regresión de los nodos



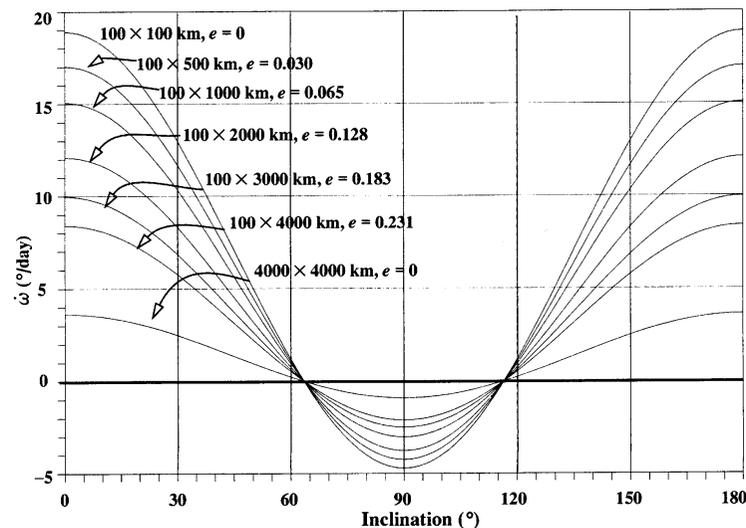
- La regresión de los nodos cambia el plano de la órbita de forma continua.
- Una “explicación gráfica” de la física fenómeno:



Avance del perigeo

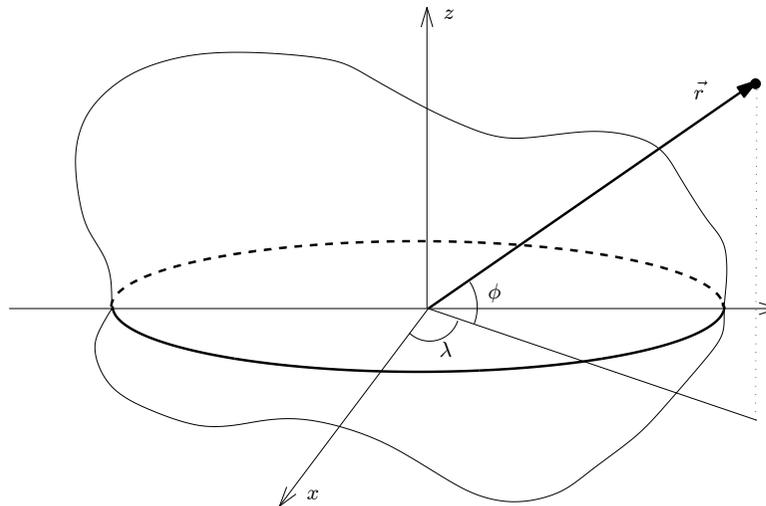


- El avance del perigeo modifica la localización geográfica de la línea de ápsides, y por tanto los puntos donde la órbita permanece más tiempo (apogeo) y menos tiempo (perigeo).



Cuerpo general I

- Supongamos un cuerpo general, donde la distribución de masa depende tanto de la longitud como de la latitud.



- De nuevo usando coordenadas esféricas, $U = U(r, \phi, \lambda)$.
- La ecuación de Laplace queda como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0$$



Cuerpo general II

- La solución general de la ecuación viene dada por

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n J_{nm} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n p_{nm}(\sin \phi) \cos(m(\lambda - \lambda_{nm})) \right]$$

donde

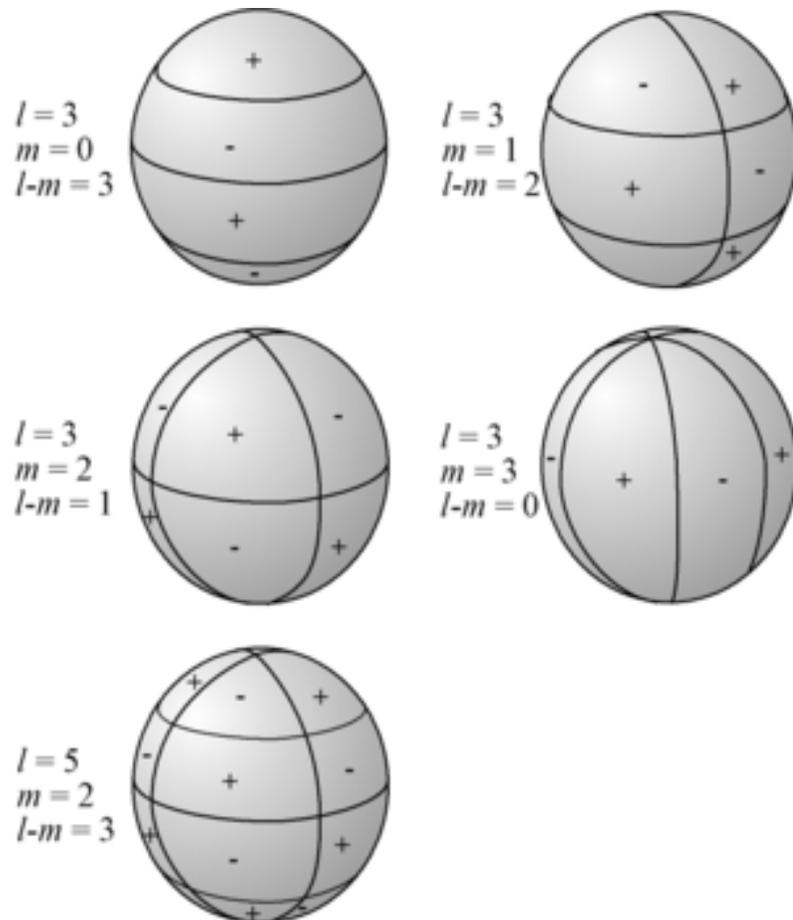
- El primer término representa el potencial de una esfera, mientras que el resto (la serie) representa la desviación del modelo esférico.
- Los coeficientes J_{nm} y λ_{nm} son los coeficientes asociados al armónico nm .
- p_{nm} es el polinomio asociado de Legendre de grado n y orden m , definido a partir de p_n como

$$p_{nm}(x) = (1 - x^2)^{n/2} \frac{d^m p_n(x)}{dx^m}$$



Cuerpo general III

- Visualización de los armónicos mediante las zonas de cambio de signo (en la figura, l corresponde a nuestra definición de n).



