

# Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales

## Tema 7: Maniobras Orbitales.

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla  
rvazquez1@us.es

29 de junio de 2023



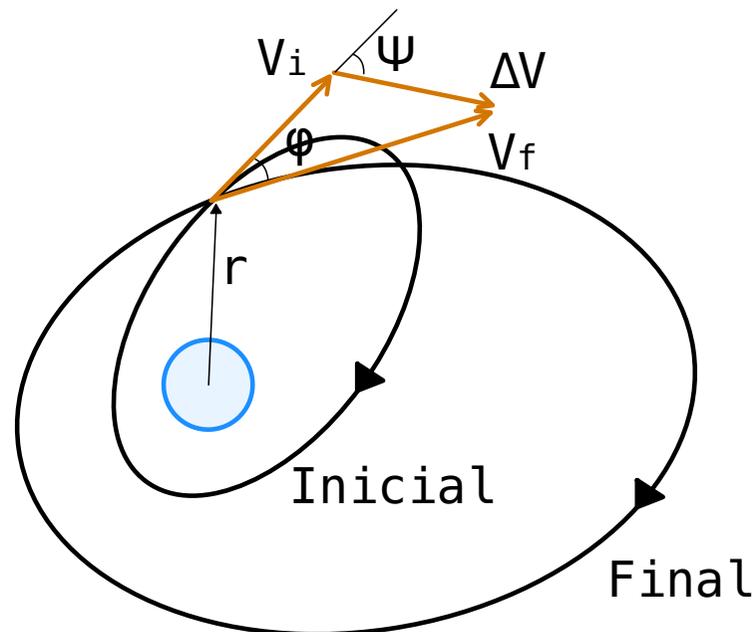
# Introducción

- En general, no es posible alcanzar la órbita requerida para una misión directamente en el lanzamiento.
  - El rango de inclinaciones que se pueden alcanzar es limitado.
  - Las sondas lunares o interplanetarias no se suelen lanzar a su trayectoria definitiva, sino a una órbita de “aparcamiento” intermedia.
  - El objetivo de la misión puede necesitar una órbita inicial que luego debe ser modificada.
- Además, debido al efecto de perturbaciones, las órbitas se **degradan** con el tiempo y es necesario corregirlas (stationkeeping).
- Por tanto, las **maniobras** para modificar una órbita son parte de cualquier misión. La forma de llevar a cabo una maniobra es mediante propulsión, proporcionada por motores cohete de combustible sólido o líquido (en este curso no consideramos otros tipos de propulsión continua, como motores eléctricos o velas solares, que exigen integración numérica).



## Maniobra básica I

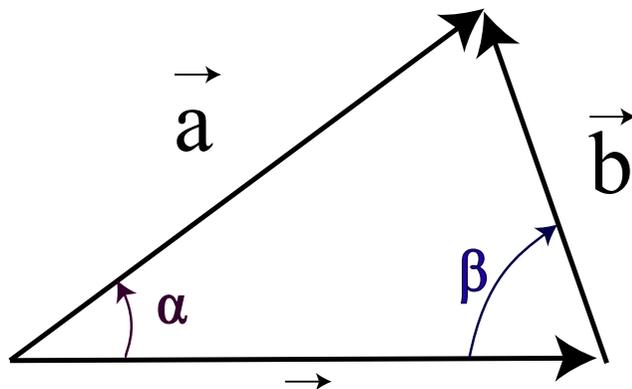
- **Hipótesis fundamental:** El tiempo de combustión de los cohetes es muy pequeño comparado con el periodo orbital del satélite.
- Entonces el efecto de la propulsión se puede asimilar a un impulso instantáneo  $\overrightarrow{\Delta V}$  en la velocidad; la nueva velocidad  $\vec{V}_f = \vec{V}_i + \overrightarrow{\Delta V}$  define una órbita diferente, con el mismo foco:



## Introducción a los fasores

- **Resolución del triángulo:** Hay varios métodos para resolverlo, siendo los 2 primeros los generalmente utilizados.
  - Trigonometría plana: Empleando el teorema del seno y del coseno (observe el Anexo del Tema 8).
  - Fasores: Empleando vectores coplanarios.
  - Vectores.
- Resolución con fasores: El triángulo de la figura pueden entenderse matemáticamente como  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ . Esta expresión se puede calcular mediante fasores como:

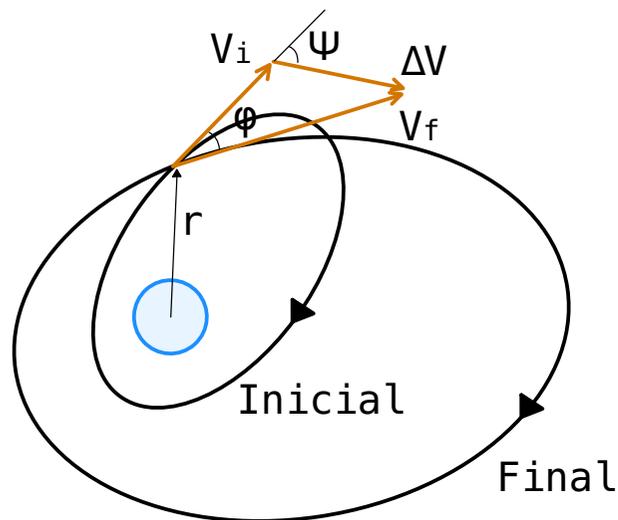
$$a \angle \alpha = b \angle 180 - \beta + c \angle 0^\circ$$



- Los ángulos deben de medirse todos en el mismo sentido. Por eso, la fase de  $\vec{b}$  es el ángulo suplementario a  $\beta$ , el medido en el sentido de  $\alpha$ .

## Maniobra básica II

### Resolución trigonométrica



- En el caso más simple (maniobra coplanaria) la maniobra queda definida por el escalar  $|\overrightarrow{\Delta V}| = \Delta V$  y el ángulo  $\psi$  que forma  $\overrightarrow{\Delta V}$  con  $\vec{V}_i$  (convenio:  $\psi$  medida en el sentido contrario de las agujas del reloj).

- Partiendo de la velocidad final deseada  $V_f$  y  $\varphi$  (el ángulo entre  $V_i$  e  $V_f$ ), se obtienen  $(\Delta V, \psi)$  mediante el teorema del coseno:

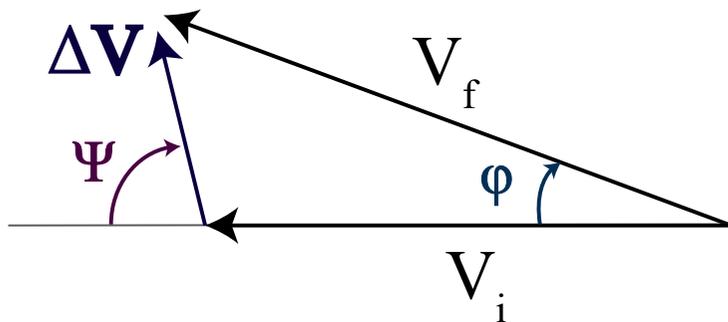
$$\Delta V^2 = V_i^2 + V_f^2 - 2V_i V_f \cos \varphi, \text{ y el teorema del seno: } \sin \psi = \frac{V_f \sin \varphi}{\Delta V}.$$

- Obsérvese que la velocidad final se maximiza (minimiza) en el caso de que  $\psi = 0^\circ$  ( $180^\circ$ ). En tal caso  $V_f = V_i + \Delta V$  ( $V_f = V_i - \Delta V$ ). Es decir, la dirección tangente es la de “máximo aprovechamiento” del impulso añadido.



## Maniobra básica III

### Resolución por fasores



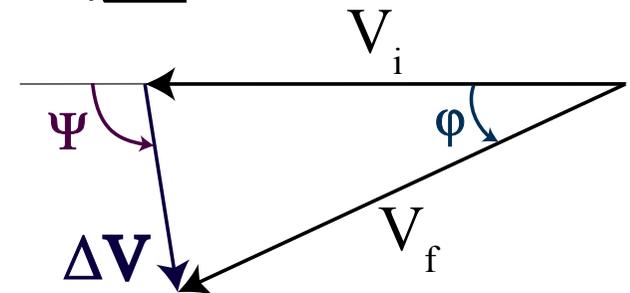
- La maniobra se define de la misma forma vista en la diapositiva anterior.
- Partiendo de  $(\Delta V, \psi)$ , se obtienen  $(V_f, \varphi)$  mediante fasores (invariante con el convenio de ángulos considerado):

$$\underline{V_f / \varphi} = \underline{\Delta V / \psi} + \underline{V_i / 0^\circ}$$

- Es muy importante recordar que  $\psi$  y  $\varphi$  deben medirse en el mismo sentido, respetando en todo momento los signos de los ángulos para los cálculos.

- Consejos:

- Dibujar siempre el triángulo, para entender bien el problema.
- Atención a las unidades: el problema puede resolverse en las unidades que se desee, siempre y cuando se mantenga la coherencia (P.ej: usar grados o radianes en la fase).



