

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales

Tema 4: Teoría de Perturbaciones. Propagadores.

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla
rvazquez1@us.es

29 de junio de 2023



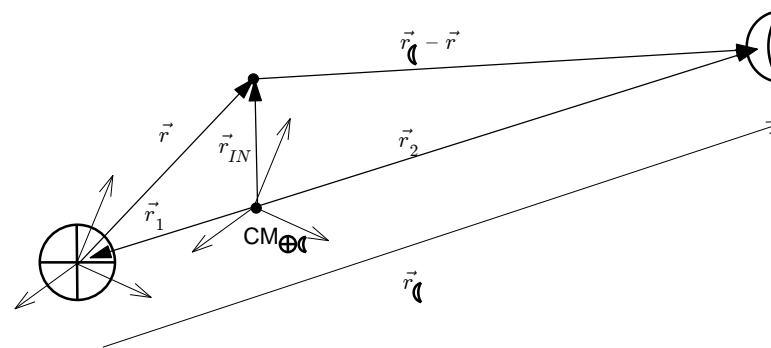
Crítica al problema de los dos cuerpos

- El modelo de los dos cuerpos es **poco realista**.
- Recordemos las hipótesis principales:
 - 1 Se considera el sistema aislado del resto del Universo.
 - 2 Las masas se pueden considerar puntuales y localizadas en el centro de masas de cada cuerpo.
- La primera suposición permite reducir las fuerzas que actúan a las gravitatorias entre los cuerpos. Pero existen otras fuerzas:
 - La fuerza gravitatoria ejercida por otros cuerpos.
 - La resistencia atmosférica en órbitas bajas.
 - Fuerzas propulsivas (especialmente durante maniobras).
 - La presión de radiación solar.
- La segunda suposición es sólo válida si los cuerpos son esferas macizas y homogéneas. No obstante:
 - Los planetas (o el Sol) no son esferas perfectas. En concreto la Tierra está achatada.
 - Los vehículos espaciales no son esferas perfectas. Un vehículo no esférico se ve afectado por el **gradiente gravitatorio**.



Efecto de un tercer cuerpo I

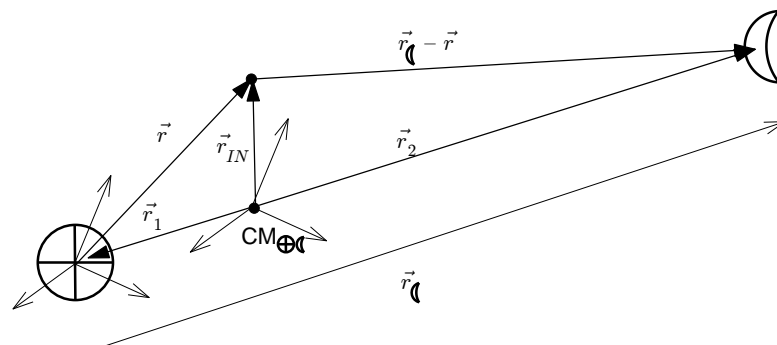
Consideramos como ejemplo de perturbaciones un cuerpo en órbita en torno a la Tierra, pero afectado por la atracción gravitatoria de la Luna:



- El vector \vec{r}_{\lrcorner} representa el vector posición de la Luna respecto de la Tierra.
- Al incluir el efecto de la Luna, tenemos también que considerar que la Tierra ya no es el centro de un sistema de referencia inercial, sino que se debe considerar el centro de masas Tierra-Luna, $CM_{\oplus\lrcorner}$.



Efecto de un tercer cuerpo II



- La ecuación del movimiento, escrita en el sistema de referencia inercial centrado en $CM_{\oplus\zeta}$, es

$$\ddot{\vec{r}}_{IN} = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3}$$

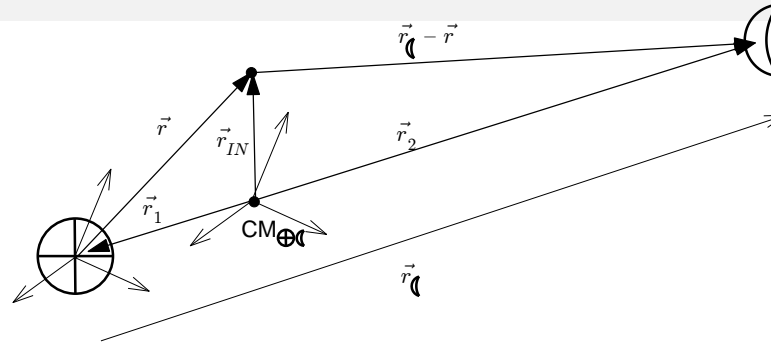
- Por otro lado, $\vec{r}_{\zeta} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, y se tiene que $m_{\oplus}\vec{r}_1 + m_{\zeta}\vec{r}_2 = \vec{0}$. Luego $\vec{r}_1 = -\frac{m_{\zeta}}{m_{\zeta} + m_{\oplus}}\vec{r}_{\zeta}$. La ecuación del movimiento de la

Luna dicta que $\ddot{\vec{r}}_{\zeta} = -\frac{G(m_{\oplus} + m_{\zeta})\vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3}$. De donde

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_{\zeta}}{m_{\zeta} + m_{\oplus}}\ddot{\vec{r}}_{\zeta} = \frac{m_{\zeta}}{m_{\zeta} + m_{\oplus}} \frac{G(m_{\oplus} + m_{\zeta})\vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} = \frac{\mu_{\zeta}\vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3}.$$



Efecto de un tercer cuerpo III



- Puesto que $\vec{r}_{IN} = \vec{r} + \vec{r}_1$, llegamos a que

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_{\zeta} \vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} = \vec{\gamma}_K + \vec{\gamma}_P,$$

- $\vec{\gamma}_K$ es la fuerza kepleriana clásica: $\vec{\gamma}_K = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3}$.
- $\vec{\gamma}_P$ es la fuerza de perturbación debida al tercer cuerpo:

$$\vec{\gamma}_P = \mu_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_{\zeta} \vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3}.$$

- Usando que si $\vec{b} \approx \vec{0}$, se tiene que $\frac{1}{|\vec{a} - \vec{b}|^n} \approx \frac{1}{a^n} + n \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^{n+2}}$, podemos aproximar a primer orden en \vec{r} en la fuerza de perturbación: $\frac{\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}}{|\vec{r}_{\zeta} - \vec{r}|^3} \approx \frac{\vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} + 3\vec{r}_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} \cdot \vec{r}}{r_{\zeta}^5} - \frac{\vec{r}}{r_{\zeta}^3}$.

Efecto de un tercer cuerpo IV

- Se llega a la estimación $\vec{\gamma}_P \approx \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} \left[3\vec{r}_{\zeta} \frac{\vec{r}_{\zeta} \cdot \vec{r}}{r_{\zeta}^2} - \vec{r} \right]$.
- Si \vec{r}_{ζ} y \vec{r} están alineados, el corchete valdrá $2\vec{r}$. Si son ortogonales, $-\vec{r}$. El orden de magnitud de γ_P será $\mu_{\zeta} r / r_{\zeta}^3$.
- Podemos estimar el orden de magnitud de la perturbación con respecto a la fuerza kepleriana $\vec{\gamma}_K = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3}$ como

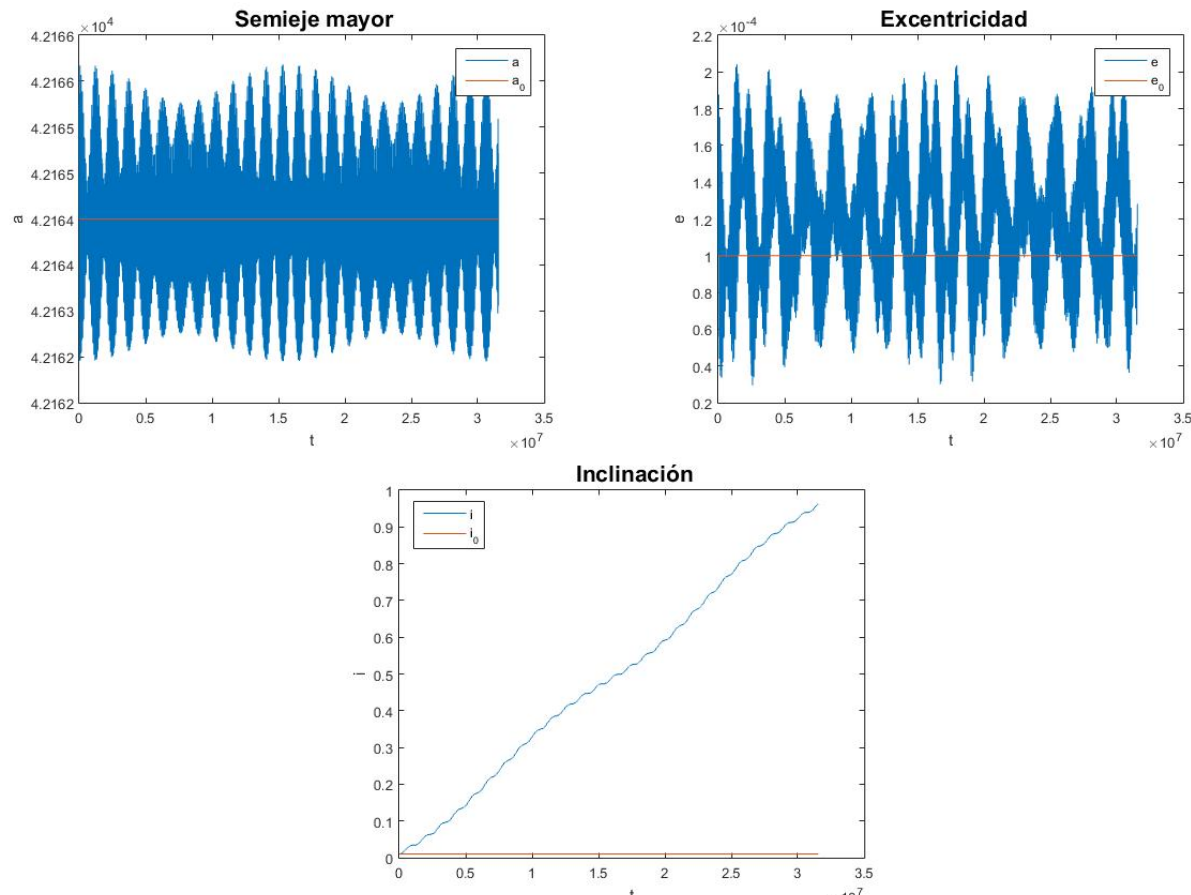
$$|\gamma_P / \gamma_K| \approx (\mu_{\zeta} / \mu_{\oplus}) (r / r_{\zeta})^3.$$
 En órbita baja, $|\gamma_P / \gamma_K| \approx 10^{-7}$, pero en geostacionaria, $|\gamma_P / \gamma_K| \approx 10^{-5}$.
- Igualmente considerando el efecto del Sol,

$$|\gamma_P / \gamma_K| \approx (\mu_{\odot} / \mu_{\oplus}) (r / r_{\odot})^3,$$
 y se tiene que en órbita baja, $|\gamma_P / \gamma_K| \approx 5 \times 10^{-8}$, y en geostacionaria, $|\gamma_P / \gamma_K| \approx 5 \times 10^{-6}$.
- Como comparación, Venus produciría un efecto del orden de 5×10^{-10} en órbita geostacionaria.
- Por tanto las perturbaciones (por tercer cuerpo) más importantes en satélites en órbitas geocéntricas son debidas al Sol y Luna. Se llaman **lunisolares**.



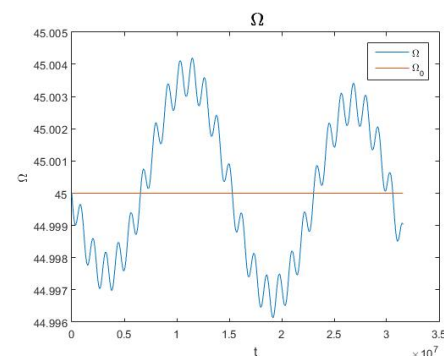
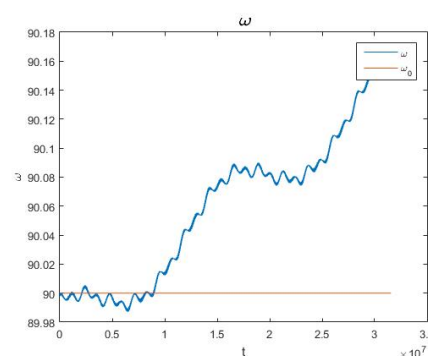
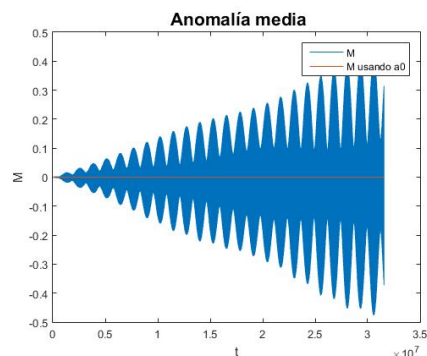
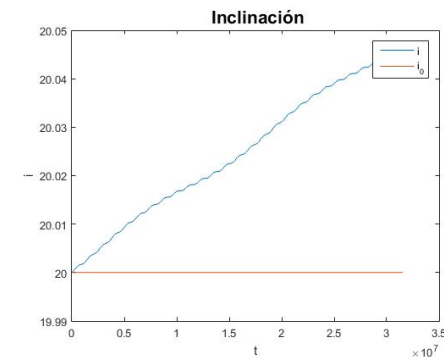
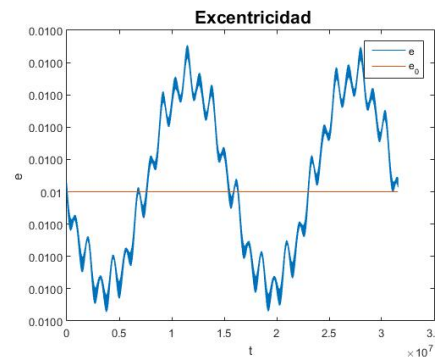
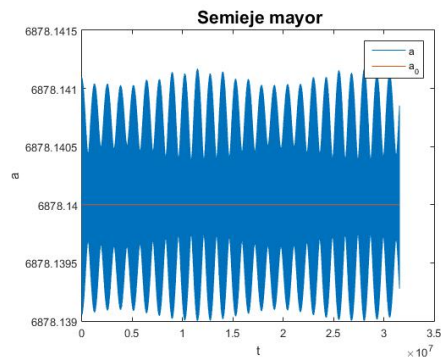
Efecto de un tercer cuerpo V

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto del Sol y la Luna en un satélite GEO a lo largo de un año. Véase la importancia de esta perturbación en la inclinación.