- Zonales: para $m = 0$, los armónicos coinciden con los del modelo con simetría de revolución. Sin variaciones respecto a λ .
- Sectoriales: para $n = m$, no tienen variaciones respecto a ϕ y dividen la esfera en “sectores”.
- Teserales: para $n \neq m$, varían respecto a ϕ y λ , dividen la esfera en “cuadrados esféricos”.



Cuerpo general IV

- **Modelo triaxial:** se toma la serie de segundo orden con $J_{20} = J_2$, $J_{21} = 0$, $J_{22} = -5,35 \times 10^{-6}$ y $\lambda_{22} = 123^\circ$. Equivale a suponer que la Tierra es un elipsoide (con los tres semiejes diferentes).
- El coeficiente $J_{21} = 0$ por simetría, ya que se sitúan los ejes coordinados de forma que coincidan con los principales del elipsoide.
- $p_{22} = (1 - x^2) \frac{d^2 p_2(x)}{dx^2} = 3(1 - x^2)$. Por tanto $p_{22}(\text{sen } \phi) = 3(1 - \text{sen}^2 \phi) = 3 \cos^2 \phi$.
- Entonces el modelo queda:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 (1 - 3 \text{sen}^2 \phi) - 3J_{22} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 \cos^2 \phi \cos(2(\lambda - \lambda_{22})) \right]$$



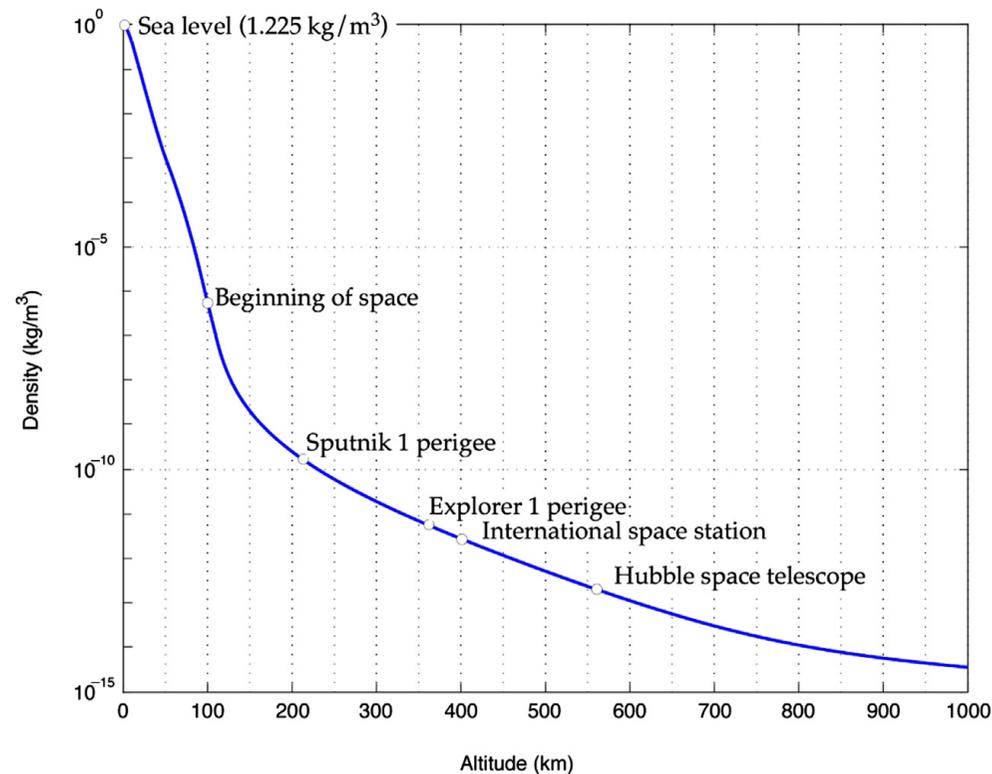
Resistencia atmosférica I

- Es el efecto de perturbación más importante en órbitas bajas y órbitas muy excéntricas con perigeo bajo ($r_p = a(1 - e)$). Muy importante también en estudios de reentrada.
- La resistencia tiene la dirección de la velocidad relativa a la atmósfera, pero el sentido opuesto: $\vec{\gamma}_P = -D \frac{\vec{v}_{rel}}{v_{rel}}$.
- La velocidad relativa $\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{atm}$; suponiendo que la atmósfera rota con la Tierra, $\vec{v}_{atm} = \vec{\omega}_{\oplus} \times \vec{r} = \omega_{\oplus} \vec{k} \times \vec{r}$.
- Se modela la resistencia D como $D = \frac{1}{2B} \rho v_{rel}^2$, donde $B = \frac{m_V}{S C_D}$ es el coeficiente balístico, con m_V la masa del vehículo, S la superficie “frontal” (depende de la actitud), y C_D el coeficiente de resistencia aerodinámico.
- La densidad del medio ρ depende de la altura y es difícil de modelar; para una misma altura los valores fluctúan entre un máximo y un mínimo debido a múltiples factores (variaciones debidas a la geografía y el achatamiento, ciclos solares...)



