Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales

Problemas y cuestiones de los Tema 1-2

(problemas marcados con *: para ampliar)

1. Conocida la inclinación de la eclíptica $\varepsilon = 23^o 26'$, hallar la latitud de los trópicos y de los círculos polares.

2. El sistema geocéntrico eclíptico se suele considerar inercial; no obstante, el centro del sistema de referencia (la Tierra) se desplaza respecto al Sol. Encontrar la aceleración de arrastre que se desprecia. ¿Qué sucede con el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial?

3. (*) Formular el cambio de base entre el sistema de referencia heliocéntrico y el geocéntrico eclíptico, entre el geocéntrico eclíptico y el geocéntrico ecuatorial, y entre el geocéntrico ecuatorial y el heliocéntrico.

4. (*) En un instante dado, un satélite en una órbita circular de altitud 800 km se observa con una ascensión recta de 85^o y una declinación de 35^o. Calcular sus coordenadas cartesianas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial.

5. A partir de la duración del día sidéreo y considerando 1 año=365.25 días, demostrar aproximadamente que un día solar medio tiene (con precisión de centésimas de segundo) 24 h.

6. A partir del fenómeno de la precesión de los equinoccios (desplazamiento de retraso del primer punto de Aries con un periodo de 25780 años), y sabiendo que un año sidéreo dura aproximadamente 365 días, 6 horas, 9 minutos y 10 segundos, demostrar que aproximadamente (con precisión de segundos) un año tropical tiene 365 días, 5 horas, 48 minutos y 46 segundos.

7. Julio César instauró el calendario juliano (con años bisiestos, uno cada cuatro años) en el año 46 antes de Cristo. ¿Cuál es la duración del "año juliano"? En 1582, ¿cuánto error (retraso o adelanto) había acumulado el calendario con respecto al año tropical?

8. El calendario gregoriano considera que los años bisiestos son los múltiplos de 4, excepto que lo sean también de 100 (con la excepción de los múltiplos de 400, que si se cuentan como bisiestos, salvo que lo sean también de 4000). ¿Cuál es la duración del "año gregoriano"? ¿Qué error acumularía este calendario con respecto al año tropical tras 10.000 años? Comparar con el calendario juliano.

9. Los nombres de las constelaciones que el Sol (o más propiamente hablando, la línea imaginaria que une al Sol con la Tierra) cruza en su camino son (ordenadas en el sentido recorrido): Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario, y Piscis. Se suponen espaciadas uniformemente. Cuando inicialmente fue definido, el primer punto de Aries (Υ) se encontraba efectivamente en la constelación de Aries. No obstante, debido a la precesión de los equinoccios (desplazamiento de retraso del primer punto de Aries con un periodo de 25780 años) el primer punto de Aries abandonó la constelación de Aries en el año 70 antes de Cristo. ¿En qué constelación se encontraba Υ en los tiempos de Kepler (s. XVII)? ¿y en nuestro año actual? ¿Cuándo cambiará de nuevo de constelación? Deducir a qué se debe el nombre de los trópicos.

10. Considerando la órbita de la Luna alrededor de la Tierra circular, de periodo 27.32 días, y la órbita de la Tierra alrededor del Sol también circular, ¿cuánto dura el mes lunar? Si el plano orbital lunar fuera el de la eclíptica, ¿cada cuánto tiempo habría eclipses lunares? Estimar (en el caso coplanario) la duración de un eclipse lunar.

11. (*) Desde un radiotelescopio en Sevilla ($\phi = 37{,}24^o, \lambda = 5{,}58^o W$) se observa un satélite cuyas coordenadas (topocéntricas) son Azimut=120°, Elevación=65°, Distancia=1200 km. Calcular las coordenadas cartesianas del satélite respecto a Sevilla.

12. ¿Qué día juliano (JD) es el 26 de Octubre de 2008, a las 00:00 UT? ¿y a las 22:30 hora local de Sevilla (horario de invierno)?

13. (*) Sabiendo que el 1 de Enero de 2000, a las 00:00 UT (JD 2451544.5) se tiene que GST=280,46° ¿Cuánto vale GST_0 el 26 de Octubre de 2008? ¿Cuál es el tiempo sidéreo local en Sevilla ($\lambda = 5{,}58^o W$) ese mismo día a las 22:30? ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de Sevilla, a dicha hora, en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial?

14. (*) Desde un radiotelescopio en Sevilla ($\phi = 37{,}24^o$, $\lambda = 5{,}58^o W$) se observa a las 22:30 hora local el 26 de Octubre de 2008, un satélite cuyas coordenadas (topocéntricas) son Azimut=120°, Elevación=65°, Distancia=1200 km.Calcular las coordenadas del satélite respecto al sistema de referencia geocéntrico ecuatorial (cartesianas y esféricas).

15. Si realizáramos una conexión telefónica vía satélite, ¿qué retardo tendría la señal de voz (despreciando el debido al proceso de señal) si el satélite se encontrara en órbita baja ($h \approx 1000$ km)? ¿Y en órbita geostacionaria ($h \approx 36000$ km)? ¿Qué retardo tendría una comunicación telefónica con la Luna?

16. Un cierto día a las 12:00 UT las coordenadas del Sol son $\delta_\odot = 23{,}18^\text{o}$ y $\mathrm{AR}_\odot = 100^\text{o}$. Sabiendo que dicho día $\mathrm{GST}_0 = 280{,}5^\text{o}$, calcular la hora local (sin contar el posible cambio horario de verano), la hora solar media y la hora solar (aparente) en dicho instante, en:

    a) Sevilla ($\phi = 37{,}24^\text{o}N, \lambda = 5{,}58^\text{o}W$, UT+1).

    b) Roma ($\phi = 41^\text{o}54'N, \lambda = 12^\text{o}27'E$,UT+1).

    c) Moscú ($\phi = 55^\text{o}45'N, \lambda = 37^\text{o}36'E$,UT+3).

    d) Buenos Aires ($\phi = 34^\text{o}35'S, \lambda = 58^\text{o}22'W$,UT-3).

17. Escribir las coordenadas esféricas del Sol en la esfera celeste terrestre (declinación y ascensión recta) y en el sistema de referencia geocéntrico eclíptico (longitud eclíptica y latitud eclíptica) en los siguientes instantes de tiempo:

    a) Equinoccio de Primavera.

    b) Solsticio de Verano.

    c) Equinoccio de Otoño.

    d) Solsticio de Invierno.

    Escribir también las coordenadas esféricas de la Tierra en el sistema de referencia heliocéntrico eclíptico (longitud heliocéntrica y latitud heliocéntrica) en los instantes de tiempo antes señalados.

Solución a los problemas y cuestiones de los Temas 1 y 2.

1. Conocida la inclinación de la eclíptica $\varepsilon = 23^o 26'$, hallar la latitud de los trópicos y de los círculos polares.

   Solución:

   La inclinación de la eclíptica es $\varepsilon = 23^o 26'$. De la Figura 1, deducimos que la latitud del trópico de Cáncer es de $23^o 26'$N, mientras que la del trópico de Capricornio es de $23^o 26'$S. Igualmente, la latitud del círculo polar Ártico es de $90^o - \varepsilon = 66^o 34'$N, y la del círculo polar Antártico es de $66^o 34'$S.

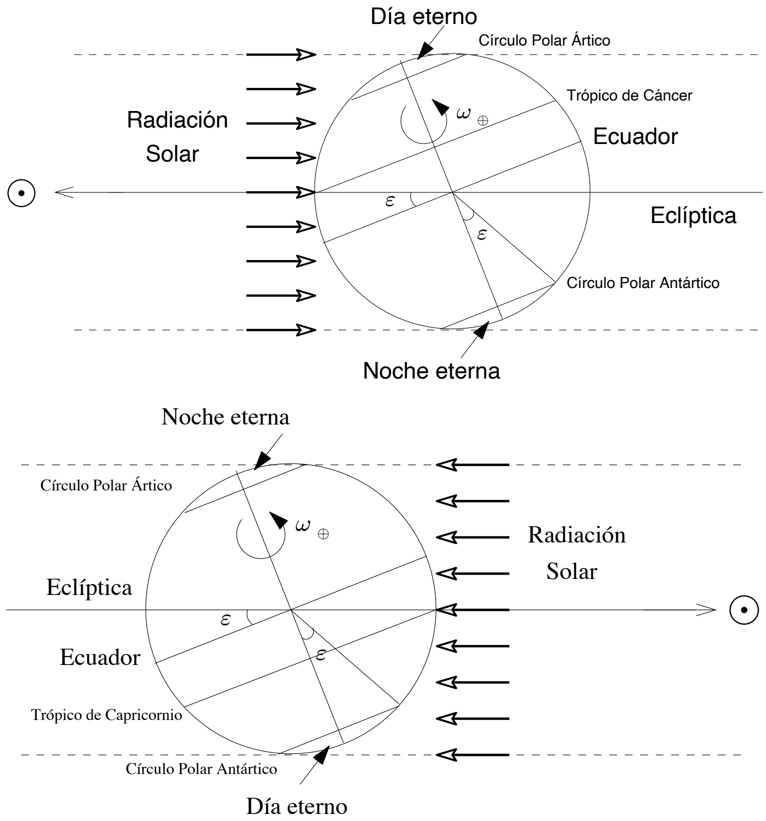


Figura 1: (superior) Verano en el hemisferio Norte. (inferior) Invierno en el hemisferio Norte.

2. El sistema geocéntrico eclíptico se suele considerar inercial; no obstante, el centro del sistema de referencia (la Tierra) se desplaza respecto al Sol. Encontrar la aceleración de arrastre que se desprecia. ¿Qué sucede con el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial?

   Solución:

   Considerando la órbita de la Tierra circular, la aceleración de arrastre será igual a: $\ddot{r} = n_\oplus^2 L_\oplus$, donde $n_\oplus$ es la velocidad angular de la Tierra en su movimiento de translación alrededor del Sol, y $L_\oplus$ es el radio medio entre la Tierra y el Sol. Tomando $T_\oplus^H = 365{,}242$ dias, tenemos que $n_\oplus = \dfrac{2\pi}{T_\oplus^H}$. Introduciendo valores, se llega a que $\ddot{r} = 0{,}006\ \mathrm{m/s^2}$.

   El sistema de referencia geocéntrico ecuatorial sólo se diferencia del eclíptico por una rotación (fija); por tanto sus características inerciales (y en concreto su aceleración de arrastre) son iguales.

3. Formular el cambio de base entre el sistema de referencia heliocéntrico y el geocéntrico eclíptico, entre el geocéntrico eclíptico y el geocéntrico ecuatorial, y entre el geocéntrico ecuatorial y el heliocéntrico.

   Solución:

   Denotemos a un vector escrito en el sistema de referencia heliocéntrico con el superíndice H; en el geocéntrico eclíptico con G; y en el geocéntrico ecuatorial por E.

   H $\leftrightarrow$ G: se tiene que $v^H = v^G + r_\oplus^H(t)$, donde $r_\oplus^H(t)$ denota el vector de posición de la Tierra respecto al Sol, escrito en el sistema de referencia H. Tomando como origen de tiempos el primer punto de Aries, y considerando que la Tierra se mueve en una órbita circular de radio $L_\oplus$, se tiene que

$$r_\oplus^H(t) = L_\oplus \begin{bmatrix} \cos n_\oplus t \\ \operatorname{sen} n_\oplus t \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $n_\oplus = \dfrac{2\pi}{T_\oplus^H}$ es la frecuencia angular de la Tierra en su movimiento de translación con respecto al Sol, y $T_\oplus^H = 365{,}242$ dias.

G $\leftrightarrow$ E: para pasar de H a G es necesario efectúar una rotación de ángulo $-\varepsilon$ con eje el eje x. Por tanto, se tiene que $v^E = C_G^E v^G$, donde C_G^E es una matriz de rotación definida como

$$C_G^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\operatorname{sen}\varepsilon \\ 0 & \operatorname{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Para realizar el cambio inverso, se tiene que $v^G = C_E^G v^E$, donde $C_E^G = (C_G^E)^{-1} = (C_G^E)^T$, debido a las propiedades de las matrices de rotación.

H $\leftrightarrow$ E: combinando los anteriores resultados, $v^E = C_G^E(v^H - r_\oplus^H(t)$ y por tanto $v^H = (C_G^E)^T v^E + r_\oplus^H(t)$.

4. En un instante dado, un satélite en una órbita circular de altitud 800 km se observa con una ascensión recta de 85° y una declinación de 35°. Calcular sus coordenadas cartesianas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial.

   Solución:

   La ascensión recta(AR) y la declinación(δ) son coordenadas esféricas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial. Sabiendo que el radio es (puesto que la órbita es circular, y por tanto, de radio constante) $r = R_\oplus + h = 7178{,}14$ km, se tiene que

$$r^E = r \begin{bmatrix} \cos \mathrm{AR} \cos\delta \\ \operatorname{sen} \mathrm{AR} \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 512{,}47 \\ 5857{,}613 \\ 4117{,}211 \end{bmatrix} \text{ km}.$$

5. A partir de la duración del día sidéreo y considerando 1 año=365.25 días, demostrar aproximadamente que un día solar medio tiene (con precisión de centésimas de segundo) 24 h.

   Solución:

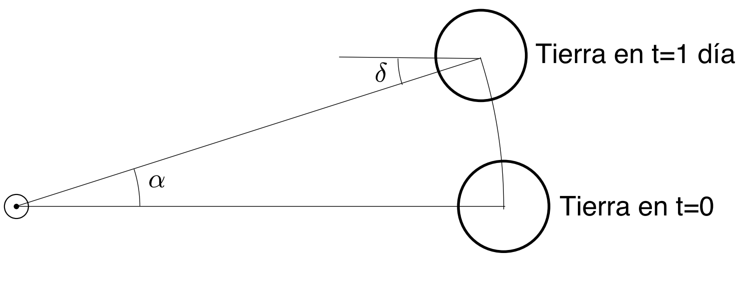


Figura 2: La duración de un día solar medio.

   Consideremos la situación de la Figura 2. Para que el Sol vuelva a pasar sobre el mismo meridiano, la Tierra tiene que haber rotado una revolución y además haber avanzado el ángulo δ de la figura, es decir, si llamamos T_d a la duración de un día, se tendrá que $T_d = T_\oplus\left(1 + \dfrac{\delta}{2\pi}\right)$. Ese es también el tiempo que la Tierra tarda en recorrer el ángulo α en su movimiento de translación en torno al Sol. Evidentemente, $\alpha = \delta$. Por tanto, $T_d = \dfrac{\alpha}{n_\oplus} = \dfrac{\alpha}{2\pi}T_\oplus^H$, donde se toma $T_\oplus^H = 365{,}25$ dias. Despejando α y sustituyendo en la fórmula de T_d:

$$T_d = T_\oplus\left(1 + \frac{T_d}{T_\oplus^H}\right) \to T_d = \frac{T_\oplus}{1 - \frac{T_\oplus}{T_\oplus^H}} = \frac{1}{\frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_\oplus^H}} = 86399{,}904 \text{ s}$$

   Luego $T_d = 86399{,}904$ s $= 24$ h (con un error de $0{,}096$ s).

6. A partir del fenómeno de la precesión de los equinoccios (desplazamiento de retraso del primer punto de Aries con un periodo de 25780 años), y sabiendo que un año sidéreo dura aproximadamente 365 días, 6 horas, 9 minutos y 10 segundos, demostrar que aproximadamente (con precisión de segundos) un año tropical tiene 365 días, 5 horas, 48 minutos y 46 segundos.

Solución:

Tal como se indica en la Figura 3 el fenómeno es inverso al del anterior apartado. Se tiene que $T_{\rm trop} = \frac{2\pi - \delta}{2\pi} T_{\oplus}^H$, y por otro lado $\delta = 2\pi \frac{T_{\rm trop}}{T_{\rm prec}}$, donde $T_{\rm prec} = 25780$ años (tomamos el año de la precesión de los equinoccios como 365.25 días).

Por tanto se llega a

$$T_{\rm trop} = \frac{2\pi - \delta}{2\pi} T_{\oplus}^H = \left(1 - \frac{T_{\rm trop}}{T_{\rm prec}}\right) T_{\oplus}^H \to T_{\rm trop} = \frac{T_{\oplus}^H}{1 + \frac{T_{\oplus}^H}{T_{\rm prec}}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{\oplus}^H} + \frac{1}{T_{\rm prec}}} = 31556925{,}8931 \text{ s}.$$

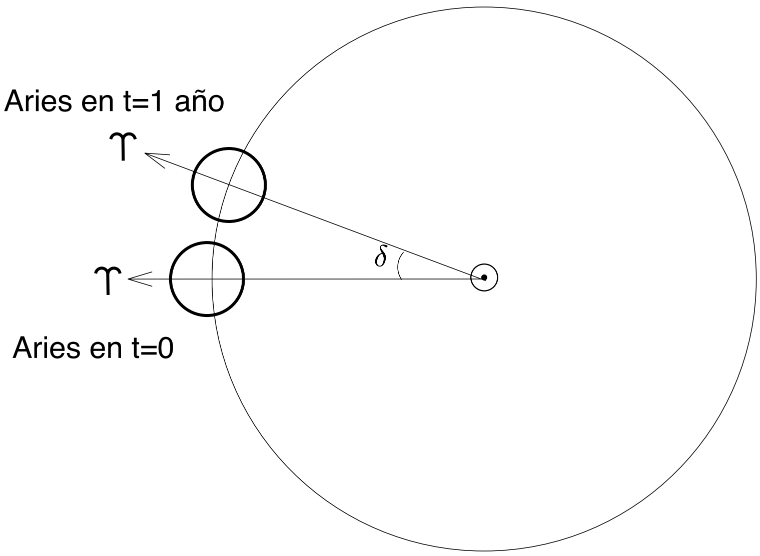


Figura 3: El año tropical.

Luego $T_{\rm trop} = 31556925{,}8931 \text{ s} = 365 \text{ dias } 5 \text{ h } 48 \text{ m } 46 \text{ s}$.

7. Julio César instauró el calendario juliano (con años bisiestos, uno cada cuatro años) en el año 46 antes de Cristo. ¿Cuál es la duración del "año juliano"? En 1582, ¿cuánto error (retraso o adelanto) había acumulado el calendario con respecto al año tropical?

   Solución: La duración del año juliano es de 365.25 días, es decir 365 días y 6 horas, ya que hay que añadir 1/4 de día por los años bisiestos. Por tanto respecto al año tropical antes calculado, el error es de 11 minutos y 14 segundos por año, o lo que es lo mismo, 674 segundos. En 1582-(-46)=1628 años, el error acumulado sería de 1097272 segundos, o lo que es lo mismo, 12 días, 16 horas, 47 minutos, y 52 segundos.

8. El calendario gregoriano considera que los años bisiestos son los múltiplos de 4, excepto que lo sean también de 100 (con la excepción de los múltiplos de 400, que si se cuentan como bisiestos, salvo que lo sean también de 4000). ¿Cuál es la duración del "año gregoriano"? ¿Qué error acumularía este calendario tras 10.000 años? Comparar con el calendario juliano.

   Solución: La duración del año gregoriano es de 365+1/4-1/100+1/400-1/4000=365.24225 días, es decir, 365 días, 5 horas, 48 minutos y 50.4 segundos. Su error respecto al año tropical es de 4.4 segundos. En 10000 años habría acumulado 44000 segundos, es decir, 12 horas, 13 minutos y 20 segundos. En ese mismo tiempo, el calendario juliano habría acumulado 78 días de error!

9. Los nombres de las constelaciones que el Sol (o más propiamente hablando, la línea imaginaria que une al Sol con la Tierra) cruza en su camino son (ordenadas en el sentido recorrido): Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario, y Piscis. Se suponen espaciadas uniformemente. Cuando inicialmente fue definido, el primer punto de Aries (Υ) se encontraba efectivamente en la constelación de Aries. No obstante, debido a la precesión de los equinoccios (desplazamiento de retraso del primer punto de Aries con un periodo de 25780 años) el primer punto de Aries abandonó la constelación de Aries aproximadamente en el año 70 antes de Cristo. ¿En qué constelación se encontraba Υ en los tiempos de Kepler (s. XVII)? ¿y en nuestro año actual? ¿Cuándo cambiará de nuevo de constelación? Deducir a qué se debe el nombre de los trópicos.

   Solución:

Suponiendo las constelaciones regularmente espaciadas, se tarda 25780/12=2148.33 años en atravesarlas (la duración de las llamadas “eras astrológicas”, mientras que 25780 años es la duración de las llamadas “eras platónicas”). Por tanto, si el primer punto de Aries se abandonó en el 70 AC, hasta el 2078.33 DC el primer punto de Aries estará en Piscis (para luego cambiar a Acuario). El nombre de los trópicos se debe a que si el Sol se encuentra en Aries en el equinoccio de Primavera, entonces tres meses después, en el solsticio de verano (el momento en el que el Sol está perpendicular sobre el trópico de Cáncer), ha avanzado tres constelaciones y por tanto se encuentra en Cáncer (en la actualidad, en Géminis). Igualmente, en el solsticio de invierno (cuando el Sol está perpendicular sobre el trópico de Capricornio), el Sol ha avanzado 6 constelaciones desde Cáncer y se encuentra en Capricornio (en la actualidad, en Sagitario).

10. Considerando la órbita de la Luna alrededor de la Tierra circular, de periodo 27.32 días, y la órbita de la Tierra alrededor del Sol también circular, ¿cuánto dura el mes lunar? Si el plano orbital lunar fuera el de la eclíptica, ¿cada cuánto tiempo habría eclipses lunares? ¿Y eclipses solares? Estimar (en el caso coplanario) la duración de un eclipse lunar.

    Solución:

    El mes lunar es el periodo transcurrido entre una fase de la luna (por ejemplo Luna Llena) y su primera repetición. Es decir, es el tiempo que tardan el Sol y la Luna en encontrarse en la misma posición relativa (angular). Siguiendo un razonamiento análogo al problema 5 y la Figura 2, se encuentra que $T_{\mathrm{mes}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{☾}} - \frac{1}{T^H_{\oplus}}} = 29{,}53\ \mathrm{dias}$. En realidad la duración es variable debido a la elipticidad y a las perturbaciones en las órbitas.

    Si la Luna orbitara en la eclíptica, cada Luna Llena habría un eclipse lunar, y cada Luna Nueva uno solar.

    Para estimar la duración de un eclipse lunar, vamos a despreciar el movimiento de translación de la Tierra respecto al Sol, y consideraremos al Sol “en el infinito”. La situación es la mostrada en la Figura 5.

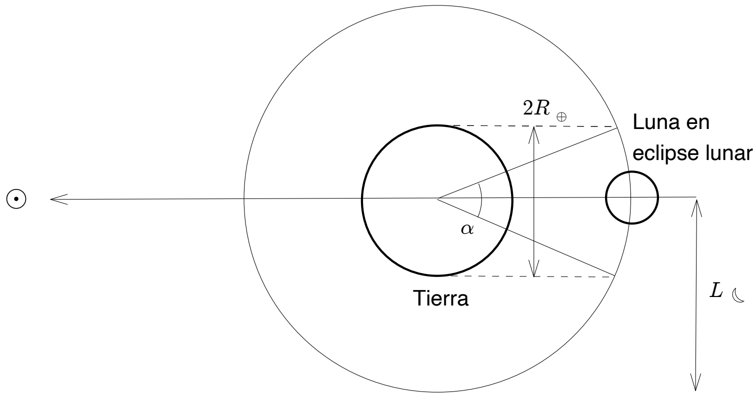


Figura 4: Eclipse de Luna.

    El ángulo que ha de recorrer la Luna α se calcula de $L_{☾}\ \mathrm{sen}\,\alpha/2 = R_{\oplus}$, de donde $\alpha = 1{,}9^{\mathrm{o}}$. Teniendo en cuenta que el periodo orbital de la Tierra es de 27.32 días, la duración es $T^{\mathrm{ecl}}_{☾} = \frac{\alpha}{2\pi} T_{☾} = 12467{,}38\ \mathrm{s} = 3{,}46\ \mathrm{h}$. En realidad el periodo de eclipse total es menor, por varias razones: habría que restar el arco de la Luna a α, considerar la situación real del Sol (no en el infinito) y considerar el efecto de refracción atmosférico. De todas formas esta cifra aproxima bien la duración máxima posible de un eclipse considerando todas sus fases (3.8 horas), mientras que la duración de la “totalidad” no suele exceder de los 100 minutos.

11. Desde un radiotelescopio en Sevilla ($\phi = 37{,}24^{\mathrm{o}}, \lambda = 5{,}58^{\mathrm{o}} W$) se observa un satélite cuyas coordenadas (topocéntricas) son Azimut=120°, Elevación=65°, Distancia=1200 km. Calcular las coordenadas cartesianas del satélite respecto a Sevilla.

    Solución: Las coordenadas Azimut Az, Elevación h y distancia ρ son realmente las coordenadas esféricas del sistema topocéntrico:

$$x^E = \rho \cos h \,\mathrm{sen}\,\mathrm{Az}, y^E = \rho \cos h \cos \mathrm{Az}, z^E = \rho\,\mathrm{sen}\, h.$$

    Se tiene entonces para este caso que

$$x^E = 439{,}198\,\mathrm{km}, y^E = -253{,}57\,\mathrm{km}, z^E = 1087{,}6\,\mathrm{km}.$$

12. ¿Qué día juliano (JD) es el 26 de Octubre de 2008, a las 00:00 UT? ¿y a las 22:30 hora local de Sevilla (horario de invierno)?

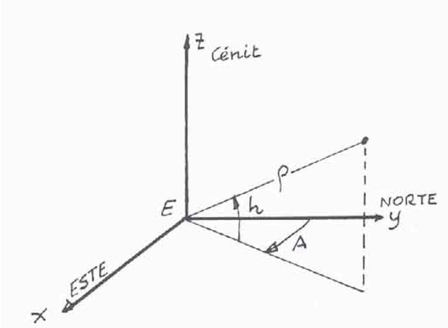


Figura 5: Sistema de referencia topocéntrico.

Solución: Usando la fórmula de teoría, obtenemos 2454765,5 JD. Obsérvese que las 00:00 UT se considera la "mitad del día" desde el punto de vista del calendario juliano.

Sevilla, en el horario de invierno, es $UT + 1$. Por tanto las 22:30 hora local de Sevilla son las 21:30 UT; el 26 de Octubre de 2008, a las 21:30 UT, el día juliano es $2454765{,}5 + 21{,}5/24 = 2454766{,}396$ JD.

13. Sabiendo que el 1 de Enero de 2000, a las 00:00 UT (JD 2451544.5) se tiene que GST=280,46º ¿Cuánto vale GST_0 el 26 de Octubre de 2008? ¿Cuál es el tiempo sidéreo local en Sevilla ($\lambda = 5{,}58^{\mathrm{o}}W$) ese mismo día a las 22:30? ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de Sevilla, a dicha hora, en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial?

Solución: Del anterior problema, podemos calcular el número de días transcurridos entre el 1 de Enero de 2000 y el 26 de Octubre de 2008 simplemente restando los días julianos: $\Delta t = 2454765{,}5 - 2451544{,}5 = 3221$ dias. Por tanto:

$$GST_0(26/10/2008) = GST_0(1/1/2000) + \omega_{\bigoplus}\Delta t = 280{,}46^{\mathrm{o}} + 295{,}992^{\mathrm{o}} = 216{,}4518^{\mathrm{o}}$$

A las 22:30 hora local de Sevilla (21:30 UT):

$$GST(21:30UT) = GST_0 + \omega_{\bigoplus} \cdot 21{,}5 \cdot 3600 = 216{,}4518^{\mathrm{o}} + 323{,}383^{\mathrm{o}} = 179{,}83^{\mathrm{o}}$$

Finalmente, en Sevilla:

$$LST = GST + \lambda = 179{,}83^{\mathrm{o}} - 5{,}58^{\mathrm{o}} = 174{,}255^{\mathrm{o}}$$

Las coordenadas de un punto de la Tierra en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial, conocido su LST y su latitud, son:

$$x^G = R_{\bigoplus}\cos\phi\cos\mathrm{LST}, y^G = R_{\bigoplus}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\mathrm{LST}, z^G = R_{\bigoplus}\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

por tanto, para Sevilla en ese instante:

$$x^G = -5052{,}2\,\mathrm{km}, y^G = 508{,}2738\,\mathrm{km}, z^G = 3859{,}8\,\mathrm{km}.$$

14. Desde un radiotelescopio en Sevilla ($\phi = 37{,}24^{\mathrm{o}}, \lambda = 5{,}58^{\mathrm{o}}W$) se observa a las 22:30 hora local el 26 de Octubre de 2008, un satélite cuyas coordenadas (topocéntricas) son Azimut=120º, Elevación=65º, Distancia=1200 km. Calcular las coordenadas del satélite respecto al sistema de referencia geocéntrico ecuatorial (cartesianas y esféricas).

Solución: Puesto que en los anteriores problemas hemos calculado, respectivamente, la posición de Sevilla en dicho instante respecto del sistema de referencia geocéntrico ecuatorial, y la posición del satélite respecto a Sevilla, podemos simplemente sumar las respuestas de los dos problemas para encontrar la solución de éste. Para que esta suma sea posible ambos vectores han de estar expresados en la misma base.

Obsérvese que para pasar del sistema referencia topocéntrico T al geocéntrico inercial G, sería necesario: una rotación de ángulo $-\phi_{SVQ}$ en torno al eje x, y una rotación de ángulo $-(90^{\mathrm{o}} + \mathrm{LST_{SVQ}})$ en torno al nuevo eje z. Esquemáticamente:

$$T \underset{x}{\overset{-(90-\phi)}{\longrightarrow}} S \underset{z}{\overset{-(90^{\mathrm{o}}+\mathrm{LST})}{\longrightarrow}} G$$

Por tanto la matriz de cambio de base será:

$$\begin{aligned} C_T^G &= C_S^G C_T^S = \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\,\mathrm{LST} & -\cos\mathrm{LST} & 0 \\ \cos\mathrm{LST} & -\mathrm{sen}\,\mathrm{LST} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\,\phi & -\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & \mathrm{sen}\,\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\,\mathrm{LST} & -\cos\mathrm{LST}\,\mathrm{sen}\,\phi & \cos\mathrm{LST}\cos\phi \\ \cos\mathrm{LST} & -\mathrm{sen}\,\mathrm{LST}\,\mathrm{sen}\,\phi & \mathrm{sen}\,\mathrm{LST}\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & \mathrm{sen}\,\phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando la matriz para Sevilla en el instante de tiempo del problema, puesto que $\phi = 37{,}24^{\circ}$ y LST $= 174{,}255^{\circ}$, tendremos que

$$C_T^G = \begin{bmatrix} -0{,}1001 & 0{,}6021 & -0{,}7921 \\ -0{,}9950 & -0{,}0606 & 0{,}0797 \\ 0 & 0{,}7961 & 0{,}6052 \end{bmatrix}$$

Aplicando el cambio de base a los resultados anteriormente obtenidos:

$$r_{SAT-SVQ}^G = C_T^G r_{SAT-SVQ}^T = \begin{bmatrix} -1058{,}1 \\ -335 \\ 456{,}3 \end{bmatrix} \text{ km.}$$

$$\begin{aligned} x_{SAT}^G &= x_{SVQ}^G + x_{SAT-SVQ}^G = -6110{,}3\,\text{km}, \\ y_{SAT}^G &= y_{SVQ}^G + y_{SAT-SVQ}^G = 173{,}3\,\text{km}, \\ z_{SAT}^G &= z_{SVQ}^G + z_{SAT-SVQ}^G = 4316\,\text{km}. \end{aligned}$$

Pasando a esféricas, que para el caso geocéntrico se llaman ascensión recta (AR) y declinación (δ), obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{AR}_{SAT} &= \arctan\left(\frac{y_{SAT}^G}{x_{SAT}^G}\right) = 180^{\circ} - 1{,}62^{\circ} = 178{,}38^{\circ}, \\ \delta_{SAT} &= \arctan\left(\frac{z_{SAT}^G}{\sqrt{(x_{SAT}^G)^2 + (y_{SAT}^G)^2}}\right) = 35{,}23^{\circ}, \end{aligned}$$

dónde el valor de AR se ha corregido por encontrarse en el segundo cuadrante (el valor que da la función $\arctan$ es $-1{,}62^{\circ}$).