Efecto de un tercer cuerpo VI

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto del Sol y la Luna en un satélite LEO con $a_0 = 6878,14km$, $i_0 = 20^\circ$, $\Omega_0 = 45^\circ$, $\omega_0 = 90^\circ$ y $e = 0,01$ a lo largo de un año.



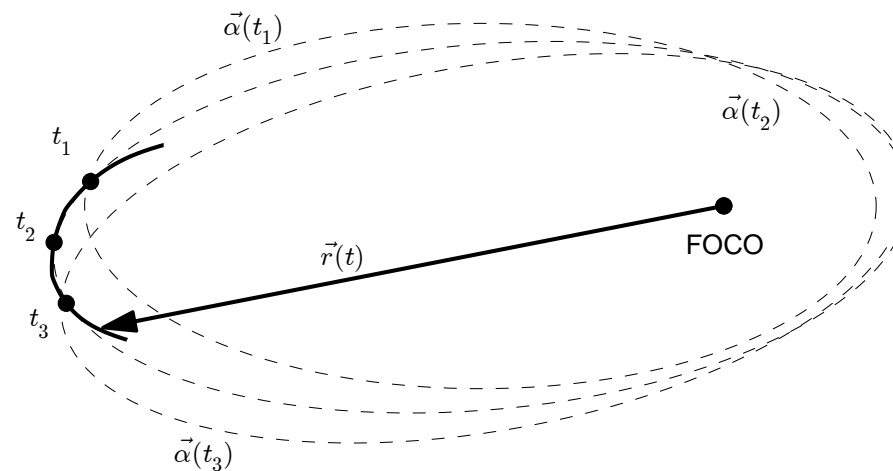
Análisis matemático/numérico de perturbaciones

- Para tratar los efectos de perturbación hay esencialmente dos metodologías:
 - Método de perturbaciones generales: emplea los elementos orbitales como base, estudiando su variación con el tiempo. El que usaremos en la asignatura y desarrollado en posteriores transparencias.
 - Método de perturbaciones especiales: no emplea elementos orbitales sino directamente las ecuaciones del movimiento. A su vez se divide en dos posibles formas de tratar el problema:
 - Método de Encke: Resolución directa de las ecuaciones del movimiento, incluyendo las perturbaciones y tantos cuerpos como sea necesario. El más usado en la actualidad.
 - Método de Cowell: Resuelve las ecuaciones de una corrección $\delta\vec{r}$ sobre una solución de referencia de los dos cuerpos $\ddot{\vec{r}} = -\mu\vec{r}/r^3$. Si la corrección crece, es necesario recalcular la solución de referencia. Poco usado hoy en día.

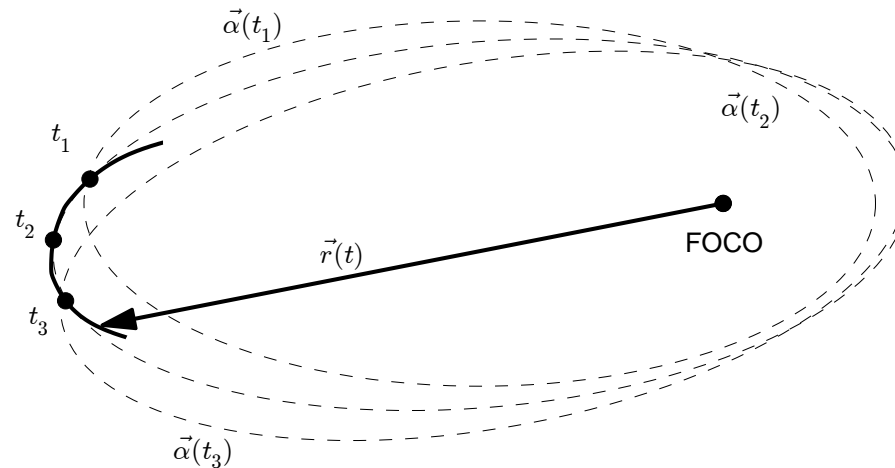


Órbitas Keplerianas y no Keplerianas I

- El llamado método de las perturbaciones generales (utilizado clásicamente antes de disponer de computadores suficientemente potentes) se basa en la siguiente idea:
- Las perturbaciones modifican las ecuaciones del movimiento, cambiando la solución. La órbita resultante se denomina **no Kepleriana**. Dado que estos efectos son pequeños, la órbita “se parecerá” a una Kepleriana.
- Consideremos una órbita Kepleriana (**órbita osculante**) en cada instante, que va cambiando con el tiempo.



Órbitas Keplerianas y no Keplerianas II



- Llamemos $\vec{\alpha} = [\Omega, i, \omega, a, e, M]$ el vector de elementos orbitales, donde se ha escrito M por comodidad. Recordemos que $\vec{\alpha}$ es equivalente a $\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)$.
- Para una órbita Kepleriana:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = 0,$$

y se podría escribir $\frac{dM}{dt} = n$.

- Para una órbita no Kepleriana, $\dot{\vec{\alpha}}(t)$ determina la órbita.



Teoría de Perturbaciones aplicada a Mecánica Orbital

- Encontrar $\dot{\vec{\alpha}}$, en función de la propia α y de la perturbación $\vec{\gamma}_P$, es decir encontrar $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{F}(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}_P)$, no es trivial.
- El sistema de ecuaciones $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{F}(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}_P)$ se denomina **Ecuaciones Planetarias**, ya que permiten predecir el movimiento de los planetas, incorporando fuerzas adicionales a la atracción gravitatoria del Sol como perturbaciones.
- En el caso de que $\vec{\gamma}_P$ derive de un potencial $\vec{\gamma}_P = \nabla U_p$, las ecuaciones se pueden escribir como $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{F}(\vec{\alpha}, U_p)$. En tal caso se denominan las **Ecuaciones Planetarias de Lagrange**.
- Observación: en Astronomía/Astronáutica no se usa la convención de Mecánica $F = -\nabla U$.
- En caso contrario consideramos $\vec{\gamma}_P = R\vec{e}_r + S\vec{e}_\theta + W\vec{e}_z$. Las ecuaciones escritas como $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{F}(\vec{\alpha}, R, S, W)$ se denominan las **Ecuaciones Planetarias de Gauss**.
- La deducción de las ecuaciones se puede solicitar al profesor.



Ecuaciones Planetarias, forma de Lagrange

- Hipótesis: podemos escribir $\vec{\gamma}_P = \nabla U_p$ y consideramos U_p como función de los elementos orbitales, es decir, $U_p = U_p(\vec{\alpha})$.

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial U_p}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial U_p}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U_p}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \left(\frac{\partial U_p}{\partial \Omega} + \cos i \frac{\partial U_p}{\partial \omega} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial U_p}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U_p}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial U_p}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial U_p}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial U_p}{\partial e} \end{aligned}$$



Ecuaciones Planetarias, forma de Gauss

- Hipótesis: podemos escribir $\vec{\gamma}_P = R\vec{e}_r + S\vec{e}_\theta + W\vec{e}_z$.

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [e \operatorname{sen} \theta R + (1 + e \cos \theta) S]$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[\operatorname{sen} \theta R + \left(\frac{1 + e \cos \theta}{e} - \frac{1 - e^2}{e(1 + e \cos \theta)} \right) S \right]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na(1 + \cos \theta)} \cos(\theta + \omega) W$$

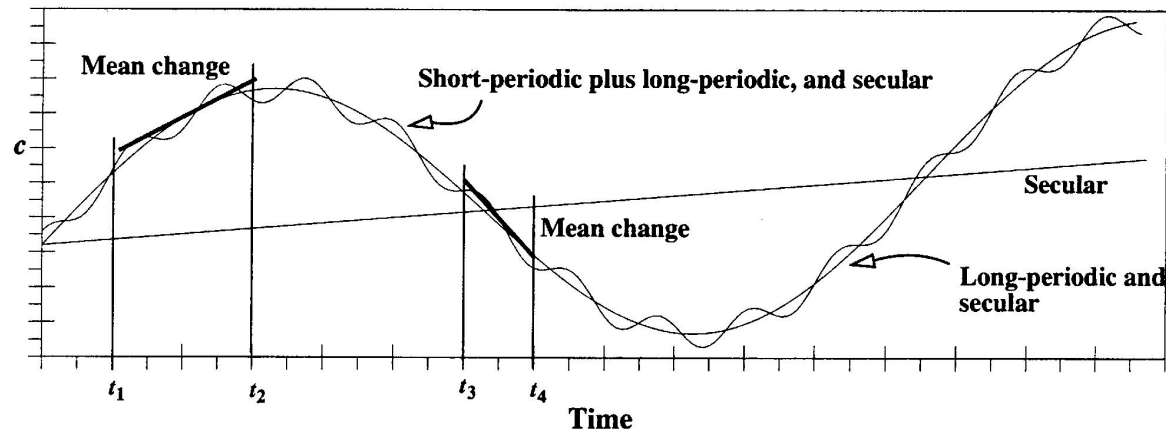
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[-\frac{\cos \theta}{e} R + \frac{\operatorname{sen} \theta}{e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos \theta} \right) S - \frac{\cos i}{\operatorname{sen} i} \operatorname{sen}(\theta + \omega) W \right]$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1}{na} \left(\frac{2(1-e^2)}{1 + e \cos \theta} - \frac{1-e^2}{e} \cos \theta \right) R - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos \theta} \right) S$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na(1 + \cos \theta)} \frac{\operatorname{sen}(\theta + \omega)}{\operatorname{sen} i} W$$



Estudio de perturbaciones I



- Los cambios en los elementos orbitales debidos a perturbaciones se clasifican como:
 - Seculares: términos de crecimiento monótono en el tiempo.
 - Periódicos (de largo período): términos cuya variación se repite con periodo largo (mayor que el periodo orbital).
 - Periódicos (de corto período): términos cuya variación se repite con periodo corto (del orden del periodo orbital).
- Por ejemplo, si $a(t) = 10000 + 3t + \sin(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ y $\omega_2 \gg \omega_1$, entonces el segundo término es secular, el tercero periódico de largo periodo, y el cuarto periódico de corto periodo.



Estudio de perturbaciones II

- Si bien los términos periódicos pueden tener interés, en general los efectos más importantes son los seculares.
- Los términos seculares y periódicos se separan realizando una **expansión en serie de Fourier** con respecto a la anomalía media M .
- En concreto el término secular es el primer coeficiente de Fourier, que es el valor medio; por tanto se encuentra promediando en cada órbita. En el ejemplo anterior, $\bar{a} = 3t$.
- En general, $\bar{\alpha}_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_j(M) dM$.
- Igualmente la **variación secular** de un elemento se encuentra promediando su derivada (obtenida de las ecuaciones planetarias): $\bar{\dot{\alpha}}_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\alpha}_j(M) dM$.
- La **variación secular por órbita** (cambio por revolución) se obtiene multiplicando $\bar{\dot{\alpha}}_j$ por el periodo orbital: $\Delta\alpha_j = T\bar{\dot{\alpha}}_j$.



Estudio de perturbaciones III

- Una forma de calcular aproximadamente las variaciones seculares es usar un modelo de perturbaciones de primer orden, donde se aproxima $a \approx \bar{a}$. Por tanto, se tendría:

$$\frac{\overline{da}}{dt} = \frac{2}{n\bar{a}} \overline{\frac{\partial U_p}{\partial M}}$$

- A la hora de promediar, la siguiente relación es útil:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(M) dM &= \int_0^{2\pi} f(E)(1 - e \cos E) dE \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{(1 - e \cos E)^2}{\sqrt{1 - e^2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

donde se utilizó: $\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$ y $\frac{p}{1 + e \cos \theta} = a(1 - e \cos E)$.



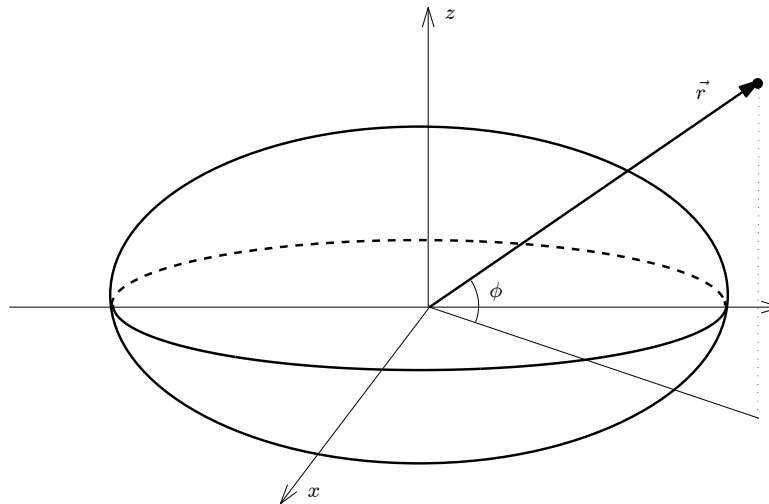
El potencial gravitatorio de un planeta no esférico

- El potencial gravitatorio U permite obtener la fuerza gravitatoria específica como $\vec{\gamma} = \nabla U$.
- Para un cuerpo esférico y homogéneo con parámetro gravitatorio μ , se tiene que su potencial gravitatorio es $U_K = \frac{\mu}{r}$, y por tanto $\vec{\gamma}_K = \nabla U_K = -\frac{\mu}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$.
- ¿Cómo se obtiene el potencial gravitatorio para un cuerpo cualquiera? El potencial gravitatorio verifica la **Ecuación de Laplace** $\nabla^2 U = 0$.
- Luego U para un cuerpo con forma arbitraria vendrá dado por la solución de la ecuación de Laplace, sujeta a condiciones de contorno dadas por la distribución de masa del cuerpo.
- En la práctica, se busca una solución en serie de potencias y se ajustan los coeficientes con datos experimentales.
- La ciencia que estudia la forma de la Tierra y sus variaciones gravitatorias se denomina **geodesia**.



Cuerpo con simetría de revolución I

- Supongamos un cuerpo cuya masa está distribuida homogéneamente con simetría de revolución (alrededor de un eje), es decir, sólo varía con ϕ (no con λ).