Resistencia atmosférica II

- Ejemplo de modelo: US Standard Atmosphere 1976.

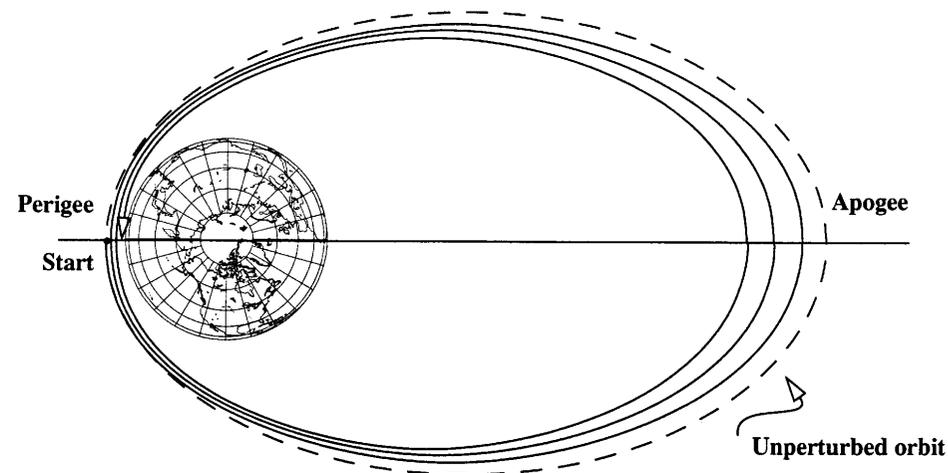


- Obsérvese que decae de forma aproximadamente exponencial. No obstante el modelo no es exacto ya que la realidad fluctúa.



Resistencia atmosférica III

- Se emplea la formulación de Gauss y se integran numéricamente las ecuaciones para hacer predicciones. Se pueden obtener resultados analíticos aproximados.
- Se encuentran variaciones seculares en a y e .
- Si $e > 0$, el efecto inicial de la perturbación es el de circularizar la órbita, haciendo disminuir el radio de apogeo hasta que coincide con el de perigeo.

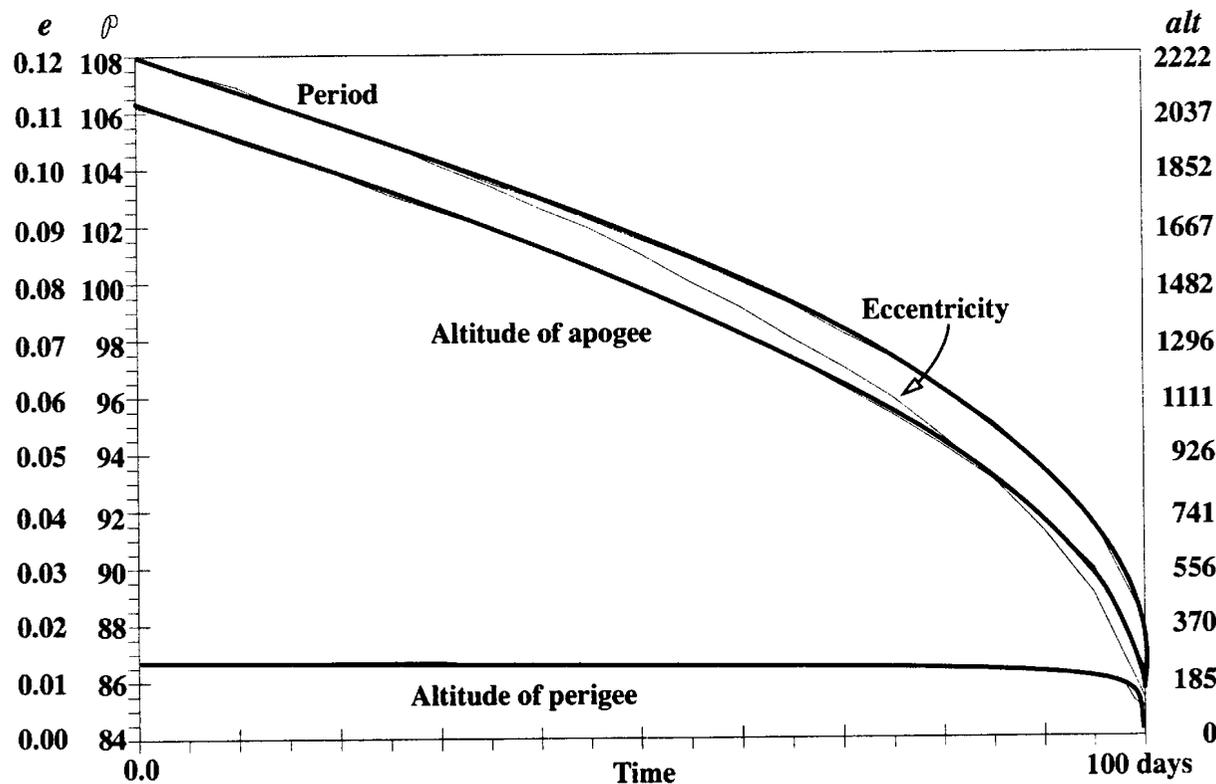


- Una vez la órbita es circular, el efecto es la lenta disminución del radio (caída en espiral), hasta la reentrada del vehículo.