## Ventajas de la resolución por fasores

- Simplifica los cálculos.  
El problema puede ser resuelto rápidamente con las calculadoras científicas habitualmente usadas, recurriendo al modo de *Complejos*.
- Facilita los giros de los vectores.  
Aunque también es posible trigonométricamente, la complejidad de este proceso y el riesgo de equivocarse disminuye en gran medida ya que sólo implica sumar o restar el ángulo de giro a la fase correspondiente.
- Es más difícil equivocarse y agiliza la resolución.
- Formulación independiente del convenio de ángulos considerado, es decir, resulta la misma para ambos triángulos mostrados en la diapositiva anterior (se respetan los signos de los ángulos).



## Consumo de combustible I

- El consumo de combustible viene dado por:

$$\Delta V = V_e \ln \frac{m_0 + m_p}{m_0}$$

donde  $V_e$  es la velocidad específica de escape del propulsante,  $m_0$  es la masa sin propulsante y  $m_p$  es la masa de propulsante.

- $V_e = I_{sp}g$  donde  $I_{sp}$  es el impulso específico y  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

- De la anterior expresión,  $m_p = m_0 \left( e^{\frac{\Delta V}{I_{sp}g}} - 1 \right)$

- Obsérvese que si se requieren  $n$  maniobras:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{TOTAL}} &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n \\ &= V_e \left( \ln \frac{m_0 + m_{p1} + \dots + m_{pn}}{m_0 + m_{p2} + \dots + m_{pn}} + \ln \frac{m_0 + m_{p2} + \dots + m_{pn}}{m_0 + m_{p3} + \dots + m_{pn}} + \dots + \ln \frac{m_0 + m_{pn}}{m_0} \right) \\ &= V_e \ln \frac{m_0 + m_{p1} + \dots + m_{pn}}{m_0} \\ &= V_e \ln \frac{m_0 + (m_p)_{\text{TOTAL}}}{m_0} \end{aligned}$$



## Consumo de combustible II

- El razonamiento anterior no es válido si consideramos diferentes **etapas**, que no sólo constan del peso de combustible  $m_{pi}$  sino también del peso estructural  $m_{si}$  de cada etapa (que contiene al depósito), que se eyecta al consumirse.
- Por ejemplo, para dos etapas, se tendría:

$$\Delta V_1 = V_e \ln \frac{m_0 + m_{s1} + m_{s2} + m_{p1} + m_{p2}}{m_0 + m_{s1} + m_{s2} + m_{p2}} = V_e \ln \left( 1 + \frac{m_{p1}}{m_0 + m_{s1} + m_{s2} + m_{p2}} \right)$$

$$\Delta V_2 = V_e \ln \frac{m_0 + m_{s2} + m_{p2}}{m_0 + m_{s2}} = V_e \ln \left( 1 + \frac{m_{p2}}{m_0 + m_{s2}} \right)$$

$$\Delta V_{\text{TOTAL}} = V_e \ln \left[ \left( 1 + \frac{m_{p1}}{m_0 + m_{s1} + m_{s2} + m_{p2}} \right) \left( 1 + \frac{m_{p2}}{m_0 + m_{s2}} \right) \right]$$

- En la anterior expresión (también para  $n$  etapas) se pueden buscar los valores **óptimos** de  $(m_{p1}, m_{s1})$  y  $(m_{p2}, m_{s2})$  que minimizan el consumo  $m_{p1} + m_{p2}$  para un valor de  $\Delta V_{\text{TOTAL}}$ .
- Esta distribución óptima del combustible por etapas (ya considerada por Tsiolkovsky) permite alcanzar valores de  $\Delta V$  que no se podrían alcanzar con una sola etapa.



## Cambio de radio de perigeo/apogeo y circularización

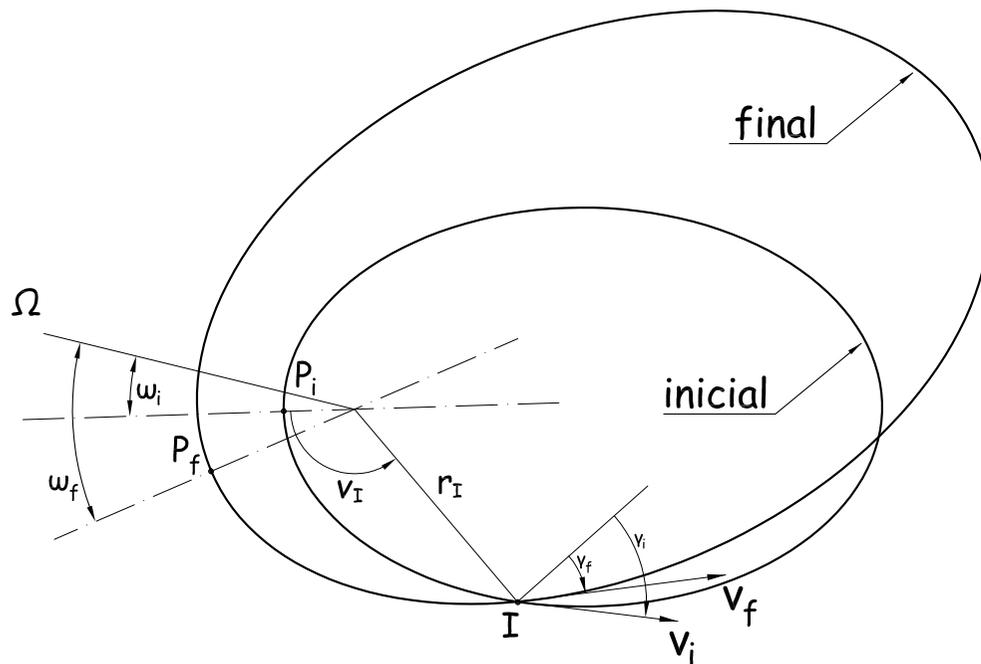
- **Regla:** Para cambiar el apogeo, aplicar un  $\Delta V$  tangente en el perigeo. Para cambiar el perigeo, aplicar un  $\Delta V$  tangente en el apogeo.
- **Ejemplo. Cambio de apogeo:**
  - Supongamos un perigeo  $r_p$ , un apogeo inicial  $r_{ai}$  y uno final  $r_{af}$ .
  - Por tanto  $a_i = \frac{r_p + r_{ai}}{2}$  y  $a_f = \frac{r_p + r_{af}}{2}$ .
  - Usando la ecuación de las fuerzas vivas en el perigeo:  

$$v_i = \sqrt{\frac{2\mu}{r_p} - \frac{\mu}{a_i}} \text{ y } v_f = \sqrt{\frac{2\mu}{r_p} - \frac{\mu}{a_f}}$$
  - Por tanto:  

$$\Delta V = |v_f - v_i| = \sqrt{\frac{2\mu}{r_p}} \left| \sqrt{1 - \frac{1}{1+r_{af}/r_p}} - \sqrt{1 - \frac{1}{1+r_{ai}/r_p}} \right|$$
- Si el objetivo es circularizar, entonces es necesario hacer  $r_a = r_p$ . En el ejemplo anterior, sería lo mismo que hacer  $r_{af} = r_p$ , y por tanto:  $\Delta V = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \left( \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{1+r_{ai}/r_p}} - 1 \right) > 0$
- En función de  $a$  y  $e$ :  $\Delta V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1-e}}$



## Cambio genérico de órbita coplanaria I



- En general un  $\Delta V$  arbitrario en el mismo plano provocará un cambio de  $a$ ,  $e$  y  $\omega$ .
- Conocidos  $(a_i, e_i, \omega_i)$  y  $(a_f, e_f, \omega_f)$ , el punto de maniobra se obtiene de
 
$$r_i = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i \cos \theta_i} = r_f = \frac{a_f(1-e_f^2)}{1+e_f \cos \theta_f},$$
 donde  $\theta_i + \omega_i = \theta_f + \omega_f$ .
- $v_i$  depende de  $a_i, r_i$  y  $v_f$  de  $a_f, r_f$ .
- Usando los ángulos de trayectoria,  $\varphi = \gamma_i - \gamma_f$ . Con estos valores ya podemos hallar  $\Delta V$  y  $\psi$ .
- Para encontrar  $\gamma_f$  y  $\gamma_i$  se usa la fórmula  $\tan \gamma = \frac{e \sin \theta}{1+e \cos \theta}$ .
- En la siguiente transparencia detallamos más el procedimiento para hallar  $\theta_i$  y  $\theta_f$ .



## Cambio genérico de órbita coplanaria II

- ¿Cómo despejar  $\theta_i$  y  $\theta_f$  de las dos siguientes ecuaciones?

$$\frac{a_i(1 - e_i^2)}{1 + e_i \cos \theta_i} = \frac{a_f(1 - e_f^2)}{1 + e_f \cos \theta_f}, \quad \theta_i + \omega_i = \theta_f + \omega_f$$

- Paso 1: Escribir por ejemplo  $\theta_f$  en función de  $\theta_i$  y eliminar las fracciones:

$$a_i(1 - e_i^2)(1 + e_f \cos(\theta_i + \omega_i - \theta_f)) = a_f(1 - e_f^2)(1 + e_i \cos \theta_i)$$

- Paso 2: Usar la fórmula del coseno de la suma y agrupar factores:

$$\begin{aligned} [a_f(1 - e_f^2) - a_i(1 - e_i^2)] &= [a_i(1 - e_i^2)e_f \cos(\omega_i - \theta_f) - a_f(1 - e_f^2)e_i] \cos(\theta_i) \\ &\quad - [a_i(1 - e_i^2)e_f \sin(\omega_i - \theta_f)] \sin(\theta_i) \end{aligned}$$



## Cambio genérico de órbita coplanaria III

- Paso 3: Identificando coeficientes, esta es una ecuación del tipo  $A \sin \theta + B \cos \theta = C$ . En primer lugar, esta ecuación sólo tiene solución si  $A^2 + B^2 \geq C^2$ . Definimos  $D = \sqrt{A^2 + B^2}$  y dividimos la ecuación por esta cantidad:

$$\frac{A}{D} \sin \theta + \frac{B}{D} \cos \theta = \frac{C}{D}$$

- Paso 4: Convertir esta ecuación a una del tipo  $\cos(\theta - \theta_0) = \frac{C}{D}$ . Desarrollando la fórmula del coseno de una diferencia:

$$\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 = \frac{C}{D}$$

por lo que identificando coeficientes:  $\sin \theta_0 = \frac{A}{D}$ ,  $\cos \theta_0 = \frac{B}{D}$ , lo que permite hallar  $\theta_0$  sin ambigüedad.