15. Si realizáramos una conexión telefónica vía satélite, ¿qué retardo tendría la señal de voz (despreciando el debido al proceso de señal) si el satélite se encontrara en órbita baja ($h \approx 1000$ km)? ¿Y en órbita geoestacionaria ($h \approx 36000$ km)? ¿Qué retardo tendría una comunicación telefónica con la Luna?

    Solución: Asumiendo $c \approx 3 \cdot 10^5$ km/s y considerando la ida y vuelta de la señal, las respuestas serían: 6.6 milisegundos para órbita baja (apenas apreciable), 0.24 segundos para geoestacionaria, y 2.6 segundos para la Luna.

16. Un cierto día a las 12:00 UT las coordenadas del Sol son $\delta_{\odot} = 23{,}18^{\circ}$ y AR$_{\odot} = 100^{\circ}$. Sabiendo que dicho día GST$_0 = 280{,}5^{\circ}$, calcular la hora local (sin contar el posible cambio horario de verano) y la hora solar en dicho instante, en:

    a) Sevilla ($\phi = 37{,}24^{\circ}N, \lambda = 5{,}58^{\circ}W$, UT+1).
    b) Roma ($\phi = 41^{\circ}54'N, \lambda = 12^{\circ}27'E$,UT+1).
    c) Moscú ($\phi = 55^{\circ}45'N, \lambda = 37^{\circ}36'E$,UT+3).
    d) Buenos Aires ($\phi = 34^{\circ}35'S, \lambda = 58^{\circ}22'W$,UT-3).

    Solución:

    En primer lugar, $\text{GST}(12:00\text{ UT}) = \text{GST}_0 + \omega_{\oplus}\Delta t = 100{,}993^{\circ}$, donde $\Delta t = 12$ h $= 43200$ s. La hora solar se calcula simplemente de la fórmula $H = \frac{\text{LST}-\text{RA}_{\odot}}{15} + 12$, donde LST $=$ GST $+ \lambda$.

    a) Sevilla. La hora local será las 13:00. La hora solar será $H = 11{,}6942$ h $= 11:41:39$.
    b) Roma. La hora local será las 13:00. La hora solar será $H = 12{,}8962$ h $= 12:53:46$.
    c) Moscú. La hora local será las 15:00. La hora solar será $H = 14{,}5729$ h $= 14:34:22$.
    d) Buenos Aires. La hora local será las 9:00. La hora solar será $H = 8{,}1751$ h $= 8:10:30$.

17. Escribir las coordenadas esféricas del Sol en la esfera celeste terrestre (declinación y ascensión recta) y en el sistema de referencia geocéntrico eclíptico (longitud eclíptica y latitud eclíptica) en los siguientes instantes de tiempo:

    a) Equinoccio de Primavera.
    b) Solsticio de Verano.
    c) Equinoccio de Otoño.
    d) Solsticio de Invierno.

Escribir también las coordenadas esféricas de la Tierra en el sistema de referencia heliocéntrico eclíptico (longitud heliocéntrica y latitud heliocéntrica) en los instantes de tiempo antes señalados.

Solución: En cada uno de estos instantes de tiempo las posiciones están claramente definidas.

a) Equinoccio de Primavera.

Por definición, el Sol se encuentra en Υ. Por tanto, $\delta_\odot = 0^o$, $\mathrm{RA}_\odot = 0^o$. Igualmente, $\beta = 0^o$, $\lambda = 0^o$. Por otro lado, desde el sistema de referencia heliocéntrico, la Tierra se encuentra opuesta a Υ, por tanto $\phi_\oplus^\odot = 0^o$, $\lambda_\oplus^\odot = 180^o$.

b) Solsticio de Verano.

La situación se habrá desplazado 90^o desde el Equinoccio de Primavera, en el plano de la eclíptica, en el sentido contrario a las agujas del reloj. Respecto al plano del Ecuador, el Sol alcanza su máxima declinación. Por tanto, $\delta_\odot = \epsilon = 23{,}5^o$, $\mathrm{RA}_\odot = 90^o$. Por otro lado, $\beta = 0^o$, $\lambda = 90^o$. Igualmente en el sistema de referencia heliocéntrico, $\phi_\oplus^\odot = 0^o$, $\lambda_\oplus^\odot = 270^o$.

c) Equinoccio de Otoño.

La situación se habrá desplazado 90^o desde el Solsticio de Verano. Por tanto en el sistema de referencia geocéntrico el Sol se encuentra opuesto a Υ. Por tanto, $\delta_\odot = 0^o$, $\mathrm{RA}_\odot = 180^o$. Por otro lado, $\beta = 0^o$, $\lambda = 180^o$. En el sistema de referencia heliocéntrico la Tierra está en la dirección de Υ, por lo que $\phi_\oplus^\odot = 0^o$, $\lambda_\oplus^\odot = 0^o$.

d) Solsticio de Invierno.

Finalmente, la situación se habrá desplazado 90^o desde el Equinoccio de Otoño. Respecto al plano del Ecuador, el Sol alcanza su mínima declinación. Por tanto, $\delta_\odot = -\epsilon = -23{,}5^o$, $\mathrm{RA}_\odot = 270^o$. Por otro lado, $\beta = 0^o$, $\lambda = 270^o$. Igualmente en el sistema de referencia heliocéntrico, $\phi_\oplus^\odot = 0^o$, $\lambda_\oplus^\odot = 90^o$.

Problemas y cuestiones de los Temas 3-4

(problemas marcados con *: para ampliar, con †:problema teórico complementario a teoría)

1. Unidades canónicas: Para evitar el problema de trabajar con números muy grandes (y de difícil interpretación) se definen "unidades canónicas" para adimensionalizar las variables. En problemas geocéntricos (respectivamente, planetocéntricos), se utiliza el radio de la Tierra $R_\oplus$ (respectivamente, del planeta R_{Planeta}) como unidad de distancia (UD). Como unidad de velocidad (UV) se usa la "velocidad circular en la superficie de la Tierra", $UV = \sqrt{\mu_\oplus / R_\oplus}$ (resp. $\text{UV} = \sqrt{\mu_{\text{Planeta}}/R_{\text{Planeta}}}$). Finalmente, definimos la unidad de tiempo (UT) como $\text{UT} = \text{UD}/\text{UV}$. De esa forma se tiene que $\mu_\oplus$ (resp. μ_{Planeta}) expresado en unidades canónicas vale 1. En problemas heliocéntricos se usa $\text{UD} = 1$ AU y la velocidad media de la Tierra como UV. Determinar las unidades canónicas para problemas geocéntricos, heliocéntricos, y centrados en Júpiter.

2. ¿Cuál es la velocidad de un satélite en una órbita circular a altitud 250 km? ¿Cuál es su periodo?

3. (†) Cuando se definen órbitas, en ocasiones se utiliza la notación $h_p \times h_a$ para denotar una órbita con altitud de perigeo h_p y altitud de apogeo h_a. Encontrar el semieje mayor y la excentricidad de una órbita $h_p \times h_a$.

4. Un satélite ha sido observado a 1200 km de altitud con una velocidad de 10 km/s y un ángulo de trayectoria igual a $23{,}174^o$. Determinar el tipo de órbita, su excentricidad y el valor, si procede, de a. Repetir el problema para una velocidad de 12 km/s.

5. Dado un objeto en órbita elíptica alrededor de la Tierra, con radios de apogeo y perigeo respectivamente $r_p = 6600$ km y $r_a = 55000$ km, encontrar la anomalía verdadera de su posición al entrar en la anomalía del Atlántico Sur en el cinturón de Van Allen a altitud $h = 500$ km.

6. (*) Dados dos puntos en un plano por sus coordenadas polares r_1, θ_1 y r_2, θ_2, determinar la cónica que pasa por ambos puntos y tiene como foco al origen de coordenadas. ¿Bajo qué condiciones se puede encontrar una solución a este problema? ¿Es dicha solución única?

7. (*) Aplicar la solución a encontrar una órbita de transferencia entre la Tierra y Plutón (♇), suponiendo que la elipse de transferencia tiene la línea de ápsides a una longitud (respecto de ♈) de 25^o, y las longitudes de la Tierra al inicio y Plutón al final (supuestos ambos en órbitas circulares coplanarias) son 40^o y 195^o respectivamente. ¿Cuánto tiempo se tardaría en realizar dicha transferencia? Dato: $L_{♇} = 39{,}48$ AU.

8. Calcular la velocidad de escape de la Tierra, la Luna ($\mu_{☾} = 4902{,}9$ km^3/s^2, $R_{☾} = 1737{,}4$ km), Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4$ km^3/s^2, $R_{♃} = 71492$ km) y Marte ($\mu_{♂} = 42828{,}3$ km^3/s^2, $R_{♂} = 3397$ km).

9. El primer satélite de Júpiter (Io) tiene un periodo de aproximadamente 1 día, 18 horas, 27 minutos y 33.5 segundos, y una distancia media al centro de Júpiter de 421700 km. Estimar la masa de Júpiter en términos de la masa de la Tierra.

10. (†) Demostrar que el ángulo de trayectoria verifica $\tan\gamma = \frac{e \operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}$. Demostrar que esta fórmula implica que si γ es negativo, θ es negativa. Usar la fórmula para demostrar que en el caso de una parábola, $\gamma = \theta/2$, y explicar el significado geométrico de dicho resultado.

11. A partir de los elementos orbitales de la ISS y del METEOSAT 7 en el formato de 2 líneas, tal como se dan en teoría, encontrar: sus elementos orbitales keplerianos, y su posición y velocidad en la época.

12. La órbita de cartografía de la sonda Magallanes alrededor de Venus ($\mu_{♀} = 324858{,}8$ km^3/s^2, $R_{♀} = 6051{,}8$ km) tiene como valores $a = 10424{,}1$ km y $e = 0{,}39433$. La misión cartográfica comenzó en el punto que tiene una anomalía verdadera $\theta = 280^o$. Calcular el ángulo de trayectoria, velocidad y tiempo desde periapsis en dicho punto.

13. Aproximar a primer(†) y segundo(*) orden de e la ley horaria de una órbita elíptica de excentricidad pequeña e.

14. Un cuerpo es lanzado desde la superficie de la Tierra justo con la velocidad de escape. Suponiendo el perigeo de la trayectoria en la superficie de la Tierra, ¿cuánto tiempo tarda en escapar? Suponer que el radio de escape es $r_\infty = L_\oplus \left(\mu_\oplus/\mu_\odot\right)^{2/5}$.

15. Dada una órbita elíptica con $e = 0{,}85$ y altitud del perigeo $h_p = 600$ km, calcular el tiempo que transcurre entre dos posiciones A y B tales que $\theta_A = 120^o$ y $\theta_B = 230^o$.

16. (†) Para una órbita elíptica de excentricidad e y semieje mayor a, sabemos que su velocidad angular (orbital) media es $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. Su velocidad angular instantánea $\dot\theta$ no será en general constante y dependerá de la anomalía verdadera θ. Encontrar el valor de $\dot\theta$ como función de θ, e y n. ¿Para qué valores de θ coincidirán $\dot\theta$ y n? ¿Para qué valores de θ tendrá $\dot\theta$ la máxima discrepancia de n? Aproximar los resultados para un pequeño valor de excentricidad.

17. (†) Demostrar (para una órbita no circular) la fórmula $\ddot{\theta} = -2\dot{\theta}^2 \tan\gamma$, donde θ es la anomalía verdadera y γ el ángulo de trayectoria. En base a la fórmula, ¿en qué partes de la órbita será la aceleración angular negativa, y en cuáles positiva? ¿Cuándo se hará cero?

18. (†) Demostrar, para una órbita elíptica con $e > 0$, que el vector excentricidad $\vec{e}$ apunta siempre en dirección a periapsis.

19. El 24 de Agosto de 1989 el Voyager 2 tuvo un encuentro con Neptuno ($\mu_♆ = 6871307{,}8$ km^3/s^2, $R_♆ = 24764$ km), siguiendo una órbita hiperbólica de parámetros $a = -19985$ km y $e = 2{,}45859$. En su alejamiento, la sonda pasó cerca de Tritón, a 354600 km de Neptuno. ¿Cuánto tiempo (Δt) transcurrió desde periapsis hasta el encuentro con Tritón ?

20. Un vehículo espacial se acerca a Venus con una velocidad de exceso $v_\infty = 10$ km/s y un ángulo $\theta_\infty = 140^o$. Encontrar el radio de periapsis. ¿Cuál es el ángulo de giro de la velocidad respecto a la velocidad de llegada cuando vuelve a "escapar" de Venus? ¿Cuánto tarda en escapar? Volver a responder a la última pregunta suponiendo que el radio de llegada y de salida, en vez de infinito, es $r_\infty = L_♀ \left(\mu_♀/\mu_\odot\right)^{2/5}$, donde $L_♀ = 0{,}723327$ AU.

21. Se realizaron dos observaciones de un satélite en órbita geocéntrica; la altitud de la primera observación fue $h_A = 2298$ km y de la segunda $h_B = 6476$ km. El ángulo entre las dos observaciones fue $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A = 90^o$. Se sabe que el semieje mayor de la órbita es $a = 12000$ km. Encontrar el tiempo de vuelo t_v, e, θ_A, θ_B, h_p y Δt_A.

22. (*) Encontrar el error que se comete en la anomalía verdadera $\delta\theta$ y en el radio, δr, a partir de un error en la anomalía excéntrica δE.

23. Un satélite geocéntrico en órbita elíptica tiene un semieje mayor $a = 4R_\oplus$ y un perigeo $r_p = 1{,}5R_\oplus$. Encontrar la anomalía verdadera 4 horas después del paso por el perigeo. Repetir el problema si $a = 40R_\oplus$ (órbita muy excéntrica). ¿Cuál es el error aproximado, en ángulo y en distancia, que se ha cometido resolviendo la ecuación de Kepler en ambos casos?

24. Repetir el problema anterior para una órbita parabólica con perigeo $r_p = 1{,}5R_\oplus$

25. (*) Desde la Tierra se determina la posición y velocidad de un satélite respecto al sistema de referencia Geocéntrico Ecuatorial como

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (-0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j} + 0{,}5\vec{k}) \text{ UD}, \\ \vec{v}_0 &= (-0{,}4\vec{i} - 0{,}8\vec{j} + 0{,}6\vec{k}) \text{ UV}. \end{aligned}$$

Determinar los elementos orbitales $(a, e, i, \Omega, \omega, \Delta t)$ del satélite. Si la medida está tomada a las 15:00 UT el 23 de Julio de 2006 ¿Cúando fue el último paso por el perigeo? ¿Y por el apogeo?

26. Se sabe que en una cierta época, un cuerpo orbitando la Tierra tiene como posición y velocidad las siguientes, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UV}.$$

Se pide encontrar los elementos orbitales del cuerpo, en dicha época, expresados también en unidades canónicas. Repetir el problema para los siguientes otros dos casos:

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UV}; \quad \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UV}.$$

27. Se ha descubierto un asteroide errante con elementos orbitales (relevantes para el problema): $a = -2797{,}425$ km, $e = 2{,}8$, $\theta = 249{,}27^o$. ¿Es un peligro para la Tierra? En tal caso, ¿cuánto tiempo queda para su impacto?

28. (†) Explicar la paradoja del satélite: Una vez dentro de la atmósfera, si la órbita es aproximadamente circular, $v = \sqrt{\mu_\oplus/r}$. Puesto que el efecto de la resistencia atmosférica es disminuir r, se concluye que la resistencia incrementa la velocidad!

29. (*) Comprobar que las soluciones dadas para el potencial de la Tierra verifican, en efecto, la ecuación de Laplace.

30. (*) Repetir el cálculo realizado para los efectos del J_2 con el J_3. ¿Existen variaciones seculares?

31. Calcular la magnitud (grados/día) del avance del perigeo y regresión de los nodos para un satélite en órbita baja circular, a una altitud de 1000 km y con una inclinación de 30^o. ¿Es un efecto apreciable?

32. (*) Puesto que una vela solar siempre recibe su fuerza propulsiva en la dirección opuesta al Sol, ¿Podría utilizarse para viajar hacia los planetas inferiores?

Solución a los problemas y cuestiones de los Temas 3 y 4

1. Unidades canónicas: Para evitar el problema de trabajar con números muy grandes (y de difícil interpretación) se definen “unidades canónicas” para adimensionalizar las variables. En problemas geocéntricos (respectivamente, planetocéntricos), se utiliza el radio de la Tierra $R_\oplus$ (respectivamente, del planeta R_{Planeta}) como unidad de distancia (UD). Como unidad de velocidad (UV) se usa la “velocidad circular en la superficie de la Tierra”, $UV = \sqrt{\mu_\oplus/R_\oplus}$ (resp. $\text{UV} = \sqrt{\mu_{\text{Planeta}}/R_{\text{Planeta}}}$). Finalmente, definimos la unidad de tiempo (UT) como $\text{UT} = \text{UD}/\text{UV}$. De esa forma se tiene que $\mu_\oplus$ (resp. μ_{Planeta}) expresado en unidades canónicas vale 1. En problemas heliocéntricos se usa $\text{UD} = 1$ AU y la velocidad media de la Tierra como UV; $\mu_\odot$ expresado en estas unidades también es 1.

   Determinar las unidades canónicas para problemas geocéntricos, heliocéntricos, y centrados en Júpiter. Dato: $\mu_♃ = 126711995{,}4\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $R_♃ = 71492$ km.

   <u>Solución</u>:

   Problemas geocéntricos:

$$
\begin{aligned}
\text{UD}_\oplus &= R_\oplus = 6378{,}14\ \text{km}, \\
\text{UV}_\oplus &= \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R_\oplus}} = 7{,}9054\ \text{km/s}, \\
\text{UT}_\oplus &= \frac{\text{UD}_\oplus}{\text{UV}_\oplus} = 806{,}8117\ \text{s} = 13{,}447\ \text{min}.
\end{aligned}
$$

   Problemas heliocéntricos:

$$
\begin{aligned}
\text{UD}_\odot &= L_\oplus = 1\ \text{AU} = 149 \cdot 10^6\ \text{km}, \\
\text{UV}_\odot &= \sqrt{\frac{\mu_\odot}{L_\oplus}} = 29{,}7847\ \text{km/s}, \\
\text{UT}_\odot &= \frac{\text{UD}_\odot}{\text{UV}_\odot} = 5{,}0226 \cdot 10^6\ \text{s} = 58{,}1324\ \text{dias}.
\end{aligned}
$$

   Problemas centrados en Júpiter:

$$
\begin{aligned}
\text{UD}_♃ &= R_♃ = 71492\ \text{km}, \\
\text{UV}_♃ &= \sqrt{\frac{\mu_♃}{R_♃}} = 42{,}0998\ \text{km/s}, \\
\text{UT}_♃ &= \frac{\text{UD}_♃}{\text{UV}_♃} = 1698{,}2\ \text{s} = 28{,}3026\ \text{min}.
\end{aligned}
$$

2. ¿Cuál es la velocidad de un satélite en una órbita circular a altitud 250 km? ¿Cuál es su periodo?

   <u>Solución</u>:

   En primer lugar hay que pasar de altitud a radio: $r = h + R_\oplus = 6628{,}14$ km. Usando la fórmula de la velocidad circular, $v = \sqrt{\mu_\oplus/r} = 7{,}7548$ km/s. Finalmente, usando la fórmula del periodo, $T = 2\pi\sqrt{r^3/\mu_\oplus} = 5370{,}3\ \text{s} = 1{,}492$ h.

3. Cuando se definen órbitas, en ocasiones se utiliza la notación $h_p \times h_a$ para denotar una órbita con altitud de perigeo h_p y altitud de apogeo h_a. Encontrar el semieje mayor y la excentricidad de una órbita $h_p \times h_a$.

   <u>Solución</u>:

   Se tiene que $r_p = a(1-e) = h_p + R_\oplus$, y que $r_a = a(1+e) = h_a + R_\oplus$. Por tanto, sumando las ecuaciones:

$$
a(1-e) + a(1+e) = 2a = h_p + h_a + 2R_\oplus \longrightarrow a = \frac{h_p + h_a}{2} + R_\oplus.
$$

   Sustituyendo este valor de a en una de las ecuaciones, tenemos, por ejemplo:

$$
\left(\frac{h_p + h_a}{2} + R_\oplus\right)(1-e) = h_p + R_\oplus \longrightarrow e = \frac{\frac{h_p+h_a}{2} + R_\oplus - h_p - R_\oplus}{\frac{h_p+h_a}{2} + R_\oplus},
$$

   y simplificando llegamos a:

$$
e = \frac{h_a - h_p}{h_a + h_p + 2R_\oplus}.
$$

4. Un satélite ha sido observado a 1200 km de altitud con una velocidad de 10 km/s y un ángulo de trayectoria igual a $23{,}174^o$. Determinar el tipo de órbita, su excentricidad y el valor, si procede, de a. Repetir el problema para una velocidad de 12 km/s.

   Solución: En primer lugar $r = h + R_\oplus = 7578{,}14$ km. Por tanto su energía específica será $\epsilon = v^2/2 - \mu_\oplus/r = -2{,}5987\ \mathrm{km}^2/\mathrm{s}^2$. Puesto que el resultado es negativo, la órbita es necesariamente elíptica. Como se tiene que $\epsilon = -\frac{\mu_\oplus}{2a}$, obtenemos que $a = 76692$ km. Por otro lado, tenemos que $h = vr\cos\gamma = 69667\ \mathrm{km}^2/\mathrm{s}$, de donde $p = h^2/\mu_\oplus = 12176$ km. Finalmente de la expresión $p = a(1-e^2)$ obtenemos que $e = 0{,}9172$.

   Repitiendo los mismos pasos con $v = 12$ km/s, obtenemos $\epsilon = 19{,}4013\ \mathrm{km}^2/\mathrm{s}^2$ (órbita hiperbólica), $a = -10273$ km, $h = 83600\ \mathrm{km}^2/\mathrm{s}$, $p = 17534$ km y $e = 1{,}6453$.

5. Dado un objeto en órbita elíptica alrededor de la Tierra, con radios de apogeo y perigeo respectivamente $r_p = 6600$ km y $r_a = 55000$ km, encontrar la anomalía verdadera de su posición al entrar en la anomalía del Atlántico Sur en el cinturón de Van Allen a altitud $h = 500$ km.

   Solución:

   Puesto que para una órbita elíptica $r_p = a(1-e)$ y $r_a = a(1+e)$, obtenemos que $\frac{r_p}{r_a} = \frac{1-e}{1+e}$ y despejando $e = \frac{r_p - r_a}{r_p + r_a}$. En este caso, $e = 0{,}7857$, y también $a = \frac{r_p}{1-e} = 30800$ km, luego $p = a(1-e^2) = 11786$ km. La ecuación de la cónica es $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, sustituyendo $r = h + R_\oplus = 6878{,}14$ km obtenemos $\theta = 24{,}7566^o$ (otra solución válida es $\theta = 335{,}2434^o$).

6. Dados dos puntos en un plano por sus coordenadas polares r_1, θ_1 y r_2, θ_2, determinar la cónica que pasa por ambos puntos y tiene como foco al origen de coordenadas. ¿Bajo qué condiciones se puede encontrar una solución a este problema? ¿Es dicha solución única?

   Solución:

   Usando la ecuación de la cónica, tendríamos dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{p}{1+e\cos\theta_1}, \\ r_2 &= \frac{p}{1+e\cos\theta_2}, \end{aligned}$$

   con dos incógnitas (p y e). Dividiendo una ecuación por la otra, obtenemos

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1+e\cos\theta_2}{1+e\cos\theta_1},$$

   y despejando e y resolviendo también para p:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2}, \qquad p = r_1 r_2 \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2}.$$

   El problema tendrá solución única si $r_1\cos\theta_2 \neq r_2\cos\theta_1$ (es decir, ambos puntos no deben estar en la misma vertical) y si e, obtenida de la fórmula más arriba, es mayor o igual que cero.

   El significado geométrico de que e sea mayor de cero es el siguiente: supóngase $r_2 > r_1$; entonces la condición para que la cónica exista es $r_1\cos\theta_1 > r_2\cos\theta_2$, es decir, que r_1 (el punto más cercano) tiene que ser el que está "más a la derecha" en el plano de la órbita. En caso contrario no hay solución.

   Por otro lado, habrá solución pero no única si los puntos son los mismos (evidentemente) o si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = -\theta_2$, ya que en tal caso los puntos son simétricos respecto al eje x y cualquier cónica que pase por un punto, ha de pasar por el otro.

7. Aplicar la solución a encontrar una órbita de transferencia entre la Tierra y Plutón (♇), suponiendo que la elipse de transferencia tiene la línea de ápsides a una longitud (respecto de ♈) de 25^o, y las longitudes de la Tierra al inicio y Plutón al final (supuestos ambos en órbitas circulares coplanarias) son 40^o y 195^o respectivamente. ¿Cuánto tiempo se tardaría en realizar dicha transferencia? Dato: $L_{♇} = 39{,}48$ AU.

   Solución:

   Llamando 1 al punto donde se encuentra la Tierra al inicio, se tiene que $r_1 = 1$ AU y $\theta_1 = 40 - 25 = 15^o$. Igualmente llamando 2 al punto donde se encuentra Plutón al final, $r_2 = 39{,}48$ AU y $\theta_2 = 195 - 25 = 170^o$. Obsérvese que se verifica que $r_2 > r_1$ y que $r_1\cos\theta_1 > r_2\cos\theta_2$ (ya que la primera cantidad es positiva y la segunda negativa).

   Aplicando la fórmula anterior, obtenemos $e = 0{,}9657$ y $p = 1{,}9328$ AU de donde $a = \frac{p}{1-e^2} = 28{,}67$ AU. El tiempo que se tardaría en efectuar la transferencia hay que calcularlo usando leyes horarias, y sería $T = \Delta t_2 - \Delta t_1$ donde Δt_i es el tiempo transcurrido desde perigeo hasta llegar al punto i. En primer lugar las anomalías excéntricas son, usando la fórmula $\tan E/2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\theta/2$, las siguientes: $E_1 = 0{,}0348$ rad y $E_2 = 1{,}9714$ rad, de donde usando la fórmula $M = E - e \operatorname{sen} E$ obtenemos $M_1 = 0{,}0012$ rad y $M_2 = 1{,}0822$ rad. Finalmente de $\Delta t = M/n$, donde $n = \sqrt{\mu_\odot/a^3} = 0{,}0065$ rad/UT obtenemos $\Delta t_1 = 0{,}1841$ UT y $\Delta t_2 = 166{,}2039$ UT, por lo que $T = 166{,}0198$ UT. Usando la definición de UT para problemas heliocéntricos, llegamos a que $T = 9651{,}1$ dias $= 26{,}44$ años.

8. Calcular la velocidad de escape de la Tierra, la Luna ($\mu_☾ = 4902{,}9$ km^3/s^2, $R_☾ = 1737{,}4$ km), Júpiter ($\mu_♃ = 126711995{,}4$ km^3/s^2, $R_♃ = 71492$ km) y Marte ($\mu_♂ = 42828{,}3$ km^3/s^2, $R_♂ = 3397$ km).

   Solución:

   La velocidad de escape viene dada por la fórmula $V_e = \sqrt{2\mu/r}$. Aplicando esta fórmula, obtenemos: $V_{e\oplus} = 11{,}18$ km/s, $V_{e☾} = 2{,}3757$ km/s, $V_{e♃} = 59{,}5381$ km/s, $V_{e♂} = 5{,}0215$ km/s.

9. El primer satélite de Júpiter (Io) tiene un periodo de aproximadamente 1 día, 18 horas, 27 minutos y 33.5 segundos, y una distancia media al centro de Júpiter de 421700 km. Estimar la masa de Júpiter en términos de la masa de la Tierra.

   Solución:

   Del enunciado obtenemos $T_{io} = 152853{,}5\, f$s. Puesto que $T_{io} = 2\pi\sqrt{L_{io}^3/\mu_♃}$, obtenemos que $\mu_♃ = 126713418$ km^3/s^2. Por tanto $M_♃/M_\oplus = \mu_♃/\mu_\oplus = 317{,}9$.

10. Demostrar que el ángulo de trayectoria verifica $\tan\gamma = \frac{e \operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}$. Demostrar que esta fórmula implica que si γ es negativo, $\theta \in (180^o, 360^o)$ o para la hipérbola, $\theta \in (-\theta_\infty, 0^o)$. Usar la fórmula para demostrar que en el caso de una parábola, $\gamma = \theta/2$, y explicar el significado geométrico de dicho resultado.

    Solución:

    Sabemos que en el sistema de referencia local en el plano orbital (ver figura 1), $\vec{r} = r\vec{e_r}$ y $\vec{v} = v \operatorname{sen}\gamma \vec{e_r} + v\cos\gamma\vec{e_\theta}$. Por otro lado $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\vec{e_r}} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$. Por tanto, $v \operatorname{sen}\gamma = \dot{r}$ y $v\cos\gamma = r\dot{\theta}$, de donde $\tan\gamma = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}$. Por otro lado, usando la regla de la cadena, $\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$, luego por tanto $\tan\gamma = \frac{dr/d\theta}{r}$. Podemos calcular de la ecuación del movimiento que $\frac{dr}{d\theta} = \frac{pe\operatorname{sen}\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$, y sustituyendo también r llegamos a:

    $$\tan\gamma = \frac{dr/d\theta}{r} = \frac{pe\operatorname{sen}\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{1+e\cos\theta}{p} = \frac{e\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}.$$

    Obsérvese que si $\gamma < 0$, ello implica que $\tan\gamma < 0$. Puesto que $1 + e\cos\theta$ es siempre positivo [para la hipérbola, tener en cuenta que $\theta \in (-\theta_\infty, \theta_\infty)$], necesariamente $\operatorname{sen}\theta < 0$ luego $\theta \in (180^o, 360^o)$ o para la hipérbola, $\theta \in (-\theta_\infty, 0^o)$.

    En el caso de la parábola, $e = 1$ y la fórmula queda $\tan\gamma = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$. Usando las fórmulas del ángulo doble y otras identidades trigonométricas:

    $$\tan\gamma = \frac{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}{1+\cos^2\theta/2 - \operatorname{sen}^2\theta/2} = \frac{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = \frac{\operatorname{sen}\theta/2}{\cos\theta/2} = \tan\theta/2,$$

    de donde $\gamma = \theta/2$ en el caso parabólico. La implicación geométrica es la siguiente: cualquier rayo que alcance un espejo parabólico con su dirección originalmente paralela al eje x, se refleja (venga a la altura que venga) hacia el foco.