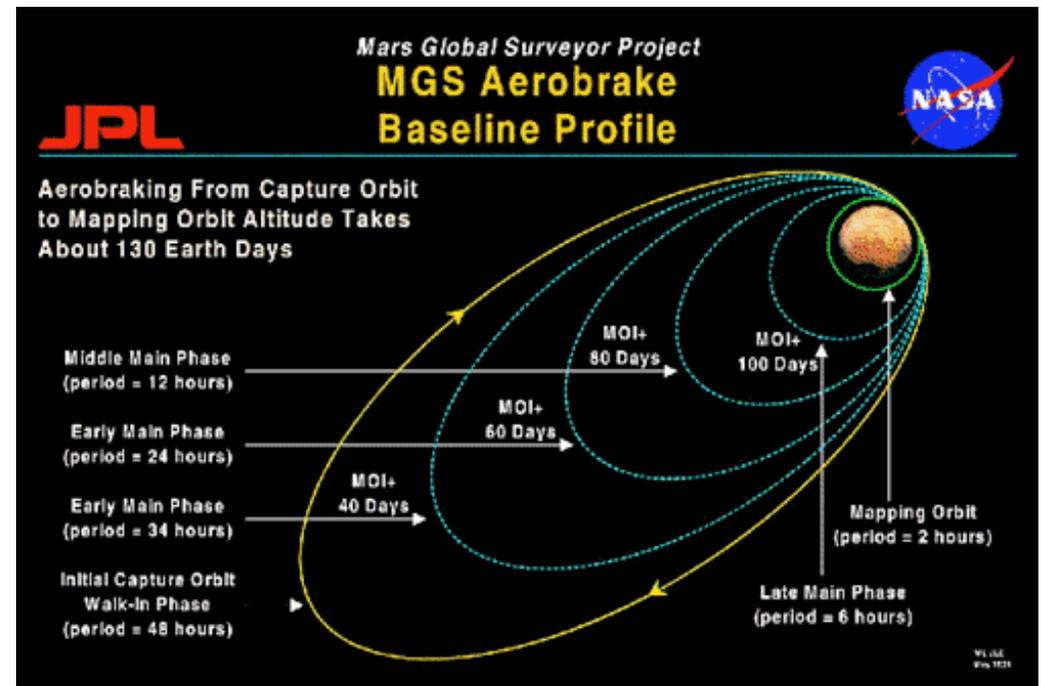
Resistencia atmosférica IV

- También produce perturbaciones seculares en la inclinación y periódicas en todos los elementos.
- Es el efecto que típicamente, para órbitas bajas, determina el tiempo de vida de un satélite.



Resistencia atmosférica V

- Este efecto se puede aprovechar para realizar maniobras de aerofrenado (aerobraking).
- Por ejemplo, en la “Mars Reconnaissance Orbiter” (2005), se consiguieron ahorrar 600 kg. de combustible.



- Otros ejemplos: Magallanes (Venus) — 1989–1994. Mars Surveyor — 1996–2006. Mars Odyssey — 2001.

Presión de radiación solar I

- La incidencia de la luz solar (fotones) en una superficie produce un efecto mecánico: la presión de radiación solar.
- A 1 AU del Sol, el flujo medio de radiación solar es de $I_{\oplus} = 1367 \text{ W/m}^2$. A otras distancias se tiene $I = I_{\oplus} \left(\frac{L_{\oplus}}{L}\right)^2$. La presión se calcula usando c (la velocidad de la luz) como $p = I/c$. Se tiene $I_{\oplus}/c = 4,5 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$.
- La fuerza en una placa plana (como un espejo, o un panel solar) será $F = pA(1 + \varepsilon) \cos \varphi_{\odot}$, donde A es el área, ε el coeficiente de reflectividad, y φ_{\odot} el ángulo de incidencia.
$$\varepsilon \in [-1, 1] : \begin{cases} \varepsilon = 1 : \text{totalmente reflectante} \\ \varepsilon = 0 : \text{absorbente (cuerpo negro)} \\ \varepsilon = -1 : \text{totalmente transparente} \end{cases}$$
- La fuerza de perturbación es $\vec{\gamma}_P \approx -\frac{F}{m_V} \vec{e}_{\odot}$, donde m_V es la masa del vehículo y \vec{e}_{\odot} apunta en la dirección del sol desde el vehículo.



Presión de radiación solar II

- Además existirá una fuerza de magnitud similar debida a la reflexión (perpendicular a los rayos reflejados). Todo esto para cada superficie expuesta al Sol.
- Es complejo de tratar analíticamente. Se puede demostrar que sólo se producen variaciones seculares en Ω y ω , mientras que el resto de variaciones son periódicas (con un periodo del orden de un año).
- En periodos de eclipse, la fuerza desaparece; además hay que tener en cuenta la sombra de la Tierra.
- Hay que tener en cuenta el albedo de la Tierra (reflexión de la luz del Sol en la Tierra).
- Para vehículos con grandes paneles solares, A es grande, $\varphi_S = 0$, y $\varepsilon \approx 0,21$: el efecto puede ser apreciable.
- La presión de radiación solar se puede utilizar para obtener propulsión (velas solares) o como mecanismo de control de actitud (flaps solares).



Presión de radiación solar III

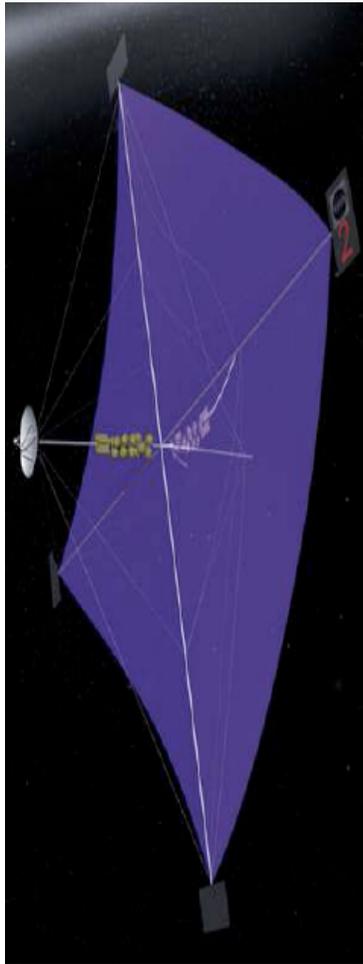


Figura: Vela Solar



Figura: Flap Solar

Resumen de efectos de perturbación I

	Gravedad		3 ^{er} cuerpo	Atmosf	Pres Rad
	Zonal	Sect/Tes			
a	P	P	P	P S	P
e	P	P	P	P S	P
i	P	P	P	P S	P
Ω	P S	P	P S	P	P S
ω	P S	P	P S	P	P S
M_0	P S	P	P S	P	P S