- En tal caso, usando coordenadas esféricas, $U = U(r, \phi)$.
- La ecuación de Laplace queda como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) = 0$$



Cuerpo con simetría de revolución II

- La solución general de la ecuación viene dada por

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n p_n(\sin \phi) \right]$$

donde

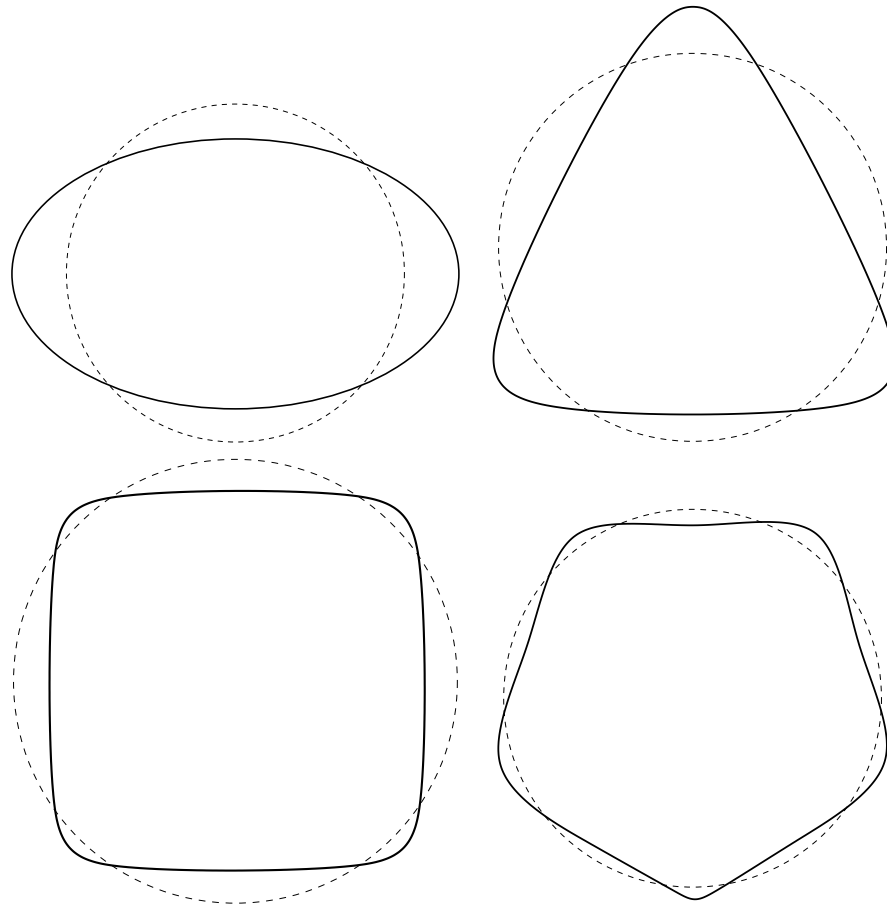
- El primer término representa el potencial de una esfera, mientras que el resto (la serie) representa la desviación del modelo esférico.
- Los coeficientes J_n son los llamados **armónicos zonales del potencial**.
- p_n es el n -ésimo polinomio de Legendre, definido recursivamente como

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x \\ p_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1} ((2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x)) \end{aligned}$$



Cuerpo con simetría de revolución III

- El significado de los diferentes armónicos se puede ver en la siguientes figuras (segundo, tercer, cuarto y quinto armónicos esféricos).



Cuerpo con simetría de revolución IV

- Los primeros armónicos son los más importantes. Para la Tierra, $J_2 = 1,083 \times 10^{-3}$, $J_3 = -2,534 \times 10^{-6}$, $J_4 = -1,620 \times 10^{-6}$, $J_5 = -2,273 \times 10^{-7} \dots$
- Un modelo frecuentemente utilizado consiste en despreciar todos los armónicos excepto el segundo, lo que equivale a considerar la tierra como un elipsoide de revolución.
- Usando la fórmula encontramos que $p_2 = \frac{3x^2-1}{2}$.
- Por tanto el modelo de potencial considerando sólo el J_2 es

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right]$$



Perturbación debida al achatamiento de la Tierra I

- El efecto más importante es el debido al J_2 . Consideremos el modelo del J_2 antes escrito:

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right]$$

donde $J_2 = 1,083 \times 10^{-3}$.

- El potencial de perturbación es:

$$U_p = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi)$$

- Es necesario expresar U_p en función de los elementos orbitales. Usando la trigonometría esférica (que se estudiará en el siguiente tema), se tiene que $\sin \phi = \sin i \sin(\omega + \theta)$. Por tanto:

$$U_p = \frac{J_2 \mu_{\oplus} R_{\oplus}^2 (1 + e \cos \theta)^3}{2a^3 (1 - e^2)^3} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta))$$



Perturbación debida al achatamiento de la Tierra II

- Calculemos ahora $\overline{U_p}$:

$$\begin{aligned}\overline{U_p} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{J_2 \mu_{\oplus} R_{\oplus}^2 (1 + e \cos \theta)^3}{2a^3 (1 - e^2)^3} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta)) dM \\ &= \frac{J_2 \mu_{\oplus} R_{\oplus}^2}{4a^3 \pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e \cos \theta}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta)) d\theta\end{aligned}$$

- Puesto que $\sin^2 \psi = \frac{1 - \cos 2\psi}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned}&(1 + e \cos \theta)(1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \theta)) \\ &= (1 + e \cos \theta) \left(1 - \frac{3 \sin^2 i}{2} + \frac{3 \sin^2 i \sin 2(\omega + \theta)}{2}\right)\end{aligned}$$

- Integrando y usando $n = \sqrt{\mu/a^3}$:

$$\overline{U_p} = \frac{J_2 n^2 R_{\oplus}^2}{4(1 - e^2)^{3/2}} (2 - 3 \sin^2 i)$$



Perturbación debida al achatamiento de la Tierra III

- Por tanto $\overline{U_p} = f(a, e, i)$. Esto implica que $\overline{da/dt} = \overline{di/dt} = \overline{de/dt} = 0$, es decir: el J_2 no produce variaciones seculares en a (la energía, en media, no varía) ni en la inclinación i o en e .

- Sí hay cambios seculares en ω y Ω (también en M):

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3J_2 n R_{\oplus}^2}{2p^2} \cos i, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{3J_2 n R_{\oplus}^2}{4p^2} (5 \cos^2 i - 1)$$

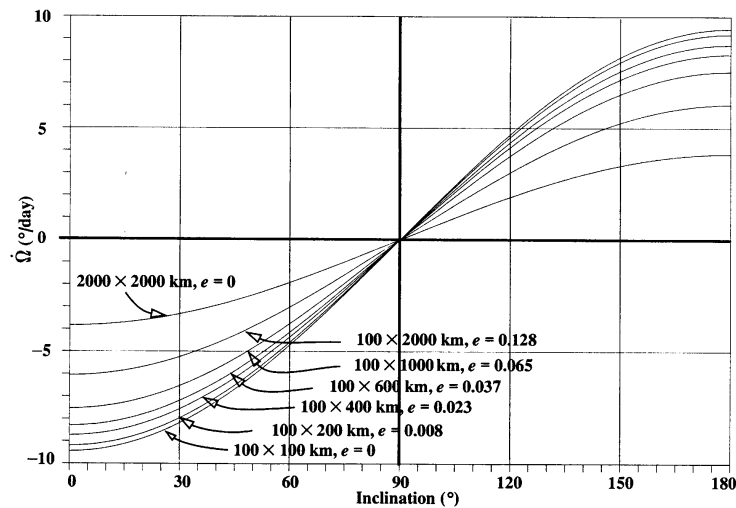
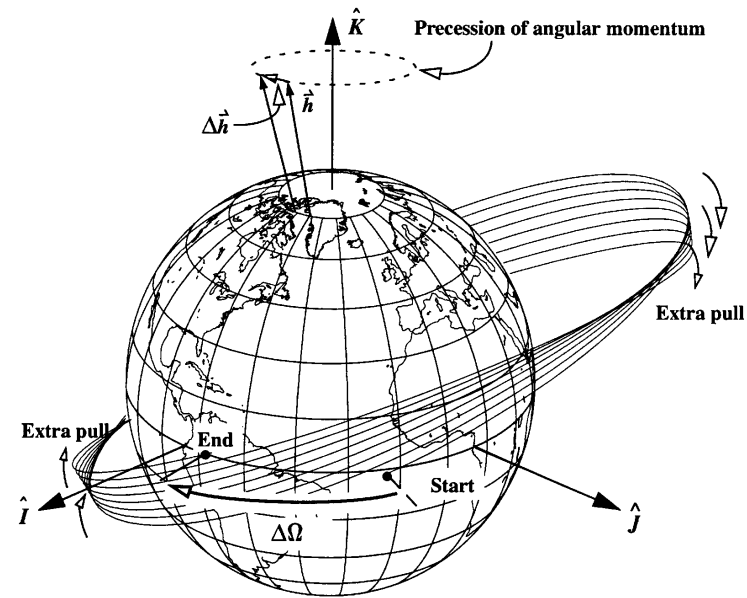
- El primer fenómeno se llama **regresión de los nodos**, y el segundo, **avance del perigeo**.
- La variación por revolución es, usando $T = 2\pi/n$:

$$\Delta\Omega = -\frac{3J_2 \pi R_{\oplus}^2}{p^2} \cos i, \quad \Delta\omega = \frac{3J_2 \pi R_{\oplus}^2}{2p^2} (5 \cos^2 i - 1)$$

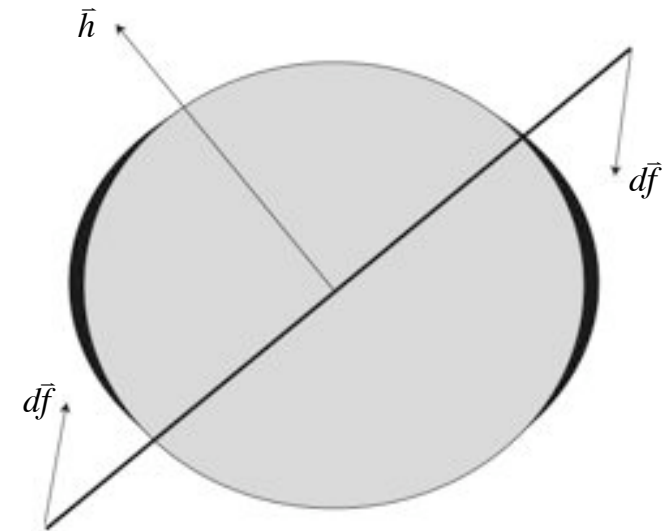
- El J_2 sí produce variaciones periódicas en todos los elementos.



Regresión de los nodos

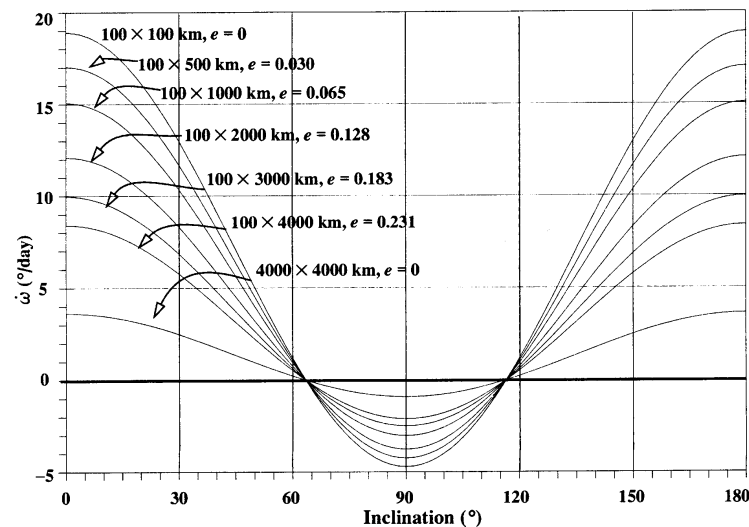
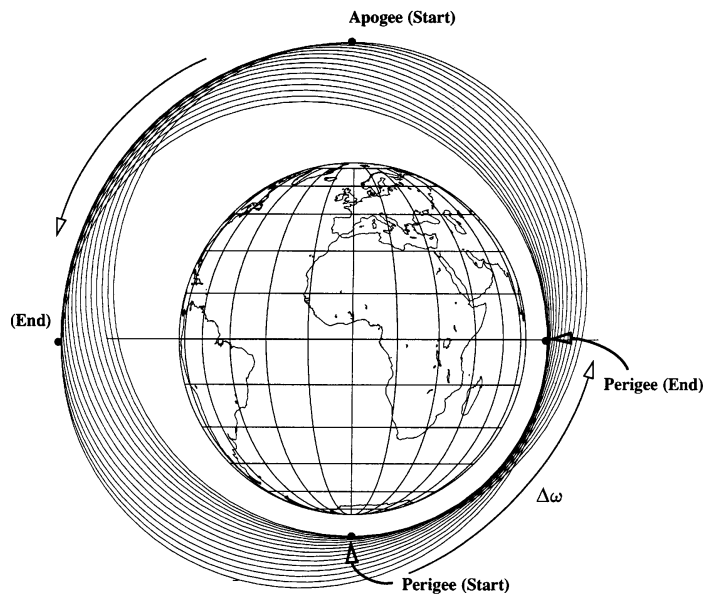


- La regresión de los nodos cambia el plano de la órbita de forma continua.
- Una “explicación gráfica” de la física fenómeno:



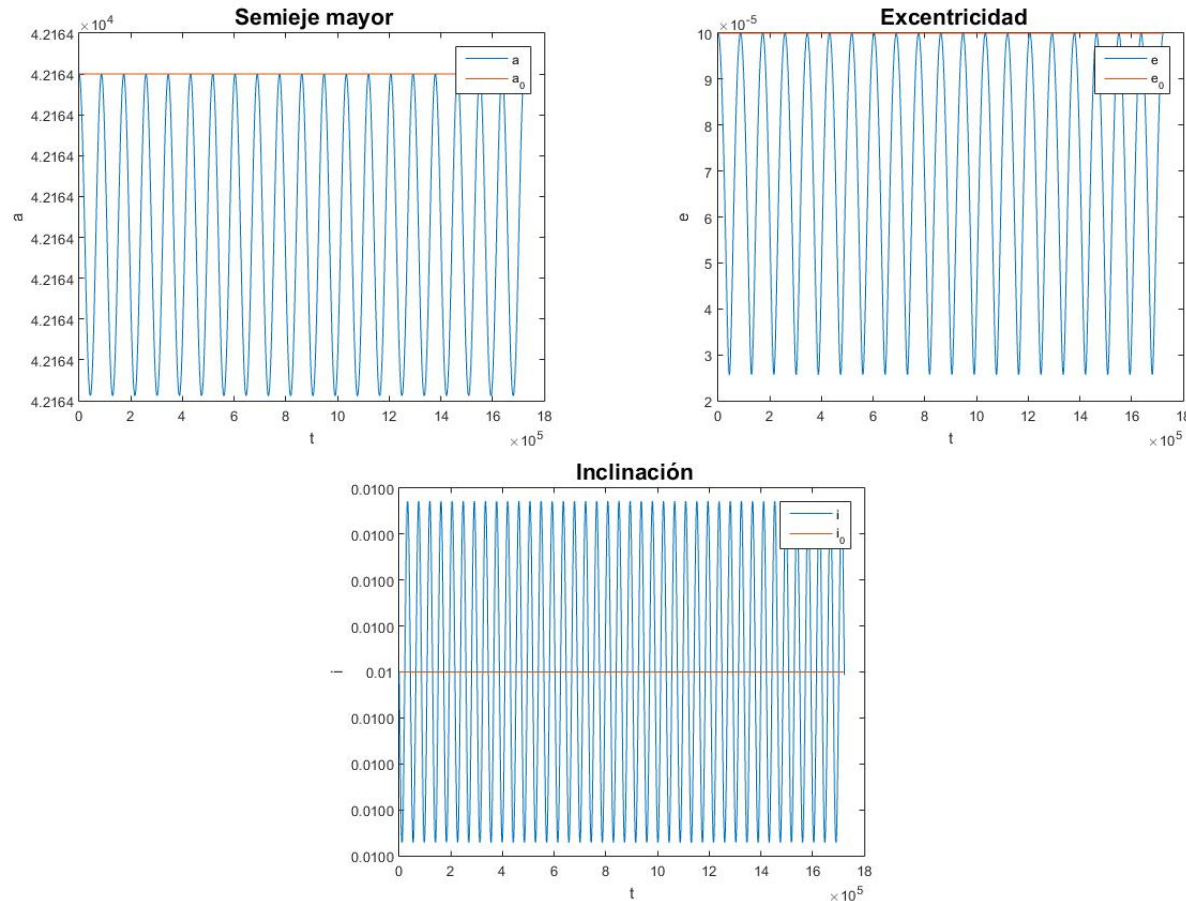
Avance del perigeo

- El avance del perigeo modifica la localización geográfica de la línea de ápsides, y por tanto los puntos donde la órbita permanece más tiempo (apogeo) y menos tiempo (perigeo).