## Cambio genérico de órbita coplanaria IV

- Paso 5: Resolviendo la ecuación  $\cos(\theta - \theta_0) = \frac{C}{D}$ , obtenemos

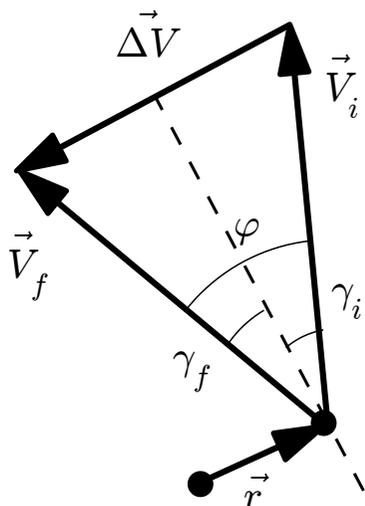
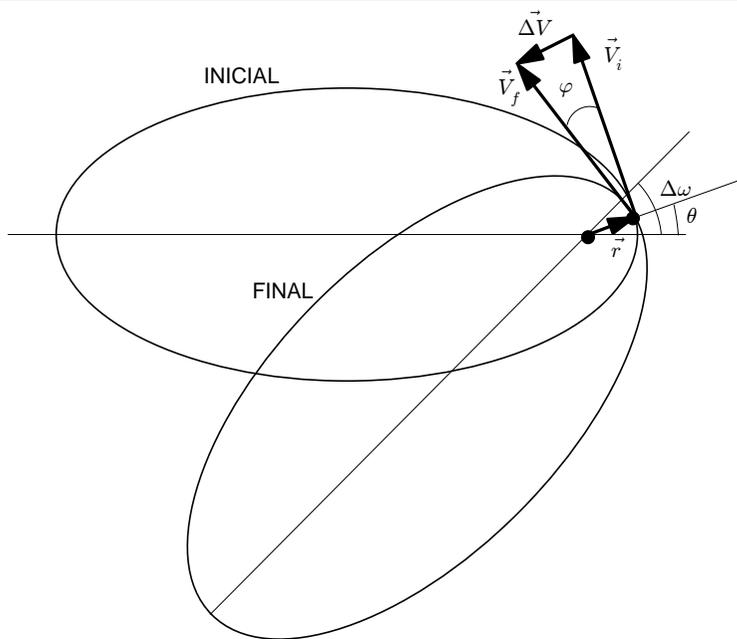
$$\theta = \theta_0 \pm \arccos \left[ \frac{C}{D} \right]$$

donde vemos que hay dos posibles soluciones en general.

- El procedimiento inverso (dado el  $\Delta_V$  y  $\psi$ , y la órbita original  $a_i, e_i, \omega_i$ , así como el punto de aplicación  $\theta_i$ ), es más directo. Se calcula primero  $r_i, V_i$  y  $\gamma_i$ . Con el triángulo de velocidades se calcula  $V_f$  y  $\varphi$ . Se obtiene  $\gamma_f$ . Con  $V_f, r_f = r_i$  y  $\gamma_f$  se calculan  $a_f$  y  $e_f$ . Se obtiene  $\theta_f$  y finalmente  $\omega_f = \omega_i + \theta_i - \theta_f$ .

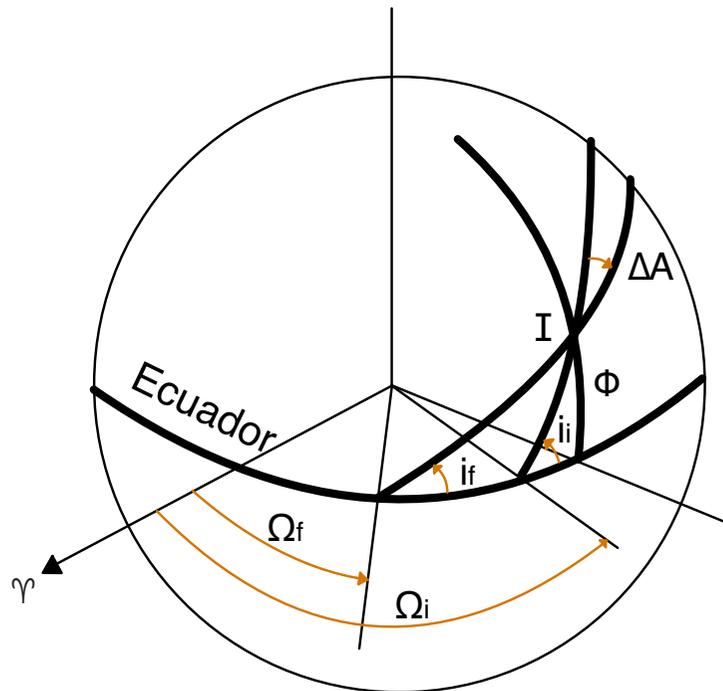


## Rotación de la línea de ápsides



- Se pretende rotar  $\omega$  en una cantidad  $\Delta\omega$ , sin modificar  $a$  ni  $e$ .
- Por tanto,  $V_f = V_i = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$ . Se deduce que el punto de aplicación de  $\Delta V$  vendrá dado por  $\theta_i = \Delta\omega/2$ , por tanto  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \Delta\omega/2}$ . Obsérvese que  $\theta_f = -\Delta\omega/2$  (otra solución es  $\theta_i = \pi + \Delta\omega/2, \theta_f = \pi - \Delta\omega/2$ ).
- Falta encontrar  $\varphi$ , que se deduce de  $\varphi = \gamma_i - \gamma_f$ . Puesto que  $\tan \gamma = \frac{e \sin \theta}{1+e \cos \theta}$ , se tiene que  $\gamma_f = -\gamma_i$ , luego  $\varphi = 2\gamma_i$  y que  $\tan \gamma_i = \frac{e \sin \Delta\omega/2}{1+e \cos \Delta\omega/2}$ .
- Se deduce  $\Delta V = 2V_i \sin \gamma_i$  y desarrollando  $\Delta V = 2e \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left| \sin \frac{\Delta\omega}{2} \right|$  (la otra solución requiere el mismo  $\Delta V$ ).

## Cambio de plano orbital



- Supongamos que queremos mantener  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$  y  $\theta$  pero queremos variar el plano ( $\Omega$  e  $i$ ).
- Si  $a$  no cambia,  

$$V_f = V_i = \sqrt{2\mu/r - \mu/a}$$
 por tanto el ángulo  $\varphi$  ( $\Delta A$  en la figura) determina la maniobra, junto con la latitud  $\phi$  en la que se debe efectuar la maniobra.

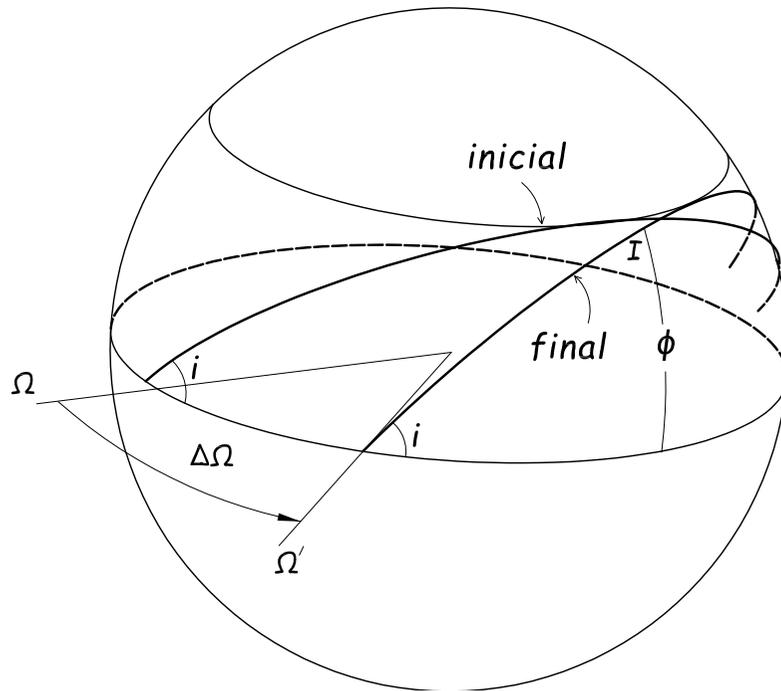
- De la trigonometría esférica se encuentran las fórmulas:  

$$\cos \Delta A = \cos i_i \cos i_f + \sin i_i \sin i_f \cos(\Omega_f - \Omega_i)$$
 y  

$$\sin \phi = \frac{\sin i_i \sin i_f \sin(\Omega_f - \Omega_i)}{\sin \Delta A}$$
- Se tiene  $\Delta V = 2V_i \sin \Delta A/2$ .