P: Periódicos
 S: Seculares

Figura: Efectos de perturbación



Resumen de efectos de perturbación II

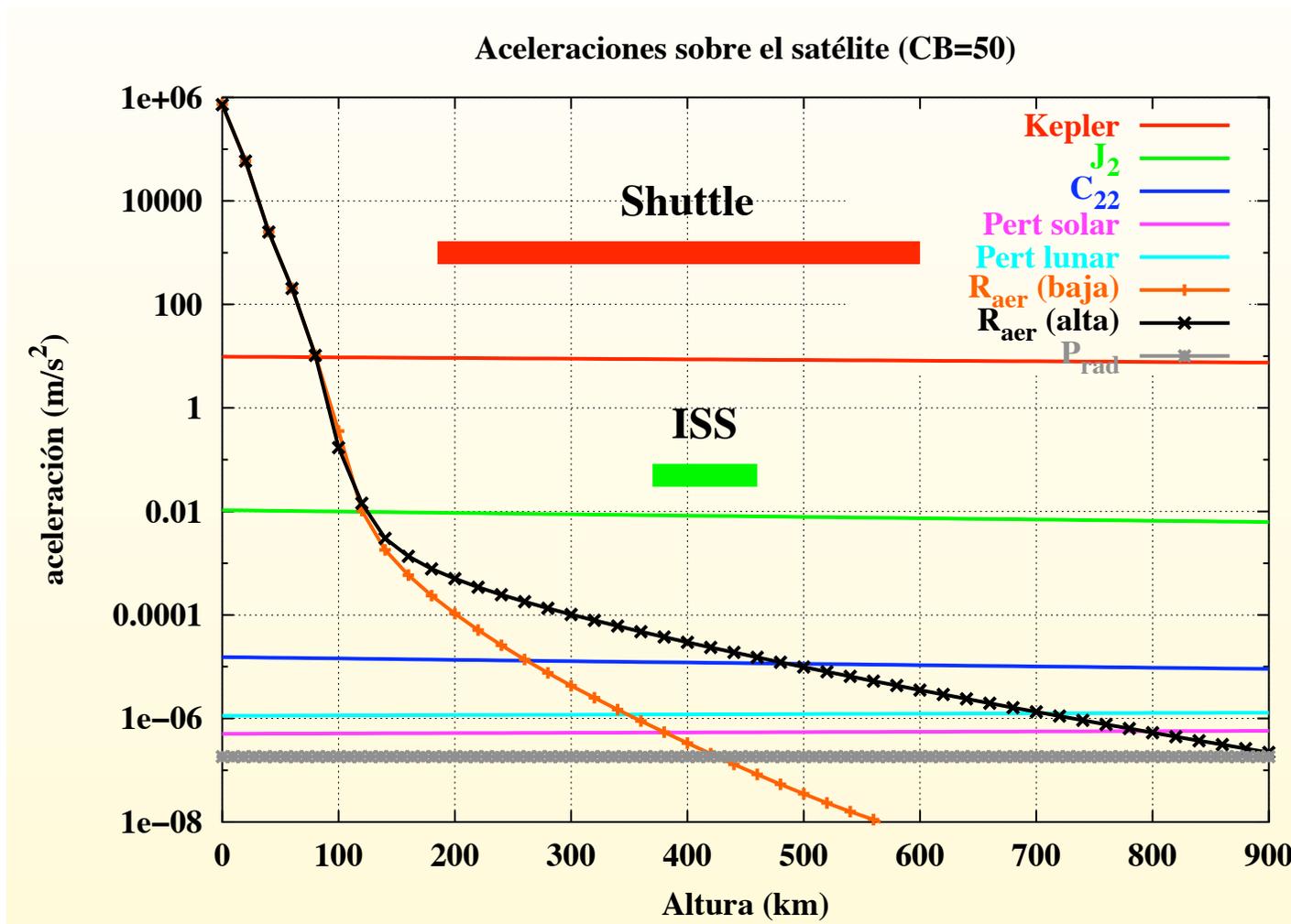


Figura: Efectos de perturbación en órbita baja



Resumen de efectos de perturbación III

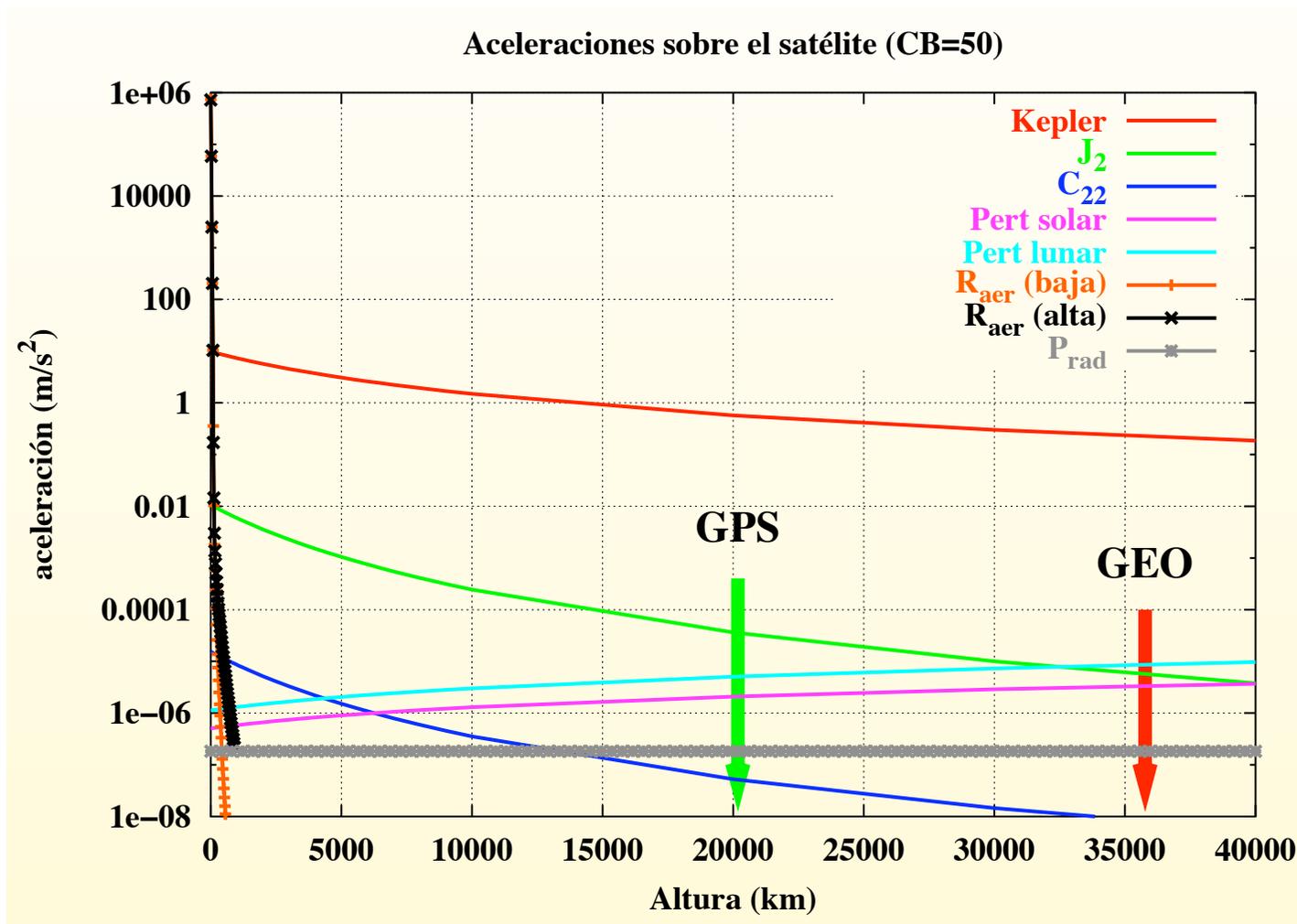


Figura: Efectos de perturbación en órbita elevada



Periodos orbitales

- Puesto que la órbita de un satélite sujeto a perturbaciones ya no es fija en el espacio, el concepto de “periodo” deja de estar claro. Por ello se definen los siguientes tipos de periodo:
 - **Periodo kepleriano** (T_K): el periodo clásico definido según el problema de los dos cuerpos. $T_K = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.
 - **Periodo anomalístico** (T_A): tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos por periapsis.
 - **Periodo nodal** (T_N , también llamado dracónico): tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos por el nodo ascendente.
 - **Periodo sidéreo** (T_S): tiempo que transcurre entre dos pasos sucesivos por un mismo valor del argumento de latitud $u = \omega + \theta$.
- Para órbitas no perturbadas, $T_A = T_N = T_S = T_K$.
- Si tenemos en cuenta los efectos seculares del J_2 , se puede aproximar $T_A \approx \frac{2\pi}{\dot{M}}$, $T_N \approx T_S \approx \frac{2\pi}{\dot{M} + \dot{\omega}}$.



Propagadores