11. A partir de los elementos orbitales de la ISS y del METEOSAT 7 en el formato de 2 líneas, tal como se dan en teoría, encontrar: sus elementos orbitales keplerianos, y su posición y velocidad en la época.

    Solución:

    Para la ISS tenemos: $i = 51{,}6338^o$, $\Omega = 236{,}6889^o$, $\omega = 79{,}3949^o$, $e = 0{,}0003196$, $n = 15{,}7549$ rev/dia, $M = 325{,}2109^o$. Los únicos elementos no keplerianos son los dos últimos, que debemos transformar en a y θ. Por un lado, de la fórmula $n = \sqrt{\mu_\oplus/a^3}$ y pasando primero n a rad/s, obtenemos que $a = 6721{,}37$ km, es decir una altitud media de 343 km. Para obtener θ hay que resolver la ecuación de Kepler, si bien siendo la excentricidad tan pequeña, $\theta \approx M$ (si hacemos el cálculo obtenemos $\theta = 325{,}19^o$).

    Calculemos ahora la posición y velocidad en el sistema de referencia geocéntrico inercial. Trabajando primero en el sistema de referencia perifocal, obtenemos usando las fórmulas de teoría:

    $$\begin{aligned} [r]^F &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5517{,}13\\ -3835{,}93\\ 0\end{bmatrix} \text{ km},\\ [v]^F &= \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a(1-e^2)}}\begin{bmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ e+\cos\theta\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4{,}396\\ 6{,}325\\ 0\end{bmatrix} \text{ km/s}\end{aligned}$$

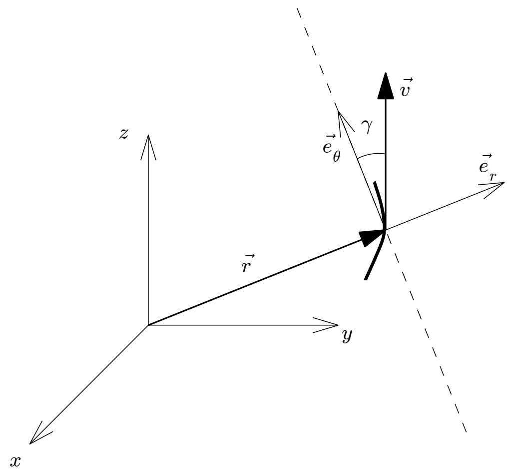


Figura 1: Ángulo de trayectoria.

Por otro lado, la matriz de transformación entre el sistema de referencia perifocal y el geocéntrico ecuatorial viene dada por:

$$\begin{aligned}[T]^{FR}(\Omega,i,\omega) &= \begin{bmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}\omega\cos i & \operatorname{sen}\Omega\cos\omega + \cos\Omega\operatorname{sen}\omega\cos i & \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen} i \\ -\cos\Omega\operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\Omega\cos\omega\cos i & -\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i & \cos\omega\operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen} i & -\cos\Omega\operatorname{sen} i & \cos i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}4088 & -0{,}4888 & 0{,}7707 \\ 0{,}6353 & 0{,}7587 & 0{,}1443 \\ -0{,}6552 & 0{,}4306 & 0{,}6207 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}[r]^R &= [T]^{RF}[r]^F = ([T]^{FR})^T[r]^F = \begin{bmatrix} -181{,}6 \\ 5607{,}3 \\ 3698{,}4 \end{bmatrix} \text{ km}, \\ [v]^R &= [T]^{RF}[v]^F = ([T]^{FR})^T[v]^F = \begin{bmatrix} 5{,}8150 \\ 2{,}6497 \\ 4{,}3005 \end{bmatrix} \text{ km/s}\end{aligned}$$

Para el Meteosat 7 tenemos: $i = 3{,}6428^o$, $\Omega = 76{,}9883^o$, $\omega = 185{,}2668^o$, $e = 0{,}0001162$, $n = 1{,}00269406$ rev/dia, $M = 103{,}4399^o$. Como antes, obtenemos $a = 42165$ km, es decir aproximadamente la órbita geoestacionaria. Igualmente, al ser la excentricidad muy pequeña, $\theta \approx M$ (si hacemos el cálculo obtenemos $\theta = 103{,}45285^o$).

Repitiendo los cálculos de antes obtenemos:

$$\begin{aligned}[r]^R &= \begin{bmatrix} 41879 \\ 4202 \\ -2538 \end{bmatrix} \text{ km}, \\ [v]^R &= \begin{bmatrix} -0{,}3028 \\ 3{,}0590 \\ 0{,}0626 \end{bmatrix} \text{ km/s}\end{aligned}$$

12. La órbita de cartografía de la sonda Magallanes alrededor de Venus ($\mu_♀ = 324858{,}8$ km^3/s^2, $R_♀ = 6051{,}8$ km) tiene como valores $a = 10424{,}1$ km y $e = 0{,}39433$. La misión cartográfica comenzó en el punto que tiene una anomalía verdadera $\theta = 280^o$. Calcular el ángulo de trayectoria, velocidad y tiempo desde periapsis en dicho punto.

Solución:

Conocida la anomalía verdadera y e, calculamos el ángulo de trayectoria γ como $\tan\gamma = \frac{e\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}$, de donde $\gamma = -19{,}97^o$. La velocidad la podemos calcular primero obteniendo el radio, que será $r = \frac{p}{1+e\cos\theta} = 8239{,}028$ km.

Usando entonces la ecuación de las fuerzas vivas, $v = \sqrt{\frac{2\mu_♀}{r} - \frac{\mu_♀}{a}} = 6{,}9061$ km/s. Finalmente para calcular el tiempo desde periapsis usamos la ecuación de Kepler. Partiendo de θ, obtenemos $E = -1{,}010$ rad $= 5{,}27285$ rad de donde $M = 5{,}6060$ rad, lo que da $\Delta t = 10469{,}59$ s $= 2{,}9082$ h.

13. Aproximar a primer y segundo orden de e la ley horaria de una órbita elíptica de excentricidad pequeña e.

Solución: Sabemos que la forma de aproximar a primer (segundo) orden una función $f(x)$ para $x \approx 0$ es escribir su serie de Taylor hasta primer (segundo) orden:

$$f(x) \approx f(0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \ldots$$

Por ejemplo, partiendo de la definición:

$$\tan E/2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \theta/2.$$

obtenemos:

$$E = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \theta/2 \right),$$

y podemos calcular la primera y segunda derivada:

$$\begin{aligned} E' &= 2\frac{\frac{-(1+e)-(1-e)}{2(1+e)^2\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} \tan\theta/2}{1+\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\theta/2\right)^2} = \frac{\frac{-2}{\sqrt{(1-e)(1+e)}}\tan\theta/2}{1+e+(1-e)\tan^2\theta/2} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}{(1+e)\cos^2\theta/2+(1-e)\operatorname{sen}^2\theta/2} = -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta} \\ E'' &= -\frac{e}{(1-e^2)^{3/2}}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{e\operatorname{sen}2\theta}{2(1+e\cos\theta)^2} \end{aligned}$$

y calculando los términos de la serie de Taylor:

$$\begin{aligned} E(e=0) &= \theta, \\ E'(e=0) &= -\operatorname{sen}\theta, \\ E''(e=0) &= \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}, \end{aligned}$$

por lo que:

$$E = \theta - e\operatorname{sen}\theta + \frac{e^2}{4}\operatorname{sen}2\theta + \ldots.$$

Repitiendo la operación escribiendo θ en función de E, llegamos a $\theta(e=0) = E$, $\theta'(e=0) = \operatorname{sen}E$, $\theta''(e=0) = \frac{\operatorname{sen}2E}{2}$, por lo que:

$$\theta = E + e\operatorname{sen}E + \frac{e^2}{4}\operatorname{sen}2E + \ldots.$$

Por otro lado, la ecuación de Kepler dice que $M = E - e\operatorname{sen}E$. Por tanto:

$$\begin{aligned} M(e=0) &= E(e=0) = \theta, \\ M'(e=0) &= E'(e=0) - \operatorname{sen}E(e=0) = -2\operatorname{sen}\theta, \\ M''(e=0) &= E''(e=0) - 2E'(e=0)\cos E(e=0) = \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2} + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{3\operatorname{sen}2\theta}{2}, \end{aligned}$$

por lo que:

$$M = \theta - 2e\operatorname{sen}\theta + \frac{3e^2}{4}\operatorname{sen}2\theta + \ldots$$

Por otro lado, para obtener θ como función de M, en primer lugar invertimos la ecución de Kepler para obtener E en función de M. Para ello escribimos $E = M + e\operatorname{sen}E$, y derivando (considerando M constante):

$$\begin{aligned} E(e=0) &= M, \\ E'(e=0) &= \operatorname{sen}E(e=0) = \operatorname{sen}M, \\ E''(e=0) &= 2\cos E(e=0)E'(e=0) = \operatorname{sen}2M, \end{aligned}$$

por lo que:

$$E = M + e\operatorname{sen}M + \frac{e^2}{2}\operatorname{sen}2M + \ldots$$

y sustituyendo en la expresión de θ en función de E hasta segundo orden:

$$\theta = M + e \operatorname{sen} M + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2M + e \operatorname{sen}(M + e \operatorname{sen} M) + \frac{e^2}{4} \operatorname{sen} 2M + \ldots.$$

y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(M + e \operatorname{sen} M) = \operatorname{sen} M + \frac{e}{2} \operatorname{sen} 2M + \ldots$ la ley horaria aproximada corregida a segundo orden queda:

$$\theta \approx M + 2e \operatorname{sen} M + \frac{5e^2}{4} \operatorname{sen} 2M = n\Delta t + 2e \operatorname{sen} n\Delta t + \frac{5e^2}{4} \operatorname{sen} 2n\Delta t.$$

14. Un cuerpo es lanzado desde la superficie de la Tierra justo con la velocidad de escape. Suponiendo el perigeo de la trayectoria en la superficie de la Tierra, ¿cuánto tiempo tarda en escapar? Suponer que el radio de escape es $r_\infty = L_\oplus \left(\mu_\oplus/\mu_\odot\right)^{2/5}$.

    Solución:

    Puesto que el cuerpo tiene la velocidad de escape, tiene una órbita parabólica. Nos dan el radio de perigeo como $r_p = R_\oplus$, y puesto que $r_p = p/2$, el parámetro de la parábola será $p = 2R_\oplus$. El radio de escape calculado de la fórmula dada es $r_\infty = 924646{,}76$ km. La anomalía verdadera con la que se alcanza dicho radio es, de la ecuación de la cónica, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{p}{r_\infty} - 1\right) = 170{,}47^o$. De la ecuación de Baker, $B = 881{,}739$, de donde $t = 670712{,}04$ s $= 7{,}762$ dias.

15. Dada una órbita elíptica con $e = 0{,}85$ y altitud del perigeo $h_p = 600$ km, calcular el tiempo que transcurre entre dos posiciones A y B tales que $\theta_A = 120^o$ y $\theta_B = 230^o$.

    Solución:

    De los datos encontramos que $a = 46520{,}93$ km, por lo que $n = 6{,}2921 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Calculamos el tiempo como $T = \Delta t_B - \Delta t_A$, donde los Δt se encuentran de la ecuación de Kepler. Hallamos que $E_A = 0{,}91638$ rad y $E_B = -1{,}0964$ rad $= 5{,}1868$ rad, de donde $M_A = 0{,}24199$ rad y $M_B = 5{,}9429$ rad por lo que $\Delta t_B = 94450{,}183$ s y $\Delta t_A = 3845{,}889$ s, y finalmente $\Delta t = 90604{,}294$ s $= 25{,}1679$ h.

    Resolución con el teorema de Lambert: tendríamos $a = 46520{,}93$ km, $r_A = 22451$ km, $r_B = 28458$ km, $\Delta\theta = 110^o$, luego $s = 50910$ km, $c = 41845$ km. Obtendríamos $\alpha = 89{,}82^o$, $\beta = 25{,}5^o$, y por tanto $t_v = 8791{,}4$ s. Otras soluciones son 9253,9 s, 91067 s y 90604 s. La última de estas soluciones es la que coincide con la hallada.

16. Para una órbita elíptica de excentricidad e y semieje mayor a, sabemos que su velocidad angular (orbital) media es $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. Su velocidad angular instantánea $\dot\theta$ no será en general constante y dependerá de la anomalía verdadera θ. Encontrar el valor de $\dot\theta$ como función de θ, e y n. ¿Para qué valores de θ coincidirán $\dot\theta$ y n? ¿Para qué valores de θ tendrá $\dot\theta$ la máxima discrepancia de n? Aproximar los resultados para un pequeño valor de excentricidad.

    Solución: Sabemos que $h = \sqrt{p\mu} = \sqrt{a(1-e^2)\mu} = r^2\dot\theta$. Por tanto:

$$\dot\theta = \frac{\sqrt{a(1-e^2)\mu}}{r^2} = \frac{\sqrt{a(1-e^2)\mu}\,(1+e\cos\theta)^2}{a^2(1-e^2)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{(1+e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} = n\frac{(1+e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

    Vemos que $\dot\theta = n$ cuando $(1+e\cos\theta)^2 = \left(1-e^2\right)^{3/2}$, es decir:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\left(1-e^2\right)^{3/4} - 1}{e}\right),$$

    ecuación que tendrá dos soluciones.

    Para hallar la máxima discrepancia de n, simplemente tenemos que ver cuando $\dot\theta$ es máximo y mínimo como función de θ, o lo que es lo mismo, cuando $(1+e\cos\theta)^2$ es máximo y mínimo. Claramente el mínimo sucedera para $\theta = 180^o$ (apogeo) y el máximo para $\theta = 0^o$ (perigeo). Los valores máximos y mínimos serán:

$$\begin{aligned} \dot\theta_{MAX} &= \dot\theta(\theta = 0^o) = n\frac{(1+e)^2}{(1-e^2)^{3/2}} = n\sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}}, \\ \dot\theta_{MIN} &= \dot\theta(\theta = 180^o) = n\frac{(1-e)^2}{(1-e^2)^{3/2}} = n\sqrt{\frac{1-e}{(1+e)^3}}. \end{aligned}$$

    Para un pequeño valor de excentricidad, aproximamos los resultados de arriba por el primer término de su desarrollo en serie de Taylor, encontrando:

$$\begin{aligned}\dot\theta &\approx n(1+2e\cos\theta)\\ \dot\theta_{MAX} &\approx n(1+2e),\\ \dot\theta_{MIN} &\approx n(1-2e).\end{aligned}$$

Claramente $\dot\theta \approx n$ cuando $\theta \approx 90^{\rm o}, 270^{\rm o}$.

17. Demostrar (para una órbita no circular) la fórmula $\ddot\theta = -2\dot\theta^2\tan\gamma$, donde θ es la anomalía verdadera y γ el ángulo de trayectoria. En base a la fórmula, ¿en qué partes de la órbita será la aceleración angular negativa, y en cuáles positiva? ¿Cuándo se hará cero?

    Solución: Partiendo del resultado del anterior problema $\dot\theta = n\frac{(1+e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}$, tomamos otra derivada y encontramos:

    $$\ddot\theta = 2n\frac{-e\,\mathrm{sen}\,\theta\,(1+e\cos\theta)}{(1-e^2)^{3/2}}\dot\theta,$$

    y usando $1+e\cos\theta = \frac{\dot\theta(1-e^2)^{3/2}}{n(1+e\cos\theta)}$, hallamos:

    $$\ddot\theta = -2\frac{e\,\mathrm{sen}\,\theta}{(1+e\cos\theta)}\dot\theta^2,$$

    y sustituyendo del formulario $\tan\gamma = \frac{e\,\mathrm{sen}\,\theta}{(1+e\cos\theta)}$, se llega al resultado pedido $\ddot\theta = -2\dot\theta^2\tan\gamma$.

    La aceleración angular se hace cero cuando $\gamma = 0^{\rm o}$, es decir en apoapsis y periapsis. En la parte de la órbita entre periapsis y apoapsis, es decir, $\theta \in (0, 180^{\rm o})$, γ será positiva, por lo que la aceleración angular será negativa. Igualmente, en la parte de la órbita entre apoapsis y periapsis, es decir, $\theta \in (180, 360^{\rm o})$, γ será negativa, por lo que la aceleración angular será positiva

18. Demostrar, para una órbita elíptica con $e > 0$, que el vector excentricidad $\vec e$ apunta siempre en dirección a periapsis.

    Solución:

    En la teoría se definió el vector excentricidad como $\vec e = \frac{\vec v\times\vec h}{\mu} - \frac{\vec r}{r}$. Para demostrar lo que se pide, debemos escribir $\vec e$ en el sistema de referencia perifocal F, recordando que la dirección de periapsis en dicho sistema de referencia es por definición la dirección $\vec i$. En este sistema de referencia, vimos en el tema 2 que

    $$\vec r^F = \frac{p}{1+e\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta\\ 0\end{bmatrix},\quad \vec v^F = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{bmatrix}-\mathrm{sen}\,\theta\\ e+\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}.$$

    Por tanto, como $\vec h^F = \vec r^F\times\vec v^F$, se tendrá que:

    $$\vec h^F = \frac{\sqrt{p\mu}}{1+e\cos\theta}\left(\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\mathrm{sen}\,\theta\\ e+\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}\right) = \frac{\sqrt{p\mu}}{1+e\cos\theta}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cos\theta(e+\cos\theta)+\mathrm{sen}^2\,\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ h\end{bmatrix},$$

    y aplicando la definición de $\vec e$, tendremos:

    $$\vec e^F = \begin{bmatrix}-\mathrm{sen}\,\theta\\ e+\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e+\cos\theta-\cos\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta-\mathrm{sen}\,\theta\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

    con lo que efectivamente se cumple lo que se quería demostrar.

19. El 24 de Agosto de 1989 el Voyager 2 tuvo un encuentro con Neptuno ($\mu_{♆} = 6871307{,}8\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $R_{♆} = 24764\ \mathrm{km}$), siguiendo una órbita hiperbólica de parámetros $a = -19985$ km y $e = 2{,}45859$. En su alejamiento, la sonda pasó cerca de Tritón, a 354600 km de Neptuno. ¿Cuánto tiempo (Δt) transcurrió desde periapsis hasta el encuentro con Tritón ?

    Solución:

    En primer lugar calculamos el parámetro $p = a(1-e^2) = 100817{,}63$ km. De la ecuación de la cónica calculamos θ para $r = 354600$ km obteniendo $\theta = 106{,}92^{\rm o}$. Usando la ecuación de la anomalía hiperbólica, obtenemos $H = 2{,}72$, de donde $N = 15{,}86129$, y usando $n = \sqrt{\frac{\mu_{♆}}{-a^3}} = 9{,}27819\cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$, finalmente $\Delta t = N/n = 17095{,}236\ \mathrm{s} = 4{,}749\ \mathrm{h}$.

20. Un vehículo espacial se acerca a Venus con una velocidad de exceso $v_\infty = 10$ km/s y un ángulo $\theta_\infty = 140^o$. Encontrar el radio de periapsis. ¿Cuál es el ángulo de giro de la velocidad respecto a la velocidad de llegada cuando vuelve a "escapar" de Venus? ¿Cuánto tarda en escapar? Volver a responder a la última pregunta suponiendo que el radio de llegada y de salida, en vez de infinito, es $r_\infty = L_♀ \left(\mu_♀/\mu_\odot\right)^{2/5}$, donde $L_♀ = 0{,}723327$ AU.

Solución:

De las fórmulas hiperbólicas, obtenemos e de θ_∞ como $e = -1/\cos\theta_\infty = 1{,}3054$, y a de v_∞ como $a = -\mu_♀/v_\infty^2 = -3248{,}59$ km. El tiempo que tarda en escapar (llegar a la velocidad v_∞ una vez más) sería infinito en teoría. Usando $r_\infty = L_♀ \left(\mu_♀/\mu_\odot\right)^{2/5} = 616273{,}21$ km, obtendríamos que sería necesario alcanzar $\theta_1 = 139{,}75^o$, partiendo de $\theta_0 = -139{,}75^o$; el tiempo transcurrido será dos veces el tiempo desde periapsis hasta θ_1. De las fórmulas hiperbólicas encontramos $H_1 = 5{,}6773$, luego $N_1 = 185{,}02$, y finalmente $\Delta t_1 = 60106$ s $= 16{,}696$ h, luego el tiempo transcurrido será el doble, 33,39 h.

21. Se realizaron dos observaciones de un satélite en órbita geocéntrica; la altitud de la primera observación fue $h_A = 2298$ km y de la segunda $h_B = 6476$ km. El ángulo entre las dos observaciones fue $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A = 90^o$. Se sabe que el semieje mayor de la órbita es $a = 12000$ km. Encontrar el tiempo de vuelo t_v, e, θ_A, θ_B, h_p y Δt_A.

Solución: En este problema usaremos unidades canónicas. Los datos del problema, en unidades canónicas, son: $h_A = 0{,}3603$ UD, $h_B = 1{,}0153$ UD, $a = 1{,}8814$ UD, de donde usando las unidades canónicas terrestres (ver problema 1), $r_A = 1 + h_A = 1{,}3603$ UD y $r_B = 1 + h_B = 2{,}0153$ UD. Usando la ecuación de la cónica, podemos plantear las siguientes dos ecuaciones para los puntos A y B:

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{p}{1 + e\cos\theta_A} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_A}, \\ r_B &= \frac{p}{1 + e\cos\theta_B} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_B}. \end{aligned}$$

Las incógnitas son θ_A, θ_B y e; como además sabemos $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$, el problema tiene el mismo número de soluciones que de incógnitas. Para resolverlo, escribamos $\alpha = \frac{a}{r_A} = 1{,}3831$ y $\beta = \frac{a}{r_B} = 0{,}9336$. Usando además $\theta_B = \Delta\theta + \theta_A$, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} \alpha(1-e^2) &= 1 + e\cos\theta_A, \\ \beta(1-e^2) &= 1 + e\cos\theta_B = 1 + e\cos(\Delta\theta + \theta_A) = 1 + e(\cos\Delta\theta\cos\theta_A - \operatorname{sen}\Delta\theta\operatorname{sen}\theta_A). \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos que $\cos\theta_A = \frac{\alpha(1-e^2)-1}{e}$. Sustituyendo esta ecuación en la segunda, llegamos a:

$$-\operatorname{sen}\theta_A = \frac{1}{\operatorname{sen}\Delta\theta}\left(\frac{\beta(1-e^2)-1}{e} - \cos\Delta\theta\cos\theta_A\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\Delta\theta}\left(\frac{\beta(1-e^2)-1}{e} - \cos\Delta\theta\frac{\alpha(1-e^2)-1}{e}\right).$$

Usando $\operatorname{sen}^2\theta_A + \cos^2\theta_A = 1$, llegamos a:

$$1 = \left(\frac{\alpha(1-e^2)-1}{e}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\Delta\theta}\left(\frac{\beta(1-e^2)-1}{e} - \cos\Delta\theta\frac{\alpha(1-e^2)-1}{e}\right)^2,$$

de donde

$$\begin{aligned} e^2\operatorname{sen}^2\Delta\theta = {} & \left(\alpha^2(1+e^4-2e^2) + 1 - 2\alpha(1-e^2)\right)\left(\operatorname{sen}^2\Delta\theta + \cos^2\Delta\theta\right) + \beta^2(1+e^4-2e^2) \\ & +1 - 2\beta(1-e^2) - 2\cos\Delta\theta\left(\alpha\beta(1+e^4-2e^2) + 1 - (\alpha+\beta)(1-e^2)\right), \end{aligned}$$

lo que se puede escribir como $C_1e^4 + C_2e^2 + C_3 = 0$, donde (usando que $\operatorname{sen}^2\Delta\theta + \cos^2\Delta\theta = 1$)

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\Delta\theta, \\ C_2 &= 2\alpha(1-\alpha) + 2\beta(1-\beta) - 2(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\cos\Delta\theta - \operatorname{sen}^2\Delta\theta, \\ C_3 &= (\alpha-1)^2 + (\beta-1)^2 - 2(1-\alpha)(1-\beta)\cos\Delta\theta. \end{aligned}$$

Para el caso $\Delta\theta = 90^o$, se tiene que $\cos\Delta\theta = 0$ y las ecuaciones se simplifican, quedando:

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha^2 + \beta^2 = 2{,}7845, \\ C_2 &= 2\alpha(1-\alpha) + 2\beta(1-\beta) - 1 = -1{,}9357, \\ C_3 &= (\alpha-1)^2 + (\beta-1)^2 = 0{,}1512. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación bicuadrática, obtenemos dos soluciones:$e = 0{,}7781$ y $e = 0{,}2995$. Si calculamos el radio del perigeo, en el primero de los dos casos, $r_p = a(1-e) = 0{,}4174$ UD, y en el segundo de los casos, $r_p = 1{,}318$ UD. En base a este resultado podemos descartar la primera órbita, ya que colisionaría con la Tierra (podemos asumir que la órbita observada no es así). Por tanto, $e = 0{,}2995$ y $h_p = r_p - 1 = 0{,}318$ UD $= 2028{,}5$ km.

De las ecuaciones anteriormente planteadas obtenemos $\cos\theta_A = 0{,}8652$ y $\operatorname{sen}\theta_A = 0{,}5015$ luego θ_A está en el primer cuadrante y $\theta_A = 30{,}1^o$. Por tanto $\theta_B = 120{,}1^o$.

Para calcular $\Delta t_A = \Delta t(\theta_A)$, encontramos que $E_A = 0{,}3898$ rad, luego $M_A = 0{,}276$ rad y $\Delta t_A = 0{,}7123$ UT. Igualmente calculamos $\Delta t_B = 3{,}92$ UT.

Finalmente para calcular el tiempo de vuelo y teniendo en cuenta la posición relativa de los puntos, está claro que $t_v = \Delta t_B - \Delta t_A = 3{,}21$ UT $= 2590$ s $= 43{,}17$ min.

Resolución mediante el teorema de Lambert: en este caso dicha resolución es directa. Obtenemos $s = r_A + r_B = 21530$ km, $c = 15508$ km. Luego $\alpha = 122{,}9^{\circ}$, $\beta = 41{,}49^{\circ}$. Finalmente, las soluciones para el tiempo de vuelo son 2590 s, 2846 s, 10492 s y 10236 s. En este caso es la primera solución la que coincide; no existe una forma clara de diferenciar estas soluciones.

22. Encontrar el error que se comete en la anomalía verdadera $\delta\theta$ y en el radio, δr, a partir de un error en la anomalía excéntrica δE.

Solución:

Típicamente al calcular E tendremos un cierto error numérico; por ejemplo si resolvemos la ecuación de Kepler usando el método de Newton, este error se puede acotar como $\delta E \leq |f(E)/f'(E)|$, donde $f(E) = M - E + e\operatorname{sen} E$, la ecuación de Kepler.

Este error se propaga a la hora de calcular tanto θ como r. Para ver la sensibilidad de una función al error en uno de sus argumentos, se calcula la derivada, es decir, si $y = f(x)$, entonces se tiene que $\delta y = f'(x)\delta x$.

El radio en función de E se escribe como $r = a(1 - e\cos E)$, por tanto, $\delta r = ae\operatorname{sen} E\delta E$.

El caso de θ es más complejo. Partimos de la fórmula de θ en función de E, que es $\tan\theta/2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan E/2$, obtenemos:

$$\theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan E/2\right),$$

de donde

$$\delta\theta = 2\frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{1}{2}(1+\tan^2 E/2)}{1+\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan E/2\right)^2}\delta E,$$

y desarrollando:

$$\delta\theta = \frac{\sqrt{(1+e)(1-e)}(1+\tan^2 E/2)}{1-e+(1+e)\tan^2 E/2}\delta E$$

Operando, llegamos a:

$$\delta\theta = \sqrt{1-e^2}\frac{1+\tan^2 E/2}{1-e+(1+e)\tan^2 E/2}\delta E = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)\cos^2 E/2+(1+e)\operatorname{sen}^2 E/2}\delta E,$$

de donde finalmente se llega a

$$\delta\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\delta E,$$

23. Un satélite geocéntrico en órbita elíptica tiene un semieje mayor $a = 4R_\oplus$ y un perigeo $r_p = 1{,}5R_\oplus$. Encontrar la anomalía verdadera 4 horas después del paso por el perigeo. Repetir el problema si $a = 40R_\oplus$ (órbita muy excéntrica). ¿Cuál es el error aproximado, en ángulo y en distancia, que se ha cometido resolviendo la ecuación de Kepler en ambos casos?

Solución: Usamos unidades canónicas, luego $a = 4$ UD, $r_p = 1{,}5$ UD y $\Delta t = 17{,}848$ UT. Obtenemos $e = 1 - \frac{r_p}{a} = 0{,}625$. Calculamos M, para lo que necesitamos $n = \sqrt{\mu/a^3} = 0{,}125$ rad/UT, con lo que $M = 2{,}23$ rad.

Para resolver la ecuación de Kepler $M = E - e\operatorname{sen} E$, fijamos una tolerancia, por ejemplo, de $\delta E_{\text{MAX}} = 10^{-3}$. Llamemos $f(E) = M - E + e\operatorname{sen} E$. Probemos una primera estimación $E_0 = M = 2{,}23$ rad. Se tiene que el error cometido es $\delta E_0 = f(E_0)/f'(E_0) = -0{,}35$. Por tanto hay que corregir. Usando el método de Newton, $E_1 = E_0 - \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} = 2{,}5879$ rad, donde $f'(E) = e\cos E - 1$. Ahora encontramos que $\delta E_1 = 0{,}019$, lo que aún no es suficientemente bueno. Repetimos el proceso y encontramos $E_2 = 2{,}5694$ rad, lo que da un $\delta E_2 = 6{,}4 \cdot 10^{-4}$, que damos por válido y por tanto $E = E_2 = 2{,}5694$ rad. Finalmente la anomalía verdadera tiene el valor de $\theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan E/2\right) = 2{,}8609$ rad.

Obsérvese que si usamos el método iterativo, $E_0 = M$, $E_1 = M + e\operatorname{sen} E_0 = 2{,}7246$ rad, $E_2 = M + e\operatorname{sen} E_1 = 2{,}4841$ rad, y hay que llegar hasta $E_{10} = 2{,}56893$ rad para lograr la precisión requerida.

Repitiendo el problema para la órbita más excéntrica, se tiene que $a = 40$ UD, luego $e = 0{,}9625$. En este caso $M = 0{,}0706$ rad. Usando el método de Newton como antes obtenemos $E_0 = M$, $\delta E_0 = -1{,}7$, $E_1 = 1{,}7713$ rad,

$\delta E_1 = 0{,}63$, $E_2 = 1{,}1356$ rad, $\delta E_2 = 0{,}32$, $E_3 = 0{,}812$ rad, $\delta E_3 = 0{,}12$, $E_4 = 0{,}6847$ rad, $\delta E_4 = 0{,}02$, $E_5 = 0{,}6634$ rad, $\delta E_5 = 5{,}68 \cdot 10^{-4}$, luego tomamos $E = E_5 = 0{,}6634$ rad. Con el método iterativo habría que llegar hasta $E_{23} = 0{,}6594$ rad. Del valor de E encontrado hallamos $\theta = 2{,}378$ rad.