## Cambio sólo de nodo o de inclinación



- **Cambio de  $\Omega$  sin cambiar  $i$ :** De las fórmulas anteriores  

$$\cos \Delta A = \cos^2 i + \sin^2 i \cos(\Omega_f - \Omega_i)$$
y 
$$\sin \phi = \frac{\sin^2 i \sin(\Omega_f - \Omega_i)}{\sin \Delta A}.$$
Usando la fórmula  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha/2$  se puede deducir:  

$$\sin \frac{\Delta A}{2} = \sin i \sin \frac{\Omega_f - \Omega_i}{2}.$$
- Se tiene entonces  

$$\Delta V = 2V_i \sin i \sin(\Omega_f - \Omega_i)/2.$$

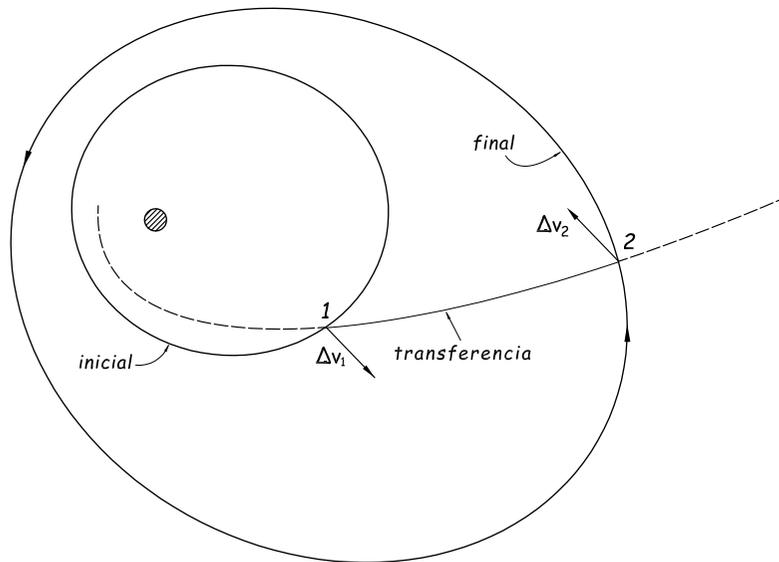
- **Cambio de  $i$  sin cambiar  $\Omega$ :**

$\cos \Delta A = \cos i_i \cos i_f + \sin i_i \sin i_f = \cos(i_i - i_f)$  luego  
 $\Delta A = i_i - i_f$ ; además,  $\phi = 0$ .

- Se tiene entonces  $\Delta V = 2V_i \sin(i_i - i_f)/2$ .



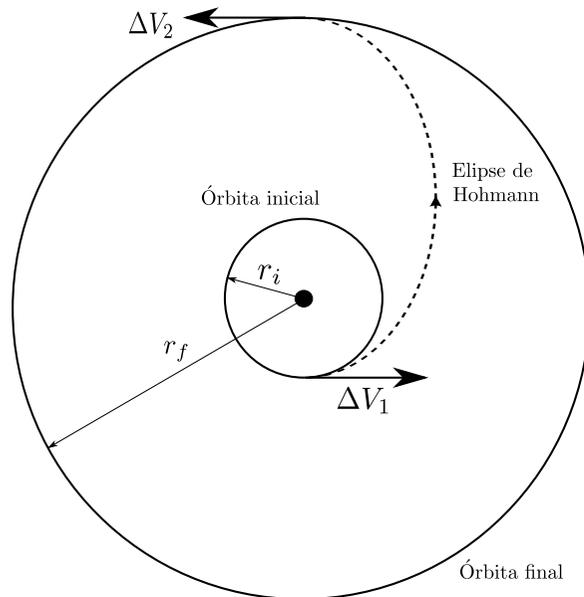
# Introducción



- Si la órbita final no tiene ningún punto en común con la órbita inicial, no es posible realizar la maniobra con un sólo impulso.
- Es necesario realizar una **transferencia**, con al menos dos maniobras intermedias de un sólo impulso.
- La órbita intermedia se denomina órbita de transferencia.
- En general existen infinitas posibles órbitas de transferencia. El “coste” de la transferencia será  $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ .
- Es importante determinar cuáles son las óptimas en algún sentido (mínimo consumo de combustible, mínimo tiempo de transferencia...).
- Inicialmente consideraremos transferencias coplanarias entre dos órbitas circulares.



# Transferencia de Hohmann I



- Dadas dos órbitas circulares de radios  $r_i$  y  $r_f$ , se puede demostrar que la transferencia de mínimo  $\Delta V$  usando dos impulsos es la llamada **transferencia de Hohmann**.
- El primer impulso lleva la órbita a una cuyo apogeo coincide con  $r_f$ , mientras que el segundo circulariza la órbita.
- La elipse de transferencia de Hohmann cumple  $a_H = \frac{r_i + r_f}{2}$ .

■ Luego  $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i} - \frac{\mu}{a_H}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}}$ ,  $\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_f} - \frac{\mu}{a_H}}$ .

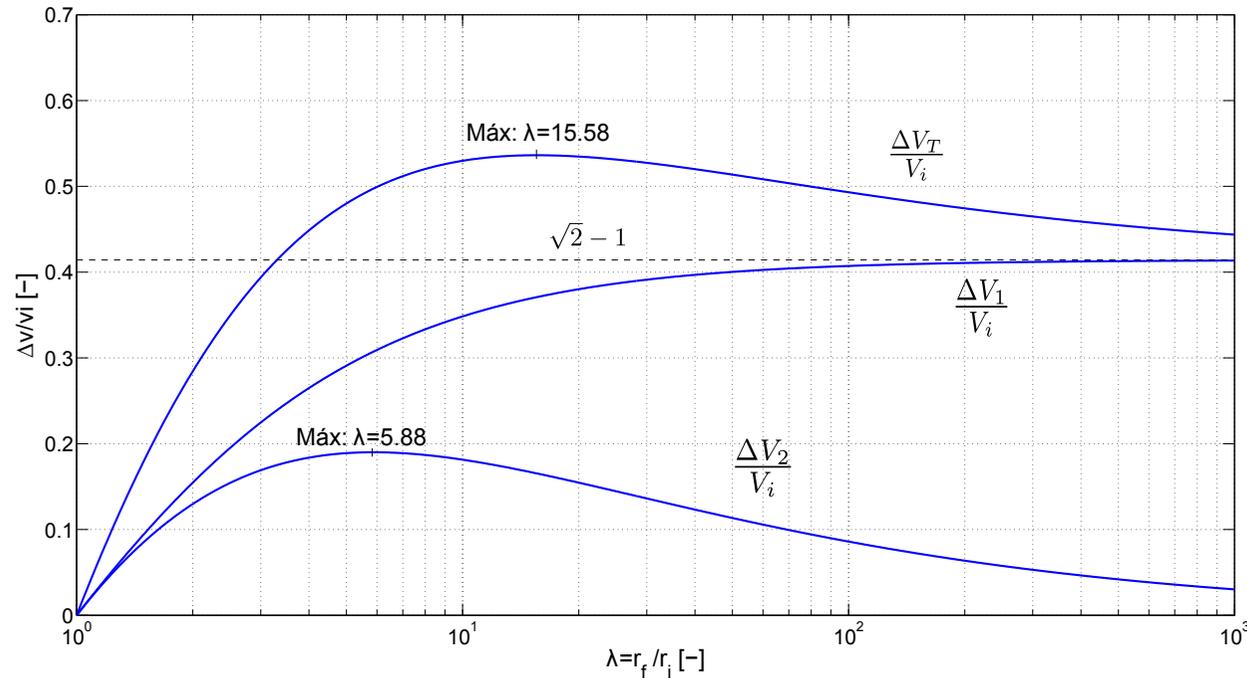
■ Llamando  $\lambda = \frac{r_f}{r_i}$ , se llega a  $\Delta V_1 = V_i \left( \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}} - 1 \right)$ ,

$\Delta V_2 = V_i \left( \sqrt{\frac{1}{\lambda}} - \sqrt{\frac{2}{\lambda(1+\lambda)}} \right)$ , luego se llega a

$\frac{\Delta V_T}{V_i} = \sqrt{\frac{2}{\lambda(1+\lambda)}} (\lambda - 1) + \sqrt{\frac{1}{\lambda}} - 1$ . También  $T_H = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}$ .