- Un propagador de órbitas es un algoritmo que permite obtener efemérides futuras a partir de los elementos dados en una época.
- Formulación básica: dado $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ en el instante t_0 , calcular $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ en el instante t .
- En ausencia de perturbaciones, el propagador básico es el kepleriano o de los dos cuerpos:
 $(a, e, i, \Omega, \omega) = (a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0)$ y $M = M_0 + n(t - t_0)$.
- El caso opuesto, el más complicado posible, sería usar las ecuaciones planetarias (Lagrange o Gauss) e integrarlas numéricamente con el modelo más completo posible de perturbaciones.
- Existen muchos modelos intermedios, semianalíticos, que permiten obtener buenos resultados.



Propagador J2 medio

- Empleando los valores medios seculares encontrados para el J2, un posible propagador sería:

$$a = a_0,$$

$$e = e_0,$$

$$i = i_0,$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} n \frac{R_{\oplus}^2}{p^2} J_2 \cos i (t - t_0),$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{4} n \frac{R_{\oplus}^2}{p^2} J_2 (5 \cos^2 i - 1) (t - t_0),$$

$$M = M_0 + \left(n + \frac{3}{4} n \frac{R_{\oplus}^2}{p^2} J_2 \sqrt{1 - e^2} (2 - 3 \sin^2 i) \right) (t - t_0),$$

- Este propagador es simple de usar y útil en misiones en órbita baja, donde la influencia del J2 es grande.