Usando los resultados del problema 22, para el primer caso $\delta E = 6{,}4 \cdot 10^{-4}$, luego $\delta r = ae \operatorname{sen} E \delta E = 5{,}525$ km y $\delta\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\delta E = -3{,}215 \cdot 10^{-4}$ rad. En el segundo caso, $\delta r = 0{,}0135$ UD $= 85{,}9$ km y $\delta\theta = 6{,}37 \cdot 10^{-4}$ rad.

24. Repetir el problema anterior para una órbita parabólica con perigeo $r_p = 1{,}5 R_\oplus$

Solución: En el caso de la órbita parabólica hay que usar la ecuación de Barker. Tenemos que como antes $\Delta t = 17{,}848$ UT y puesto que $r_p = 1{,}5$ UD se tiene que $p = 2r_p = 3$ UD. Luego $B = 3\sqrt{\mu/p^3}\Delta t = 10{,}30$. Resolviendo la ecuación de Barker, se tiene que $z = 2{,}744$ y por tanto $\theta = 2{,}345$ rad. En este caso la solución es exacta y no hay errores (más allá del error de redondeo).

25. Desde la Tierra se determina la posición y velocidad de un satélite respecto al sistema de referencia Geocéntrico Ecuatorial como

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (-0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j} + 0{,}5\vec{k}) \text{ UD}, \\ \vec{v}_0 &= (-0{,}4\vec{i} - 0{,}8\vec{j} + 0{,}6\vec{k}) \text{ UV}. \end{aligned}$$

Determinar los elementos orbitales $(a, e, i, \Omega, \omega, \Delta t)$ del satélite. Si la medida está tomada a las 15:00 UT el 23 de Julio de 2006 ¿Cúando fue el último paso por el perigeo? ¿Y por el apogeo?

Solución:

Empezamos determinando el vector momento angular, $\vec{h}$

$$\vec{h} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = (0{,}76\vec{i} + 0{,}28\vec{j} + 0{,}88\vec{k}) \text{ UD} \cdot \text{UV},$$

y los módulos de los vectores posición y velocidad,

$$\begin{aligned} r_0 &= \|\vec{r}_0\| = 1{,}12 \text{ UD}, \\ v_0 &= \|\vec{v}_0\| = 1{,}08 \text{ UV}. \end{aligned}$$

El valor de la energía específica será

$$\epsilon = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = -0{,}31 \text{ UV}^2,$$

y puesto que $\epsilon < 0$, la órbita debe ser cerrada (bien un círculo, bien una elipse). Calculamos ahora el semieje mayor a de la expresión $\epsilon = -\mu/2a$, obteniendo

$$a = 1{,}59 \text{ UD},$$

lo que confirma, puesto que $a \neq r_0$, que se trata de una órbita elíptica. Calculamos ahora el vector excentricidad $\vec{e}$, que recordemos está orientado en la dirección de la línea de ápsides apuntando hacia el perigeo.

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}_0 \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \left(\frac{v_0^2}{\mu} - \frac{1}{r_0}\right)\vec{r}_0 - \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{r}_0}{\mu}\vec{v}_0 = -0{,}1565\vec{i} + 0{,}271\vec{j} + 0{,}0488\vec{k}.$$

Por tanto, $e = 0{,}32$.

La inclinación de la órbita se calcula de la siguiente fórmula

$$\cos i = \frac{\vec{h} \cdot \vec{k}}{\|h\|},$$

de donde obtenemos $i = 0{,}744$ rad $= 42{,}6°$.

Para encontrar el ángulo Ω (la ascensión recta del nodo ascendente), calculemos el vector $\vec{n}$, que está orientado en la dirección de la línea de nodos apuntando al nodo ascendente.

$$\vec{n} = \vec{k} \times \vec{h} = -0{,}28\vec{i} + 0{,}76\vec{j}.$$

Puesto que se verifica que

$$\vec{n} = \|\vec{n}\|(\cos\Omega\vec{i} + \operatorname{sen}\Omega\vec{j}),$$

y la primera componente de $\vec{n}$ es negativa, Ω se encuentra en el segundo cuadrante. Por tanto se obtiene $\Omega = 1{,}9238$ rad $= 110{,}2°$.

El argumento del perigeo, ω, se obtiene de la expresión

$$\cos\omega = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{\|\vec{n}\| e},$$

de donde $\omega = 0{,}2293$ rad $= 13{,}14°$ (no hay que hacer ninguna corrección de cuadrante puesto que $\vec{e} \cdot \vec{k} > 0$).

Finalmente, para obtener el último elemento orbital Δt (el tiempo desde el perigeo) obtenemos en primer lugar la anomalía verdadera θ de la fórmula

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{e}}{r_0 e},$$

de donde $\theta = 0{,}4921$ rad $= 28{,}2°$ (no hay que hacer ninguna corrección de cuadrante puesto que $\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 > 0$). Para ahora obtener Δt debemos primero obtener la anomalía excéntrica E, que se deduce de θ mediante la ecuación

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}.$$

Obtenemos $E = 0{,}3578$ rad $= 20{,}5°$. Conocido E, para hallar Δt hay que emplear primero la ecuación de Kepler

$$M = E - e \operatorname{sen} E,$$

para calcular M, la anomalía media. Se obtiene $M = 0{,}246$ rad. Puesto que $\Delta t = M/n$, siendo $n = \sqrt{\mu/a^3} = 0{,}4987$ rad/s la velocidad media, finalmente llegamos a

$$\Delta t = 0{,}5 \text{ UT} = 399{,}28 \text{ s} = 6{,}66 \text{ min}.$$

Escribamos todo los elementos orbitales juntos:

$$a = 1{,}59 \text{ UD}, \qquad e = 0{,}32, \qquad i = 42{,}6°, \qquad \Omega = 110{,}2°, \qquad \omega = 13{,}14°, \qquad \Delta t = 0{,}5 \text{ UT}.$$

Para responder a la pregunta, simplemente recordamos que la definición de Δt es el tiempo transcurrido desde el (último) perigeo. Por tanto, habrá que sustraer Δt a la hora de la medida para obtener el momento de paso por el perigeo, que denominamos t_p

$$t_p = t_{\text{actual}} - \Delta t = 14:53:20,32 \text{ UTC}.$$

Para obtener el paso por el último apogeo, puesto que la anomalía verdadera es menor de 180° sólo habrá que restar la mitad del periodo orbital $T = 2\pi/n = 12{,}6$ UT $= 2$ h 49 m $25,46$ s (si $\theta > 180°$, habría que sumarlo). Por tanto,

$$t_a = t_p - T/2 = 13:28:37,59 \text{ UTC}.$$

Comprobación del problema: Para verificar que nuestra solución es la correcta vamos a realizar el proceso inverso, es decir, pasar de los elementos orbitales obtenidos como solución final, a la posición en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial (que denominaremos GEO). Para ello, en primer lugar consideremos el sistema de referencia perifocal (x^F, y^F, z^F) con el mismo origen que GEO (el foco) pero con el plano $Ox^F y^F$ coincidiendo con el de la órbita, $\vec{i}^F$ orientado en la dirección de la linea de ápsides apuntando al perigeo (como $\vec{e}$) y $\vec{k}^F$ en la misma dirección que $\vec{h}$.

En este sistema de referencia, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\left(\cos\theta\vec{i}^F + \operatorname{sen}\theta\vec{j}^F\right), \\ \vec{v}' &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}\left(-\operatorname{sen}\theta\vec{i}^F + (e+\cos\theta)\vec{j}^F\right). \end{aligned}$$

Nótese que en las ecuaciones de arriba es necesario conocer θ y no t como tenemos de partida. Para ello es necesario en primer lugar resolver la ecuación de Kepler, con $M = n\Delta t = 0{,}245$ rad. Para ello seguimos un procedimiento iterativo basado en el método de Newton-Raphson. Definimos $f(E) = M - E + e \operatorname{sen} E$.

Estimamos, como primera aproximación $E_0 = M = 0{,}245$ rad. Como $|f(E_0)/f'(E_0)| = 0{,}11 > 10^{-3}$ (donde hemos fijado la tolerancia o error admisible de la solución como 10^{-3}), obtenemos una mejor aproximación E_1 aplicando la fórmula

$$E_1 = E_0 - \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} = E_0 - \frac{M - E_0 + e\operatorname{sen} E_0}{-1 + e\cos E_0} = 0{,}3586 \text{ rad},$$

y ahora $|f(E_1)/f(E_1)'| = 0{,}001 = 10^{-3}$, luego aproximamos $E \approx E_1$. Obtenemos por tanto $\theta = 0{,}4931$ rad y por tanto, de las ecuaciones de v y r en ejes perifocales,

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \left(0{,}985\vec{i}^F + 0{,}5293\vec{j}^F\right) \text{ UD}, \\ \vec{v}' &= \left(-0{,}3958\vec{i}^F + 1{,}002\vec{j}^F\right) \text{ UV}. \end{aligned}$$

Para pasar al sistema de referencia GEO, empleamos la matriz $[T]^{F,GEO} = C_3(\omega)C_1(i)C_3(\Omega)$, donde las matrices componentes de C son matrices de giro definidas como

$$\begin{aligned}
C_3(\omega) &= \begin{pmatrix} \cos\omega & \operatorname{sen}\omega & 0 \\ -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9738 & 0{,}2273 & 0 \\ -0{,}2273 & 0{,}9738 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
C_1(i) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \operatorname{sen} i \\ 0 & -\operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7358 & 0{,}6772 \\ 0 & -0{,}6772 & 0{,}7358 \end{pmatrix}, \\
C_3(\Omega) &= \begin{pmatrix} \cos\Omega & \operatorname{sen}\Omega & 0 \\ -\operatorname{sen}\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}3457 & 0{,}9383 & 0 \\ -0{,}9383 & -0{,}3457 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Puesto que se tiene que

$$[r]^F = \begin{pmatrix} x^F \\ y^F \\ z^F \end{pmatrix} = [T]^{F,GEO} \begin{pmatrix} x^{GEO} \\ y^{GEO} \\ z^{GEO} \end{pmatrix} = [T]^{F,GEO}[r]^{GEO},$$

finalmente obtenemos, usando las propiedades de las matrices de giro,

$$\begin{aligned}
[r]^{GEO} &= \left([T]^{F,GEO}\right)^{-1}[r]^F \\
&= \left([T]^{F,GEO}\right)^{T}[r]^F \\
&= C_3^T(\Omega)C_1^T(i)C_3^T(\omega)[r]^F \\
&= \begin{pmatrix} -0{,}8004 \\ 0{,}5991 \\ 0{,}5007 \end{pmatrix} \text{UD}.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
[v]^{GEO} &= C_3^T(\Omega)C_1^T(i)C_3^T(\omega)[v]^F \\
&= \begin{pmatrix} -0{,}3994 \\ -0{,}8005 \\ 0{,}5996 \end{pmatrix} \text{UV}.
\end{aligned}$$

La solución no coincide totalmente con el enunciado debido a la solución aproximada de la ecuación de Kepler, pero el error no es significativo y podría disminuirse simplemente haciendo más pequeña la tolerancia en la solución numérica.

26. Se sabe que en una cierta época, un cuerpo orbitando la Tierra tiene como posición y velocidad las siguientes, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UD}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UV}.$$

Se pide encontrar los elementos orbitales del cuerpo, en dicha época, expresados también en unidades canónicas. Repetir el problema para los siguientes otros dos casos:

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UD}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UV}; \quad \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{UD}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UV}.$$

Solución:

Caso 1: En primer lugar, hallemos los invariantes ε y $\vec{h}$:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\ \text{UV}^2, \quad h = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{UD} \cdot \text{UV},$$

donde se ha usado que el valor de μ en unidades canónicas es la unidad. Por tanto se trata de una órbita parabólica ($e = 1$) y con parámetro $p = \frac{h^2}{\mu} = 4$ UD. Puesto que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, se tiene que $\theta = 0^{\text{o}}$ (no puede estar en apoapsis ya que se trata de una órbita parabólica); esto también se podría ver calculando el vector $\vec{e}$. Del valor de $\vec{h}$ obtenemos $i = 0^{\text{o}}$ (órbita ecuatorial directa). Por tanto, ni Ω ni ω están bien definidos, sino que hay que calcular ϖ que es el ángulo entre Υ (eje x) y el perigeo (también el eje x), definido en el sentido contrario de las agujas del reloj. Por tanto $\varpi = 0^{\text{o}}$.

Caso 2:Obtenemos los siguientes invariantes:

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \text{UD} \cdot \text{UV}, \; \epsilon = \frac{1}{4} \text{UV}^2, \; \vec{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto $e = 3$ (se trata de una hipérbola), también obtenemos de $\epsilon = -\frac{\mu_\oplus}{2a}$ que $a = -2$ UD. Por otro lado $\vec{e}$ apunta al perigeo y observamos que $\vec{r}$ se encuentra ahí, luego $\theta = 0^{\text{o}}$. Del valor de $\vec{h}$ obtenemos $i = -180^{\text{o}}$ (órbita ecuatorial retrógrada). Por tanto, ni Ω ni ω están bien definidos, sino que hay que calcular ϖ que es el ángulo entre Υ (eje x) y el perigeo (eje y), definido en el sentido contrario de las agujas del reloj. Por tanto $\varpi = 90^{\text{o}}$.

Caso 3: En primer lugar, hallemos los invariantes ε y $\vec{h}$:

$$\varepsilon = 0 \, \text{UV}^2, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UD} \cdot \text{UV},$$

donde se ha usado que el valor de μ en unidades canónicas es la unidad. Por tanto se trata de una órbita parabólica ($e = 1$) y con parámetro $p = \frac{h^2}{\mu} = 4$ UD. Puesto que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, se tiene que $\theta = 0^{\text{o}}$ (no puede estar en apoapsis ya que se trata de una órbita parabólica). La inclinación se puede obtener de la fórmula o bien observando directamente que el cuerpo se encuentra sobre el polo Norte, por lo que la inclinación sólo puede ser $i = 90^{\text{o}}$ (órbita polar). El vector nodal es:

$$n = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo que se puede obtener por lógica (teniendo en cuenta la órbita polar y la dirección del vector velocidad) o usando la fórmula $\vec{n} = \frac{\vec{k} \times \vec{h}}{|\vec{k} \times \vec{h}|}$. Por tanto Ω (el ángulo que forma el vector nodal con el primer punto de Aries que es la dirección Ox) es $\Omega = 180^{\text{o}}$. Finalmente, ω es el ángulo entre el nodo ascendente y periapsis medido en la dirección del movimiento, es evidente que $\omega = 90^{\text{o}}$.

27. Se ha descubierto un asteroide errante con elementos orbitales (relevantes para el problema): $a = -2797{,}425$ km, $e = 2{,}8$, $\theta = 249{,}27^o$. ¿Es un peligro para la Tierra? En tal caso, ¿cuánto tiempo queda para su impacto?

    Solución: Para ver si es un peligro, calculemos el radio del perigeo: $r_p = a * (1 - e) = 5035{,}365 < R_\oplus$, luego su órbita es de colisión con la Tierra.

    Para calcular el tiempo de impacto, observamos que el tiempo Δt que se tarde en alcanzar el perigeo, es, por simetría, el mismo que se tardaría en alcanzar desde el perigeo el ángulo $360 - \theta = 110{,}73^o$. A este ángulo le corresponde una anomalía hiperbólica $H = 6{,}3094$, lo que da $N = 763{,}3$, y usando $n = 0{,}004267 \text{ s}^{-1}$ obtenemos $\Delta t = 178880{,}72 \text{ s} = 2{,}07$ dias.

    Para encontrar el tiempo de impacto, hay que encontrar el tiempo que se tarda de llegar al radio de la Tierra (despreciando la reentrada). De la ecuación de la cónica, encontramos que $r = R_\oplus$ cuando $\theta = 44{,}415^o$. A este ángulo le corresponden $H = 0{,}5775$, $N = 1{,}13$ y por tanto $\Delta t = 265{,}01$ s.

    Restando este tiempo al anterior, obtenemos la respuesta exacta que es $t = 2{,}067$ dias.

28. Explicar la paradoja del satélite: Una vez dentro de la atmósfera, si la órbita es aproximadamente circular, $v = \sqrt{\mu_\oplus / r}$. Puesto que el efecto de la resistencia atmosférica es disminuir r, se concluye que la resistencia incrementa la velocidad!

    Solución: En efecto la resistencia disminuye r y aumenta v. Para ver si este efecto es consistente con el carácter disipativo de la resistencia, consideremos dos radios r_0 y r_1 tal que $r_0 > r_1$, y supongamos que la resistencia atmosférica ha disminuido el radio desde r_0 hasta r_1. Escribiendo la energía en ambos radios suponiendo órbita circular:

$$\begin{aligned} \epsilon(r_0) &= \frac{v^2(r_0)}{2} - \frac{\mu}{r_0} = -\frac{\mu}{2r_0} \\ \epsilon(r_1) &= \frac{v^2(r_1)}{2} - \frac{\mu}{r_1} = -\frac{\mu}{2r_1} \end{aligned}$$

    y puesto que $r_0 > r_1$, $\epsilon(r_0) > \epsilon(r_1)$, es decir, la energía total disminuye. Llamemos a esta disminución $\Delta\epsilon$. ¿Cómo se reparte la disminución de energía entre energía cinética y potencial?

    Por un lado la energía potencial $U = -\frac{\mu}{r}$, luego $\Delta U = 2\Delta\epsilon$. Por otro lado la energía cinética $T = v^2/2$, que para una órbita circular será $T = \frac{\mu}{2r}$, luego $\Delta T = -\Delta\epsilon$. Por tanto al disminuir la órbita la energía cinética aumenta una cierta cantidad, mientras que la energía potencial disminuye el doble de lo que aumenta la cinética, resultando en una pérdida neta de energía como cabe esperar.

29. Comprobar que las soluciones dadas para el potencial de la Tierra verifican, en efecto, la ecuación de Laplace.

Nota: Es necesario conocer que los polinomios de Legendre de grado n y orden m verifican la ecuación diferencial siguiente:

$$(1-x^2)p''_{nm}(x) - 2xp'_{nm}(x) = \left(\frac{m^2}{1-x^2} - n(n+1)\right) p_{nm}(x)$$

Solución: La solución más general viene dada por

$$U = \frac{\mu}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} J_{nm}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^n p_{nm}(\operatorname{sen}\phi)\cos(m(\lambda-\lambda_{nm}))\right]$$

Y la ecuación de Laplace es

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial U}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2} = 0.$$

Puesto que la ecuación es lineal, es suficiente comprobar que la solución es válida para cada sumando de las sumas infinitas. El primer término μ/r claramente verifica la ecuación. Comprobemos un sumando del tipo

$$\hat{U} = \left(\frac{R_\oplus^n}{r^{n+1}}\right) p_{nm}(\operatorname{sen}\phi)\cos(m(\lambda-\lambda_{nm}))$$

Si aplicamos la primera parte de la ecuación de Laplace obtenemos:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \hat{U}}{\partial r}\right) = n(n+1)\left(\frac{R_\oplus^n}{r^{n+3}}\right) p_{nm}(\operatorname{sen}\phi)\cos(m(\lambda-\lambda_{nm}))$$

Aplicando ahora la segunda parte de la ecuación de Laplace:

$$\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial\hat{U}}{\partial\phi}\right) = \left(\frac{R_\oplus^n}{r^{n+3}}\right)\left(p''_{nm}(\operatorname{sen}\phi)\cos^2\phi - 2p'_{nm}(\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\phi\right)\cos(m(\lambda-\lambda_{nm}))$$

La definición de los polinomios de Legendre de grado n y orden m es tal que verifican la ecuación diferencial

$$(1-x^2)p''_{nm}(x) - 2xp'_{nm}(x) = \left(\frac{m^2}{1-x^2} - n(n+1)\right) p_{nm}(x)$$

y sustituyendo $x = \operatorname{sen}\phi$:

$$\cos^2\phi p''_{nm}(\operatorname{sen}\phi) - 2\operatorname{sen}\phi p'_{nm}(\operatorname{sen}\phi) = \left(\frac{m^2}{\cos^2\phi} - n(n+1)\right) p_{nm}(x),$$

por lo que

$$\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial\hat{U}}{\partial\phi}\right) = \left(\frac{R_\oplus^n}{r^{n+3}}\right)\left(\frac{m^2}{\cos^2\phi} - n(n+1)\right) p_{nm}(\operatorname{sen}\phi)\cos(m(\lambda-\lambda_{nm}))$$

Finalmente si aplicamos la última parte de la ecuación de Laplace,

$$\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2\hat{U}}{\partial\lambda^2} = \frac{-m^2}{\cos^2\phi}\left(\frac{R_\oplus^n}{r^{n+3}}\right) p_{nm}(\operatorname{sen}\phi)\cos(m(\lambda-\lambda_{nm}))$$

Sumando los tres resultados obtenemos cero, por tanto se verifica la ecuación de Laplace.

30. Repetir el cálculo realizado para los efectos del J_2 con el J_3. ¿Existen variaciones seculares?

Solución: En primer lugar, obtenemos de las fórmulas de teoría el potencial de perturbación debido al J_3, que es el siguiente:

$$U_{J_3} = \frac{\mu}{r}J_3\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^3 p_3(\operatorname{sen}\phi)$$

Usando las fórmulas de los polinomios de Legendre, obtenemos que $p_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$. Por otro lado de trigonometría esférica y como se vio en teoría, $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\theta+\omega)$. Por tanto:

$$U_{J_3} = \frac{\mu J_3 R_\oplus^3}{2r^4}\left(5\operatorname{sen}^3 i \operatorname{sen}^3(\theta+\omega) - 3\operatorname{sen} i\operatorname{sen}(\theta+\omega)\right)$$

Finalmente, sustituyendo r por la ecuación de la cónica obtenemos el potencial de perturbación en función de los elementos:

$$U_{J_3} = \frac{\mu J_3 R_\oplus^3 (1+e\cos\theta)^4}{2a^4(1-e^2)^4}\left(5\operatorname{sen}^3 i \operatorname{sen}^3(\theta+\omega) - 3\operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\theta+\omega)\right)$$

Obtengamos ahora el potencial medio por revolución. Usando las fórmulas de teoría:

$$\bar{U}_{J_3} = \int_0^{2\pi} U_{J_3} dM = \int_0^{2\pi} U_{J_3} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\theta)^2} d\theta$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{J_3} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu J_3 R_\oplus^3 (1+e\cos\theta)^2}{2a^4(1-e^2)^{5/2}}\left(5\operatorname{sen}^3 i \operatorname{sen}^3(\theta+\omega) - 3\operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\theta+\omega)\right) d\theta \\ &= \frac{\mu J_3 R_\oplus^3}{2a^4(1-e^2)^{5/2}} \int_0^{2\pi} (1+e\cos\theta)^2 \left(5\operatorname{sen}^3 i \operatorname{sen}^3(\theta+\omega) - 3\operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\theta+\omega)\right) d\theta\end{aligned}$$

Usando ahora las fórmulas de De Moivre, se tiene que $\operatorname{sen}^3\phi = \frac{\operatorname{sen} 3\phi - 3\operatorname{sen}\phi}{2}$. Las integrales que se obtienen son las siguientes:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta+\omega) d\theta = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 3(\theta+\omega) d\theta = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}(\theta+\omega) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(2\theta+\omega)+\operatorname{sen}\omega}{2} d\theta = \pi \operatorname{sen}\omega \\
&\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen} 3(\theta+\omega) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(4\theta+3\omega)+\operatorname{sen}(2\theta+3\omega)}{2} d\theta = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}(\theta+\omega) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \operatorname{sen}(\theta+\omega) = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\operatorname{sen}(3\theta+\omega)+\operatorname{sen}(\omega-\theta)}{2} + \operatorname{sen}(\theta+\omega)}{2} d\theta = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen} 3(\theta+\omega) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \operatorname{sen} 3(\theta+\omega) d\theta \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\operatorname{sen}(5\theta+3\omega)+\operatorname{sen}(\theta+3\omega)}{2} + \operatorname{sen} 3(\theta+\omega)}{2} d\theta = 0
\end{aligned}$$

Se han usado las fórmulas $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{2}$ y $\cos^2 a = \frac{\cos 2a + 1}{2}$. Sustituyendo las integrales en la expresión que teníamos, se llega a:

$$\bar{U}_{J_3} = -\frac{\mu J_3 R_\oplus^3}{2a^4(1-e^2)^{5/2}} 3e\pi \operatorname{sen}\omega \left(5\operatorname{sen}^3 i + 2\operatorname{sen} i\right)$$

El término $\operatorname{sen}\omega$ se considera una variación periódica de largo periodo (ω es una variable angular, que cambia lentamente); tomando media en ω, se llega a que no existen variaciones seculares debidas al J_3 (en general, solo los armónicos zonales pares provocan variaciones seculares).

31. Calcular la magnitud (grados/día) del avance del perigeo y regresión de los nodos para un satélite en órbita baja circular, a una altitud de 1000 km y con una inclinación de 30^o. ¿Es un efecto apreciable?

    Solución: Usando las fórmulas obtenemos que $\dot{\Omega} = -1{,}0476 \cdot 10^{-6}$ rad/s y que $\dot{\omega} = 1{,}66 \cdot 10^{-6}$ rad/s. Calculando en grados por revolución (para lo que hay que multiplicar por el periodo y por $360/2\pi$) obtenemos $\Delta\Omega = -0{,}3786^o$ y $\Delta\omega = 0{,}6009^o$. Aunque esto pueda parecer poco, hay que tener en cuenta que una revolución tarda $1{,}75$ horas en completarse. Por tanto, cada día la línea de nodos retrocede $5{,}19$ grados y el perigeo avanza $8{,}24$ grados, lo que no es despreciable en absoluto.

32. Una vela solar siempre recibe su fuerza de propulsión como la combinación de una fuerza en la dirección opuesta al Sol y otra en la dirección opuesta a la reflexión de la luz, ¿Podría utilizarse para viajar hacia los planetas inferiores?

    Solución: Sí, esto es posible provocando que la fuerza de presión solar tenga una componente de tipo “resistencia”, con lo que la órbita en torno al Sol disminuirá. Por otro lado, para viajar en dirección opuesta se provoca que la fuerza de presión solar tenga una componente de tipo “propulsión”. Los dos casos se pueden apreciar en la siguiente figura.

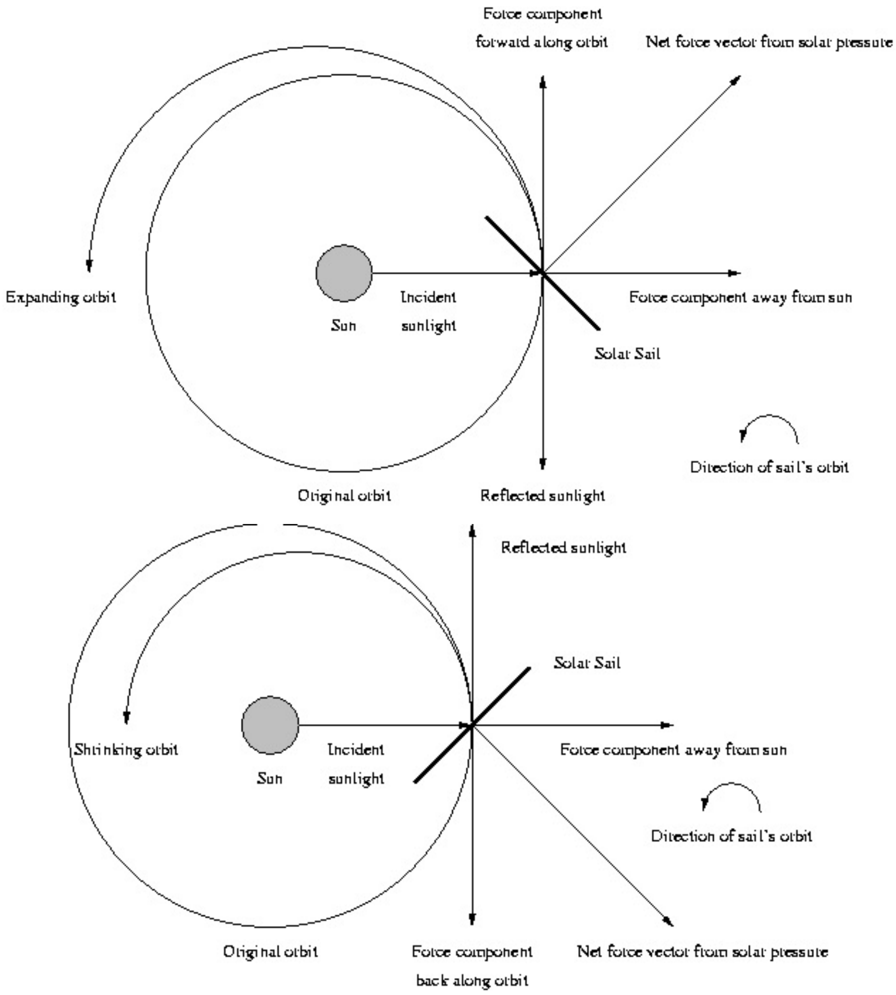


Figura 2: Uso de velas solares.

Problemas y cuestiones del Tema 5

(problemas o partes de problema marcados con *: para ampliar, con †:problema teórico complementario a teoría)

1. (*) Demostrar las fórmulas de la trigonometría esférica.

2. (†) Emplear la trigonometría esférica para encontrar la distancia más corta (línea ortodrómica) entre dos puntos de la superficie de la Tierra (tomada como una esfera) dados por sus coordenadas ϕ_0, λ_0 y ϕ_1, λ_1. Obtener también el rumbo (es decir, el azimut de la trayectoria) inicial.

3. (†) Demostrar, para el triángulo esférico de la figura 1, la siguiente fórmula: $\tan \lambda_u = \cos i \tan u$, donde $u = \omega + \theta$.

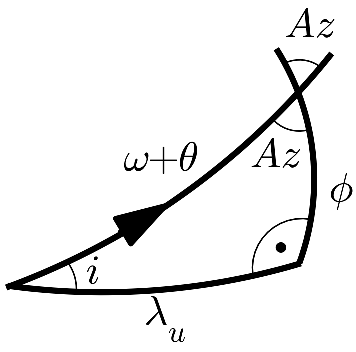


Figura 1: Figura del problema 3.

4. Se pretende lanzar un vehículo desde el Kennedy Space Center (KSC, o Cabo Cañaveral) a las 06:53 hora local (UT-5), con un azimut de 80^o. Si el GST_0 ese día es 120^o, determinar el plano que tendría la órbita (i, Ω). Si la tolerancia en la ascensión recta del nodo ascendente es $\Delta\Omega = \pm 5^o$, ¿cuál es la ventana de lanzamiento?

5. ¿Cuáles son las inclinaciones máxima y mínima alcanzables desde Cabo Cañaveral? ¿Y desde Vanderberg, Kourou o Tyuratam (Baikonur)?

6. Se observa un satélite sobre un punto de la Tierra con coordenadas $10{,}5^o$ N $45{,}8^o$ O. Si se sabe que la órbita tiene $h_p = 1000$ km, $h_a = 1500$ km, con el perigeo justo en el Ecuador (en ☊) e inclinación $i = 30^o$, encontrar las coordenadas terrestres sobre las que se encuentra el satélite 15 minutos después.