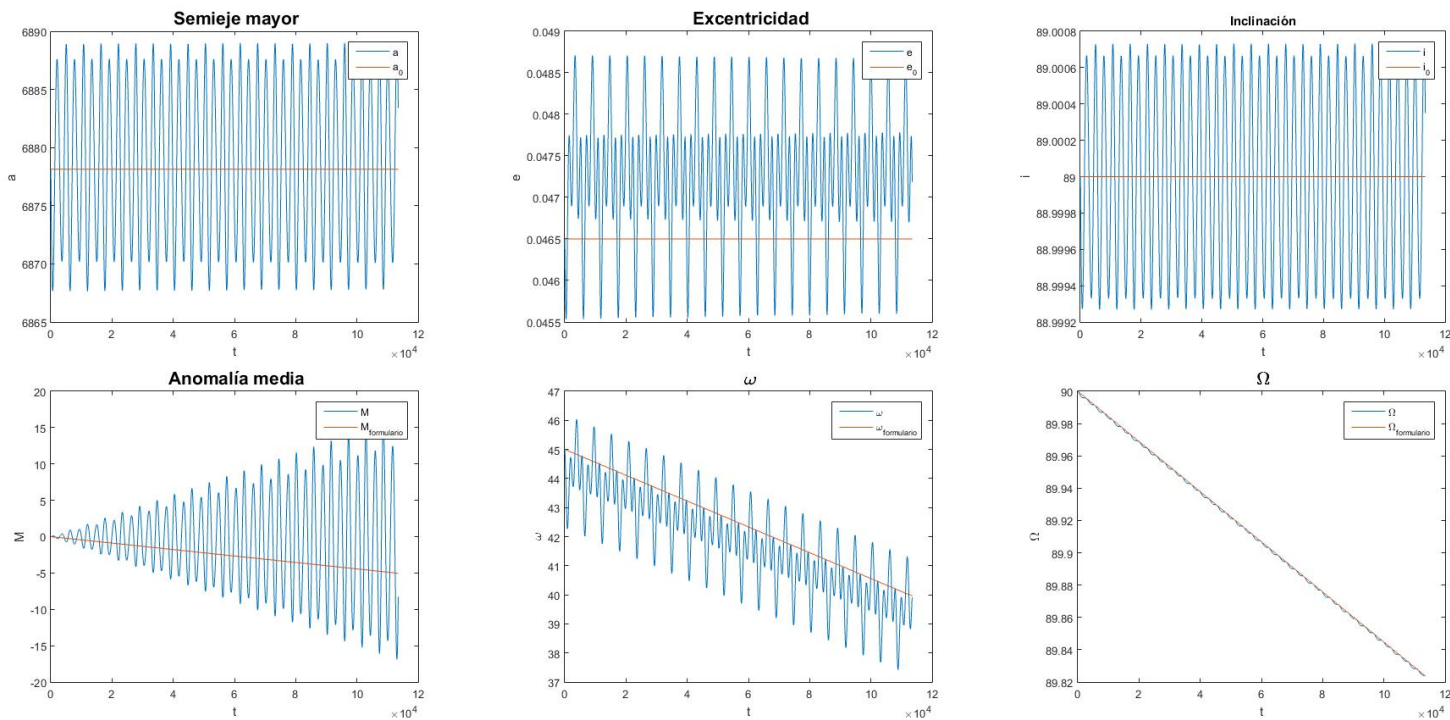
Efecto del J_2 I

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto del J_2 en un satélite GEO para 20 días.



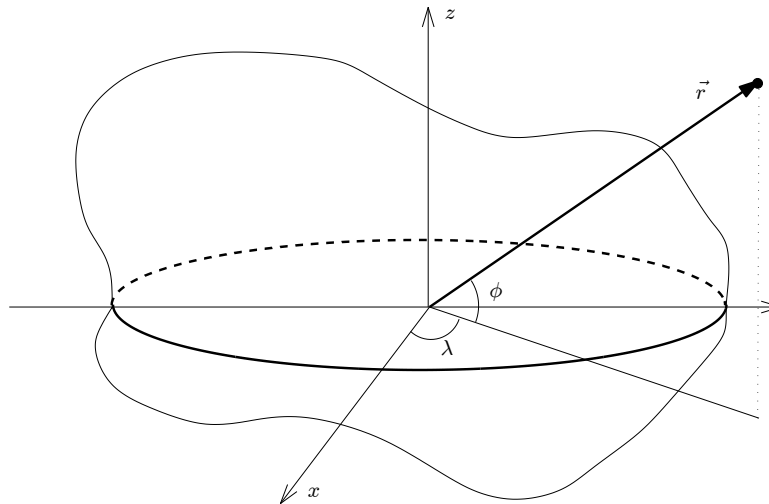
Efecto del J_2 II

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto del J_2 en un satélite LEO con $a_0 = 6878,14km$, $i_0 = 89^\circ$, $\Omega_0 = 90^\circ$, $\omega_0 = 45^\circ$ y $e = 0,0465$ para 1 día.



Cuerpo general I

- Supongamos un cuerpo general, donde la distribución de masa depende tanto de la longitud como de la latitud.



- De nuevo usando coordenadas esféricas, $U = U(r, \phi, \lambda)$.
- La ecuación de Laplace queda como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0$$



Cuerpo general II

- La solución general de la ecuación viene dada por

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n J_{nm} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n p_{nm}(\sin \phi) \cos(m(\lambda - \lambda_{nm})) \right]$$

donde

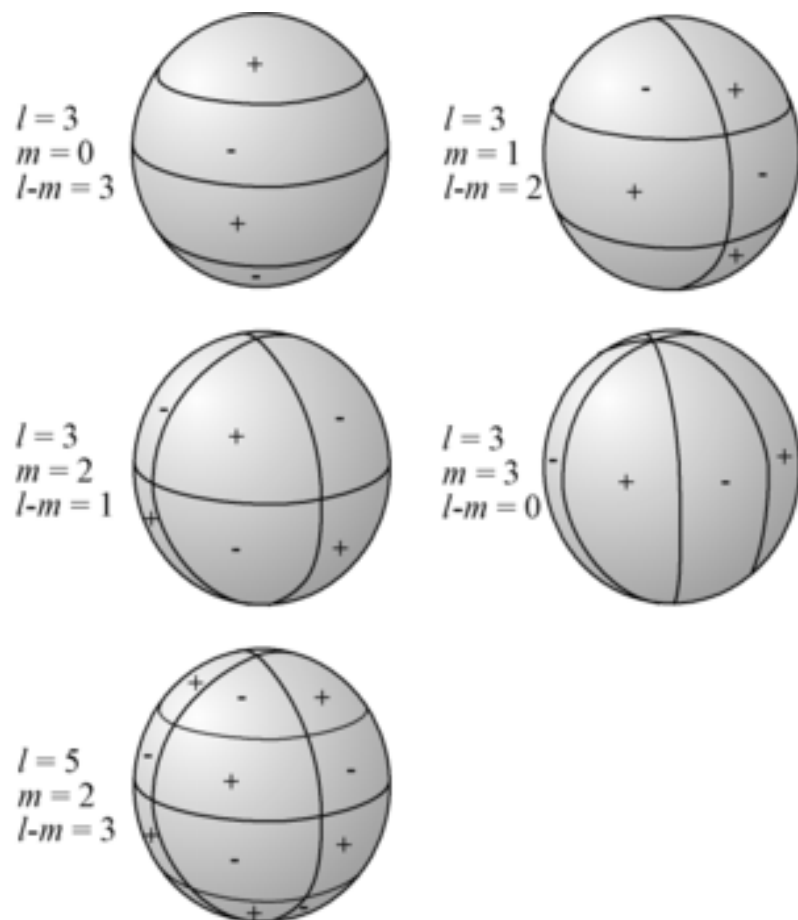
- El primer término representa el potencial de una esfera, mientras que el resto (la serie) representa la desviación del modelo esférico.
- Los coeficientes J_{nm} y λ_{nm} son los coeficientes asociados al armónico nm .
- p_{nm} es el polinomio asociado de Legendre de grado n y orden m , definido a partir de p_n como

$$p_{nm}(x) = (1 - x^2)^{n/2} \frac{d^m p_n(x)}{dx^m}$$



Cuerpo general III

- Visualización de los armónicos mediante las zonas de cambio de signo (en la figura, l corresponde a nuestra definición de n).



- Zonales: para $m = 0$, los armónicos coinciden con los del modelo con simetría de revolución. Sin variaciones respecto a λ .
- Sectoriales: para $n = m$, no tienen variaciones respecto a ϕ y dividen la esfera en “sectores”.
- Teserales: para $n \neq m$, varían respecto a ϕ y λ , dividen la esfera en “cuadrados esféricos”.



Cuerpo general IV

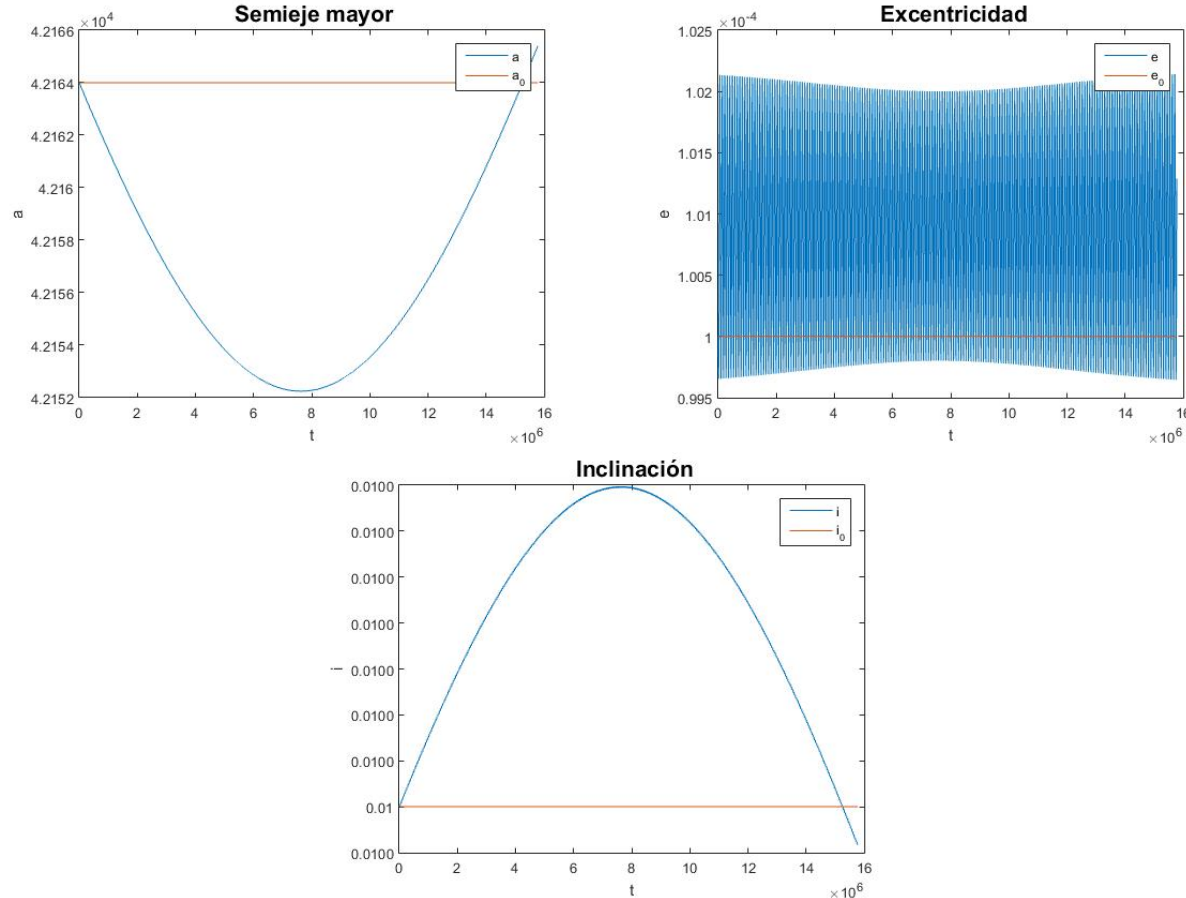
- **Modelo triaxial:** se toma la serie de segundo orden con $J_{20} = J_2$, $J_{21} = 0$, $J_{22} = -5,35 \times 10^{-6}$ y $\lambda_{22} = 123^\circ$. Equivale a suponer que la Tierra es un elipsoide (con los tres semiejes diferentes).
- El coeficiente $J_{21} = 0$ por simetría, ya que se sitúan los ejes coordinados de forma que coincidan con los principales del elipsoide.
- $p_{22} = (1 - x^2) \frac{d^2 p_2(x)}{dx^2} = 3(1 - x^2)$. Por tanto $p_{22}(\text{sen } \phi) = 3(1 - \text{sen}^2 \phi) = 3 \cos^2 \phi$.
- Entonces el modelo queda:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 (1 - 3 \text{sen}^2 \phi) - 3J_{22} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 \cos^2 \phi \cos(2(\lambda - \lambda_{22})) \right]$$