Propagador planetario I

- Los elementos heliocéntricos de los planetas están sujetos a perturbaciones, pero éstas actúan de una forma bastante lenta.
- Clásicamente los elementos heliocéntricos de los planetas están dados en la forma $(a, e, i, \Omega, \varpi, L)$, donde $\varpi = \Omega + \omega$ es la longitud del perihelio, y $L = \varpi + M$ es la llamada longitud media.
- Modelo de primer orden:

$$(a, e, i, \Omega, \varpi, L) = (a_0, e_0, i_0, \varpi_0, L_0) + (\dot{a}, \dot{e}, \frac{d}{dt}i, \dot{\Omega}, \dot{\varpi}, \dot{L}) \times T_0$$

donde T_0 es el número de centurias julianas entre J2000 y el día en el que se quieren calcular los elementos planetarios heliocéntricos. T_0 se calcula con la fórmula $T_0 = \frac{\text{JD}-2451545}{36525}$, donde JD es el día juliano de cálculo.

- Los valores de los elementos y su variación están en una tabla en la siguiente transparencia.



Propagador planetario II

- Valores de los elementos y su variación para su uso en la anterior fórmula:

1 Planetary orbital elements and their centennial rates. From Standish et al. (1992).
 Used with permission

	a , AU	e	i , deg	Ω , deg	$\tilde{\omega}$, deg	L , deg
	\dot{a} , AU/Cy	\dot{e} , 1/Cy	\dot{i} , "/Cy	$\dot{\Omega}$, "/Cy	$\dot{\tilde{\omega}}$, "/Cy	\dot{L} , "/Cy
Mercury	0.38709893	0.20563069	7.00487	48.33167	77.45645	252.25084
	0.00000066	0.00002527	-23.51	-446.30	573.57	538 101 628.29
Venus	0.72333199	0.00677323	3.39471	76.68069	131.53298	181.97973
	0.00000092	-0.00004938	-2.86	-996.89	-108.80	210 664 136.06
Earth	1.00000011	0.01671022	0.00005	-11.26064	102.94719	100.46435
	-0.00000005	-0.00003804	-46.94	-18228.25	1198.28	129 597 740.63
Mars	1.52366231	0.09341233	1.85061	49.57854	336.04084	355.45332
	-0.00007221	0.00011902	-25.47	-1020.19	1560.78	68 905 103.78
Jupiter	5.20336301	0.04839266	1.30530	100.55615	14.75385	34.40438
	0.00060737	-0.00012880	-4.15	1217.17	839.93	10 925 078.35
Saturn	9.53707032	0.05415060	2.48446	113.71504	92.43194	49.94432
	-0.00301530	-0.00036762	6.11	-1591.05	-1948.89	4 401 052.95
Uranus	19.19126393	0.04716771	0.76986	74.22988	170.96424	313.23218
	0.00152025	-0.00019150	-2.09	-1681.4	1312.56	1 542 547.79
Neptune	30.06896348	0.00858587	1.76917	131.72169	44.97135	304.88003
	-0.00125196	0.00002514	-3.64	-151.25	-844.43	786 449.21
Pluto	39.48168677	0.24880766	17.14175	110.30347	224.06676	238.92881
	-0.00076912	0.00006465	11.07	-37.33	-132.25	522 747.90



Propagador GPS I

- Una aplicación en la que es de particular importancia conocer con precisión los elementos es la de los satélites GPS.
- Los receptores (navegadores) reciben de los propios satélites información (efemérides) que les permite reconstruir la posición del satélite; por tanto todo receptor GPS debe contener un propagador de órbitas.
- La información emitida por los satélites es:
 $t_0, \sqrt{a}, e, \Omega_0, \omega_0, i_0, M_0, \Delta n, \dot{\Omega}, \frac{d}{dt}i, C_{uc}, C_{us}, C_{rc}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is}$.
- Las fórmulas que se emplean son:

$$M = M_0 + \left(\sqrt{\mu/a^3} + \Delta n \right) (t - t_0),$$

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0),$$

$$\omega = \omega_0 + C_{uc} \cos(2u_0) + C_{us} \sin(2u_0),$$

$$i = i_0 + \frac{d}{dt}i(t - t_0) + C_{ic} \cos(2u_0) + C_{is} \sin(2u_0).$$



Propagador GPS II

- En las anteriores fórmulas, una vez encontrada M hay que resolver la ecuación de Kepler $M = E - e \sin E$, hallar θ de E , y calcular $u_0 = \omega_0 + \theta$.
- Por otro lado también se suelen dar fórmulas para calcular la distancia geocéntrica del satélite. Se calcula $r_0 = a(1 - e \cos E)$ y se emplea la fórmula:
$$r = r_0 + C_{rc} \cos(2u_0) + C_{rs} \sin(2u_0).$$
- Si bien las anteriores fórmulas permiten reconstruir con una precisión razonable la posición de los satélites GPS, dicha precisión no es suficiente para aplicaciones de mucha precisión.
- Para dichas aplicaciones, se pueden obtener efemérides post-procesadas (con precisión de cm), basadas en observaciones. Están disponibles de forma gratuita, del IGS (International GPS Service), por ejemplo, en internet, y se dan en forma de coeficientes de polinomios de Lagrange que interpolan con gran precisión los elementos.