7. (†) ¿Qué condición debe cumplirse para que la traza de un satélite se repita cada k revoluciones del satélite y m días? Calcular la condición primero en ausencia de perturbaciones. Para ampliar: Repetir considerando las perturbaciones seculares provocadas por el J_2 (regresión de los nodos, avance del perigeo, $\dot{M}$), realizando una aproximación de primer orden para calcular la desviación respecto al caso no perturbado.

8. (†) Dado un satélite de elementos $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ tal que su traza se repite diariamente cada k revoluciones, diseñar los elementos de otros $n-1$ satélites, denotados por $(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j)$ para $j = 1, \ldots, n-1$ de forma que los n satélites tengan la misma traza y la recorran separados uniformemente en el tiempo. Aplicar el resultado a diseñar una constelación Molniya de 3 satélites.

9. (*) Calcular el ancho de huella instrumental w de un satélite en la configuración de la figura, con un angulo de visión 2α, pero con el cono de visión desplazado un ángulo oblicuo χ.

10. (*) Dado un satélite de coordenadas geográficas (ϕ_0, λ_0, h_0) para un cierto instante dado, obtener los valores de longitud dentro de la cobertura para una latitud fija ϕ. Igualmente, fijada la longitud λ, obtener los valores de latitud dentro de la cobertura.

11. Calcular la función de visibilidad, para una estación de coordenadas (ϕ, λ), de una estrella (considerada inmóvil, y en el infinito, en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial) con ascensión recta AR y declinación δ. ¿Cuál es la función de visibilidad de la estrella polar?

12. La función de visibilidad del Sol permite calcular el atardecer y el amanecer en una determinada localización geográfica. Calcular para un día dado, en un punto cualquiera de la Tierra (ϕ, λ), la función de visibilidad del Sol (suponiendo que no se mueve a lo largo del día y está en el infinito), y a partir de ella el amanecer y el atardecer (que se define a efectos civiles para $\varepsilon = -6^{\mathrm{o}}$ ya que el Sol no es un punto sino un arco en el horizonte).

13. ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, dura la noche eterna en los polos? ¿Y en una latitud de 80^{o}? Suponer la órbita de la Tierra circular para simplificar los cálculos.

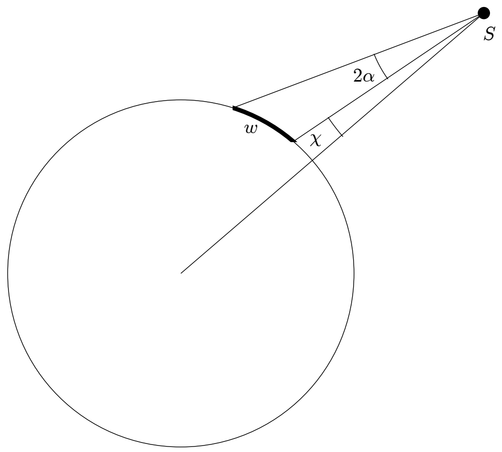


Figura 2: Figura del problema 9.

14. (†) Demuestre, usando trigonometría esférica, que la traza de un satélite sobre la superficie terrestre alcanza una latitud máxima igual a la inclinación de su órbita.

15. (†) Demuestre, usando trigonometría esférica, la fórmula que relaciona la inclinación de una órbita, el azimut de lanzamiento y la latitud de la base de lanzamiento. ¿Por qué la mayor parte de las bases están situadas de forma que los lanzamientos se puedan realizar en dirección Este?

16. Se tiene un satélite en una órbita circular, a altitud $h = 35786$ km e inclinación $i = 60^\mathrm{o}$. Dibujar la traza de la órbita de la forma más precisa posible con la información proporcionada. (*) Si la inclinación fuera próxima a cero, aproximar a segundo orden la forma de la traza.

17. Para la época del 15 de Enero de 2009 a las 00:00 UT se tiene que $\mathrm{GST}_0 = 115^\mathrm{o}$. Calcular en dicha época y con la mayor exactitud posible los elementos orbitales de la órbita cuya traza (una revolución) se muestra en la figura, sabiendo que:

    - La órbita es circular y directa.
    - La órbita no está afectada por perturbaciones.
    - Se sabe que se alcanzó el punto de mínima latitud de la traza dibujada en la figura el 15 de Enero de 2009 a las 10:00 UT, en la longitud 83,71°O

18. Se tiene un satélite, en una órbita circular, con el resto de elementos orbitales (en la época del 1 de Noviembre de 2008 a las 12:00) $h = 800$ km, $i = 50^\mathrm{o}$, $\Omega = 130^\mathrm{o}$, $u = 0^\mathrm{o}$, y se sabe que en la época $GST = 14$ h 41 m 35,3 s. Estudiar la cobertura el 20 de Noviembre de 2008 a las 15:00. ¿Qué latitudes máxima y mínima están cubiertas, y a qué longitud? ¿Cuál es la superficie de cobertura y el ancho de huella? ¿Cómo se modifican estos resultados si estudiamos la cobertura de un instrumento con $\alpha = 10^\mathrm{o}$? Estudiar en ambos casos si la cobertura incluye Sevilla ($\phi =$ 37,23°N, $\lambda =$ 5,58°O). Repetir el problema con Honolulu, Hawai ($\phi = 21^\mathrm{o}\ 18'\ 25''$N, $\lambda = 157^\mathrm{o}\ 51'\ 30''$O).

19. Estudiar la elevación (y su evolución en el tiempo, si fuera necesario), para un observador situado en Sevilla ($\phi =$ 37,23°N, $\lambda =$ 5,58°O), de:

    - Un satélite GEO sobre la latitud $\lambda = 0^\mathrm{o}$.
    - Un satélite GEO sobre la latitud $\lambda = 80^\mathrm{o}$O.
    - Un satélite de elementos $e = 0$, $i = 0^\mathrm{O}$, $h = 1000$ km, que en el instante de tiempo $t = 0$ se encuentre sobre el meridiano de Greenwich.

20. (*) Dado un satélite con $e = 0$ y altitud dada h cuya órbita se repite, plantear el problema de hallar la máxima elevación que alcanza visto desde una base de coordenadas dadas. Si la órbita del satélite no se repite, ¿cuál será la máxima elevación posible?

21. Escribir los elementos orbitales (en la época del 1 de Noviembre de 2008 a las 12:00, en la que se sabe que $GST = 14$ h 41 m 35,3 s) y dibujar aproximadamente la traza de un satélite polar y circular en órbita semisíncrona (la mitad del periodo de la Tierra) que pase por Sevilla ($\phi =$ 37,23°N, $\lambda =$ 5,58°O) el 21 de Noviembre a las 00:00 hora local (UT+1).

22. (†) Estudiar las condiciones bajo las cuales la cobertura instrumental (dado un instrumento con α dado) y la cobertura total coinciden.

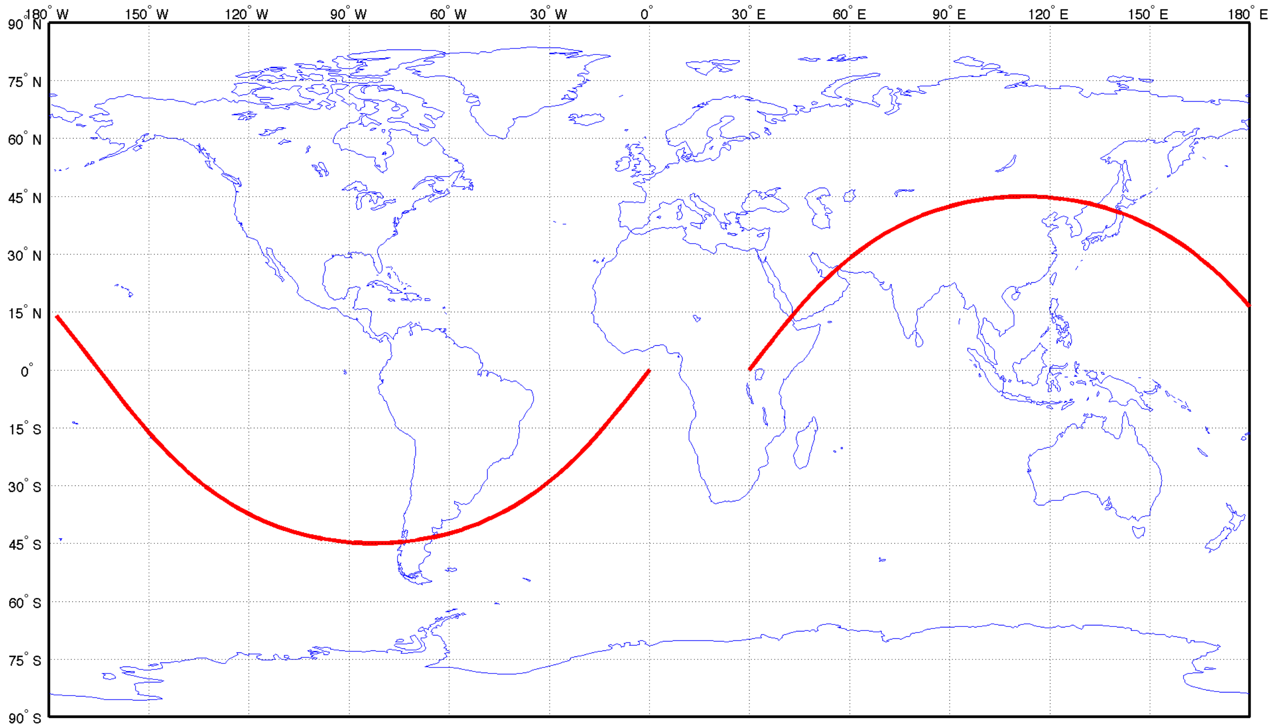


Figura 3: Figura del problema 17.

23. La estrella Sirio tiene ascensión recta 6 horas y 45 minutos, y declinación -16 grados y 43 minutos. Sabiendo que un cierto día $\mathrm{GST}_0 = 0^{\mathrm{o}}$, determinar la elevación y azimut de la estrella observada desde Sevilla ($\phi = 37{,}23^{\mathrm{o}}$N, $\lambda = 5{,}58^{\mathrm{o}}$O) a las 11 de la noche (UT). Otro cierto día, en el que $\mathrm{GST}_0 = 90^{\mathrm{o}}$, se realiza una observación de Sirio a las 10:30 de la noche (UT) obteniéndose $h = 51{,}85^{\mathrm{o}}$ y $\mathrm{Az} = 204{,}16^{\mathrm{o}}$. Deducir la localización geográfica del observador.

24. (†) Calcular la forma de la traza de un satélite geoestacionario tal que su excentricidad e es pequeña, pero distinta de cero, y el resto de sus elementos orbitales tiene valores nominales para que el satélite se encuentre en la longitud λ_0.

25. Sabiendo que el equinoccio de Primavera fue el 21 de Marzo a las 12:00 UT, calcular la posición del Sol en la esfera celeste ($\delta_\odot$, $\mathrm{AR}_\odot$) el 11 de Noviembre a las 12:00 UT de ese mismo año (suponer para simplificar el cálculo que la órbita de la Tierra es circular). Dado un satélite cuyos elementos orbitales (en la época del 21 de Marzo a las 12:00 UT) son $h_p = 600$ km, $h_a = 800$ km, $i = 25^{\mathrm{o}}$, $\omega = 60^{\mathrm{o}}$, $\Omega = 45^{\mathrm{o}}$, $\theta = 310^{\mathrm{o}}$, encontrar su posición en la esfera celeste el 11 de Noviembre a las 12:00 UT y determinar si está eclipsado o no. (Ampliación: Repetir el cálculo para la auténtica excentricidad de la órbita de la Tierra).

TABLE 6-2. Locations of Selected Launch Sites. Minimum and maximum azimuth values are usually determined so launches don't fly over populated areas. [Source: Larson and Wertz (1992, 679–681) and Chiulli (1994)]

Site	Latitude (°)	Longitude (°)	Azimuth Min (°)	Azimuth Max (°)
Vandenberg	34.600 000	−120.600 000	147	201
Cape Kennedy	28.500 000	−80.550 000	37	112
Wallops	37.850 000	−75.466 67	30	125
Kourou	5.200 000	−52.800 000	340	100
San Marco	−2.933 333	40.200 000	50	150
Plesetsk	62.800 000	40.600 000	330	90
Kapustin Yar	48.400 000	45.800 000	350	90
Tyuratam	45.600 000	63.400 000	340	90
Sriharikota	13.700 000	80.250 000	100	290
Shuang-Ch'Eng-Tzu	40.416 667	99.833 333	350	120
Xichang	28.250 000	102.200 000	94	105
Tai-yuan	37.766 667	112.500 000	90	190
Kagoshima	31.233 333	131.083 333	20	150
Woomera	−30.950 000	136.500 000	350	15
Yavne	31.516 667	34.450 000	350	120

Figura 4: Tabla de bases de lanzamiento.

Solución a los problemas y cuestiones del Tema 5

1. Demostrar las fórmulas de la trigonometría esférica.

   Solución:

   En primer lugar, es suficiente encontrar una de las leyes de senos y una de cada tipo de las leyes de cosenos. El resto se encuentran permutando las variables.

   Si bien se puede hacer usando geometría analítica, la forma más sencilla es haciendo uso de matrices de rotación. La idea fundamental es que se puede llegar a una base definida en uno de los vértices del triángulo de dos formas; puesto que ambas formas han de ser iguales, se podrán encontrar ciertas identidades entre las cuales estarán las fórmulas de la trigonometría esférica.

   Si definimos:

   - El sistema de referencia R_A tal que x_A tiene la dirección OA y z_A es perpendicular al plano AC hacia arriba.
   - El sistema de referencia R_B tal que x_B tiene la dirección OB y z_B es perpendicular al plano AB hacia arriba.
   - El sistema de referencia R_C tal que x_C tiene la dirección OC y z_C es perpendicular al plano BC hacia arriba.

   entonces estos sistemas de referencia están relacionados de la siguiente forma:

   $$R_B \xleftarrow[c]{Z_s} S \xleftarrow[\alpha]{X_{R_A}} R_A \qquad R_C \xleftarrow[-\gamma]{X_T} T \xleftarrow[b]{Z_{R_A}} R_A \qquad R_B \xleftarrow[a]{Z_U} U \xleftarrow[-(\pi-\beta)]{X_{R_B}} R_C$$

   Por tanto obtenemos:

   $$\begin{aligned}
   T^{R_B R_A} &= \begin{bmatrix} \cos c & \operatorname{sen} c & 0 \\ -\operatorname{sen} c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos c & \operatorname{sen} c\cos\alpha & \operatorname{sen} c\operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen} c & \cos c\cos\alpha & \cos c\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
   T^{R_C R_A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos b & \operatorname{sen} b & 0 \\ -\operatorname{sen} b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos b & \operatorname{sen} b & 0 \\ -\cos\gamma\operatorname{sen} b & \cos\gamma\cos b & -\operatorname{sen}\gamma \\ -\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen} b & \operatorname{sen}\gamma\cos b & \cos\gamma \end{bmatrix} \\
   T^{R_C R_B} &= \begin{bmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a & 0 \\ -\operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & \operatorname{sen}\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a\cos\beta & -\operatorname{sen} a\operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen} a & -\cos a\cos\beta & -\cos a\operatorname{sen}\beta \\ 0 & \operatorname{sen}\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}
   \end{aligned}$$

   donde se ha tenido en cuenta que $\cos(-\pi+\beta) = -\cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\pi+\beta) = -\operatorname{sen}\beta$. Por otro lado se tiene que $T^{R_C R_A} = T^{R_C R_B} T^{R_B R_A}$. Esto nos da una expresión alternativa para $T^{R_C R_A}$. No es necesario calcularla entera, basta con computar los elementos (1,1), (3,1) y (3,3) en esta segunda forma. Puesto que ambas representaciones han de ser iguales, de estos elementos obtenemos tres ecuaciones:

   $$\begin{aligned}
   \cos b &= \cos a\cos c + \operatorname{sen} a\cos\beta\operatorname{sen} c, \\
   \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen} b &= \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen} c \\
   \cos\gamma &= \operatorname{sen}\beta\cos c\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta\cos\alpha,
   \end{aligned}$$

   que son precisamente las leyes de senos y cosenos.

2. Emplear la trigonometría esférica para encontrar la distancia más corta (línea ortodrómica) entre dos puntos de la superficie de la Tierra (tomada como una esfera) dados por sus coordenadas ϕ_0, λ_0 y ϕ_1, λ_1. Obtener también el rumbo (es decir, el azimut de la trayectoria) inicial.

   Solución:

   Tomando un triángulo esférico tal que un lado es el meridiano determinado por λ_0, entre el Polo norte y ϕ_0, otro lado es el meridiano determinado por λ_1, entre el Polo norte y ϕ_1, y el lado restante es el propio arco ortodrómico (que es arco de círculo máximo), determinamos un triángulo esférico como se ve en la figura, donde χ es el azimut inicial de la ortodrómica y α la longitud angular de la ortodrómica. También se puede determinar (extendiendo el triángulo hasta el Ecuador) que el ángulo opuesto a α es $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

   Aplicando la ley de cosenos a α, se tiene:

   $$\cos\alpha = \cos(90-\phi_0)\cos(90-\phi_1) + \operatorname{sen}(90-\phi_0)\operatorname{sen}(90-\phi_1)\cos\Delta\lambda,$$

   o lo que es lo mismo:

   $$\cos\alpha = \operatorname{sen}\phi_0\operatorname{sen}\phi_1 + \cos\phi_0\cos\phi_1\cos\Delta\lambda,$$

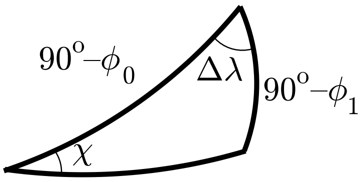


Figura 1: Figura del problema 2.

de donde se determina α. La longitud de la ortodrómica será entonces $L = R_{\oplus}\alpha$.

Igualmente para determinar el rumbo aplicamos la ley de cosenos a ϕ_1, obteniendo:

$$\cos(90 - \phi_1) = \cos(90 - \phi_0)\cos\alpha + \operatorname{sen}(90 - \phi_0)\operatorname{sen}\alpha\cos\chi,$$

y despejando y simplificando las expresiones:

$$\cos\chi = \frac{\operatorname{sen}\phi_1 - \operatorname{sen}\phi_0\cos\alpha}{\cos\phi_0\operatorname{sen}\alpha}.$$

3. Demostrar, para el triángulo esférico de la figura 2, la siguiente fórmula: $\tan\lambda_u = \cos i\tan u$, donde $u = \omega + \theta$.

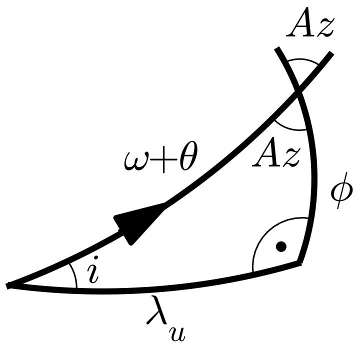


Figura 2: Figura del problema 3.

Solución: Puesto que un ángulo del triángulo esférico de la figura es recto, se simplifican los cálculos. Por un lado de la ley de senos, se tiene que $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}u\operatorname{sen}i$; por otro lado, de la ley de cosenos, se tiene que: $\cos u = \cos\lambda_u\cos\phi$, por lo que $\cos\phi = \frac{\cos u}{\cos\lambda_u}$.

Por tanto:

$$1 = \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = \operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 i + \frac{\cos^2 u}{\cos^2\lambda u},$$

y usando que $\frac{1}{\cos^2\lambda_u} = \tan^2\lambda_u + 1$, llegamos a:

$$1 = \operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 i + \frac{\cos^2 u}{\cos^2\lambda u} = \operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 i + \cos^2 u(\tan^2\lambda_u + 1),$$

y despejando $\tan^2\lambda_u$:

$$\tan^2\lambda_u = \frac{1 - \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 i}{\cos^2 u} = \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 i)\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} = \cos^2 i\tan^2 u,$$

por lo que $\tan\lambda_u = \cos i\tan u$.

4. Se pretende lanzar un vehículo desde el Kennedy Space Center (KSC, o Cabo Cañaveral) a las 06:53 hora local (UT-5), con un azimut de 80°. Si el GST_0 ese día es 120°, determinar el plano que tendría la órbita (i, Ω). Si la tolerancia en la ascensión recta del nodo ascendente es $\Delta\Omega = \pm 5^o$, ¿cuál es la ventana de lanzamiento?

Solución:

Aplicamos la fórmula del lanzamiento sabiendo que la latitud del KSC es de 28,5°. Puesto que $\cos i = \operatorname{sen}\mathrm{Az}\cos\phi$, llegamos a que $i = 30{,}06^o$. Por otro lado, usando la fórmula del tiempo de lanzamiento, sabemos que $\omega_{\bigoplus} t = \Omega + \lambda_u - \lambda - \mathrm{GST}_0$. Calculamos primero λ_u de la fórmula $\cos\lambda_u = \cos\mathrm{Az}/\operatorname{sen}i$, luego $\lambda_u = 69{,}71^o$. También conocemos de las coordenadas de KSC $\lambda = -80{,}55^o$, y además $t = 6\ \mathrm{h}\ 53\ \mathrm{min} + 5\ \mathrm{h} = 42780\ \mathrm{s}$. Por tanto despejando Ω hallamos $\Omega = 148{,}47^o$.

Aplicando la tolerancia, tendríamos $\Omega_{\min} = 143{,}47^o$ y $\Omega_{\max} = 153{,}47^o$. Calculando ahora los tiempos obtendríamos $t_{\min} = 41583$ s y $t_{\max} = 43977$ s, lo que convertido a hora local nos da una ventana de lanzamiento desde las 6:33:03 hasta las 7:12:57.

5. ¿Cuáles son las inclinaciones máxima y mínima alcanzables desde Cabo Cañaveral? ¿Y desde Vanderberg, Kourou o Tyuratam (Baikonur)?

   Solución:

   Conocemos los siguientes datos sobre la situación y azimuts permitidos de cada una de las bases:

   Cuadro 1: Posibles bases de lanzamiento

Base	País	Latitud (°)	Longitud (°)	Az. Mín.(°)	Az. Máx.(°)	Zona horaria
Cabo Cañaveral	EE.UU.	28.5	-80.55	37	112	UT-5
Vanderberg	EE.UU.	34.6	-120.6	147	201	UT-8
Baikonur (Tyuratam)	Rusia	45.6	63.4	-20	90	UT+6
Kourou	UE	5.2	-52.8	-20	100	UT-3

   En base a las latitudes y azimuts máximo/mínimo podemos calcular cuáles serían las inclinaciones con azimut máximo y mínimo; de ahí se calcula la inclinación máxima y mínima, teniendo en cuenta que si un lanzamiento hacia 90° está permitido la inclinación mínima será la latitud de la base, y que si un lanzamiento hacia 270° está permitido, la inclinación máxima será 180° menos la latitud de la base. Si estos azimuts no se encuentran entre los permitidos, entonces los mínimos o máximos son los calculados en las dos primeras columnas.

   Cuadro 2: Posibles inclinaciones

Base	i(°) para Az. Mín.	i(°) para Az. Máx.	i(°) mín.	i(°) máx
Cabo Cañaveral	58.07	35.43	28.5	58.07
Vanderberg	63.36	107.16	63.36	107.16
Baikonur (Tyuratam)	103.85	45.6	45.6	103.85
Kourou	109.91	11.26	5.2	109.91

   En la siguiente figura se indican los diagramas de azimut usados para los cálculos:

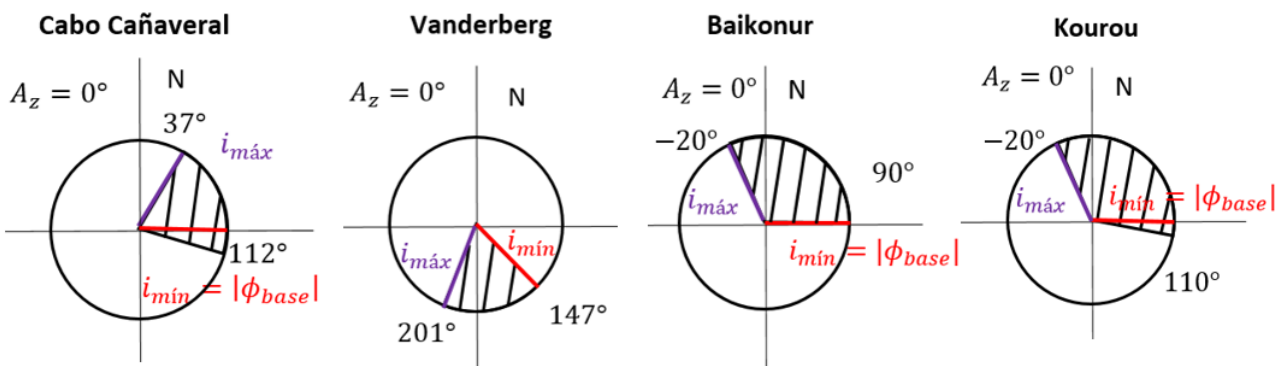


   Figura 3: Figura del problema 5. En rojo la solución de cada caso.

6. Se observa un satélite sobre un punto de la Tierra con coordenadas 10,5° N 45,8° O. Si se sabe que la órbita tiene $h_p = 1000$ km, $h_a = 1500$ km, con el perigeo justo en el Ecuador (en ☊) e inclinación $i = 30^o$, encontrar las coordenadas terrestres sobre las que se encuentra el satélite 15 minutos después.

   Solución:

   En primer lugar calculamos el semieje mayor y excentricidad del satélite. Puesto que $r_p = 7378{,}14$ km, $r_a = 7878{,}14$ km, se encuentra que $a = 7628{,}14$ km y $e = 0{,}0328$. Los únicos elementos orbitales que conocemos son $\omega = 0^o$ e $i = 30^o$. Llamemos $\phi_1 = 10{,}5^o$ y $\lambda_1 = -45{,}8^o$, y ϕ_2, λ_2 la latitud y longitud quince minutos después, a calcular. Usando un triángulo esférico con el Ecuador, la órbita y el meridiano que pasa por $\lambda_1 = 45{,}8^o$ O, obtenemos que $\operatorname{sen}\phi_1 = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\omega + \theta_1)$, y puesto que ω es cero, obtenemos $\theta_1 = 21{,}375^o$. De aquí podemos obtener el tiempo transcurrido desde el perigeo Δt_1. Para ello calculamos $E_1 = 0{,}3613$ rad y de la ecuación de Kepler $M_1 = 0{,}3497$ rad. Por tanto $\Delta t_1 = 369{,}04$ s.

Ahora tenemos que propagar la órbita 15 minutos. Por tanto $\Delta t_2 = 1269{,}04$ s y $M_2 = 1{,}203$ rad. Tenemos que resolver la ecuación de Kepler y hallar E_2. Tomamos como primera aproximación $E_2^0 = M_2$ y encontramos un error $\delta E_2^0 = -0{,}03$. Aplicando el método de Newton encontramos $E_2^1 = 1{,}2335$ rad y $\delta E_2^0 = -4{,}6 \cdot 10^{-4}$ luego tomamos $E_2 = E_2^1 = 1{,}2335$ rad. De ahí obtenemos $\theta_2 = 72{,}46^\circ$. Usando de nuevo un triángulo esférico como el anterior pero que pase por el punto 2, obtenemos que $\operatorname{sen}\phi_2 = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\omega + \theta_2)$ de donde $\phi_2 = 28{,}473^\circ\ N$.

Para calcular las longitudes usamos el ángulo λ_u en los triángulos esféricos tal como se define en los lanzamientos. Tenemos para cada punto que se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \omega_{\bigoplus} t_1 &= \Omega + \lambda_{u1} - \lambda_1 - \mathrm{GST}_0, \\ \omega_{\bigoplus} t_2 &= \Omega + \lambda_{u2} - \lambda_2 - \mathrm{GST}_0. \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación de la segunda, obtenemos $\omega_{\bigoplus}(t_2 - t_1) = \lambda_{u2} - \lambda_{u1} - \lambda_2 + \lambda_1$. Puesto que $t_2 - t_1 = 15$ min, λ_1 lo conocemos y de los triángu=los esféricos se tiene que $\tan\lambda_u = \tan\theta\cos i$, podemos calcular $\lambda_{u1} = 18{,}724^\circ$, $\lambda_{u2} = 69{,}95^\circ$ (se puede verificar que los cuadrantes son los correctos viendo el valor del Azimut en cada caso) y despejando λ_2 obtenemos $\lambda_2 = 1{,}663^\circ$ E.

7. ¿Qué condición debe cumplirse para que la traza de un satélite se repita cada k revoluciones del satélite y m días? Calcular la condición primero en ausencia de perturbaciones y luego considerando las perturbaciones seculares provocadas por el J_2 (regresión de los nodos, avance del perigeo, $\dot{M}$), realizando una aproximación de primer orden para calcular la desviación respecto al caso no perturbado.

Solución:

Para que la traza de un satélite, sin considerar perturbaciones, se repita, es necesario que el periodo nodal del satélite (y por tanto a) tenga un valor que sea una fracción del periodo de la Tierra. En m días la Tierra habrá cubierto $m2\pi$ radianes, y en k revoluciones el desfase de la traza será $k\frac{T_{sat}}{T_{\bigoplus}}2\pi$. Ambos números han de ser iguales, lo que lleva a la condición:

$$T_{sat} = \frac{m}{k} T_{\bigoplus},$$

de donde se calcula T_{sat} y por tanto a.

En caso de tener en cuenta las perturbaciones seculares del J_2, es decir $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ y $\dot{M}$, las cosas cambian. El periodo nodal del satélite T_N ahora será

$$\begin{aligned} T_N &= \frac{2\pi}{\dot{\omega} + \dot{M}} = \frac{2\pi}{n\left(1 + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{4p^2} J_2\left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i)\right)\right)} \\ &= \frac{T_{sat}}{1 + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{4p^2} J_2\left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i)\right)}, \end{aligned}$$

donde T_{sat} es el periodo kepleriano, y n es la velocidad angular media orbital. Por otro lado el periodo del movimiento aparente medio de la Tierra bajo el satélite hay que ajustarlo teniendo en cuenta la regresión de los nodos:

$$\begin{aligned} T'_{\bigoplus} &= \frac{2\pi}{\omega_{\bigoplus} - \dot{\Omega}} = \frac{2\pi}{\omega_{\bigoplus} + n\frac{3R_{\bigoplus}^2}{2p^2} J_2 \cos i} \\ &= \frac{T_{\bigoplus}}{1 + \frac{T_{\bigoplus}}{T_{sat}}\frac{3R_{\bigoplus}^2}{2p^2} J_2 \cos i}. \end{aligned}$$

Como antes se debe verificar $T_N = \frac{m}{k} T'_{\bigoplus}$, luego la condición será:

$$\frac{T_{sat}}{1 + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{4p^2} J_2\left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i)\right)} = \frac{m}{k}\frac{T_{\bigoplus}}{1 + \frac{T_{\bigoplus}}{T_{sat}}\frac{3R_{\bigoplus}^2}{2p^2} J_2 \cos i},$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\frac{T_{sat}}{T_{\bigoplus}} + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{2p^2} J_2 \cos i}{1 + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{4p^2} J_2\left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i)\right)} = \frac{m}{k},$$

y escrito en función de a queda

$$\frac{2\pi\frac{a^{7/2}}{\sqrt{\mu_{\bigoplus}}T_{\bigoplus}} + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{2(1-e^2)^2} J_2 \cos i}{a^2 + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{4(1-e^2)^2} J_2\left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i)\right)} = \frac{m}{k},$$

ecuación que ha de resolverse numéricamente para encontrar valores de a que la verifiquen.