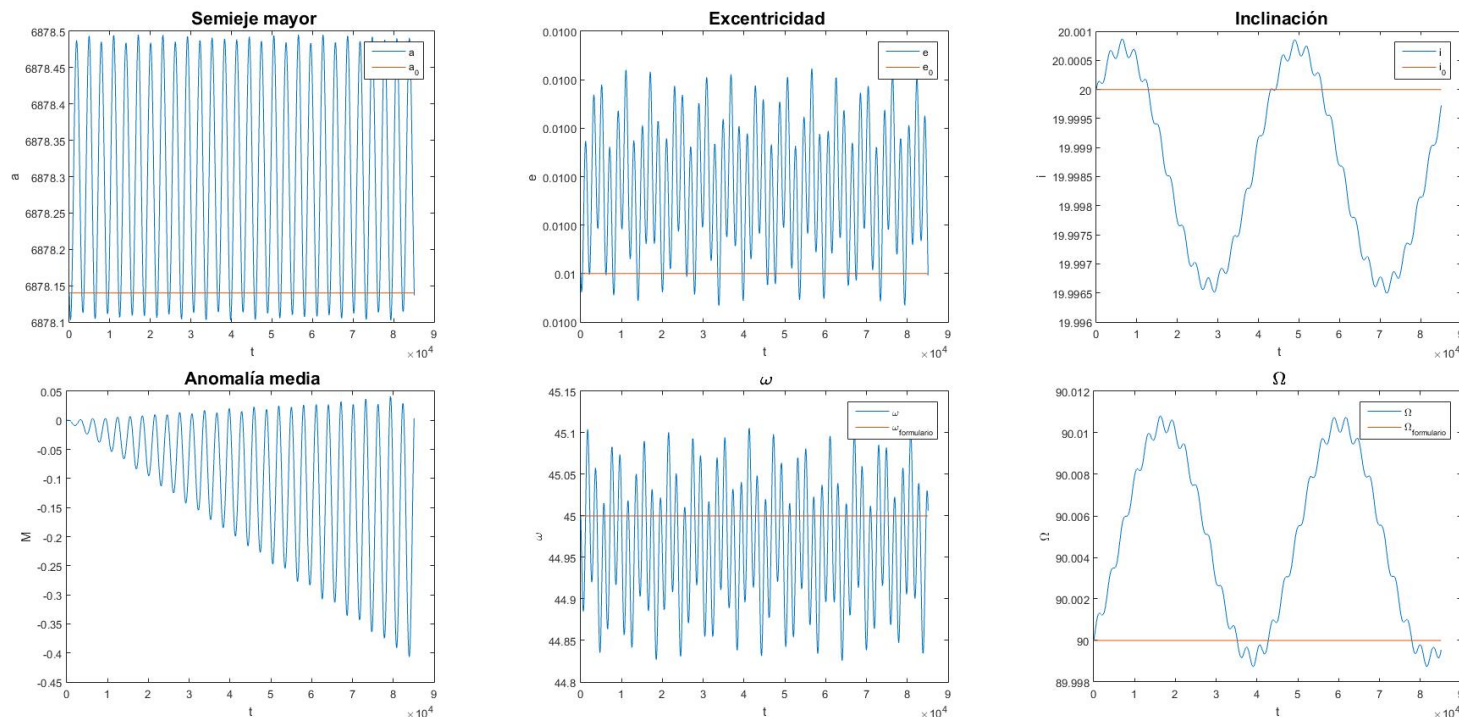
Cuerpo general V

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto del C_{22} en un satélite GEO a lo largo de medio año.



Cuerpo general VI

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto del C_{22} en un satélite LEO con $a_0 = 6878,14km$, $i_0 = 20^\circ$, $\Omega_0 = 45^\circ$, $\omega_0 = 90^\circ$ y $e = 0,01$, para 1 día.



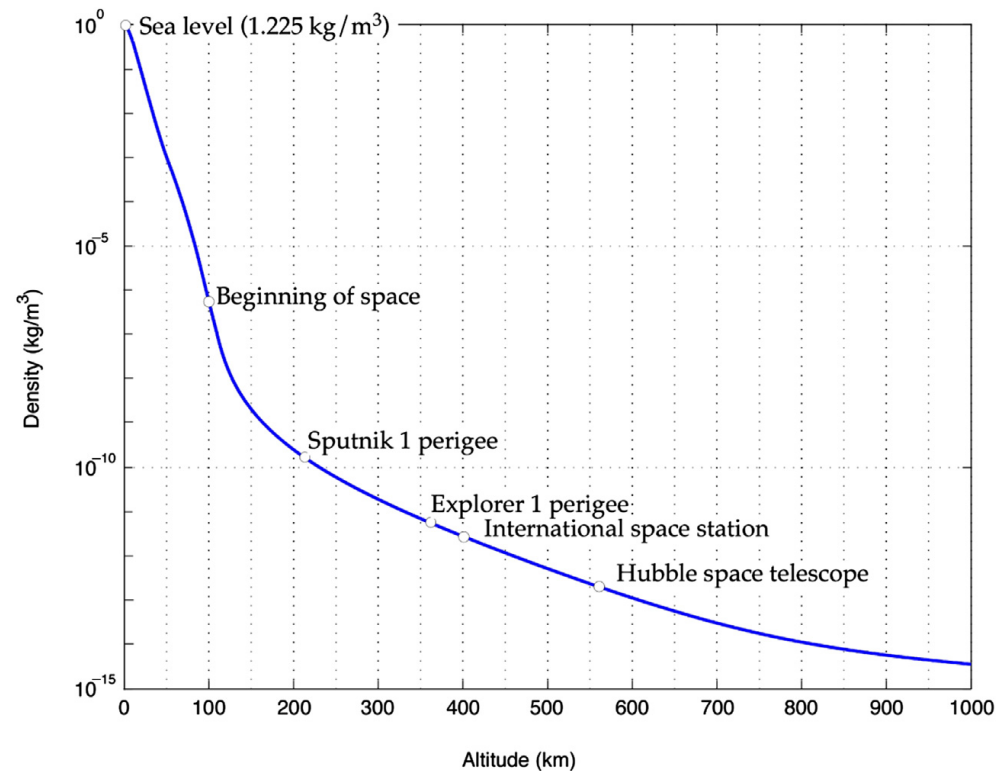
Resistencia atmosférica I

- Es el efecto de perturbación más importante en órbitas bajas y órbitas muy excéntricas con perigeo bajo ($r_p = a(1 - e)$). Muy importante también en estudios de reentrada.
- La resistencia tiene la dirección de la velocidad relativa a la atmósfera, pero el sentido opuesto: $\vec{\gamma}_P = -D \frac{\vec{v}_{rel}}{v_{rel}}$.
- La velocidad relativa $\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{atm}$; suponiendo que la atmósfera rota con la Tierra, $\vec{v}_{atm} = \vec{\omega}_{\oplus} \times \vec{r} = \omega_{\oplus} \vec{k} \times \vec{r}$.
- Se modela la resistencia D como $D = \frac{1}{2B} \rho v_{rel}^2$, donde $B = \frac{m_V}{S C_D}$ es el coeficiente balístico, con m_V la masa del vehículo, S la superficie “frontal” (depende de la actitud), y C_D el coeficiente de resistencia aerodinámico.
- La densidad del medio ρ depende de la altura y es difícil de modelar; para una misma altura los valores fluctúan entre un máximo y un mínimo debido a múltiples factores (variaciones debidas a la geografía y el achatamiento, ciclos solares...)



Resistencia atmosférica II

- Ejemplo de modelo: US Standard Atmosphere 1976.

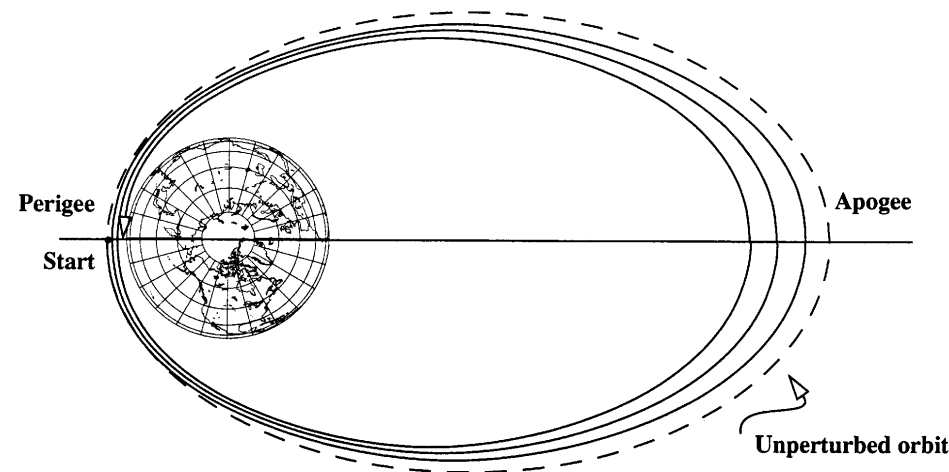


- Obsérvese que decae de forma aproximadamente exponencial. No obstante el modelo no es exacto ya que la realidad fluctúa.



Resistencia atmosférica III

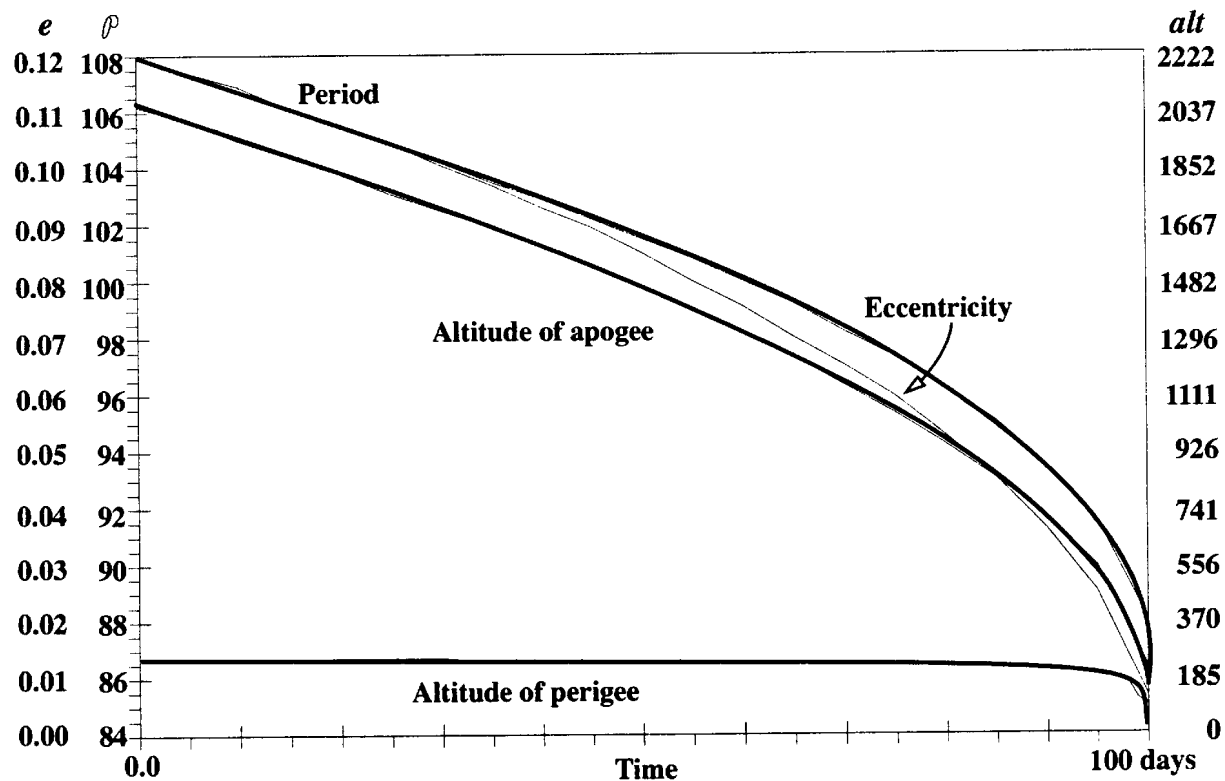
- Se emplea la formulación de Gauss y se integran numéricamente las ecuaciones para hacer predicciones. Se pueden obtener resultados analíticos aproximados.
- Se encuentran variaciones seculares en a y e .
- Si $e > 0$, el efecto inicial de la perturbación es el de circularizar la órbita, haciendo disminuir el radio de apogeo hasta que coincide con el de perigeo.



- Una vez la órbita es circular, el efecto es la lenta disminución del radio (caída en espiral), hasta la reentrada del vehículo.

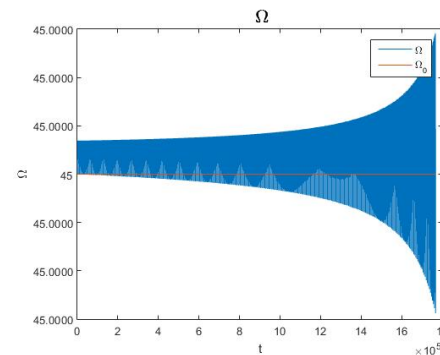
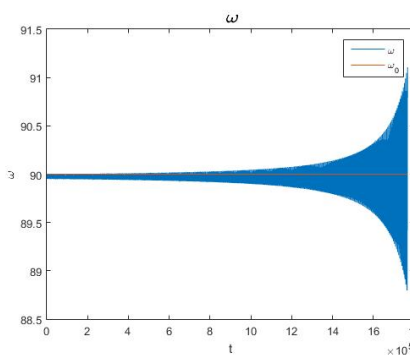
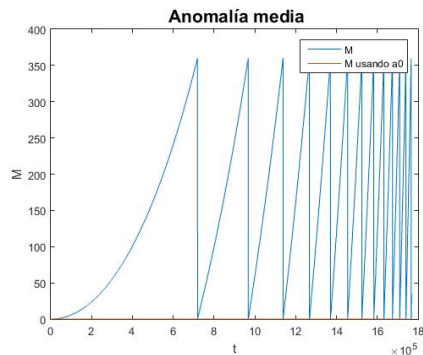
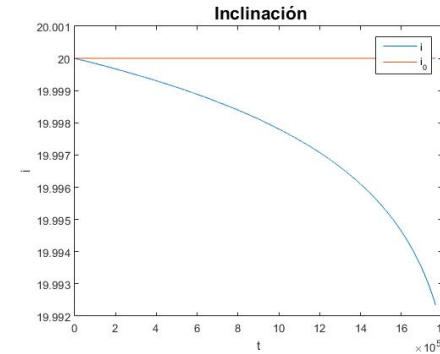
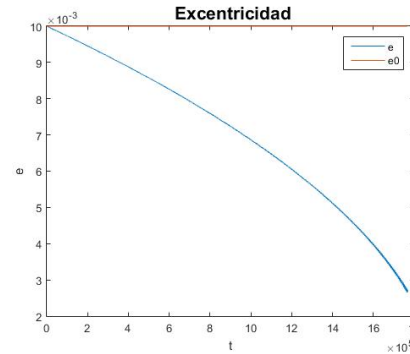
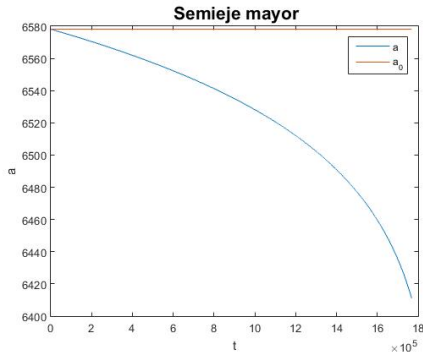
Resistencia atmosférica IV

- También produce perturbaciones seculares en la inclinación y periódicas en todos los elementos.
- Es el efecto que típicamente, para órbitas bajas, determina el **tiempo de vida** de un satélite.