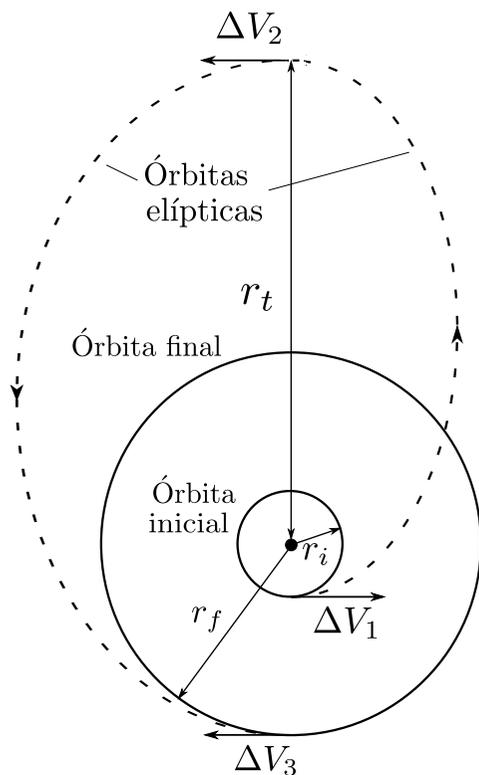
# Transferencia de Hohmann II



- El coste de la transferencia de Hohmann está representado en la figura más arriba, incluyendo transferencias interiores.
- Para  $\lambda \rightarrow \infty$  tenemos el impulso de escape ( $\sqrt{2} - 1$ ).
- Sólo para valores de  $\lambda$  en torno a la unidad es más económica la transferencia que el escape.
- Existe un máximo,  $\lambda \approx 15,58$ , para el cual el costo es máximo.



## Transferencia bipolarabólica/bieléptica I



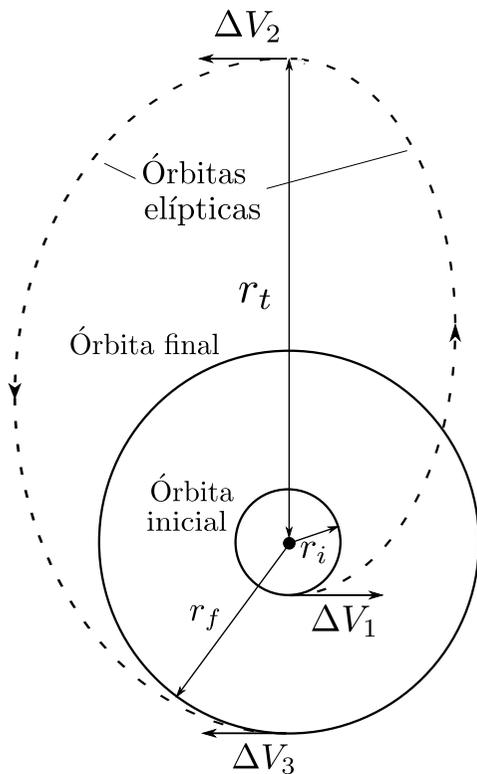
- Es posible mejorar la transferencia de Hohmann realizando más impulsos. La transferencia bieléptica requiere tres impulsos (que siempre son tangentes) y emplea dos órbitas de transferencia.
- La primera órbita de transferencia tiene como perigeo  $r_i$  y apogeo  $r_t$ ; mientras que la segunda tiene como perigeo  $r_f$  y apogeo  $r_t$ .
- Si  $r_t = \infty$  la transferencia se denomina “biparabólica” (caso a) ya que las dos órbitas de transferencia son parábolas.
- Se cumple  $a_1 = \frac{r_i + r_t}{2}$  y  $a_2 = \frac{r_f + r_t}{2}$ .

- Se tiene  $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i} - \frac{\mu}{a_1}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}}$ ,

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_t} - \frac{\mu}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_t} - \frac{\mu}{a_1}} \text{ y } \Delta V_3 = -\sqrt{\frac{\mu}{r_f}} + \sqrt{\frac{2\mu}{r_f} - \frac{\mu}{a_2}}.$$



## Transferencia bipolarabólica/bielíptica II



- Llamamemos como antes  $\lambda = \frac{r_f}{r_i}$  y  $\beta = \frac{r_t}{r_i}$ .

- Se tiene  $\Delta V_1 = V_i \left( \sqrt{2 - 2\frac{1}{1+\beta}} - 1 \right)$ ,

$$\Delta V_2 = V_i \left( \sqrt{\frac{2}{\beta} - \frac{2}{\lambda+\beta}} - \sqrt{\frac{2}{\beta} - \frac{2}{1+\beta}} \right) \text{ y}$$

$$\Delta V_3 = V_i \left( -\sqrt{\frac{1}{\lambda}} + \sqrt{\frac{2}{\lambda} - \frac{2}{\lambda+\beta}} \right).$$

- Por tanto:  $\Delta V_T =$

$$V_i \left( \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} - 1 + \sqrt{\frac{2\lambda}{\beta(\lambda+\beta)}} - \sqrt{\frac{2}{\beta(1+\beta)}} - \sqrt{\frac{1}{\lambda}} + \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda(\lambda+\beta)}} \right)$$

- Si  $r_t \rightarrow \infty$ , entonces  $\beta \rightarrow \infty$  y

$$\Delta V_T \rightarrow V_i (\sqrt{2} - 1) \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \right)$$

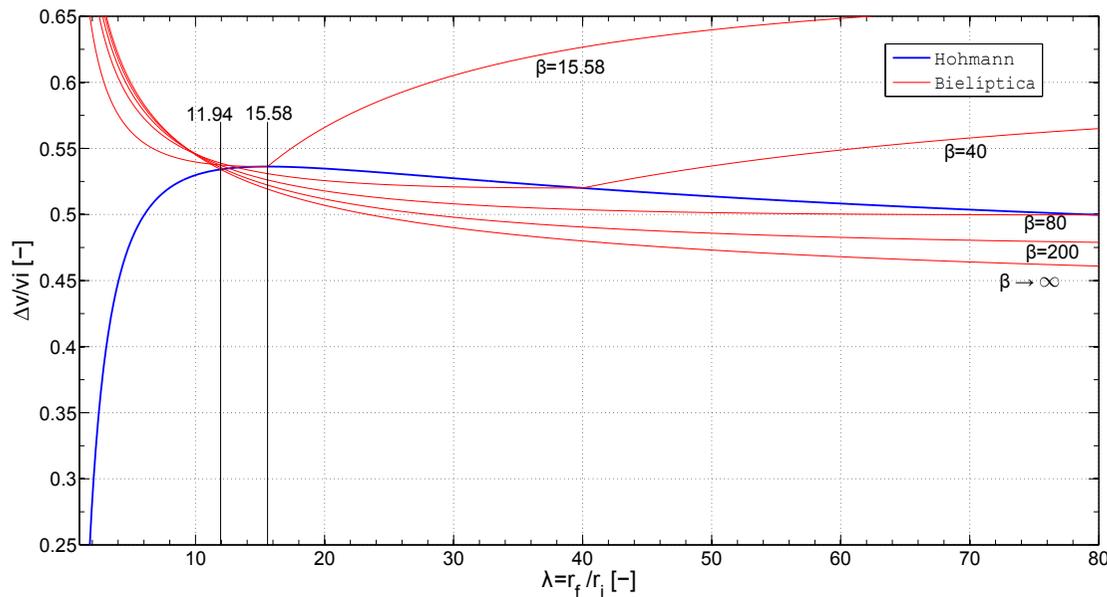
- Se tiene que  $\Delta V_T$  es decreciente con  $\beta$ , por lo tanto el anterior valor es el mínimo.

- El tiempo de transferencia será la suma de los dos

$$\text{semiperiodos: } T_B = \frac{T_1 + T_2}{2} = \pi \left( \sqrt{\frac{a_1^3}{\mu}} + \sqrt{\frac{a_2^3}{\mu}} \right)$$