Por ejemplo, un satélite Molniya con inclinación $i = 63{,}4^{\circ}$ y excentricidad $e = 0{,}7483$, que debe recorrer su traza dos veces cada día (es decir $m = 1$, $k = 2$), debería tener un semieje mayor $a = 26562$ km si no se consideran perturbaciones o $a = 26553$ km (obtenido numéricamente) si se consideran las perturbaciones seculares del J_2.

Para simplificar la resolución de la ecuación, podemos suponer que $a = a^* + \delta a$, donde a^* está calculada sin perturbaciones (es decir usando la ecuación $T_{sat} = \frac{m}{k} T_{\bigoplus}$) y suponemos que δa es pequeña.

En primer lugar obtenemos que $a^* = \mu_{\oplus}^{1/3} \left(\frac{m}{2\pi k} T_{\bigoplus}\right)^{2/3}$. Escribiendo la ecuación que verifica a y sustituyendo $a = a^* + \delta a$:

$$\frac{2\pi(a^* + \delta a)^{7/2}}{\sqrt{\mu_{\bigoplus}} T_{\bigoplus}} + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{2(1-e^2)^2} J_2 \cos i = \frac{m}{k} \left((a^* + \delta a)^2 + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{4(1-e^2)^2} J_2 \left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i)\right) \right).$$

Linealizando en δa:

$$\begin{aligned} & 2\pi \frac{(a^*)^{7/2} + \frac{7}{2}(a^*)^{5/2}\delta a}{\sqrt{\mu_{\bigoplus}} T_{\bigoplus}} + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{2(1-e^2)^2} J_2 \cos i \\ = & \frac{m}{k} \left(((a^*)^2 + 2a^*\delta a) + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{4(1-e^2)^2} J_2 \left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i)\right) \right). \end{aligned}$$

Puesto que se tiene que $(a^*)^{3/2} = \frac{m}{2\pi k} \sqrt{\mu_{\oplus}} T_{\bigoplus}$ se cancelan términos, llegando a

$$\frac{7m}{2k} a^* \delta a + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{2(1-e^2)^2} J_2 \cos i = \frac{m}{k} \left(2a^* \delta a + \frac{3R_{\bigoplus}^2}{4(1-e^2)^2} J_2 \left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i)\right) \right),$$

y despejando δa:

$$\delta a = \frac{R_{\bigoplus}^2}{2a^*(1-e^2)^2} J_2 \left(5\cos^2 i - 1 + \sqrt{1-e^2}(2 - 3\operatorname{sen}^2 i) - \frac{2k}{m}\cos i\right).$$

Esta aproximación no es mala, por ejemplo aplicándola al Molniya, obtenemos usando $i = 63{,}4^{\circ}$, $e = 0{,}7483$, $m = 1$, $k = 2$, $a^* = 26562$ km un valor de $\delta a = -8{,}795$ km, por lo que $a \approx a^* + \delta a = 26553$ km (el mismo valor que habíamos obtenido numéricamente con un error inferior al menos a un kilómetro).

8. Dado un satélite de elementos $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ tal que su traza se repite diariamente cada k revoluciones, diseñar los elementos de otros $n-1$ satélites, denotados por $(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j)$ para $j = 1, \ldots, n-1$ de forma que los n satélites tengan la misma traza y la recorran separados uniformemente en el tiempo. Aplicar el resultado a diseñar una constelación Molniya de 3 satélites.

<u>Solución</u>:

Las ecuaciones de la traza para un satélite son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi_0(t) &= \operatorname{sen}(\omega_0 + \theta_0(t)) \operatorname{sen} i_0, \\ \lambda_0(t) &= \Omega_0 - \mathrm{GST}_0 - \omega_{\bigoplus} t + \arctan\left(\tan(\omega_0 + \theta_0(t))\cos i_0\right). \end{aligned}$$

Queremos que para cada $j = 1, \ldots, n-1$, se cumpla $\phi_j(t) = \phi_0(t + T_{\bigoplus}\frac{j}{n})$ e igualmente que $\lambda_j(t) = \lambda_0(t + T_{\bigoplus}\frac{j}{n})$. Usando las ecuaciones de la traza esto se traduce en que $i_j = i_0$, $\omega_j = \omega_0$, $a_j = a_0$, $e_j = e_0$ y:

$$\begin{aligned} \theta_j(t) &= \theta_0(t + T_{\bigoplus}\frac{j}{n}), \\ \Omega_j - \omega_{\bigoplus} t &= \Omega_0 - \omega_{\bigoplus}(t + T_{\bigoplus}\frac{j}{n}). \end{aligned}$$

De la segunda de las ecuaciones y puesto que $\omega_{\bigoplus} T_{\bigoplus} = 2\pi$, obtenemos que $\Omega_j = \Omega_0 - j\frac{2\pi}{n}$.

Por otro lado, puesto que la traza se repite cada k revoluciones, tenemos que $T_{sat} = T_{\bigoplus}/k$. Por tanto $\theta_j(t) = \theta_0(t + T_{sat}\frac{jk}{n})$. No obstante no es fácil trabajar con θ porque no se puede expresar en función del tiempo. Si traducimos esta condución a anomalías medias: $M_j(t) = M_0(t + T_{sat}\frac{jk}{n})$, y puesto que $M_0(t + T_{sat}\frac{jk}{n}) = M_0(t) + \omega_{sat} T_{sat}\frac{jk}{n} = M_0(t) + j2\pi\frac{k}{n}$.

Por tanto las condiciones sólo afectan a los elementos Ω y M y son:

$$\begin{aligned} M_j &= M_0 + j\frac{2\pi k}{n}, \\ \Omega_j &= \Omega_0 - j\frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Para una constelación Molniya se tiene, del anterior problema, $a_0 = 26553$ km, $i_0 = 63{,}4^{\circ}$, $\omega_0 = 270^{\circ}$, $e_0 = 0{,}7483$, y asumiendo $\Omega_0 = 0^{\circ}$ y $M_0 = 0^{\circ}$. Además $n = 3$ y $k = 2$. Por tanto, llegamos a los valores para la constelación mostrados en la Tabla 3.

Cuadro 3: Ejemplo de constelación Molniya.

Satélite	a (km)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)	M (°)
1	26553	0.7483	63.4	270	0	0
2	26553	0.7483	63.4	270	240	240
3	26553	0.7483	63.4	270	120	120

9. Calcular el ancho de huella instrumental w de un satélite en la configuración de la figura, con un angulo de visión 2α, pero con el cono de visión desplazado un ángulo oblicuo χ.

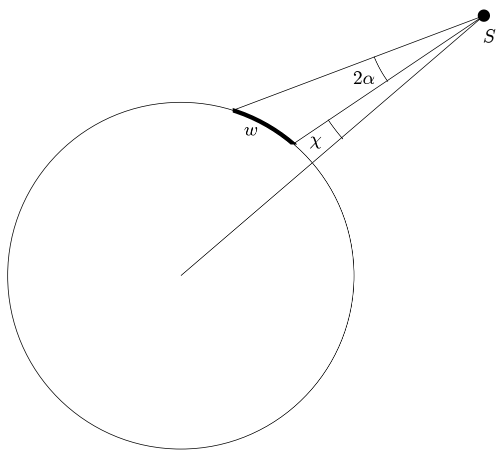


Figura 4: Figura del problema 9.

Solución:

Geométricamente es complejo resolver el problema, no obstante es fácil ver que si llamamos w_1 al ancho de huella de un satélite con un ángulo de visión instrumental (centrado) χ y w_2 al ancho de huella de un satélite con un ángulo de visión instrumental (centrado) $2\alpha+\chi$, entonces $w = \frac{w_2-w_1}{2}$. Puesto que $w_1 = 2R_\oplus \left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{R_\oplus+h}{R_\oplus} \operatorname{sen}\chi \right) - \chi \right)$ y $w_2 = 2R_\oplus \left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{R_\oplus+h}{R_\oplus} \operatorname{sen}(2\alpha+\chi) \right) - (2\alpha+\chi) \right)$, tendremos que:

$$w = 2R_\oplus \left(\frac{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{R_\oplus+h}{R_\oplus} \operatorname{sen}\chi \right) - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{R_\oplus+h}{R_\oplus} \operatorname{sen}(2\alpha+\chi) \right)}{2} + \alpha \right).$$

10. Dado un satélite de coordenadas geográficas (ϕ_0, λ_0, h_0) para un cierto instante dado, obtener los valores de longitud dentro de la cobertura para una latitud fija ϕ. Igualmente, fijada la longitud λ, obtener los valores de latitud dentro de la cobertura.

Solución:

En primer lugar habría que calcular el radio de la circunferencia de cobertura: $\Gamma = \arccos\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus+h_0} \right)$.

Si ahora se fija una latitud que podemos llamar ϕ_1, podemos usar la fórmula de $\Delta\lambda$ y obtenemos:

$$\Delta\lambda = \arccos\left(\frac{\cos\Gamma - \operatorname{sen}\phi_0 \operatorname{sen}\phi_1}{\cos\phi_0 \cos\phi_1} \right).$$

El intervalo de valores de λ será entonces $\lambda \in [\lambda_0 - \Delta\lambda, \lambda_0 + \Delta\lambda]$.

Obsérvese que podría suceder que si $\phi_1 = \phi_0 + \Gamma$, entonces sustituyendo $\Gamma = \phi_1 - \phi_0$ se obtiene $\Delta\lambda = 0$ y el intervalo se reduce a un punto $\lambda = \lambda_0$. Lo mismo sucede si $\phi_1 = \phi_0 - \Gamma$. Por otro lado si $\phi_1 > \phi_0 + \Gamma$ o si $\phi_1 < \phi_0 - \Gamma$ no existe ningún valor de λ para el cual haya puntos dentro de la circunferencia. Otro caso especial sucede cuando $\phi_0 + \Gamma \geq 90^\circ$ o $\phi_0 - \Gamma \leq -90^\circ$. Entonces la circunferencia cubre todas las longitudes (es decir, el intervalo sería $[-180^\circ, 180^\circ]$) para latitudes superiores (o iguales) a $\phi_0 + \Gamma - 90^\circ$ en el primer caso, o inferiores (o iguales) a $\phi_0 - \Gamma + 90^\circ$ en el segundo.

Por otro lado, fijada λ_1 encontrar los puntos con latitud ϕ tales que (λ_1, ϕ) estén en la circunferencia es más complicado. En primer lugar calculamos $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$. Por tanto los posibles ϕ habrán de cumplir la ecuación

$$\operatorname{sen}\phi_0 \operatorname{sen}\phi + \cos\Delta\lambda \cos\phi_0 \cos\phi = \cos\Gamma.$$

Para solucionar esta ecuación, Para resolver ϕ, usamos que $A\,\mathrm{sen}\,\phi + B\cos\phi = D\cos(\phi-\alpha)$ donde $D = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\mathrm{sen}^2\phi_0 + \cos^2\Delta\lambda\cos^2\phi_0}$ y $\alpha = \arccos(B/D) = \pm\arccos\left(\frac{\cos\Delta\lambda\cos\phi_0}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\phi_0+\cos^2\Delta\lambda\cos^2\phi_0}}\right)$. Se coge la solución positiva si ϕ_0 es positivo, y negativa si es negativo. Por tanto:

$$\alpha = \mathrm{signo}(\phi_0)\cdot\arccos\left(\frac{\cos\Delta\lambda\cos\phi_0}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\phi_0+\cos^2\Delta\lambda\cos^2\phi_0}}\right).$$

La solución para ϕ será entonces:

$$\phi = \pm\arccos\left(\frac{\cos\Gamma}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\phi_0+\cos^2\Delta\lambda\cos^2\phi_0}}\right) + \mathrm{signo}(\phi_0)\cdot\arccos\left(\frac{\cos\Delta\lambda\cos\phi_0}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\phi_0+\cos^2\Delta\lambda\cos^2\phi_0}}\right).$$

Obsérvese que las dos soluciones obtenidas de la ecuación de arriba nos darán los extremos de los posibles valores de ϕ. También puede suceder que no existan soluciones (no hay ningún valor de latitud en el intervalo, si el argumento del primer arco coseno es mayor que 1 o menor que -1), o que haya justo una (intervalo que consta de un sólo punto, si el argumento del primer arco coseno es 1 o -1). Se puede comprobar que el primer caso sucederá si $\mathrm{sen}\,|\Delta\lambda| > \frac{\mathrm{sen}\,\Gamma}{\cos\phi_0}$, y el segundo cuando se dé la igualdad en dicha expresión.

Para $\phi_0 = 0^{\circ}$ (circunferencias centradas en el Ecuador), el resultado se reduce a:

$$\phi = \pm\arccos\left(\frac{\cos\Gamma}{\cos\Delta\lambda}\right).$$

Por tanto sólo habrá solución para $|\Delta\lambda| \leq \Gamma$.

Para $\Delta\lambda = 0^{\circ}$ (los puntos donde acaba y termina la circunferencia esférica), tendremos:

$$\phi = \phi_0 \pm \Gamma.$$

Luego el intervalo de latitudes que abarca la circunferencia es $\phi \in [\phi_0-\Gamma, \phi_0+\Gamma]$. Excepto en el caso de que $\phi_0 + \Gamma > 90^{\circ}$; entonces el Polo Norte siempre es solución y el intervalo válido abarcaría desde $\phi_0 - \Gamma$ hasta 90°. Igualmente si $\phi_0 - \Gamma > 90^{\circ}$ el intervalo válido abarcaría desde $\phi_0 + \Gamma$ hasta -90°.

Para clarificar este apartado hacemos un ejemplo con $\Gamma = 45^{\circ}$, $\lambda_0 = 0^{\circ}$ y ϕ_0, λ_1 variable. El intervalo resultante se muestra en una tabla, y los círculos en una figura al final de las soluciones.

Cuadro 4: Intervalos de ϕ tales que (λ_1, ϕ) pertenecen a una circunferencia, con ϕ_0 y λ_1 variables.

	$\lambda_1 = 0^{\circ}$	$\lambda_1 = 30^{\circ}$	$\lambda_1 = 45^{\circ}$	$\lambda_1 = 60^{\circ}$
$\phi_0 = 0^{\circ}$	$\phi \in [-45^{\circ}, 45^{\circ}]$	$\phi \in [-35{,}26^{\circ}, 35{,}26^{\circ}]$	$\phi = 0$	Sin sol.
$\phi_0 = 30^{\circ}$	$\phi \in [-15^{\circ}, 75^{\circ}]$	$\phi \in [-4{,}63^{\circ}, 72{,}02^{\circ}]$	$\phi \in [12{,}67^{\circ}, 65{,}8^{\circ}]$	Sin sol.
$\phi_0 = 60^{\circ}$	$\phi \in [15^{\circ}, 90^{\circ}]$	$\phi \in [20{,}35^{\circ}, 90^{\circ}]$	$\phi \in [26{,}9^{\circ}, 90^{\circ}]$	$\phi \in [35{,}57^{\circ}, 90^{\circ}]$

11. Calcular la función de visibilidad, para una estación de coordenadas (ϕ, λ), de una estrella (considerada inmóvil, y en el infinito, en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial) con ascensión recta AR y declinación δ. ¿Cuál es la función de visibilidad de la estrella polar?

Solución:

El vector unitario que apunta a una estrella en el sistema de referencia geocéntrico inercial, dados su ascensión recta AR y declinación δ es:

$$r^I = \begin{bmatrix} \cos\mathrm{AR}\cos\delta \\ \mathrm{sen}\,\mathrm{AR}\cos\delta \\ \mathrm{sen}\,\delta \end{bmatrix}.$$

Este vector al considerar la estrella en el infinito no cambiará según el punto de Tierra. Si consideramos un observador del cual es conocido su LST y latitud ϕ, el vector unitario que apunta al cénit de dicho observador en el sistema de referencia geocéntrico inercial es:

$$c^I = \begin{bmatrix} \cos\mathrm{LST}\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\mathrm{LST}\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\phi \end{bmatrix}.$$

Por tanto la elevación vendrá dada por el producto escalar de estos dos vectores:

$$\begin{aligned} \cos(90^{\circ}-h) &= \mathrm{sen}\,h = \vec{r}\cdot\vec{c} = \begin{bmatrix} \cos\mathrm{AR}\cos\delta \\ \mathrm{sen}\,\mathrm{AR}\cos\delta \\ \mathrm{sen}\,\delta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\mathrm{LST}\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\mathrm{LST}\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\phi \end{bmatrix} \\ &= \cos(\mathrm{AR}-\mathrm{LST})\cos\delta\cos\phi + \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,\phi. \end{aligned}$$

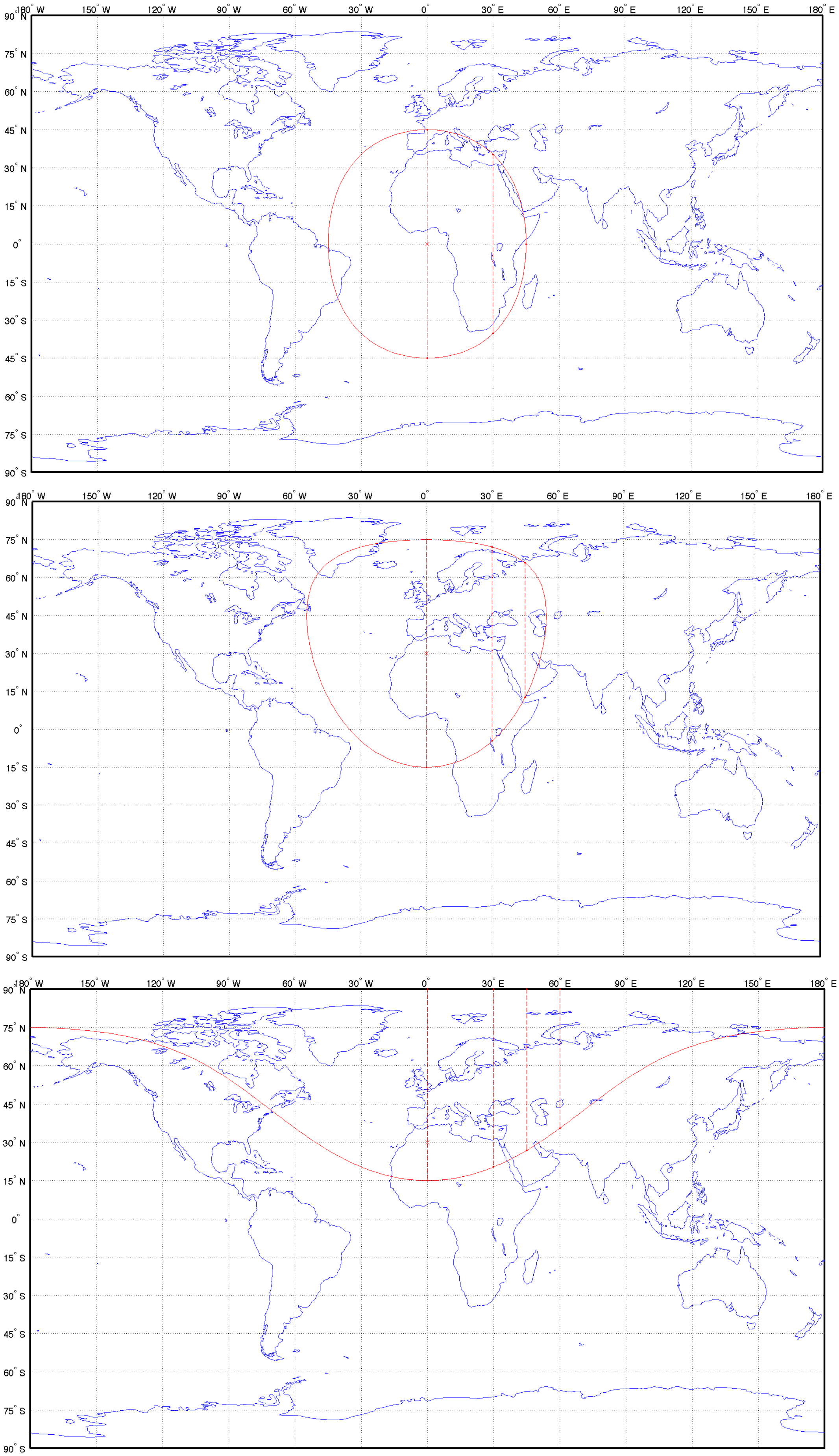


Figura 5: Figuras del problema 10.

La función de visibilidad se puede escribir explícitamente sustituyendo $\mathrm{LST} = \mathrm{GST}_0 + \lambda + \omega_{\oplus} t$, por tanto:

$$h(t) = \arcsin\left(\cos(\mathrm{AR} - \mathrm{GST}_0 - \lambda - \omega_{\oplus} t)\cos\delta\cos\phi + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\phi\right).$$

Obsérvese que esta solución coincide con la obtenida directamente del triángulo astronómico en teoría. El caso de la estrella polar viene definido por $\delta = 90^{\circ}$. Por tanto:

$$h(t) = \arcsin\left(\operatorname{sen}\phi\right) = \phi,$$

de donde la elevación de la estrella polar en el cielo es constante e igual a la latitud del observador.

12. La función de visibilidad del Sol permite calcular el atardecer y el amanecer en una determinada localización geográfica. Calcular para un día dado, en un punto cualquiera de la Tierra (ϕ, λ), la función de visibilidad del Sol (suponiendo que no se mueve a lo largo del día y está en el infinito), y a partir de ella el amanecer y el atardecer (que se define a efectos civiles para $\varepsilon = -6^{\circ}$ ya que el Sol no es un punto sino un arco en el horizonte).

Solución:

Puesto que suponemos que el Sol está en el infinito, la función de visibilidad calculada en el anterior problema puede ser empleada:

$$h(t)_{\odot} = \arcsin\left(\cos(\mathrm{AR}_{\odot} - \mathrm{GST}_0 - \lambda - \omega_{\oplus} t)\cos\delta_{\odot}\cos\phi + \operatorname{sen}\delta_{\odot}\operatorname{sen}\phi\right).$$

Para calcular $\mathrm{AR}_{\odot}$ y $\delta_{\odot}$ aproximadamente, supongamos que en el día que se quiere calcular $h_{\odot}$ han pasado D días desde el equinoccio de Primavera. Suponiendo que la órbita de la Tierra fuera circular, para simplificar, el Sol habría avanzado $u = \frac{D}{365{,}25}360^{\circ}$ grados en su órbita y usando la trigonometría esférica con un triángulo limitado por el Ecuador, la eclíptica y el meridiano en el que se encuentra el Sol, se halla:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\delta_{\odot} &= \operatorname{sen}u\operatorname{sen}\epsilon,\\ \cos\mathrm{AR}_{\odot} &= \frac{\cos u}{\cos\delta_{\odot}},\end{aligned}$$

donde $\epsilon = 23{,}5^{\circ}$ es la inclinación de la eclíptica. Insertando estos valores para un día D en la función de visibilidad, con valor $h = -6^{\circ}$ y el GST_0 del día, se puede hallar la hora de amanecer y atardecer para dicho día D:

$$-6^{\circ} = \arcsin\left(\cos(\mathrm{AR}_{\odot} - \mathrm{GST}_0 - \lambda - \omega_{\oplus} t)\cos\delta_{\odot}\cos\phi + \operatorname{sen}\delta_{\odot}\operatorname{sen}\phi\right),$$

de donde despejando t:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\mathrm{GST}_0(D) + \lambda - \mathrm{AR}_{\odot}(D)}{\omega_{\oplus}}\arccos\left(-\frac{\operatorname{sen}(6^{\circ}) + \operatorname{sen}\delta_{\odot}(D)\operatorname{sen}\phi}{\cos\delta_{\odot}(D)\cos\phi}\right)\\ &= \frac{\mathrm{GST}_0(D) + \lambda - \mathrm{AR}_{\odot}(D)}{\omega_{\oplus}}\left[360^{\circ} - \arccos\left(\frac{\operatorname{sen}(6^{\circ}) + \operatorname{sen}\delta_{\odot}(D)\operatorname{sen}\phi}{\cos\delta_{\odot}(D)\cos\phi}\right)\right].\end{aligned}$$

13. ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, dura la noche eterna en los polos? ¿Y en una latitud de 80°? Suponer la órbita de la Tierra circular para simplificar los cálculos.

Solución:

Para solucionar (aproximadamente) este problema ignoramos el tamaño del disco del Sol. Es claro que la noche eterna en el Polo Norte durará todo el tiempo que la declinación del Sol sea negativa. Igualmente en el Polo Sur todo el tiempo que la declinación del Sol sea positiva. Por tanto la duración es medio año. En el caso de una latitud de 80°, será noche eterna mientras $\delta_{\odot} < -10^{\circ}$. Se tiene que $\operatorname{sen}\delta_{\odot} = \operatorname{sen}u\operatorname{sen}\epsilon$ donde $\epsilon = 23{,}5^{\circ}$ y u es el ángulo que avanza el Sol en su órbita. Calculando u, $\delta_{\odot} = -10^{\circ}$ justo cuando $u = u_1 = 205{,}82^{\circ}$ o $u = u_2 = 334{,}18^{\circ}$. El periodo de tiempo transcurrido entre ambos cruces es (supuesta la órbita de la Tierra circular) $\Delta t = (u_2 - u_1)\frac{365{,}25\ \mathrm{dias}}{360^{\circ}} = 130{,}24\ \mathrm{dias}$ (algo más de cuatro meses).

Si se tiene en cuenta el tamaño del disco del Sol y se define la noche a partir de que la elevación solar sea -6° o menor, será "noche" (no se verá el Sol) en el polo Norte mientras $\delta_{\odot} < -6^{\circ}$, y siguiendo el procedimiento descrito $\Delta t = 151{,}79$ dias (unos cinco meses). Para $\phi = 80^{\circ}N$ ahora la condición será $\delta_{\odot} < -16^{\circ}$, lo que lleva a $\Delta t = 93{,}89$ dias.

14. Demuestre, usando trigonometría esférica, que la traza de un satélite sobre la superficie terrestre alcanza una latitud máxima igual a la inclinación de su órbita.

Solución:

Del triángulo esférico que tiene el meridiano en el que se encuentra el satélite, la órbita y el Ecuador como lados, se tiene que $\cos i = \operatorname{sen}\mathrm{Az}\cos\phi$, donde Az es el Azimut de la órbita del satélite en el punto en el que se encuentra. En su máxima latitud, el azimut será Oeste (para órbitas directas, $i < 90^{\circ}$); por tanto $\cos i = \cos\phi$ de donde $\phi = \pm i$, es decir, el máximo será i y el mínimo $-i$. Si la órbita es retrógrada ($i > 90^{\circ}$) en su máxima latitud el azimut será Este y por tanto $\cos i = -\cos\phi$, de donde $\phi = \pm(180^{\circ} - i)$, luego el máximo será $180 - i$ y el mínimo $i - 180$.

15. Demuestre, usando trigonometría esférica, la fórmula que relaciona la inclinación de una órbita, el azimut de lanzamiento y la latitud de la base de lanzamiento. ¿Por qué la mayor parte de las bases están situadas de forma que los lanzamientos se puedan realizar en dirección Este?

    Solución:

    Usando el triángulo esférico que tiene como lados el meridiano en el que se encuentra base, la proyección del la órbita y el Ecuador, y aplicando la ley de cosenos a la inclinación, se tiene que $\cos i = \cos 90^{\circ} \cos \mathrm{Az} + \operatorname{sen} 90^{\circ} \operatorname{sen} \mathrm{Az} \cos \phi = \operatorname{sen} \mathrm{Az} \cos \phi$, donde Az es el Azimut de lanzamiento y ϕ la inclinación de la base.

    Los lanzamientos se realizan siempre con componente Este porque la mayor parte de las órbitas son directas, para aprovechar la rotación de la Tierra, que añade una velocidad $R_{\bigoplus}\omega_{\bigoplus} \cos \phi$ al lanzamiento; si se lanzara hacia el Oeste hacia una órbita retrógrada habría que oponerse a dicha velocidad.

16. Se tiene un satélite en una órbita circular, a altitud $h = 35786$ km e inclinación $i = 60^{\circ}$. Dibujar la traza de la órbita de la forma más precisa posible con la información proporcionada. Si la inclinación fuera próxima a cero, aproximar a segundo orden la forma de la traza.

    Solución:

    Con la información proporcionada no podemos ubicar la traza exactamente, pero sí dibujarla cualitativamente. Lo primero que sabemos es que la máxima y mínima latitud vendrá dada por $\pm i$. Por otro lado $r = h + R_{\bigoplus} = 42164$ km que es donde se encuentra la órbita geosíncrona; por tanto $T_{SAT} = T_{\bigoplus}$ y la traza es una curva cerrada. De teoría sabemos que la traza de un GEO al que se perturba en inclinación tiene la forma de un ocho. Por simetría los máximos y mínimos de latitud se dan a la misma longitud que los cruces de Ecuador.

    Podemos calcular también el sentido de la traza y donde la traza cambia de directa a retrógrada recordando que $\dot{\lambda} = -\omega_{\bigoplus} + \frac{\cos i}{\cos^2 \phi}\omega_{SAT}$, donde $\omega_{SAT} = \omega_{\bigoplus}$.

    En el Ecuador $\phi = 0$ y por tanto la traza es retrógrada (tiene una componente hacia el Oeste). En el máximo $\phi = i$, luego $\dot{\lambda} > 0$ y la traza es directa.

    En el cambio de retrógrada a directa, la velocidad será cero cuando $\cos \phi = \sqrt{\cos i}$. En este caso eso implica $\phi = 45^{\circ}$.

    Para calcular cuanto ha cambiado la longitud en dicho punto, llamemos t_0 al instante de paso por el Ecuador y t_1 al instante en el que la traza cambia de retrógrada a directa.

    En el paso por el Ecuador se tiene $\mathrm{GST}(t_0) + \lambda(t_0) = \Omega$. Por otro lado en t_1 se tendrá $\mathrm{GST}(t_1) + \lambda(t_1) = \Omega + \lambda_u(t_1)$. Recordemos que $\operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u$. Por tanto $u = 54{,}7356^{\circ}$. Ese ángulo se recorre en $t = u/\omega_{\bigoplus} = 13101$ s desde el paso por el Ecuador; por tanto $t_1 - t_0 = 13101$ s. Por otro lado $\cos \lambda_u = \frac{\cos u}{\cos \phi}$, luego $\lambda_u = 35{,}26^{\circ}$.

    Calculemos $\Delta\lambda = \lambda(t_1) - \lambda(t_0) = -\mathrm{GST}(t_1) + \lambda_u(t_1) + \Omega + \mathrm{GST}(t_0) - \Omega = -\omega_{\bigoplus}(t_1 - t_0) + \lambda_u(t_1) = -19{,}4712^{\circ}$.