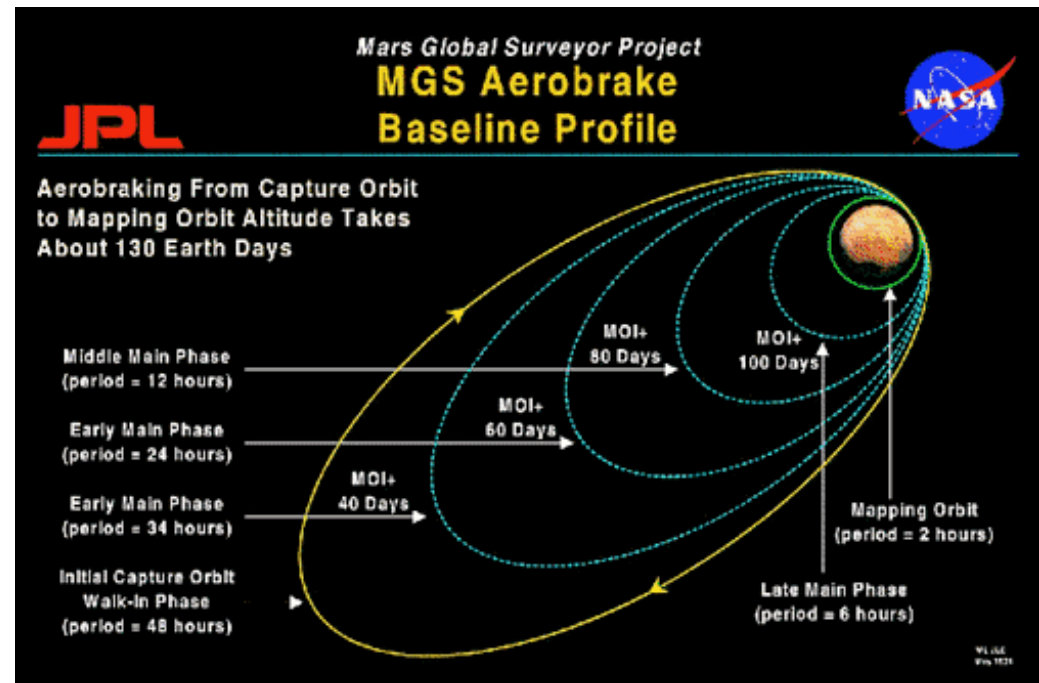
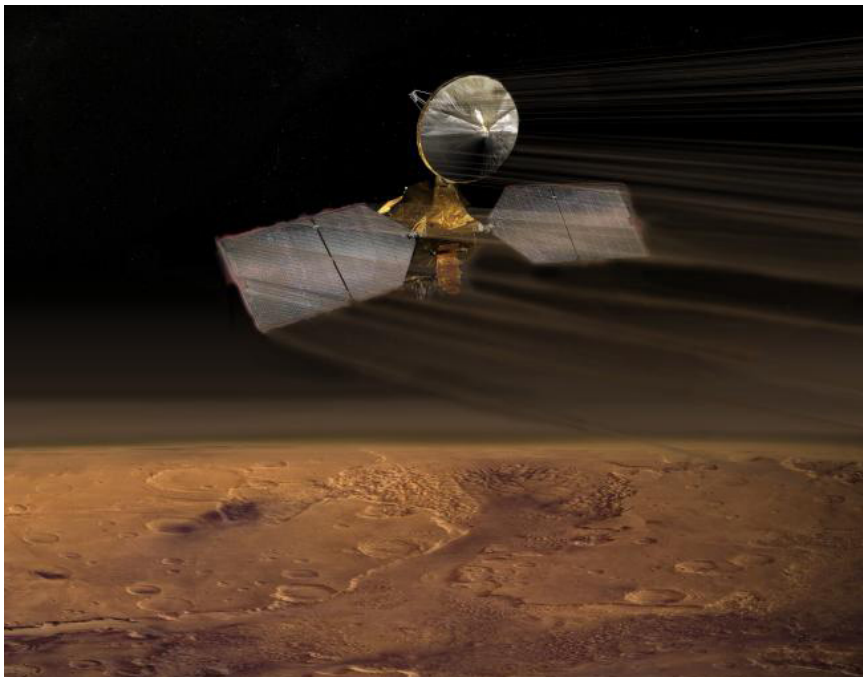
Resistencia atmosférica V

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto de la resistencia atmosférica en un satélite LEO con $a_0 = 6578,14km$, $i_0 = 20^\circ$, $\Omega_0 = 45^\circ$, $\omega_0 = 90^\circ$ y $e = 0,01$ para 21 días. No se estudia el caso GEO por ser despreciable el efecto de la resistencia a grandes altitudes.



Resistencia atmosférica VI

- Este efecto se puede aprovechar para realizar maniobras de aerofrenado (aerobraking).
- Por ejemplo, en la “Mars Reconnaissance Orbiter” (2005), se consiguieron ahorrar 600 kg. de combustible.



- Otros ejemplos: Magallanes (Venus) — 1989–1994. Mars Surveyor — 1996–2006. Mars Odyssey — 2001.



Presión de radiación solar I

- La incidencia de la luz solar (fotones) en una superficie produce un efecto mecánico: la presión de radiación solar.
- A 1 AU del Sol, el flujo medio de radiación solar es de $I_{\oplus} = 1367 \text{ W/m}^2$. A otras distancias se tiene $I = I_{\oplus} \left(\frac{L_{\oplus}}{L} \right)^2$. La presión se calcula usando c (la velocidad de la luz) como $p = I/c$. Se tiene $I_{\oplus}/c = 4,5 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$.
- La fuerza en una placa plana (como un espejo, o un panel solar) será $F = pA(1 + \varepsilon) \cos \varphi_{\odot}$, donde A es el área, ε el coeficiente de reflectividad, y φ_{\odot} el ángulo de incidencia.

$$\varepsilon \in [-1, 1] : \begin{cases} \varepsilon = 1 : \text{totalmente reflectante} \\ \varepsilon = 0 : \text{absorbente (cuerpo negro)} \\ \varepsilon = -1 : \text{totalmente transparente} \end{cases}$$

- La fuerza de perturbación es $\vec{\gamma}_P \approx -\frac{F}{m_V} \vec{e}_{\odot}$, donde m_V es la masa del vehículo y \vec{e}_{\odot} apunta en la dirección del sol desde el vehículo.



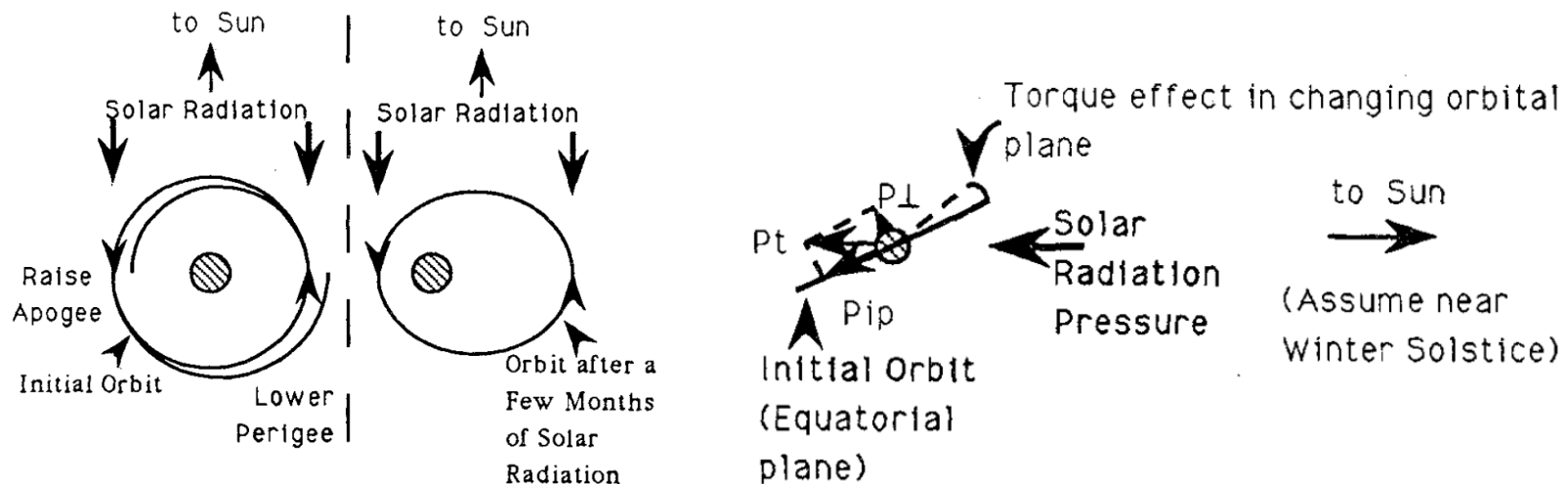
Presión de radiación solar II

- Además existirá una fuerza de magnitud similar debida a la reflexión (perpendicular a los rayos reflejados). Todo esto para cada superficie expuesta al Sol.
- Es complejo de tratar analíticamente. Se puede demostrar que sólo se producen variaciones seculares en Ω y ω , mientras que el resto de variaciones son periódicas (con un periodo del orden de un año).
- En periodos de eclipse, la fuerza desaparece; además hay que tener en cuenta la sombra de la Tierra.
- Hay que tener en cuenta el albedo de la Tierra (reflexión de la luz del Sol en la Tierra).
- Para vehículos con grandes paneles solares, A es grande, $\varphi_S = 0$, y $\varepsilon \approx 0,21$: el efecto puede ser apreciable.
- La presión de radiación solar se puede utilizar para obtener propulsión (velas solares) o como mecanismo de control de actitud (flaps solares).



Presión de radiación solar III

- Ejemplo de como aumenta la excentricidad y la inclinación la presión de radiación solar:



Presión de radiación solar IV

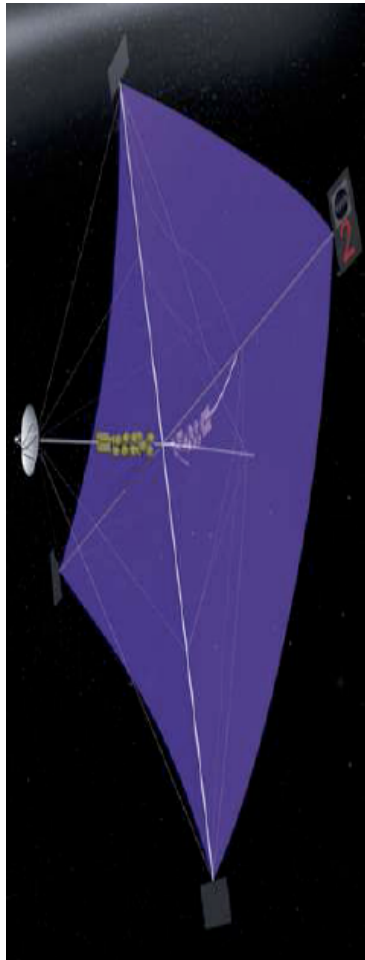


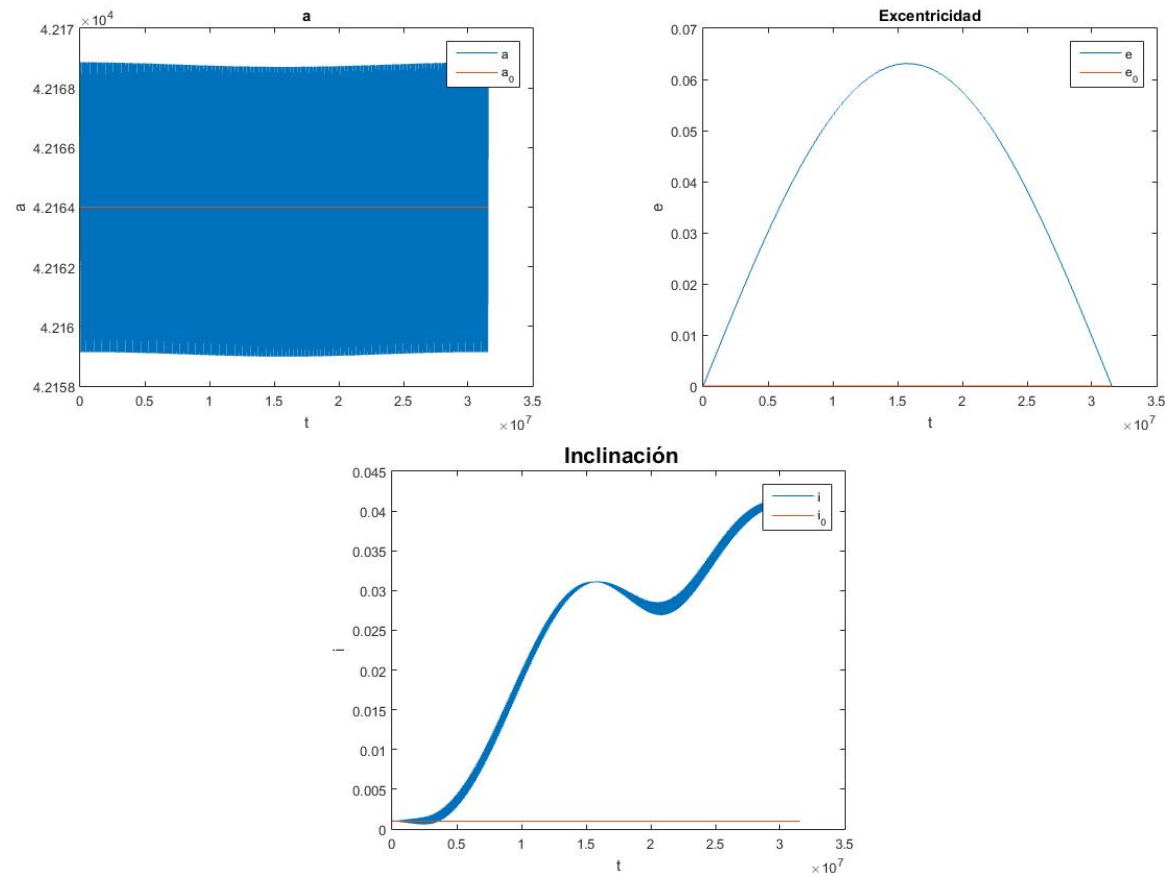
Figura: Vela Solar



Figura: Flap Solar

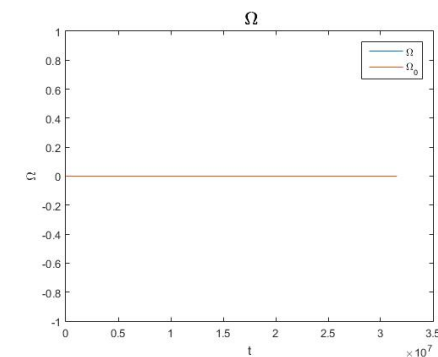
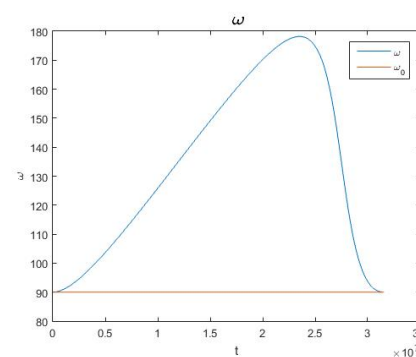
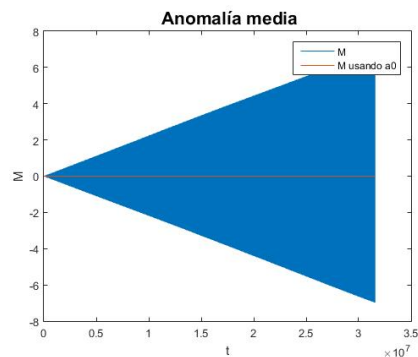
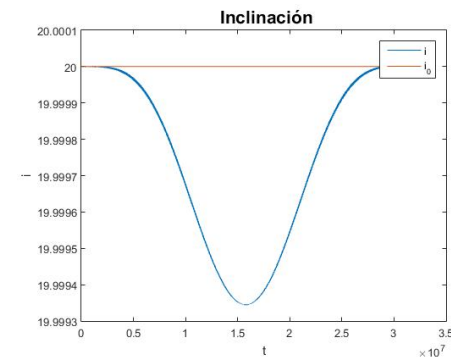
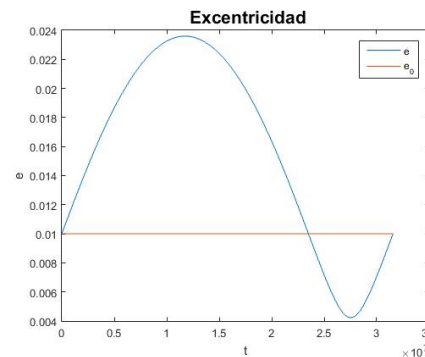
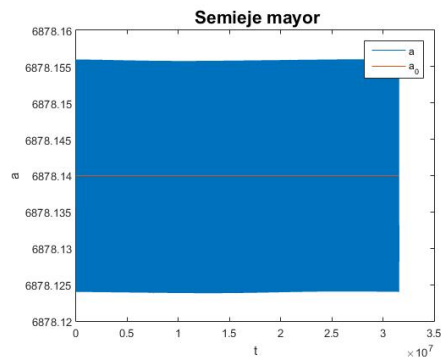
Presión de radiación solar V

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto de la presión de radiación solar en un satélite GEO a lo largo de un año. Véase la importancia en las variaciones de la excentricidad para esta perturbación.



Presión de radiación solar VI

- Se presentan las variaciones de los elementos orbitales por el efecto de la presión de radiación solar en un satélite LEO con $a_0 = 6878,14km$, $i_0 = 20^\circ$, $\Omega_0 = 0^\circ$, $\omega_0 = 90^\circ$ y $e = 0,01$ a lo largo de un año.



Area-to-mass ratio y su influencia en las perturbaciones

- Es importante observar que en las dos últimas perturbaciones (resistencia atmosférica y presión de radiación solar) influye tanto la masa como el área expuesta.
- Sin embargo, en las otras perturbaciones estas dos características físicas no tienen ninguna influencia.
- En ambos casos se observa que la aceleración debida a la perturbación es proporcional a A/m , el llamado “area-to-mass ratio” o proporción entre área y masa.
- Obsérvese que, tomando un modelo esférico homogéneo de radio r , A/m sería proporcional a $1/r$. O en otras palabras, los objetos pequeños se ven mucho más afectados por estas perturbaciones en proporción a los objetos de mayor radio.
- Consecuencia: la basura espacial “pequeña” se limpia de forma natural, pero los objetos grandes tardan mucho más en “caer”.



Resumen de efectos de perturbación I

	Gravedad		3 ^{er} cuerpo	Atmosf	Pres Rad
	Zonal	Sect/Tes			
a	P	P	P	P S	P
e	P	P	P	P S	P
i	P	P	P	P S	P
Ω	P S	P	P S	P	P S
ω	P S	P	P S	P	P S
M_0	P S	P	P S	P	P S

P: Periódicos

S: Seculares

Nota Importante (en relación a algunas gráficas de este tema): Sobre todo en el caso de tercer cuerpo es necesario hacer propagaciones MUY LARGAS (años, incluso siglos!) para observar el carácter periódico o secular en simulación (las gráficas pueden ser engañosas).



Resumen de efectos de perturbación II

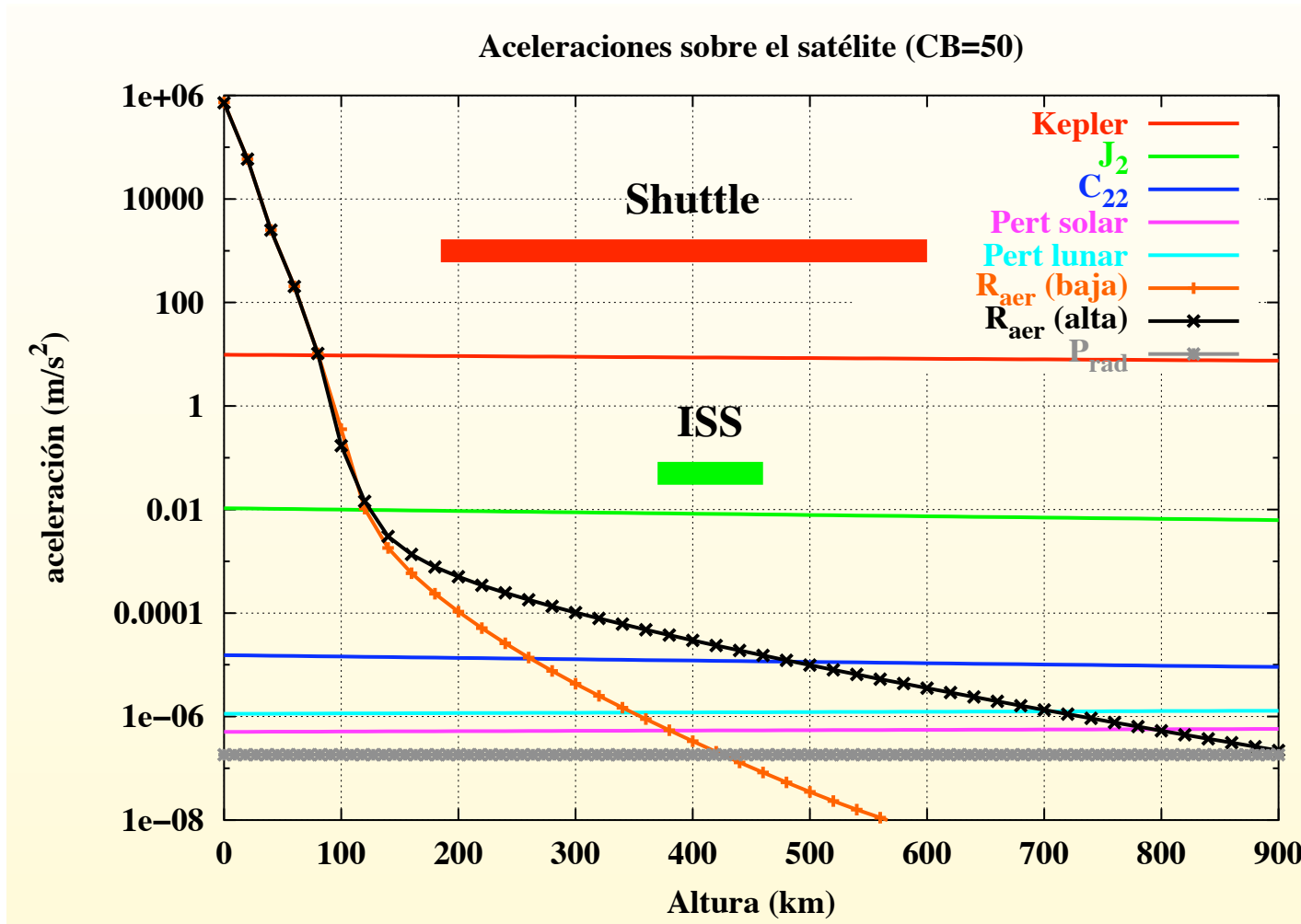


Figura: Efectos de perturbación en órbita baja



Resumen de efectos de perturbación III

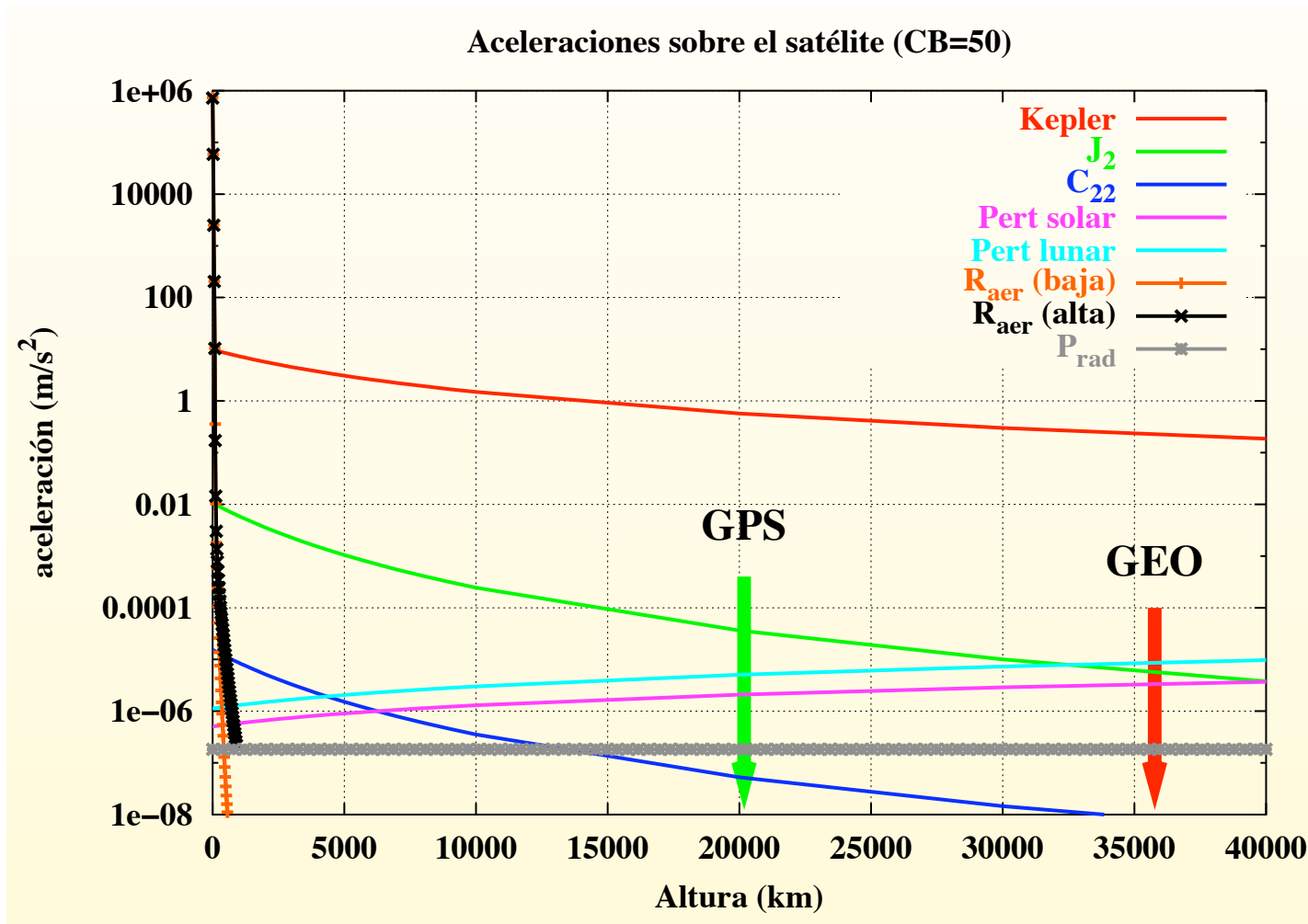


Figura: Efectos de perturbación en órbita elevada



Resumen de efectos de perturbación IV (simulaciones GEO/LEO)

- **Tercer cuerpo:** Relevancia en la inclinación en un GEO. Poca relevancia en los LEO.
- J_2 : Poca efecto en GEO por ser órbita ecuatorial. Para LEO es la perturbación de mayor orden de magnitud y la dominante en cortos intervalos de tiempo.
- C_{22} : Altera los elementos orbitales de GEO y LEO pero de forma periódica y con órdenes de magnitud pequeños, pero variaciones importante en longitud de GEO (ver tema 6).
- **Resistencia Aerodinámica:** Efecto más importante en LEO, circularizando la órbita ($e \rightarrow 0$) y reduciendo la a de forma exponencial. La anomalía media varía cada vez más rápido por la caída del valor de a . No existe en GEO por su altitud.
- **Presión de radiación solar:** Relevancia en la variación de la excentricidad en GEO. Para LEO, poca influencia.