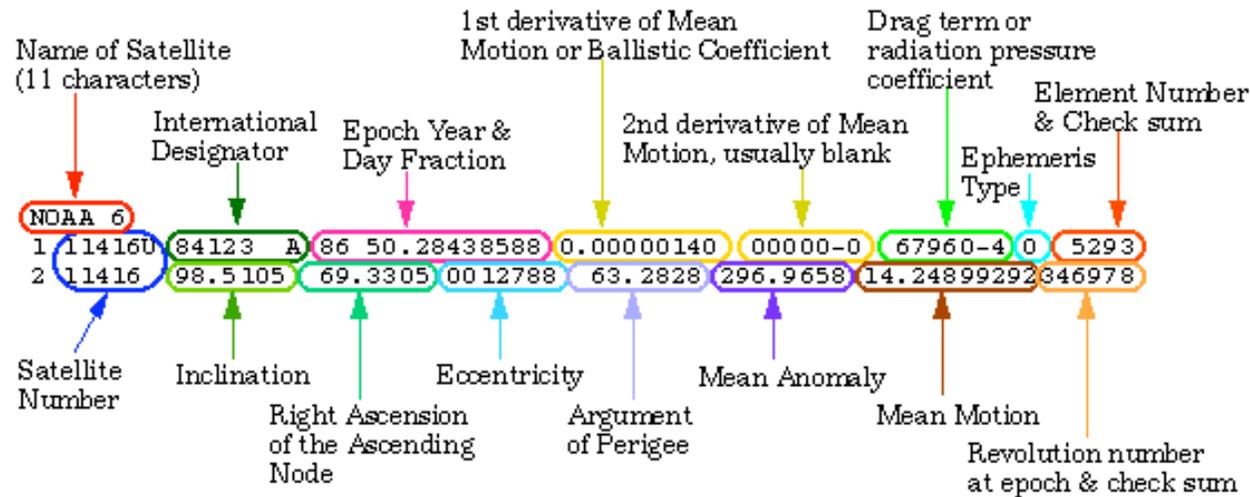


Modelo de perturbaciones y propagador SGP4

- Un modelo semianalítico que tiene en cuenta perturbaciones hasta el J3 y rozamiento atmosférico es el SGP4 (Simplified General Perturbations Satellite Orbit Model 4).
- Este modelo, desarrollado por la NASA, es especialmente útil para órbitas bajas donde la influencia del rozamiento atmosférico es considerable. Se consiguen precisiones en torno a un kilómetro durante unos días (más tarde habría que actualizar los elementos con nuevas observaciones).
- Existen otras versiones (SGP8, SDP4) con mayor precisión, pero ésta es la más usada por su sencillez y rapidez de cálculo, y sobre todo por compatibilidad.
- Su precisión es de aproximadamente un kilómetro. Emplea elementos orbitales medios, dados en el formato de dos líneas (TLE: two line elements) que estudiamos a continuación.



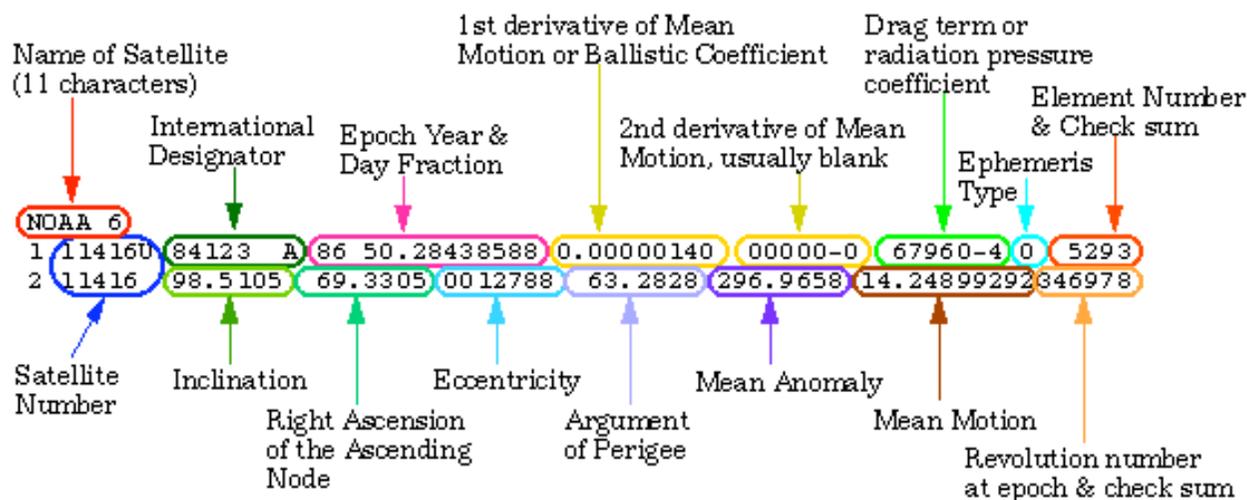
Formato NASA/NORAD



- Los satélites vienen descritos en las bases de datos por dos líneas de números (en inglés “two-line elements”).
- En la primera línea viene t_0 (la época, en forma de año y fracción de días), y en la segunda, i , Ω , e (se asume un punto decimal al principio), ω , M , y n (en revoluciones por día). El número de revoluciones es el número de vueltas que el satélite ha dado a su órbita en t_0 .
- Los otros números sirven para clasificar el satélite o para modelos más complejos, que incluyen perturbaciones.



Formato NASA/NORAD



■ Ejemplos (celestrak.com):

ISS(ZARYA)

```
1 25544U 98067A 07281,99344815 ,0000942300000 - 0 64778 - 4 0 1234
2 25544 51,6338 236,8689 0003196 79,3949 325,2109 15,75490408508738
```

METEOSAT7

```
1 24932U 97049B 07280,81168990 ,00000059 00000 - 0 10000 - 3 0 2809
2 24932 3,6428 76,9883 0001162 185,2668 103,4399 1,00269406 36985
```



Actualización de elementos

- En la práctica, los propagadores nunca predicen con total exactitud los elementos orbitales, y con el tiempo las predicciones se degradan.
- El procedimiento utilizado para evitar esta degradación consiste en obtener medidas de posición y velocidad a partir de observaciones realizadas con cierta frecuencia (por ejemplo cada día o semana).
- Se combinan las medidas obtenidas con el modelo de propagador para obtener una “actualización” de los elementos.
- La herramienta que permite decidir como combinar las medidas con el modelo de propagación se conoce como “Filtro de Kalman”, pondera medidas y modelo en función del error esperado de ambos.