    También podemos calcular el azimut en proyección (es decir el que se vería en el mapa) en el paso por el Ecuador, que vendría dado por $\tan \mathrm{Az} = \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\phi}}$. En el Ecuador, $\dot{\lambda} = \omega_{\bigoplus}(\cos i - 1)$. Por otro lado, $\dot{\phi} = \pm\omega_{\bigoplus} \operatorname{sen} i$ (el signo positivo en el nodo ascendente y el negativo en el descendente). Por tanto, en el nodo ascendente $\tan \mathrm{Az} = \frac{\cos i - 1}{\operatorname{sen} i} = \tan\left(-\frac{i}{2}\right)$, por lo que $\mathrm{Az} = -\frac{i}{2}$ y en este caso $\mathrm{Az} = -30^{\circ}$ (recordemos que el Azimut se mide respecto al Norte). Igualmente, en el nodo descendente $\tan \mathrm{Az} = \tan\left(\frac{i}{2}\right)$, por lo que $\mathrm{Az} = 180^{\circ} + \frac{i}{2}$ y en este caso $\mathrm{Az} = 210^{\circ}$ (siempre hay que coger la solución con componente Oeste).

    Ya podemos dibujar la traza con bastante aproximación. Suponiendo que el paso por el Ecuador fuera en longitud cero grados, el dibujo es como se muestra en la Figura 6.

    Observemos que todas estas cuentas se podrían realizar para cualquier inclinación y en particular para una inclinación pequeña podríamos realizar una aproximación hasta primer o segundo orden. En tal caso, el punto donde cambia la dirección de la traza se calcularía como $\phi = \arccos\left[\sqrt{\cos i}\right] \approx \left[\frac{\operatorname{sen} i}{\sqrt{1-\cos i}} \frac{1}{2\sqrt{\cos i}}\right]_{i=0} i = \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos i}{\cos i}}\right]_{i=0} i = \frac{\sqrt{2}i}{2}$. No obstante, como veremos, para u y para λ_u necesitamos un mayor orden en el desarrollo por lo que es conveniente encontrar el segundo y tercer orden en ϕ. El segundo orden se obtendría tomando una derivada más:

    $$\phi \approx \frac{\sqrt{2}i}{2} + \left[\frac{1}{2}\frac{\frac{-\operatorname{sen} i \cos i + \operatorname{sen} i(1+\cos i)}{\cos^2 i}}{2\sqrt{\frac{1+\cos i}{\cos i}}}\right]_{i=0} \frac{i^2}{2} = \frac{\sqrt{2}i}{2} + \left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1-\cos i}{\cos^3 i}}\right]_{i=0} \frac{i^2}{2} = \frac{\sqrt{2}i}{2}$$

    Luego el orden dos es cero. El tercer orden se hallaría tomando otra derivada:

    $$\phi \approx \frac{\sqrt{2}i}{2} + \left[\frac{1}{8}\frac{3 - 2\cos i}{\cos^3 i}\sqrt{\frac{1+\cos i}{\cos i}}\right]_{i=0} \frac{i^3}{6} = \frac{\sqrt{2}i}{2} + \frac{\sqrt{2}i^3}{48}$$

    Se tiene entonces que

    $$\operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}i}{2} \approx \frac{\sqrt{2}i}{2} + \frac{\sqrt{2}i^3}{48} - \frac{\sqrt{2}i^3}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2} i \left(1 - \frac{i^2}{24}\right)$$

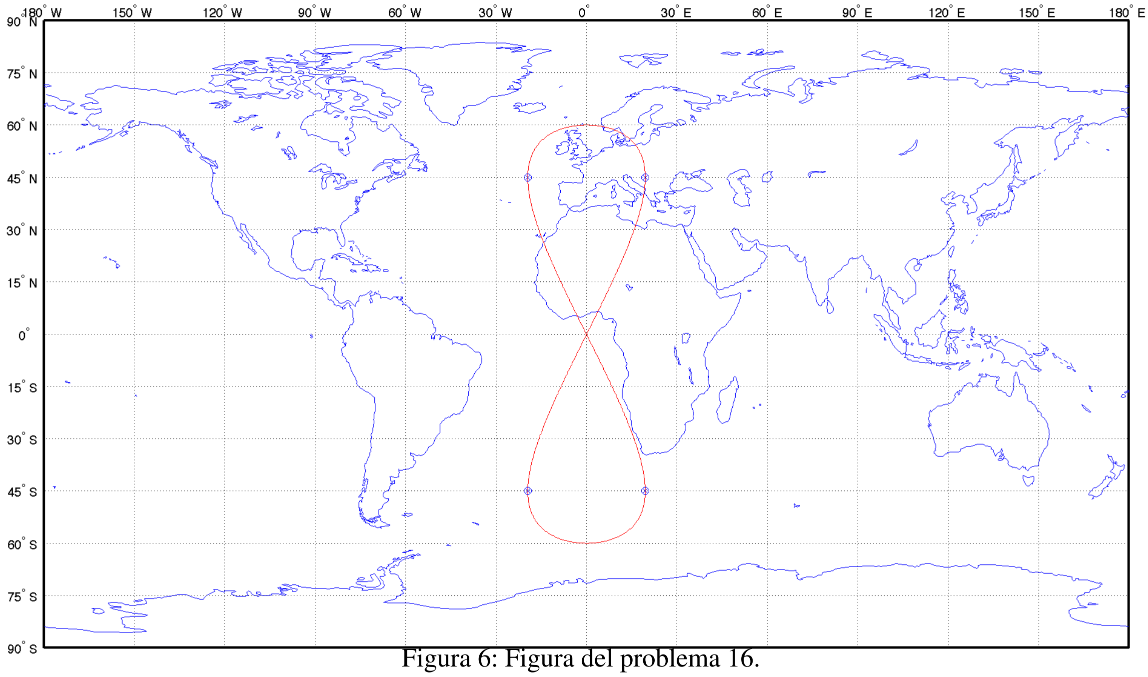


Figura 6: Figura del problema 16.

y como $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u$, se tiene

$$\operatorname{sen} u = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen} i} \approx \frac{\frac{\sqrt{2}i}{2} - \frac{\sqrt{2}i^3}{48}}{i - \frac{i^3}{6}} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{i^2}{24}\right)\left(1 + \frac{i^2}{6}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{i^2}{8}\right)$$

Fijando ahora $u = c_0 + c_1 i + c_2 i^2$, obtenemos

$\operatorname{sen} u = \operatorname{sen}(c_0+c_1 i+c_2 i^2) = \operatorname{sen} c_0 \cos(c_1 i+c_2 i^2)+\operatorname{sen}(c_1 i+c_2 i^2)\cos c_0 \approx \operatorname{sen} c_0(1-c_1^2 i^2)+(c_1 i+c_2 i^2)\cos c_0$

Igualando coeficientes con la anterior ecuación obtenemos: $c_1 = 0$, $\operatorname{sen} c_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{16}}{\cos c_0}$, luego $c_0 = \frac{\pi}{4}$, $c_2 = \frac{1}{8}$. Por tanto a segundo orden $u \approx \frac{\pi}{4} + \frac{i^2}{8}$ (a primer orden $u = 45^{\mathrm{o}}$). Finalmente $\Delta\lambda = -u + \lambda_u$, donde $\cos\lambda_u \cos\phi = \cos u \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{i^2}{8} - \operatorname{sen}\frac{i^2}{8}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{i^2}{8}\right)$. Luego:

$$\cos\lambda_u \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-\frac{i^2}{8}}{\cos\phi} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-\frac{i^2}{8}}{1-\frac{i^2}{4}} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{i^2}{8}\right)\left(1 + \frac{i^2}{4}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{i^2}{8}\right)$$

Suponiendo ahora $\lambda_u \approx d_0 + d_1 i + d_2 i^2$, obtenemos $\cos\lambda_u \approx \cos d_0 \cos\left(d_1 i + d_2 i^2\right) - \operatorname{sen} d_0 \operatorname{sen}\left(d_1 i + d_2 i^2\right) \approx \cos d_0\left(1 - \frac{d_1^2}{2}i^2\right) - \operatorname{sen} d_0\left(d_1 i + d_2 i^2\right)$. Deducimos $\cos d_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $d_1 = 0$, $d_2 = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{8}}{\operatorname{sen} d_0}$, obteniendo $d_0 = \frac{\pi}{4}$ y $d_2 = -\frac{1}{8}$. Por lo tanto: $\lambda_u \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}i^2$ y finalmente $\Delta\lambda \approx -\frac{i^2}{8} - \frac{i^2}{8} = -\frac{i^2}{4}$. Llegamos entonces a la conclusión de que la "caja" donde se mueve la traza tiene altura $2i$ y anchura $\frac{i^2}{2}$ (en radianes), cuando i es pequeña.

17. Para la época del 15 de Enero de 2009 a las 00:00 UT se tiene que $\mathrm{GST}_0 = 115^{\mathrm{o}}$. Calcular en dicha época y con la mayor exactitud posible los elementos orbitales de la órbita cuya traza (una revolución) se muestra en la figura, sabiendo que:

    - La órbita es circular y directa.
    - La órbita no está afectada por perturbaciones.
    - Se sabe que se alcanzó el punto de mínima latitud de la traza dibujada en la figura el 15 de Enero de 2009 a las 10:00 UT, en la longitud $83{,}71^{\mathrm{o}}$O

    Solución: En primer lugar, del enunciado $e = 0$ y no están bien definidos θ y ω, por lo que se debe usar $u = \theta + \omega$.

    Por inspección en la figura observamos que la latitud máxima es 45 grados y puesto que la órbita es directa, se tiene que $i = 45^{\mathrm{o}}$.

    Por otro lado observamos que el $\Delta\lambda$ es de -30 grados. Como se tiene $\Delta\lambda = -\omega_{\oplus} T_{\mathrm{sat}}$, obtenemos $T_{\mathrm{sat}} = 7180{,}3\ \mathrm{s}$ y de la fórmula del periodo $a = 8044{,}3\ \mathrm{km}$. También obtenemos $n = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a^3}} = 0{,}00088\ \mathrm{rad/s}$ que será útil más adelante. Finalmente conocemos un punto de la traza, justo donde la latitud es mínima (-45 grados), se tiene que $t = 10 \cdot 3600$ y $\lambda(t) = -83{,}71^{\mathrm{o}}$. Para la latitud mínima, se tiene que $u = 270^{\mathrm{o}}$ y $\lambda_u = 270^{\mathrm{o}}$ (como se puede obtener del triángulo esférico).

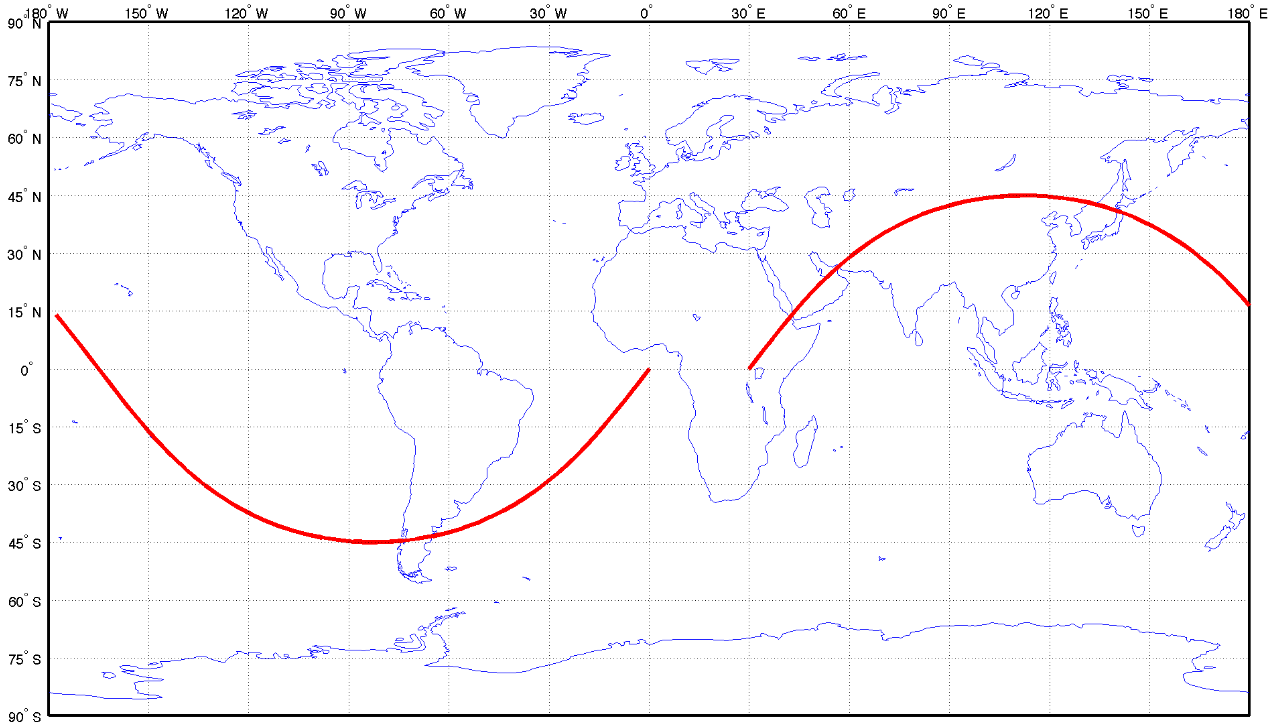


Figura 7: Figura del problema 17.

Luego u en la época vendrá dado por $u(t_0) = u(t) - nt = 265{,}07^{\text{o}}$ y para terminar, $\Omega = \text{GST}_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda(t) - \lambda_u = 271{,}7^{\text{o}}$.

18. Se tiene un satélite, en una órbita circular, con el resto de elementos orbitales (en la época del 1 de Noviembre de 2008 a las 12:00) $h = 800$ km, $i = 50^{\text{o}}$, $\Omega = 130^{\text{o}}$, $u = 0^{\text{o}}$, y se sabe que en la época $GST = 14$ h 41 m 35,3 s. Estudiar la cobertura el 20 de Noviembre de 2008 a las 15:00. ¿Qué latitudes máxima y mínima están cubiertas, y a qué longitud? ¿Cuál es la superficie de cobertura y el ancho de huella? ¿Cómo se modifican estos resultados si estudiamos la cobertura de un instrumento con $\alpha = 10^{\text{o}}$? Estudiar en ambos casos si la cobertura incluye Sevilla ($\phi = 37{,}23^{\text{o}}$N, $\lambda = 5{,}58^{\text{o}}$O). Repetir el problema con Honolulu, Hawai ($\phi = 21^{\text{o}}\ 18'\ 25''$N, $\lambda = 157^{\text{o}}\ 51'\ 30''$O).

Solución:

En primer lugar hay que propagar la órbita desde la época (que llamamos t_0) hasta el 20 de Noviembre de 2008 a las 15:00 (que llamamos t_1). Para ello usamos que $u(t_1) = u(t_0) + n(t_1 - t_0)$, donde $n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}} = 0{,}001$ rad/s y donde $a = h + R_{\oplus} = 7187{,}14$ km. Puesto que $t_1 - t_0 = 19$ dias 3 h $= 1652400$ s, obtenemos $u(t_1) = 5{,}352^{\text{o}}$. También, partiendo de $\text{GST}(t_0) = 220{,}397^{\text{o}}$, podemos obtener $\text{GST}(t_1) = \text{GST}(t_0) + \omega_{\oplus}(t_1 - t_0) = 285{,}255^{\text{o}}$.

Usando las fórmulas de la traza (o planteando un triángulo esférico) obtenemos $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u$ de donde $\phi(t_1) = 4{,}097^{\text{o}}$. Calculamos λ_u de $\cos\lambda_u = \frac{\cos u}{\cos\phi}$ y obtenemos $\lambda_u = 3{,}446^{\text{o}}$. A partir de λ_u obtenemos $\lambda = \Omega + \lambda_u - GST(t_1) = -150{,}81^{\text{o}}$. Por tanto las coordenadas del satélite son $(4{,}097^{\text{o}}\text{N}, 150{,}81^{\text{o}}\text{O})$.

Por otro lado, el radio de la circunferencia de cobertura geográfica será:

$$\Gamma = \arccos\left(\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}\right) = 27{,}3^{\text{o}}.$$

Por tanto las latitudes máxima y mínima cubiertas son $4{,}097^{\text{o}}\text{N} + 27{,}3^{\text{o}} = 31{,}397^{\text{o}}\text{N}$ y $4{,}097^{\text{o}}\text{N} - 27{,}3^{\text{o}} = 23{,}203^{\text{o}}\text{S}$, ambas a una longitud de $150{,}81^{\text{o}}\text{O}$. La superficie de cobertura se obtiene de la fórmula $S = 2\pi R^2(1 - \cos\Gamma) = 28{,}49$ millones de kilómetros cuadrados (aproximadamente un 5.5 % de la superficie de la Tierra). Por otro lado el ancho de huella $w = 2R_{\oplus}\Gamma = 6080$ km.

Para un instrumento con $\alpha = 10^{\text{o}}$ la cobertura instrumental será:

$$\gamma = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{R_{\oplus} + h}{R_{\oplus}} \operatorname{sen}(\alpha)\right) - \alpha = 1{,}27^{\text{o}}.$$

Por tanto las latitudes máxima y mínima cubiertas son $4{,}097^{\text{o}}\text{N} + 1{,}27^{\text{o}} = 5{,}367^{\text{o}}\text{N}$ y $4{,}097^{\text{o}}\text{N} - 1{,}27^{\text{o}} = 2{,}827^{\text{o}}\text{N}$, ambas a una longitud de $150{,}81^{\text{o}}\text{O}$. La superficie de cobertura se obtiene de la fórmula $S = 2\pi R^2(1 - \cos\gamma) =$

62765 km^2(aproximadamente un 0.2 % de la superficie de cobertura geográfica). Por otro lado el ancho de huella $w = 2R_{\bigoplus}\gamma = 282{,}7$ km.

Puesto que la latitud de Sevilla, $\phi = 37{,}23^{\circ}$, es mayor que $\phi_{SAT} + \Gamma = 31{,}40^{\circ}$, se puede asegurar que Sevilla está fuera de la circunferencia de cobertura geográfica (y por tanto de la instrumental, que es siempre igual o menor).

Por otro lado, a la latitud de Honolulu, $\phi = 21{,}31^{\circ}$ esto no es cierto. Calculamos $\Delta\lambda$ de la circunferencia a esta latitud:

$$\Delta\lambda = \arccos\frac{\cos\Gamma - \operatorname{sen}\phi_{HON}\operatorname{sen}\phi_{SAT}}{\cos\phi_{HON}\cos\phi_{SAT}} = 21{,}837^{\circ}$$

y por tanto la circunferencia incluye longitudes en el intervalo $[-172{,}646^{\circ}, -128{,}972^{\circ}]$ lo cual incluye a Honolulu, luego está cubierta. Trabajando con la cobertura instrumental, por la misma razón que Sevilla no estaba cubierta en primer lugar, Honolulu no puede estar cubierta en este caso.

19. Estudiar la elevación (y su evolución en el tiempo, si fuera necesario), para un observador situado en Sevilla ($\phi = 37{,}23^{\circ}$N, $\lambda = 5{,}58^{\circ}$O), de:

- Un satélite GEO sobre la latitud $\lambda = 0^{\circ}$.
- Un satélite GEO sobre la latitud $\lambda = 80^{\circ}$O.
- Un satélite de elementos $e = 0$, $i = 0^{\circ}$, $h = 1000$ km, que en el instante de tiempo $t = 0$ se encuentre sobre el meridiano de Greenwich.

Solución:

En todos los casos se trata de satélites ecuatoriales ($i = 0$). Esto simplifica los cálculos, ya que si en la fórmula del ángulo Ψ para la visibilidad introducimos $i = 0$, llegamos a :

$$\cos\Psi = \cos\phi\cos(\text{LST} - (\Omega + \omega + \theta))$$

y puesto que los tres satélites son ecuatoriales y circulares, usamos $\lambda_T = \Omega + \omega + \theta$, la longitud verdadera, como elemento orbital no singular. Por tanto:

$$\cos\Psi = \cos\phi\cos(\text{LST} - \lambda_T).$$

Por un lado se tiene que $\text{LST} = \text{GST}_0 + \lambda + \omega_{\bigoplus}t$. Por otro lado $\lambda_T = \lambda_T(0) + nt$. Por tanto:

$$\cos\Psi = \cos\phi\cos(\text{GST}_0 - \lambda_T(0) + \lambda + (\omega_{\bigoplus} - n)t).$$

En el caso de un GEO, $n = \omega_{\bigoplus}$ y $\text{GST}_0 + \lambda_{\text{GEO}} = \lambda_T(0)$, donde λ_{GEO} es la longitud sobre la que el GEO está fija. Por tanto para el caso del GEO, Ψ es constante e igual a:

$$\cos\Psi = \cos\phi\cos(\lambda - \lambda_{\text{GEO}}),$$

y sustituyendo este valor en la fórmula de la visibilidad se llega a:

$$h = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{R_{\text{GEO}}\cos\phi\cos(\lambda - \lambda_{\text{GEO}}) - R_{\oplus}}{\sqrt{R_{\text{GEO}}^2 + R_{\oplus}^2 - 2R_{\oplus}R_{\text{GEO}}\cos\phi\cos(\lambda - \lambda_{\text{GEO}})}}\right),$$

donde $R_{\text{GEO}} = 42164$ km. Insertando las coordenadas de Sevilla, se tiene que $h = 46{,}43^{\circ}$ para el GEO en longitud 0 y $h = 3{,}67^{\circ}$ para el GEO en longitud $\lambda = 80^{\circ}$O.

En el caso del LEO, sabemos por el enunciado que $\text{GST}_0 - \lambda_T(0) = 0$. Por otro lado se tendrá que $r = R_{\bigoplus} + h$ y que $n = \sqrt{\frac{\mu_{\bigoplus}}{r^3}}$. La función de visibilidad será:

$$h(t) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{r\cos\phi\cos(\lambda + (\omega_{\bigoplus} - n)t) - R_{\oplus}}{\sqrt{r^2 + R_{\oplus}^2 - 2R_{\oplus}r\cos\phi\cos(\lambda + (\omega_{\bigoplus} - n)t)}}\right),$$

y el máximo se dará justo cuando $t = \frac{\lambda}{n - \omega_{\bigoplus}}$, entonces:

$$h_{max} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{r\cos\phi - R_{\oplus}}{\sqrt{r^2 + R_{\oplus}^2 - 2R_{\oplus}r\cos\phi}}\right),$$

que en el caso de Sevilla es $h_{max} = -6{,}4363^{\circ}$, es decir, nunca se ve el satélite.

20. Dado un satélite con $e = 0$ y altitud dada h cuya órbita se repite, plantear el problema de hallar la máxima elevación que alcanza visto desde una base de coordenadas dadas. Si la órbita del satélite no se repite, ¿cuál será la máxima elevación posible?

    Solución:

    Planteamos el problema geométricamente. Si la órbita se repite y es de altura constante, la máxima elevación se encontrará en el punto más cercano (en el sentido de distancia sobre la esfera, o distancia ortodrómica) de la traza a la base; si la traza pasara por la base, entonces la elevación máxima sería noventa. Si no, llamemos Γ a la distancia mínima (angular, en la esfera) entre la base y la traza (que en general es difícil de calcular analíticamente). Usando la ecuación del cono de visibilidad, se tendrá que:

    $$\cos(\Gamma + h_{max}) = \frac{R_{\bigoplus}}{R_{\bigoplus} + h} \cos h_{max},$$

    donde h es la altitud del satélite y h_{max} la elevación máxima. Usando la fórmula del coseno de una suma y dividiendo por el coseno, se obtiene:

    $$\tan h_{max} = \frac{\cos\Gamma - \frac{R_{\bigoplus}}{R_{\bigoplus}+h}}{\operatorname{sen}\Gamma}.$$

    Si la órbita no se repite, entonces en algún momento pasa por todos los puntos de la Tierra cuya latitud sea inferior a su inclinación. Por tanto si $i \geq \phi$, donde ϕ es la latitud de la base, la máxima elevación será de 90°. Si no, la máxima elevación se encontrará justo cuando la traza pase a su máxima latitud (es decir, i) y justo por el meridiano de la base. En ese caso, es fácil ver que el ángulo Ψ que se calcula para determinar la elevación valdrá $\Psi = \phi - i$, y la elevación se encontrará de la fórmula:

    $$h_{max} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{(R_\oplus + h)\cos(\phi - i) - R_\oplus}{\sqrt{(R_\oplus + h)^2 + R_\oplus^2 - 2R_\oplus(R_\oplus + h)\cos(\phi - i)}}\right).$$

21. Escribir los elementos orbitales (en la época del 1 de Noviembre de 2008 a las 12:00, en la que se sabe que $GST = 14$ h 41 m 35,3 s) y dibujar aproximadamente la traza de un satélite polar y circular en órbita semisíncrona (la mitad del periodo de la Tierra) que pase por Sevilla ($\phi = 37{,}23$°N, $\lambda = 5{,}58$°O) el 21 de Noviembre a las 00:00 hora local (UT+1).

    Solución:

    Llamemos t_1 al 20 de Noviembre a las 23:00 UT y t_0 al 1 de Noviembre de 2008 a las 12:00. Calculamos $GST(t_0) = 220{,}397^\circ$. Propagando el GST, $\mathrm{GST}(t_1) = \mathrm{GST}(t_0) + \omega_{\bigoplus}(t_1 - t_0) = 44{,}583^\circ$

    En primer lugar del enunciado sabemos que $i = 90^\circ$ y $e = 0$. Por tanto ni ω ni θ tienen sentido y hay que usar u. También sabemos que $T = \frac{T_{\bigoplus}}{2}$; de ahí usando la fórmula del periodo calculamos $a = 26562$ km. Para forzar el paso por Sevilla en t_1, usamos la fórmula $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u$. Por tanto está claro que $u = \phi$ o $u = \pi - \phi$ y por tanto $u(t_1)$ ha de ser igual a 37,23° o a $180^\circ - 37{,}23^\circ = 142{,}77^\circ$. Elegimos la primera solución. Por otro lado $\cos\lambda_u = \frac{\cos u}{\cos\phi}$. Para la solución de u que hemos elegido esto implica $\lambda_u = 0^\circ$ (para la otra solución $\lambda_u = 180^\circ$). Por tanto $\mathrm{GST}(t_1) + \lambda(t_1) = \Omega$, de donde $\Omega = 39^\circ$.

    Para dibujar aproximadamente la traza, en primer lugar habrá que tener en cuenta que es retrógrada, ya que al ir siempre hacia el Norte o hacia el Sur, la única componente E-O vendrá dada por la rotación de la Tierra, que hará que aparentemente circule hacia el Este. Ciertamente, de fórmulas de teoría obtenemos $\dot{\lambda} = -\omega_{\bigoplus}$. Igualmente la velocidad $\dot{\phi} = \frac{\tan\phi}{\tan u}\omega_{SAT}$, donde $\omega_{SAT} = 2\omega_{\bigoplus}$ y por tanto $\dot{\phi} = \pm 2\dot{\lambda}$. Esto implica que la traza es una recta en proyección cilíndrica equidistante, y además la pendiente de la recta es 2, es decir, ”sube” el doble de lo que ”retrocede”, o lo que es lo mismo: cuando llegue desde el Ecuador hasta el Polo retrocederá en longitud la mitad de lo que avanza en latitud, es decir, 45°. Ya sólo necesitamos calcular un punto de corte. Calculemos por ejemplo por qué punto cruza el Ecuador antes de llegar a Sevilla; llamemos al instante de tiempo en el que sucede t_2. En t_2 , se tiene que $\phi = 0$, $u = 0$; también $\lambda_u = 0$ como antes. El tiempo se calcula de $u(t_1) - u(t_2) = \omega_{sat}(t_1 - t_2) = 2\omega_{\bigoplus}(t_1 - t_2)$, de donde $t_1 - t_2 = 4455{,}4$ s, es decir, cruzará el Ecuador 4455.4 segundos (o 1 hora, 14 minutos, 15.4 segundos) antes de t_1, es decir, el 20 de Noviembre a las 21:45:45 UT. A esa hora $GST(t_2) = GST(t_1) + \omega_{\bigoplus}(t_2 - t_1) = 25{,}986^\circ$. Puesto que $GST(t_2) + \lambda(t_2) = \Omega$, obtenemos que $\lambda(t_2) = 13{,}032^\circ$. Por tanto ya podemos dibujar la traza exactamente en una proyección cilíndrica equidistante, con la siguiente secuencia de segmentos (correspondientes a dos órbitas; a partir de ahí se repite):

    - Comienzo (nodo ascendente) en $(0, 13{,}032^\circ)$ hasta cruzar el Polo Norte en $(90^\circ, -31{,}969^\circ)$. En este segmento pasa por Sevilla.
    - Una vez cruzado el Polo Norte sigue desde $(90^\circ, 148{,}032^\circ)$ hasta el Polo Sur en $(-90^\circ, 58{,}032^\circ)$.
    - Cruce desde el Polo Sur en $(-90^\circ, -121{,}967^\circ)$ al Polo Norte en $(90^\circ, 148{,}032^\circ)$.
    - Cruce desde el Polo Norte en $(90^\circ, -31{,}969^\circ)$ al Polo Sur en $(-90^\circ, -121{,}967^\circ)$.

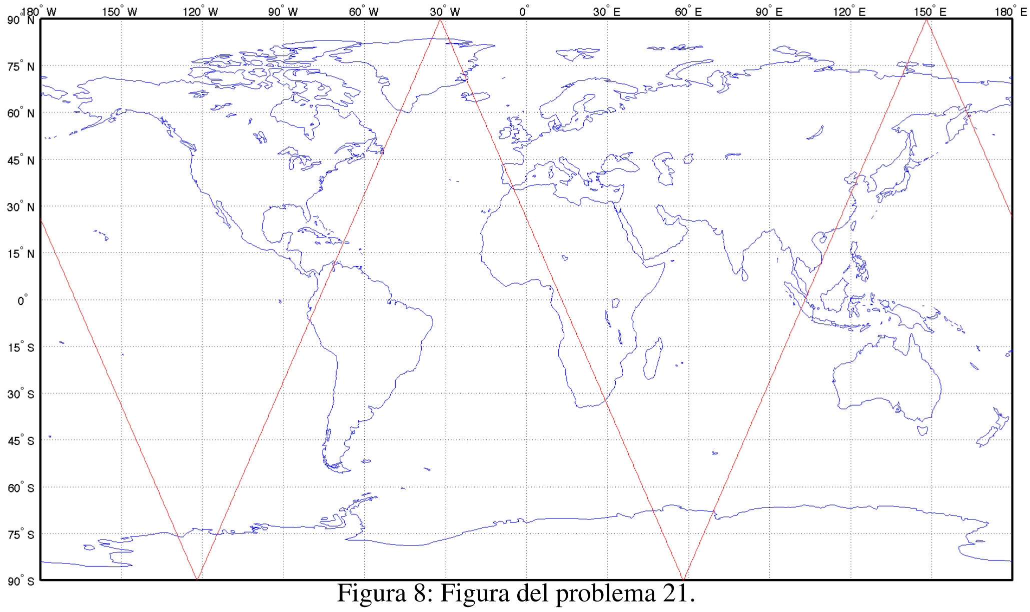


Figura 8: Figura del problema 21.

- Finalmente, vuelta desde el Polo Sur en $(-90^{\text{o}}, 58{,}032^{\text{o}})$ hasta el Ecuador en $(0, 13{,}032^{\text{o}})$.