Periodos orbitales

- Puesto que la órbita de un satélite sujeto a perturbaciones ya no es fija en el espacio, el concepto de “periodo” deja de estar claro. Por ello se definen los siguientes tipos de periodo:
 - **Periodo kepleriano** (T_K): el periodo clásico definido según el problema de los dos cuerpos. $T_K = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.
 - **Periodo anomalístico** (T_A): tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos por periapsis.
 - **Periodo nodal** (T_N , también llamado dracónico): tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos por el nodo ascendente.
 - **Periodo sidéreo** (T_S): tiempo que transcurre entre dos pasos sucesivos por un mismo valor del argumento de latitud $u = \omega + \theta$.
- Para órbitas no perturbadas, $T_A = T_N = T_S = T_K$.
- Si tenemos en cuenta los efectos seculares del J_2 , se puede aproximar $T_A \approx \frac{2\pi}{\dot{M}}$, $T_N \approx T_S \approx \frac{2\pi}{\dot{M} + \dot{\omega}}$.



Propagadores

- Un propagador de órbitas es un algoritmo que permite obtener efemérides futuras a partir de los elementos dados en una época.
- Formulación básica: dado $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ en el instante t_0 , calcular $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ en el instante t .
- En ausencia de perturbaciones, el propagador básico es el kepleriano o de los dos cuerpos:
$$(a, e, i, \Omega, \omega) = (a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0) \text{ y } M = M_0 + n(t - t_0).$$
- El caso opuesto, el más complicado posible, sería usar las ecuaciones planetarias (Lagrange o Gauss) e integrarlas numéricamente con el modelo más completo posible de perturbaciones.
- Existen muchos modelos intermedios, semianalíticos, que permiten obtener buenos resultados.



Elementos orbitales medios

- Ya se vio en el estudio de las perturbaciones la utilidad de promediar en los elementos orbitales.
- Esencialmente, al promediar se eliminan los efectos de corto periodo, pero no se debe olvidar que estos pueden ser importantes.
- Es muy importante recordar que los elementos medios NO son osculantes; existen fórmulas para su conversión.
- Los TLEs, que se verán más adelante, son un buen ejemplo de elementos medios. Es usual “confundirlos” con elementos osculantes, pero sería necesario convertirlos para su uso correcto.
- A efectos de problemas de la asignatura, no diferenciaremos estos dos tipos de elementos, pero a nivel teórico hay que saber hacer la distinción.



Propagador J2 medio

- Aproximando elementos osculantes por medios y con los valores medios seculares para el J2, un propagador sería:

$$a = a_0,$$

$$e = e_0,$$

$$i = i_0,$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} n \frac{R_{\oplus}^2}{p^2} J_2 \cos i (t - t_0),$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{4} n \frac{R_{\oplus}^2}{p^2} J_2 (5 \cos^2 i - 1) (t - t_0),$$

$$M = M_0 + \left(n + \frac{3}{4} n \frac{R_{\oplus}^2}{p^2} J_2 \sqrt{1 - e^2} (2 - 3 \sin^2 i) \right) (t - t_0),$$

- Este propagador es simple de usar y útil en misiones en órbita baja, donde la influencia del J2 es grande.



Propagador planetario I

- Los elementos heliocéntricos de los planetas están sujetos a perturbaciones, pero éstas actúan de una forma bastante lenta.
- Clásicamente los elementos heliocéntricos de los planetas están dados en la forma $(a, e, i, \Omega, \varpi, L)$, donde $\varpi = \Omega + \omega$ es la longitud del perihelio, y $L = \varpi + M$ es la llamada longitud media.
- Modelo de primer orden:

$$(a, e, i, \Omega, \varpi, L) = (a_0, e_0, i_0, \varpi_0, L_0) + (\dot{a}, \dot{e}, \frac{d}{dt}i, \dot{\Omega}, \dot{\varpi}, \dot{L}) \times T_0$$

donde T_0 es el número de centurias julianas entre J2000 y el día en el que se quieren calcular los elementos planetarios heliocéntricos. T_0 se calcula con la fórmula $T_0 = \frac{\text{JD}-2451545}{36525}$, donde JD es el día juliano de cálculo.

- Los valores de los elementos y su variación están en una tabla en la siguiente transparencia.



Propagador planetario II

- Valores de los elementos y su variación para su uso en la anterior fórmula:

1 Planetary orbital elements and their centennial rates. From Standish et al. (1992).
 Used with permission

	a , AU	e	i , deg	Ω , deg	$\tilde{\omega}$, deg	L , deg
	\dot{a} , AU/Cy	\dot{e} , 1/Cy	\dot{i} , "/Cy	$\dot{\Omega}$, "/Cy	$\dot{\tilde{\omega}}$, "/Cy	\dot{L} , "/Cy
Mercury	0.38709893	0.20563069	7.00487	48.33167	77.45645	252.25084
	0.00000066	0.00002527	-23.51	-446.30	573.57	538 101 628.29
Venus	0.72333199	0.00677323	3.39471	76.68069	131.53298	181.97973
	0.00000092	-0.00004938	-2.86	-996.89	-108.80	210 664 136.06
Earth	1.00000011	0.01671022	0.00005	-11.26064	102.94719	100.46435
	-0.00000005	-0.00003804	-46.94	-18228.25	1198.28	129 597 740.63
Mars	1.52366231	0.09341233	1.85061	49.57854	336.04084	355.45332
	-0.00007221	0.00011902	-25.47	-1020.19	1560.78	68 905 103.78
Jupiter	5.20336301	0.04839266	1.30530	100.55615	14.75385	34.40438
	0.00060737	-0.00012880	-4.15	1217.17	839.93	10 925 078.35
Saturn	9.53707032	0.05415060	2.48446	113.71504	92.43194	49.94432
	-0.00301530	-0.00036762	6.11	-1591.05	-1948.89	4 401 052.95
Uranus	19.19126393	0.04716771	0.76986	74.22988	170.96424	313.23218
	0.00152025	-0.00019150	-2.09	-1681.4	1312.56	1 542 547.79
Neptune	30.06896348	0.00858587	1.76917	131.72169	44.97135	304.88003
	-0.00125196	0.00002514	-3.64	-151.25	-844.43	786 449.21
Pluto	39.48168677	0.24880766	17.14175	110.30347	224.06676	238.92881
	-0.00076912	0.00006465	11.07	-37.33	-132.25	522 747.90



Propagador GPS I

- Una aplicación en la que es de particular importancia conocer con precisión los elementos es la de los satélites GPS.
- Los receptores (navegadores) reciben de los propios satélites información (efemérides) que les permite reconstruir la posición del satélite; por tanto todo receptor GPS debe contener un propagador de órbitas.
- La información emitida por los satélites es:
 $t_0, \sqrt{a}, e, \Omega_0, \omega_0, i_0, M_0, \Delta n, \dot{\Omega}, \frac{d}{dt}i, C_{uc}, C_{us}, C_{rc}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is}$.
- Las fórmulas que se emplean son:

$$M = M_0 + \left(\sqrt{\mu/a^3} + \Delta n \right) (t - t_0),$$

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0),$$

$$\omega = \omega_0 + C_{uc} \cos(2u_0) + C_{us} \sin(2u_0),$$

$$i = i_0 + \frac{d}{dt}i(t - t_0) + C_{ic} \cos(2u_0) + C_{is} \sin(2u_0).$$



Propagador GPS II

- En las anteriores fórmulas, una vez encontrada M hay que resolver la ecuación de Kepler $M = E - e \sin E$, hallar θ de E , y calcular $u_0 = \omega_0 + \theta$.
- Por otro lado también se suelen dar fórmulas para calcular la distancia geocéntrica del satélite. Se calcula $r_0 = a(1 - e \cos E)$ y se emplea la fórmula:
$$r = r_0 + C_{rc} \cos(2u_0) + C_{rs} \sin(2u_0).$$
- Si bien las anteriores fórmulas permiten reconstruir con una precisión razonable la posición de los satélites GPS, dicha precisión no es suficiente para aplicaciones de mucha precisión.
- Para dichas aplicaciones, se pueden obtener efemérides post-procesadas (con precisión de cm), basadas en observaciones. Están disponibles de forma gratuita, del IGS (International GPS Service), por ejemplo, en internet, y se dan en forma de coeficientes de polinomios de Lagrange que interpolan con gran precisión los elementos.

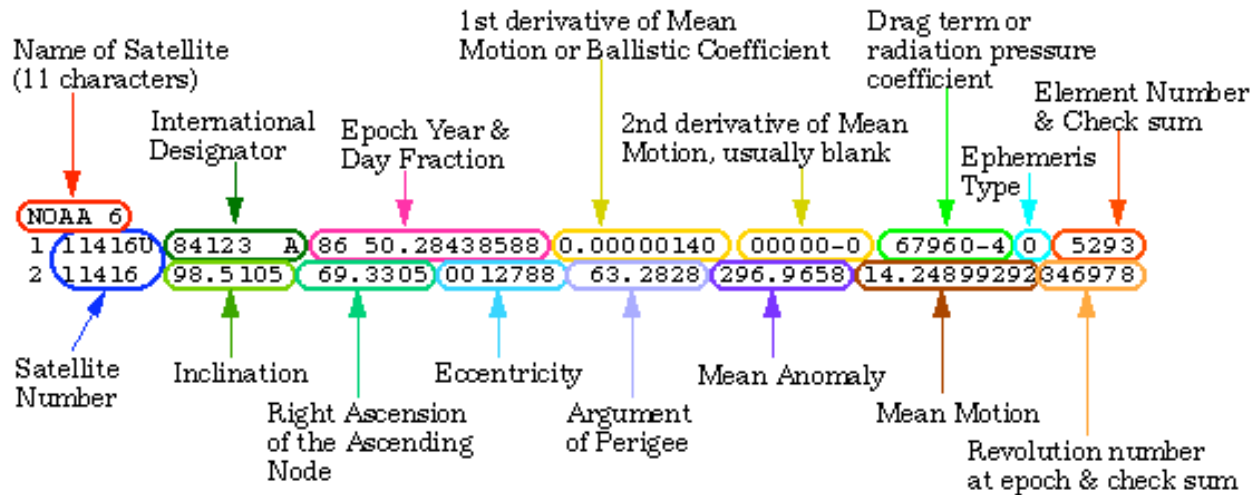


Modelo de perturbaciones y propagador SGP4

- Un modelo semianalítico que tiene en cuenta perturbaciones hasta el J_3 y rozamiento atmosférico es el SGP4 (Simplified General Perturbations Satellite Orbit Model 4).
- Este modelo, desarrollado por la NASA, es especialmente útil para órbitas bajas donde la influencia del rozamiento atmosférico es considerable. Se consiguen precisiones en torno a un kilómetro durante unos días (más tarde habría que actualizar los elementos con nuevas observaciones).
- Existen otras versiones (SGP8, SDP4) con mayor precisión, pero ésta es la más usada por su sencillez y rapidez de cálculo, y sobre todo por compatibilidad.
- Su precisión es de aproximadamente un kilómetro. Emplea elementos orbitales medios (¡jojo! existen fórmulas para convertirlos en osculantes), dados en el formato de dos líneas (TLE: two line elements) que estudiamos a continuación.



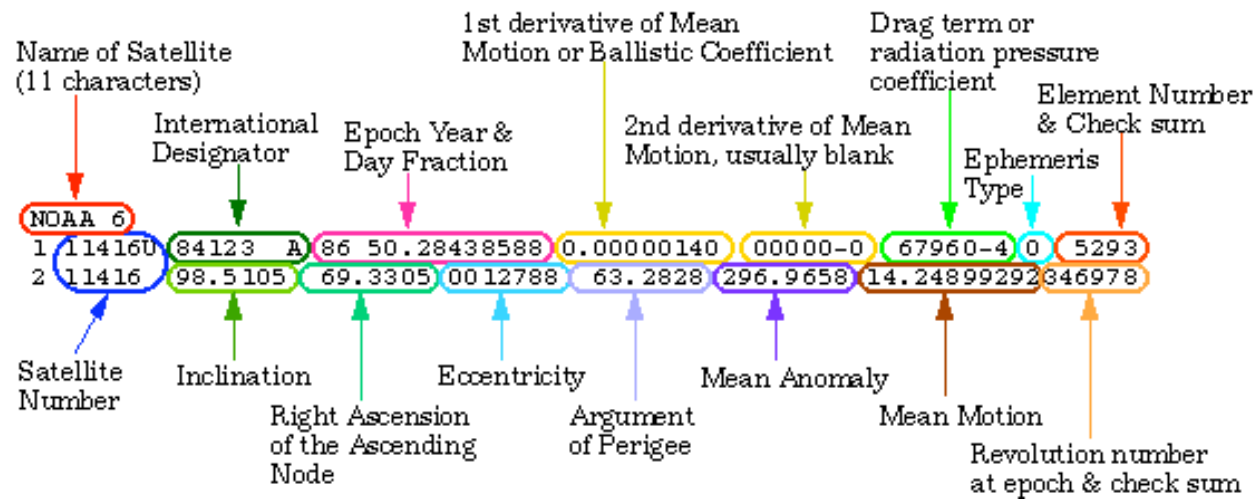
Formato NASA/NORAD



- Los satélites vienen descritos en las bases de datos por dos líneas de números (en inglés “two-line elements”).
- En la primera línea viene t_0 (época: año y fracción de días), y en la segunda, i , Ω , e (se asume un punto decimal al principio), ω , M , y n (en revoluciones por día). El número de revoluciones es el número de vueltas que el satélite ha dado a su órbita en t_0 . Son elementos medios, no osculantes.
- Los otros números sirven para clasificar el satélite o para modelos más complejos, que incluyen perturbaciones.



Formato NASA/NORAD



■ Ejemplos (celestrak.com):

ISS(ZARYA)

```
1 25544U 98067A 07281,99344815 ,0000942300000 - 0 64778 - 4 0 1234
2 25544 51,6338 236,8689 0003196 79,3949 325,2109 15,75490408508738
```

METEOSAT7

```
1 24932U 97049B 07280,81168990 ,00000059 00000 - 0 10000 - 3 0 2809
2 24932 3,6428 76,9883 0001162 185,2668 103,4399 1,00269406 36985
```



Actualización de elementos

- En la práctica, los propagadores nunca predicen con total exactitud los elementos orbitales, y con el tiempo las predicciones se degradan.
- El procedimiento utilizado para evitar esta degradación consiste en obtener medidas de posición y velocidad a partir de observaciones realizadas con cierta frecuencia (por ejemplo cada día o semana).
- Se combinan las medidas obtenidas con el modelo de propagador para obtener una “actualización” de los elementos.
- La herramienta que permite decidir como combinar las medidas con el modelo de propagación se conoce como “Filtro de Kalman”, pondera medidas y modelo en función del error esperado de ambos.