# Comparación entre transferencias I

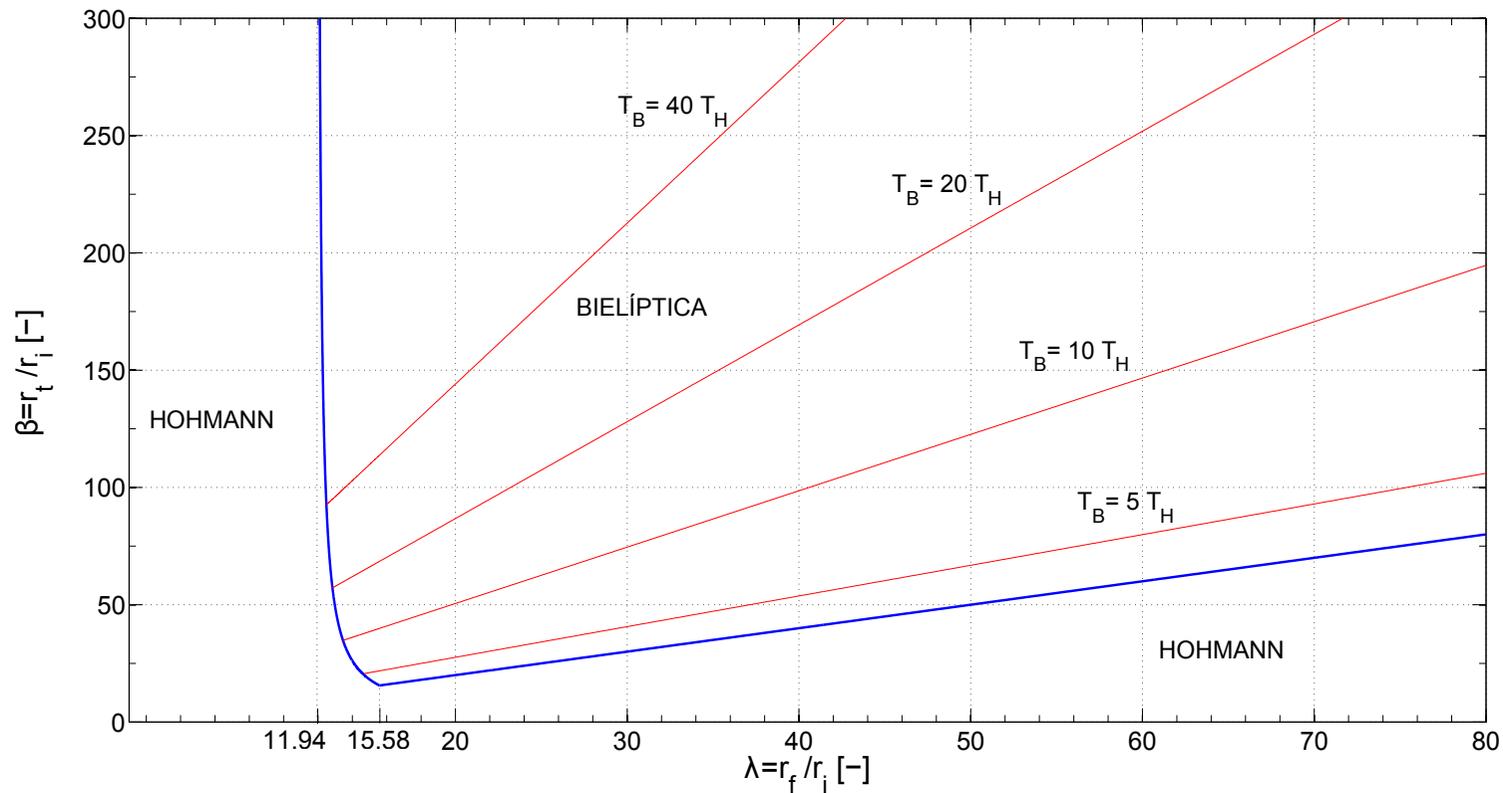


- Se usan transferencias no tangenciales para disminuir los tiempos, si bien aumenta el coste.
- El aerobraking puede disminuir mucho el coste de una transferencia a una órbita de menor radio, ya que se obtiene un impulso “gratis”.

- La transferencia bipolarabólica (y por tanto la bielíptica) sólo mejora a la de Hohmann para  $\lambda > 11,94$ ).
- Para  $\lambda \in [11,94, 15,58]$  es necesario tomar  $\beta$  grande para mejorar la transferencia de Hohmann.
- Para  $\lambda > 15,58$  la bielíptica siempre mejora a la Hohmann para  $\beta > \lambda$ .
- Observación: el coste de ir a la órbita lunar es similar al coste de ir a GEO.



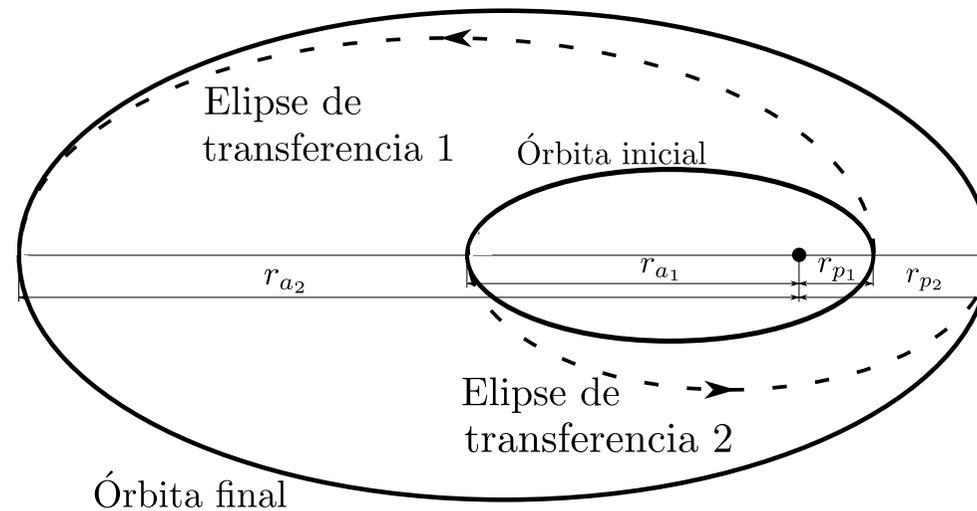
## Comparación entre transferencias II



- En la figura se aprecia el otro aspecto de usar una transferencia bieléptica en lugar de una de Hohmann: aunque disminuya el coste (en muchos casos ligeramente), aumenta considerablemente el tiempo.

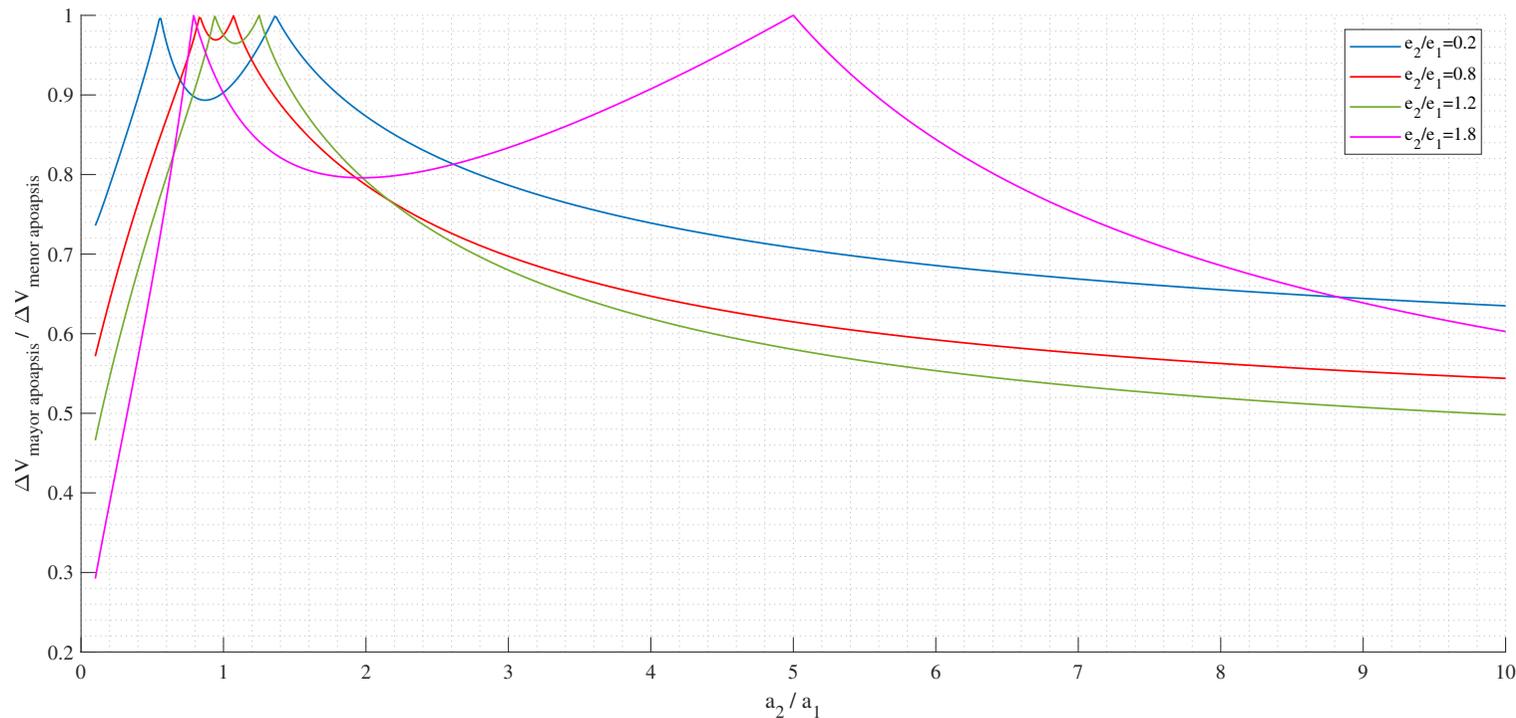


## Transferencia circular-elíptica y elíptica-elíptica



- Entre dos órbitas elípticas (alguna de ellas posiblemente circular) coaxiales (con la misma línea de ápsides), se puede encontrar una maniobra óptima tipo Hohmann.
- Las dos posibles trayectorias conectan el apogeo de una de las órbitas con el perigeo de otra; la regla óptima consiste en elegir el mayor de los apogeos. Observación: para una órbita circular, los radios de apogeo y perigeo son iguales entre sí e iguales al radio nominal (todos sus puntos son perigeo y apogeo).

# Transferencia circular-elíptica y elíptica-elíptica

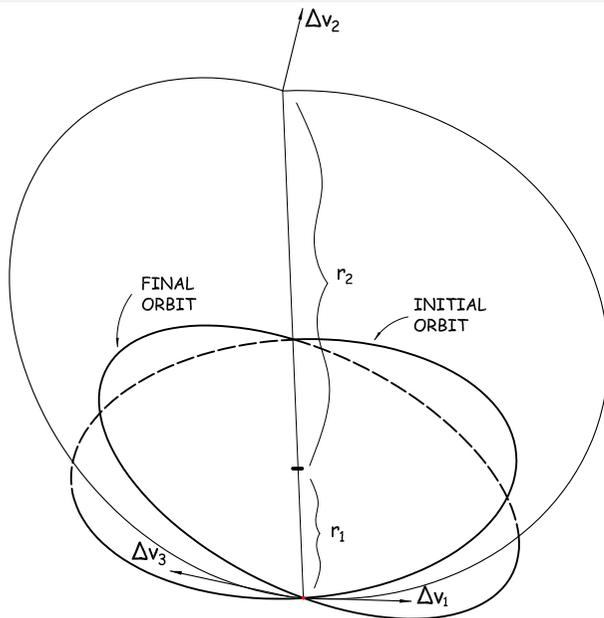


**Figura 7:**  $\Delta V_{\text{regla}}/\Delta V_{\text{alternativa}}$  en UV, para  $a_1 = 1$  UD y  $e_1 = 0,5$ ; para varios valores de  $e_2/e_1$

- Ejemplo comparando la maniobra óptima con la alternativa, para varios casos.



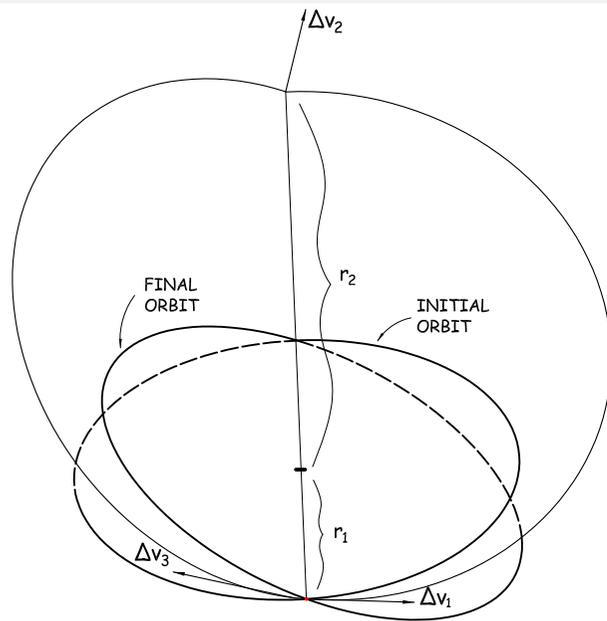
## Maniobra restringida de tres impulsos para cambio de plano I



- Para disminuir el coste de la maniobra de cambio de inclinación, se puede considerar una transferencia de tres impulsos.
- Consideremos el caso circular, con dos órbitas circulares de radio  $r_1$  y diferencia de inclinación  $\Delta i$ . Si se utiliza una sólo maniobra, el gasto es  $\Delta V = 2V_1 \sin \Delta i/2$ .
- Consideremos una órbita de transferencia con radio de perigeo  $r_1$  y radio de apogeo  $r_2$ . Una vez alcanzado  $r_2$ , se cambia de plano y se vuelve por una órbita de transferencia similar.
- Por tanto:  $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{2\mu}{r_1+r_2}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$ ,  $\Delta V_3 = \Delta V_1$ .
- $\Delta V_2 = 2\sqrt{\frac{2\mu}{r_2} - \frac{2\mu}{r_1+r_2}} \sin \Delta i/2$ .



## Maniobra restringida de tres impulsos para cambio de plano II



- Llamando  $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$ , se tiene:  $\Delta V_T = 2V_1 \left( \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\lambda(1+\lambda)}} \text{sen } \Delta i/2 \right)$ .

- Por tanto,  $\frac{\Delta V_T}{V_1} = 2 \left[ \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda}} \left( 1 + \frac{\text{sen } \Delta i/2}{\lambda} \right) - 1 \right]$ .

- Podemos buscar el valor de  $\lambda$  óptimo maximizando el corchete.

- Se llega a  $\lambda_{OPT} = \frac{\text{sen } \Delta i/2}{1 - 2 \text{sen } \Delta i/2}$ .

- De aquí obtenemos la siguiente regla:

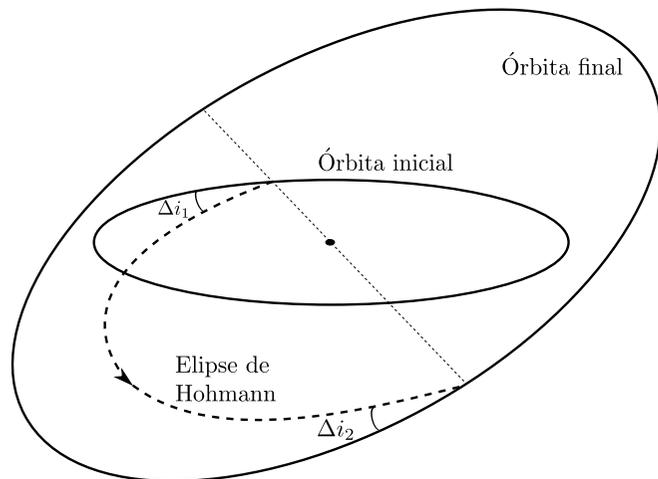
- Si  $\Delta i \leq 38,94^\circ$ , no emplear esta maniobra (no compensa).

- Si  $38,94^\circ < \Delta i \leq 60^\circ$ , emplear  $\lambda = \lambda_{OPT}$ .

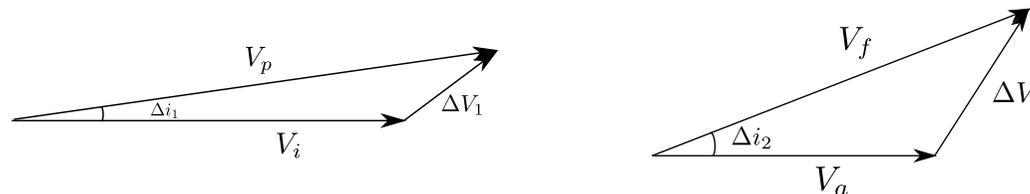
- Si  $\Delta i > 60^\circ$ , emplear  $\lambda \rightarrow \infty$  (tan grande como sea posible).



# Transferencia de Hohmann con cambio de plano



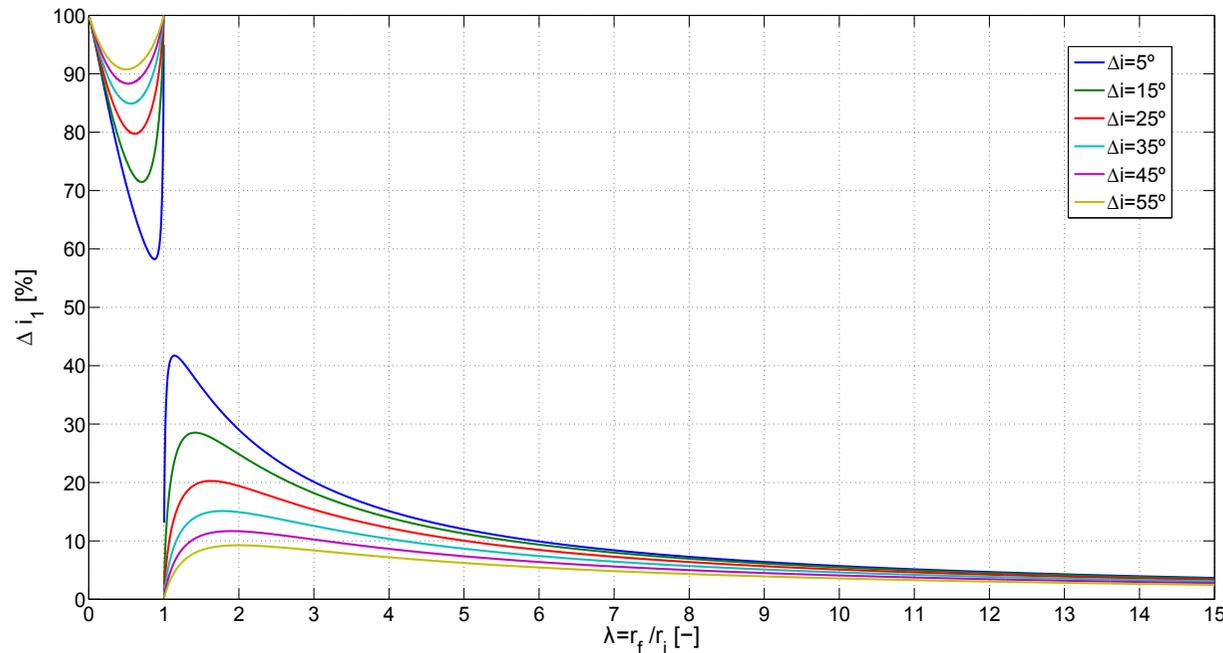
- Es típico tener que realizar una maniobra para cambiar el radio y una maniobra para cambiar de plano.
- Es más económico realizar ambas maniobras simultáneamente.
- Se puede realizar el cambio de plano simultáneo con el primer impulso, con el segundo, o “repartirlo” entre ambos.



- El “reparto” del cambio de inclinación se puede realizar de forma óptima.
- El nuevo  $\Delta V$  se encuentra usando el teorema del coseno.



## Hohmann con cambio de plano en el 2º impulso



- En la figura está la optimización resuelta para varios  $\lambda$  y  $\Delta i$ .
- Se observa que salvo  $\Delta i$  pequeños, en general casi todo el impulso se realiza en el impulso más lejano (el 2º cuando se aumenta el radio, y el 1º cuando se disminuye).
- Para evitar resolver la optimización, en problemas realizaremos todo el cambio de plano en el impulso más lejano. En la práctica siempre se resolvería.



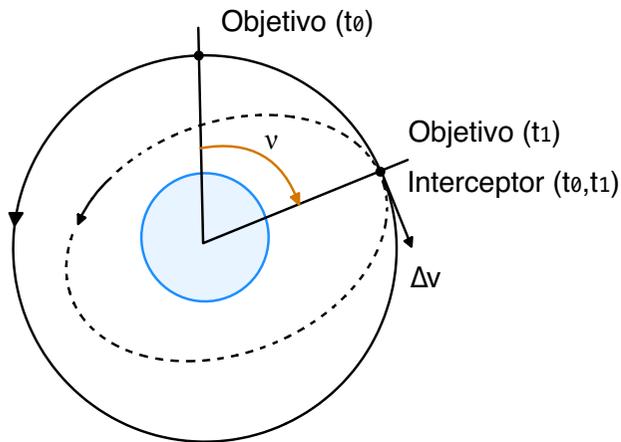
## Rendezvous e intercepción



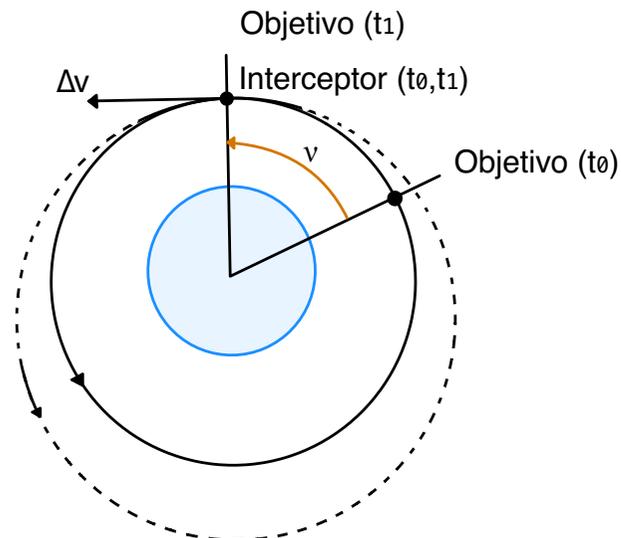
- Rendezvous/intercepción: Encontrar una transferencia para ir de un punto dado de una órbita a un punto dado de otra.
- El problema genérico es equivalente al problema de Lambert; algunos casos particulares se pueden resolver mediante las maniobras y transferencias que hemos visto.
- Estudiamos el caso en el que ambos puntos están en la misma órbita, pero desfasados en su anomalía verdadera.
- En dicho caso la maniobra de rendezvous se llama “phasing”.
- Consideramos primero órbita circulares y luego elipses.



# Maniobra de phasing en órbitas circulares I



Órbita de Phasing  
(En atraso)



Órbita de Phasing  
(En adelanto)

- Puede haber dos casos: el interceptor se encuentra un ángulo  $\nu$  en atraso (arriba) o un ángulo  $\nu$  en adelanto (abajo).
- La idea es modificar ligeramente la órbita del interceptor, de forma que al volver a pasar por el punto de inicio, se encuentre al blanco.
- Si  $T$  es el periodo de la órbita común, el nuevo periodo ha de ser  $T_{ph} = T(1 - \frac{\nu}{2\pi})$  (atraso) o  $T_{ph} = T(1 + \frac{\nu}{2\pi})$  (adelanto).
- A partir de  $T_{ph}$  obtenemos  $a_{ph} = \left( \mu \left( \frac{T_{ph}}{2\pi} \right)^2 \right)^{1/3}$  y el impulso  $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a_{ph}}} - \sqrt{\frac{\mu}{r}}$  necesario. Para regresar a la órbita inicial habrá que aplicarlo una segunda vez, frenando. Por tanto  $\Delta V_T = 2\Delta V_1$ .



## Maniobra de phasing en órbitas circulares II

- El tiempo que se tardará en realizar la maniobra de phasing será igual a  $T_{ph}$ .
- Para reducir  $\Delta V$  se puede realizar la maniobra más despacio, imponiendo que el encuentro sea tras  $k$  órbitas de phasing del interceptor. Entonces  $T_{ph} = T(1 \pm \frac{\nu}{2\pi k})$ , bajando  $\Delta V$ , pero el tiempo de maniobra será entonces  $kT_{ph}$ .
- En ciertas misiones donde se quiere ubicar un satélite en una órbita circular con una cierta anomalía verdadera, se puede dejar al satélite en una cierta órbita con menor altitud (drift orbit) de forma que eventualmente adquiriera la anomalía verdadera deseada, momento en el cual se realizará la transferencia final a la órbita de destino ya con el valor correcto de  $\theta$ .

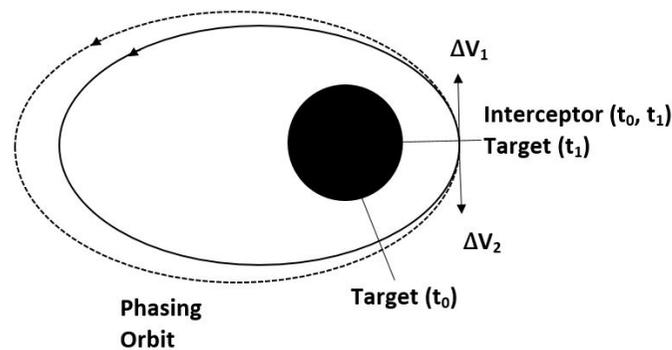
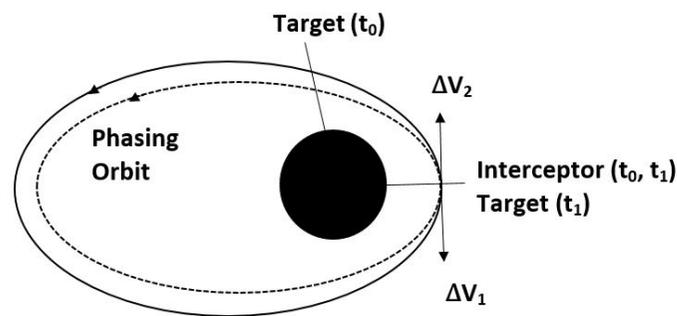


## Maniobra de phasing en órbitas elípticas I

- En realidad no existen órbitas perfectamente circulares. Un análisis más preciso requiere considerar la maniobra de phasing para órbitas elípticas.
- La idea es modificar la órbita del interceptor de modo que cuando complete un número entero de periodos se encuentre con el blanco o posición final deseada. Sin embargo, un phasing en órbitas elípticas se debe hacer usando tiempos, no ángulos, ya que la ley de áreas determina que los ángulos no se recorren de forma regular.
- Si  $T$  es el periodo de la órbita en la que se encuentra el interceptor,  $\theta_A$  la anomalía verdadera del interceptor y  $\theta_B$  la anomalía verdadera de la posición final que se quiere alcanzar, el periodo de la órbita de phasing debe ser  $T_{ph} = T - t_{AB}$  siendo  $t_{AB} = \Delta t(\theta_B) - \Delta t(\theta_A)$ , donde los incrementos de tiempo se calculan según las leyes horarias.



## Maniobra de phasing en órbitas elípticas II



- Este planteamiento engloba tanto cuando el interceptor está en retraso como cuando está en adelante ya que en el primer caso  $t_{AB} > 0$  y en el segundo  $t_{AB} < 0$ , interpretándose como que en la situación de retraso el periodo de la órbita de phasing es menor que el de la órbita de referencia y al contrario en adelante.

- A partir de  $T_{ph}$  se obtiene  $a_{ph}$  y el impulso 
$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a_{ph}}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$$
. Su signo dependerá de si el interceptor está en retraso o en adelante. En cualquier caso, el impulso  $\Delta V_2$  será igual en módulo y de sentido contrario a  $\Delta V_1$  de modo que  $\Delta V_T = 2|\Delta V_1|$ .



## Maniobra de phasing en órbitas elípticas III

- Al igual que cuando se analizaban las órbitas circulares, es posible disminuir  $\Delta V_T$  realizando la maniobra más despacio. Para ello se considera  $T_{ph} = T - \frac{t_{AB}}{k}$ , siendo  $k$  el número de revoluciones en que se completa el phasing. El tiempo de maniobra será entonces  $kT_{ph}$ .
- A priori esta maniobra puede hacerse en cualquier punto de la órbita puesto que lo único que hay que satisfacer es tardar un tiempo mayor o menor, según el caso, al periodo para volver donde estaba. Sin embargo, resulta conveniente realizarla en el perigeo de la órbita atendiendo a la ecuación de la energía. De ella se deduce que el mayor aumento posible de energía se da donde la velocidad inicial es la mayor, por lo que el mismo nivel de impulso  $\Delta V$  provoca mayores cambios en  $a_{ph}$  y, por tanto, en el periodo.