La traza dibujada se muestra en la siguiente figura:

22. Estudiar las condiciones bajo las cuales la cobertura instrumental (dado un instrumento con α dado) y la cobertura total coinciden.

    Solución:

    La fórmula de la cobertura instrumental es $\Gamma_i = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{R_\oplus+h}{R_\oplus}\operatorname{sen}\alpha\right) - \alpha$. En el caso que $\frac{R_\oplus+h}{R_\oplus}\operatorname{sen}\alpha = 1$, entonces se tendrá que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus+h} = \cos\Gamma_g$, donde Γ_g es la cobertura geográfica. Por tanto $\alpha = 90^{\text{o}} - \Gamma_g$. Insertando este valor en la fórmula de cobertura instrumental y teniendo en cuenta que $\arcsin 1 = 90^{\text{o}}$, llegamos a $\Gamma_i = 90^{\text{o}} - (90^{\text{o}} - \Gamma_g) = \Gamma_g$. Por tanto la condición es efectivamente que se cumpla $\frac{R_\oplus+h}{R_\oplus}\operatorname{sen}\alpha = 1$, lo que se dará para una altura: $h = \frac{R_\oplus}{\operatorname{sen}\alpha} - R_\oplus = R_\oplus\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

23. La estrella Sirio tiene ascensión recta 6 horas y 45 minutos, y declinación -16 grados y 43 minutos. Sabiendo que un cierto día $\mathrm{GST}_0 = 0^{\text{o}}$, determinar la elevación y azimut de la estrella observada desde Sevilla ($\phi = 37{,}23^{\text{o}}$N, $\lambda = 5{,}58^{\text{o}}$O) a las 11 de la noche (UT). Otro cierto día, en el que $\mathrm{GST}_0 = 90^{\text{o}}$, se realiza una observación de Sirio a las 10:30 de la noche (UT) obteniéndose $h = 51{,}85^{\text{o}}$ y $\mathrm{Az} = 204{,}16^{\text{o}}$. Deducir la localización geográfica del observador.

    Solución: Usamos el triángulo esférico astronómico estudiado en teoría. En primer lugar calculamos el ángulo horario de Sirio como $H_S = \mathrm{GST}_0 + \omega_\oplus t + \lambda - \mathrm{AR}_S = 238{,}7^{\text{o}}$. Aplicamos la segunda fórmula $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\delta_S + \cos\phi\cos\delta_S\cos H_S$, obteniendo $h = -34{,}74^{\text{o}}$. Luego Sirio no es visible sobre el horizonte. También podríamos calcular el azimut de la primera fórmula, $\cos\mathrm{Az} = \frac{\operatorname{sen}\delta_S - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}h}{\cos\phi\cos h}$, de donde $\mathrm{Az} = 84{,}99^{\text{o}}$. Obsérvese que esta podría no ser la solución válida, esto se comprueba verificando la fórmula de senos $\frac{\operatorname{sen}\mathrm{Az}}{\cos\delta_S} = -\frac{\operatorname{sen} H_S}{\cos h}$. La fórmula confirma el valor obtenido y por tanto no hay que corregir el cuadrante: $\mathrm{Az} = 84{,}99^{\text{o}}$.

    Para el segundo problema, de la fórmula $\operatorname{sen}\delta_S = \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}h + \cos\phi\cos h\cos\mathrm{Az}$ obtenemos una ecuación del tipo:

    $$A\operatorname{sen}\phi + B\cos\phi = C,$$

    donde $C = \operatorname{sen}\delta_S = -0{,}2876$, $A = \operatorname{sen} h = 0{,}7864$, $B = \cos h\cos\mathrm{Az} = -0{,}5636$. Para resolver ϕ, usamos que $A\operatorname{sen}\phi + B\cos\phi = D\cos(\phi - \alpha)$ donde $D = \sqrt{A^2 + B^2} = 0{,}9675$ y $\alpha = \operatorname{arc\,cos}(B/D) = 125{,}63^{\text{o}}$.

    Por tanto la solución de la ecuación es $\phi = \pm\operatorname{arc\,cos}(C/D) + \alpha = 232{,}92^{\text{o}}, 18{,}33^{\text{o}}$. Sólo la segunda es una latitud válida. Luego $\phi = 18{,}33^{\text{o}}$ N. De la fórmula $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\delta_S + \cos\phi\cos\delta_S\cos H_S$ obtenemos $H_S = \pm 15{,}3^{\text{o}}$ y de la fórmula de senos, confirmamos que la solución válida es $H_S = 15{,}3^{\text{o}}$. Finalmente, puesto que $H_S = \mathrm{GST}_0 + \omega_\oplus t + \lambda - \mathrm{AR}_S$, obtenemos $\lambda = -311{,}86^{\text{o}} = 48{,}1^{\text{o}}$ E. Mirando en un mapa, la localización $(18{,}33^{\text{o}}$ N$, 48{,}1^{\text{o}}$ E$)$ está en la frontera entre Yemen y Arabia Saudí.

24. Calcular la forma de la traza de un satélite geoestacionario tal que su excentricidad e es pequeña, pero distinta de cero, y el resto de sus elementos orbitales tiene valores nominales para que el satélite se encuentre en la longitud λ_0.

    Solución:

Si la excentricidad e fuera cero, la traza del satélite se reduciría a un punto en la longitud cero (por los datos dados en el enunciado). Al aumentar la excentricidad no se modifica el periodo, con lo que la traza aún es una curva cerrada, y puesto que la inclinación es cero, dicha curva debe estar contenida en el Ecuador. Por tanto la traza será una recta, que por simetría estará centrada en la longitud λ_0 (que corresponderá tanto a apogeo como a perigeo).

Los puntos extremos de la traza corresponderán a los puntos de la órbita donde la traza pasa de directa a retrógrada. En dichos puntos se debe cumplir:

$$\frac{\cos i}{\cos^2 \phi} n \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} = \omega_\oplus,$$

y puesto que $i = \phi = 0^{\mathrm{o}}$, y $n = \omega_\oplus$, la condición determinará la anomalía verdadera θ^* donde cambia la traza:

$$\theta^* = \arccos \left(\frac{(1 - e^2)^{3/4} - 1}{e} \right).$$

Realmente se obtendrán dos soluciones, simétricas, correspondientes a los dos puntos extremos, θ^* y $-\theta^*$. Para obtener la longitud λ^* a la que corresponde este valor de θ, resolvemos la ecuación de Kepler y obtenemos el valor de M correspondiente a θ^*, que denominamos M^*.

Para obtener la longitud, planteamos la posición del satélite respecto al primer punto de Aries usando el elemento orbital $\varpi = \Omega + \omega$, ya que la órbita es ecuatorial. En todos los puntos λ por los que pase el satélite se debe tener que $GST_0 + \omega_\oplus t + \lambda = \varpi + \theta$. En particular, en el perigeo se tendrá que $GST_0 + \omega_\oplus t_p + \lambda_0 = \varpi$. En el punto correspondiente a θ^*:

$$GST_0 + \omega_\oplus (t_p + \frac{M^*}{n}) + \lambda^* = \varpi + \theta^*,$$

y usando la ecuación en el perigeo y $n = \omega_\oplus$ para eliminar datos desconocidos, se llega a:

$$\lambda^* = \lambda_0 + \theta^* - M^*.$$

El ancho total de la traza será $2(\theta^* - M^*)$.

Si e es muy pequeña, estos valores se pueden aproximar. Se tendrá que $1 + e \cos \theta^* = (1 - e^2)^{3/4} \approx 1 - \frac{3e^2}{4}$, por lo que $\cos \theta^* \approx -\frac{3e}{4}$, es decir, $\theta^* \approx \frac{\pi}{2} + \frac{3e}{4}$. Recordando el desarrollo en serie que relaciona el tiempo desde periapsis con la anomalía verdadera para valores pequeños de e, tenemos que

$$M^* \approx \theta^* - 2e \operatorname{sen} \theta^* \approx \frac{\pi}{2} + \frac{3e}{4} - 2e = \frac{\pi}{2} - \frac{5e}{4}.$$

Por tanto,

$$\lambda^* \approx \lambda_0 + \frac{\pi}{2} + \frac{3e}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{5e}{4} = \lambda_0 + 2e,$$

ecuación expresada en radianes. El ancho total de la traza será, en radianes, $4e$.

25. Sabiendo que el equinoccio de Primavera fue el 21 de Marzo a las 12:00 UT, calcular la posición del Sol en la esfera celeste ($\delta_\odot$, $\mathrm{AR}_\odot$) el 11 de Noviembre a las 12:00 UT de ese mismo año (suponer para simplificar el cálculo que la órbita de la Tierra es circular). Dado un satélite cuyos elementos orbitales (en la época del 21 de Marzo a las 12:00 UT) son $h_p = 600$ km, $h_a = 800$ km, $i = 25^{\mathrm{o}}$, $\omega = 60^{\mathrm{o}}$, $\Omega = 45^{\mathrm{o}}$, $\theta = 310^{\mathrm{o}}$, encontrar su posición en la esfera celeste el 11 de Noviembre a las 12:00 UT y determinar si está eclipsado o no. Repetir el cálculo para la auténtica excentricidad de la órbita de la Tierra.

Solución:

En primer lugar necesitamos conocer los elementos orbitales del Sol. Asumiendo una órbita circular, en la época del 21 de Marzo a las 12:00 UT (Equinoccio de Primavera), éstos serán: $\Omega = 0^{\mathrm{o}}$ (por definición), $i = \epsilon = 23{,}5^{\mathrm{o}}$ (la inclinación de la eclíptica), $a = 1$ AU, $e = 0$, $u = 0$ (ni ω ni θ están definidos en órbitas circulares). El 11 de Noviembre del mismo año a la misma hora habrán transcurrido exactamente 235 días (por simple cuenta de días; también se podrían emplear días julianos si nos dijeran el año). Por tanto $u = 360^{\mathrm{o}} \frac{235 \text{ dias}}{365{,}25 \text{ dias}} = 231{,}62^{\mathrm{o}}$. Para calcular $\delta_\odot$ y $\mathrm{AR}_\odot$ usamos la trigonometría esférica, con un triángulo limitado por el Ecuador, la eclíptica y el meridiano en el que se encuentra el Sol. Se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \delta_\odot &= \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \epsilon, \\ \cos \mathrm{AR}_\odot &= \frac{\cos u}{\cos \delta_\odot}, \end{aligned}$$

y de éstas fórmulas se calcula $\delta_\odot = -18{,}2156^{\mathrm{o}}$ y $\mathrm{AR}_\odot = 229{,}19^{\mathrm{o}}$ (otra posible solución es $130{,}981^{\mathrm{o}}$ pero no es consistente con el valor de u).

En segundo lugar encontremos la posición del satélite en la esfera celeste. Para ello escribamos todos sus elementos orbitales. Recordemos que $r_p = R_\oplus + h_p$ y $r_a = R_\oplus + h_a$, y además $a = \frac{r_a + r_p}{2}$ y $e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$. Se llega a

$a = 7078{,}14$ km y $e = 0{,}0141$. El periodo del satélite será entonces $T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu_\oplus} = 5962{,}4$ s. El tiempo transcurrido es $t = 235$ dias $= 20304000$ s. Se puede escribir $t = 3426 \cdot T + 211{,}3294$ s. Por tanto en 235 días el satélite habrá dado 3426 vueltas y quedarán solamente $211{,}3294$ s que propagar desde la posición inicial $\theta = 310^{\circ}$. Puesto que esta posición es más avanzada que el apogeo, podemos calcular el tiempo que tardará el satélite en llegar al perigeo, que es igual que el tiempo que el satélite tardaría en llegar desde el perigeo a la posición $360 - \theta = 50^{\circ}$. A este ángulo corresponde $E = 0{,}8619$ rad, una $M = 0{,}8512$ rad y finalmente un $\Delta t = 802{,}8312$ s. Propagando $211{,}3294$ s y teniendo en cuenta que es un avance hacia el perigeo, el Δt final será $\Delta t_f = 802{,}8312 - 211{,}3294 = 591{,}5018$ s. A este Δt_f corresponde una $M_f = 0{,}6271$ rad. Resolviendo la ecuación de Kepler, en una única iteración llegamos a $E_f = 0{,}6355$ rad con un error muy pequeño. A este valor corresponde una $\theta = 36{,}8947^{\circ}$, y esto será lo que falta para llegar al perigeo; por tanto $\theta_f = 360^{\circ} - \theta = 323{,}1053^{\circ}$. Usando ahora un triángulo esférico limitado por el Ecuador, la proyección de la órbita sobre la esfera celeste y el meridiano en el que se encuentra el satélite, se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\delta_{SAT} &= \operatorname{sen}u \operatorname{sen}i, \\ \cos\lambda_u &= \frac{\cos u}{\cos\delta_{SAT}}, \end{aligned}$$

donde $u = \omega + \theta_f = 23{,}1053^{\circ}$ y $\lambda_u = \mathrm{AR}_{SAT} - \Omega$. De éstas fórmulas se calcula $\delta_{SAT} = 9{,}5436^{\circ}$, $\lambda_u = 21{,}14^{\circ}$ (otra posible solución es $338{,}86^{\circ}$ pero no es consistente con el valor de u) y $\mathrm{AR}_{SAT} = 66{,}14^{\circ}$.

Para finalizar, vamos a determinar si está eclipsado o no. La circunferencia O de eclipse en la esfera celeste a la altura del satélite vendrá dada por su centro, que será el punto antipodal del Sol, y el radio (altitud) del satélite $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = 6997{,}7$ km. Las fórmulas que determinan estos valores son:

$$\delta_O = -\delta_\odot = 18{,}2156^{\circ}, \qquad \mathrm{AR}_O = \mathrm{AR}_\odot + 180^{\circ} = 49{,}1866^{\circ}, \qquad \Gamma_O = \arcsin\left(\frac{R_\oplus}{r}\right) = 65{,}7089^{\circ}.$$

Calculemos el intervalo de AR que ocupa la circunferencia a la declinación del satélite. Usando la fórmula

$$\cos\Delta\mathrm{AR} = \frac{\cos\Gamma_O - \operatorname{sen}\delta_O \operatorname{sen}\delta}{\cos\delta_O \cos\delta_{SAT}},$$

obtenemos $\Delta\mathrm{AR} = 67{,}4299^{\circ}$. Por tanto el satélite estará eclipsado si su AR está incluida en el intervalor $[\mathrm{AR}_O - \Delta\mathrm{AR}, \mathrm{AR}_O + \Delta\mathrm{AR}] = [-18{,}2433^{\circ}, 116{,}6165^{\circ}]$. Puesto que sí está en el intervalo, el satélite estará eclipsado.

Repetimos el problema con la auténtica excentricidad de la Tierra. Los elementos orbitales de la Tierra son: $\Omega = 0^{\circ}$, $i = \epsilon = 23{,}5^{\circ}$ (la inclinación de la eclíptica), $a = 1$ AU, $e = e_\oplus = 0{,}0167$, $\omega_\oplus = 114,2^{\circ}$ y en el Equinoccio de Primavera ($u_\oplus = 180^{\circ}$), $\theta_\Upsilon = 180^{\circ} - \omega_\oplus = 65,8^{\circ}$. Para deducir el tiempo transcurrido entre el perihelio y el Equinoccio resolvemos la ecuación de Kepler. Encontramos $E = 64{,}93^{\circ}$ y por tanto $M = 64{,}06^{\circ}$, luego $\Delta T_\Upsilon = 65$ días. Por tanto entre el instante pedido y el perihelio habrán transcurrido $\Delta T_\oplus = 235 + 65 = 300$ días. Eso equivale a $M_\oplus = 295{,}68^{\circ}$ y resolviendo la ecuación de Kepler en una iteración $E_\oplus = 294{,}81^{\circ}$. Luego $\theta_\oplus = 293{,}94^{\circ}$ y llegamos a $u_\oplus = \omega_\oplus + \theta_\oplus = 48{,}14^{\circ}$. Finalmente $u_\odot = 180 + u_\oplus = 228{,}14^{\circ}$. Por tanto los valores de declinación y ascensión recta del Sol cambian a $\delta_\odot = -17{,}28^{\circ}$ y $\mathrm{AR}_\odot = 225{,}67^{\circ}$. Volviendo a calcular la circunferencia de eclipse con estos valores, observamos que sigue eclipsado.

Problemas y cuestiones de los Temas 6 y 7

(problemas o partes de problema marcados con *: para ampliar, con †:problema teórico complementario a teoría)

1. Demostrar que la Tierra, vista desde GEO, presenta la forma de un disco que ocupa aproximadamente 17º en el horizonte.

2. Demostrar que el eclipse máximo de un satélite geoestacionario se produce en los equinoccios. Demostrar también que dicho eclipse dura aproximadamente 70 minutos, y que la "temporada de eclipses" comienza aproximadamente 22 días antes del equinoccio y finaliza 22 días después. ¿Cuánto duraría un eclipse que sucediera justo 12 días después de un equinoccio? Suponer, para simplificar, que la órbita de la Tierra es circular.

3. Diseñar la órbita de un satélite heliosíncrono, circular, de 1000 km de altitud, que pase por Sevilla ($\phi = 37{,}23^{\circ}$N, $\lambda = 5{,}58^{\circ}$O) a las 17:00 hora local (UT+1) el 15 de Noviembre de 2008. Dar los elementos del satélite en la época del 1 de Noviembre de 2008 a las 12:00, sabiendo que en ese instante, $GST = 14$ h 41 m 35,3 s. Emplear en primer lugar el propagador de los dos cuerpos (sin perturbaciones) y luego utilizar el propagador J2 medio.

4. (†) ¿Cuántos satélites geoestacionarios son necesarios para cubrir la superficie de la Tierra? (excluyendo los polos) ¿En qué configuración?

5. (†) Escribir las fórmulas para la maniobra de cambio de perigeo desde un perigeo inicial r_{pi} a uno final r_{pf}, para una órbita de apogeo r_a.

6. Calcular ψ y $\Delta V/V_i$ para el cambio de la línea de ápsides de una órbita de excentricidad $e = 0{,}5$, cuando el cambio del argumento del perigeo es $\Delta\omega = 30^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}$.

7. Se decide desorbitar (arrojar a la atmósfera para que se volatilice en la reentrada) un satélite en una órbita circular a 1000 km de altitud. Para ello se disminuye el perigeo a una altitud de 100 km donde los efectos atmosféricos finalizarán el trabajo. Si la masa del satélite sin combustible es de 500 kg, ¿cuánto combustible con $I_{\mathrm{SP}} = 200$ s es necesario haber almacenado para completar la maniobra?

8. A una órbita inicial ($a_i = 2$ UD$, e_i = 0{,}1, \omega_i = 0$) se aplica un $\Delta V = 0{,}2$ UV con ángulo $\psi = 45^{\circ}$ en $\theta = 90^{\circ}$. Describir la órbita alcanzada.

9. Desde la órbita inicial del anterior problema se quiere alcanzar una órbita final ($a_f = 1{,}5$ UD$, e_i = 0{,}2, \omega_i = 20^{\circ}$). Diseñar una maniobra de un impulso para realizar el cambio. Repetir con $a_f = 1{,}9$ UD.

10. Dada una órbita circular de radio 2 UD:

    a) Para transferir a un radio 5 UD comparar ($\Delta V_{\mathrm{TRANS}}, T_{\mathrm{TRANS}}$) para la transferencia de Hohmann y una transferencia "rápida" (tangencial sólo en el radio inicial) tal que $a_t = 2a_{\mathrm{HOHMANN}}$.

    b) Para una transferencia a una órbita de radio 25 UD comparar ($\Delta V_{\mathrm{TRANS}}, T_{\mathrm{TRANS}}$) para la transferencia de Hohmann, una transferencia biparabólica y una bielíptica con radio exterior 50 UD.

11. (†) Obtener razonadamente la expresión para ΔV y la latitud ϕ para la maniobra genérica de cambio de plano orbital (Ω e i) de una órbita circular, manteniendo constantes el resto de elementos orbitales.

12. (*) Demostrar la optimalidad (mínimo ΔV) de la transferencia de Hohmann, dentro del conjunto de maniobras de dos impulsos entre órbitas circulares.

13. Se lanza un satélite (que se pretende situar en órbita ecuatorial) desde Cabo Kennedy situándose en una órbita de aparcamiento en LEO a 296 km de altitud. Elegir razonadamente un azimut de lanzamiento. Se desea alcanzar una órbita ecuatorial a una altitud de 741 km. Describir la maniobra necesaria, realizando una transferencia de Hohmann con cambio de plano en el segundo impulso.

14. Comparar, para una órbita circular de altitud $h = 1000$ km, una maniobra de cambio de inclinación Δi de un impulso con la maniobra restringida (óptima) de tres impulsos, para $\Delta i = 15^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 80^{\circ}$.

15. Un satélite terrestre tiene una órbita inicial definida por $a_1 = 5$ UD y $e_1 = 0{,}7$, y se pretende llevar a una órbita definida por $a_2 = 10$ UD y $e_2 = 0{,}3$, sin que importe el cambio de la línea de ápsides. Considerar inicialmente que el impulso se realiza en el apogeo, y calcular el combustible consumido si $I_{\mathrm{SP}} = 200$ s y $m_0 = 1000$ kg. Para ampliar: Si el punto de aplicación del impulso es arbitrario, ¿qué posibles maniobras de un impulso se pueden realizar para llevar a cabo el cambio de órbita? Plantear el problema de optimización.

16. Estudiar la puesta en órbita de un satélite geoestacionario desde Cabo Kennedy, supuesta una órbita de aparcamiento de altitud 300 km, y realizando el cambio de plano en el segundo impulso de Hohmann. Estudiar igualmente la puesta en órbita de un satélite Molniya desde Baikonur, con una órbita de aparcamiento de la misma altitud.

17. Estudiar una transferencia tipo Hohmann entre dos órbitas coplanarias elípticas definidas por (a_i, e_i) y (a_f, e_f) con la línea de ápsides coincidente (en dirección y orientación), y comprobar la regla de optimalidad (elegir siempre el mayor apogeo) usando dos casos particulares: primero para (2,0.2) y (4,0.5), y luego para (4,0.7), (6,0.1). Si las órbitas cortan en un punto (que no sea ni perigeo ni apogeo), comparar la maniobra de un impulso para cambiar la órbita con la tipo Hohmann.

18. (*) Plantear el problema de optimización para la maniobra de Hohmann con cambio de plano Δi repartido entre los dos impulsos.

19. Diseñar los elementos orbitales de una constelación tipo Walker 15/3/2 de inclinación 65 grados, altitud $h = 20000$ km, de forma que el primer satélite tenga $\Omega = u = 0^{\circ}$.

20. Se tiene un satélite en una órbita geoestacionaria a una longitud geográfica de $25^{\circ}W$. Describir la maniobra necesaria para ubicar dicho satélite en una longitud de $10^{\circ}E$. Si el combustible no permite realizar un ΔV superior a $0{,}1$ km/s, ¿es posible realizar la maniobra? En caso afirmativo, describirla.

21. Un satélite heliosíncrono en una órbita circular de 500 kilómetros de altitud pasa por el Ecuador, cuando viaja de Sur a Norte, a las 07:00 hora solar media. ¿A qué hora solar media pasa por la latitud 30° cuando viaja **de Norte a Sur**? Realizar las simplificaciones que se crean necesarias, detallándolas y justificándolas.

22. (†) Calcular la altitud de un satélite geoestacionario teniendo en cuenta la perturbación secular debida al J_2.

23. (†) Demostrar la fórmula que aproxima la excentricidad para una "frozen orbit" de altitud constante.

24. (†) Dada una órbita no ecuatorial, buscar los elementos orbitales que permiten, con la menor excentricidad posible, que un satélite en dicha órbita se encuentre una fracción f de su periodo (superior a la mitad) en el hemisferio Norte. ¿Qué elementos orbitales habrá que fijar y a qué valores?

25. (†) Comparar la maniobra de cambio de argumento del perigeo $\Delta\omega$ de un impulso con la misma maniobra realizada con dos impulsos. ¿Cuándo será más costosa una que otra?

Solución a los problemas y cuestiones de los Temas 6 y 7

1. Demostrar que la Tierra, vista desde GEO, presenta la forma de un disco que ocupa aproximadamente 17º en el horizonte.

   Solución:

   Teniendo en cuenta que $r_{\text{GEO}} = \left(\left(\frac{T_\oplus}{2\pi} \right)^2 \mu_\oplus \right)^{1/3} = 42164$ km, y considerando un cono recto centrado en el satélite y tangente a la Tierra, el ángulo de dicho cono será $\alpha = \operatorname{arc\,sen} \frac{R_\oplus}{r} = 8{,}7^\text{o}$. El arco distendido por la Tierra será el doble de dicho ángulo, es decir $17{,}4^\text{o}$.

2. Demostrar que el eclipse máximo de un satélite geoestacionario se produce en los equinoccios. Demostrar también que dicho eclipse dura aproximadamente 70 minutos, y que la "temporada de eclipses" comienza aproximadamente 22 días antes del equinoccio y finaliza 22 días después. ¿Cuánto duraría un eclipse que sucediera justo 12 días después de un equinoccio? Suponer, para simplificar, que la órbita de la Tierra es circular.

   Solución:

   Puesto que un satélite geostacionario se encuentra en el plano del Ecuador y a altura constante, la circunferencia máxima de eclipse que habrá de atravesar se dará cuando el centro de dicha circunferencia esté también en el Ecuador; esto sucederá cuando el propio Sol se encuentre en el plano del Ecuador, lo que sólo sucede en los equinoccios.

   El intervalo de ascensión recta que el satélite tiene que recorrer será dos veces el dado por la fórmula

$$\cos \Delta \text{AR} = \frac{\cos \Gamma_O - \operatorname{sen} \delta_O \operatorname{sen} \delta_{SAT}}{\cos \delta_O \cos \delta_{SAT}},$$

   donde hay que sustituir $\delta_{SAT} = 0$ y

$$\delta_O = -\delta_\odot, \qquad \Gamma_O = \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{R_\oplus}{r_{\text{GEO}}} \right) = 8{,}7^\text{o},$$

   es decir la fórmula queda

$$\cos \Delta \text{AR} = \frac{\cos 8{,}7^\text{o}}{\cos \delta_\odot}.$$

   Cuando el satélite está en el Ecuador, $\delta_{\text{SAT}} = 0^\text{o}$, y por tanto $\Delta\text{AR} = 8{,}7^\text{o}$. El ángulo a recorrer será $\alpha = 2 \cdot \Delta\text{AR} = 17{,}4^\text{o}$ y puesto que el satélite se mueve en el plano del Ecuador y su órbita es circular, se tiene que $t_{\text{ECLIPSE}} = \frac{\alpha}{\omega_{\text{SAT}}} = \frac{\alpha}{\omega_\oplus} = 4164{,}8 \text{ s} = 69{,}4 \text{ min}$.

   En el límite, el último momento en el que se pueden producir eclipses es cuando $\Delta\text{AR} = 0$. En tal caso, $\delta_\odot = \pm 8{,}7^\text{o}$. Recordemos que $\operatorname{sen} \delta_\odot = \operatorname{sen} \epsilon \operatorname{sen} u$, donde u es el ángulo recorrido por el Sol y $\epsilon = 23{,}5^\text{o}$ la inclinación de la eclíptica. Para este valor de $\delta_\odot$, $u = \pm 22{,}294^\text{o}$ y puesto que el desplazamiento de u en d días (supuesta la órbita de la Tierra circular) viene dado por $u = 360^\text{o} \frac{d}{365{,}25}$, obtenemos $d = \pm 22{,}62$ dias. Por tanto el último eclipse es posible 22 días antes o después del equinoccio.

   Finalmente, justo doce días después del equinoccio tenemos usando las fórmulas anteriores que $u = 11{,}83^\text{o}$, por tanto $\delta_\odot = 4{,}688^\text{o}$ y $\Delta\text{AR} = 7{,}3377^\text{o}$, de donde $t_{\text{ECLIPSE}} = \frac{2 \cdot \Delta\text{AR}}{\omega_\oplus} = 3512{,}5 \text{ s} = 58{,}54 \text{ min}$.

3. Diseñar la órbita de un satélite heliosíncrono, circular, de 1000 km de altitud, que pase por Sevilla ($\phi = 37{,}23^\text{o}$N, $\lambda = 5{,}58^\text{o}$O) a las 17:00 hora local (UT+1) el 15 de Noviembre de 2008. Dar los elementos del satélite en la época del 1 de Noviembre de 2008 a las 12:00, sabiendo que en ese instante, $GST = 14$ h 41 m 35,3 s. Emplear en primer lugar el propagador de los dos cuerpos (sin perturbaciones) y luego utilizar el propagador J2 medio.

   Solución:

   En primer lugar, sabemos que $e = 0$ y que $a = h + R_\oplus = 7378{,}14$ km. Por otro lado aplicando la fórmula que relaciona la inclinación y la altitud para satélites heliosíncronos circulares, obtenemos $i = 99{,}48^\text{o}$, que es una órbita retrógrada. Sólo nos falta calcular u y Ω.

   Para ello llamemos t_0 al instante 1 de Noviembre de 2008 a las 12:00 y t_1 al 15 de Noviembre de 2008 a las 16:00 UT. Obsérvese que $\text{GST}(t_0) = 220{,}397^\text{o}$ y que $\text{GST}(t_1) = \text{GST}(t_0) + \omega_\oplus (t_1 - t_0) = 294{,}3658^\text{o}$.

   Usando un triángulo esférico limitado por el meridiano de Sevilla, el Ecuador, y la proyección de la órbita, tenemos que $\operatorname{sen} \phi(t_1) = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u(t_1)$, de donde $u(t_1) = 37{,}84^\text{o}$. Podemos calcular $u(t_0) = u(t_1) + n(t_0 - t_1) = 13{,}97^\text{o}$, y este es el valor de u en la época.

Finalmente calculamos λ_u de la expresión $\cos u(t_1) = \cos\lambda_u(t_1)\cos\phi(t_1)$, de donde $\lambda_u(t_1) = \pm 7{,}29^{\circ}$. Puesto que la órbita es retrógrada, cogemos la solución negativa y por tanto $\lambda_u(t_1) = -7{,}29^{\circ}$. Además se tiene que $GST(t_1) + \lambda(t_1) = \Omega + \lambda_u(t_1)$. Despejando $\Omega = 296{,}08^{\circ}$.

Para resolver el problema utilizando el propagador J2 medio, observamos en primer lugar que a, e e i no cambian. Sin embargo, si es necesario obtener u y Ω en la época. Se tiene que para el propagador J2 medio y con $e = 0$, $\dot{u} = \dot{M} + \dot{\omega} = n(1 + \frac{3}{4}\frac{R_\oplus^2}{a^2}J_2(1 + 5\cos^2 i - 3\,\mathrm{sen}^2\, i))$. Por tanto, $u(t_0) = u(t_1) + \dot{u}(t_0 - t_1) = 89{,}61^{\circ}$ y $\Omega(t_0) = \Omega(t_1) + \dot{\Omega}(t_0 - t_1) = 282{,}1^{\circ}$

4. ¿Cuántos satélites geoestacionarios son necesarios para cubrir la superficie de la Tierra? (excluyendo los polos) ¿En qué configuración?

   Solución:

   Puesto que el radio angular de la circunferencia de cobertura es de aproximadamente $81{,}3^{\circ}$, el intervalo de longitudes cubiertas en el Ecuador (ancho de huella) será de $162{,}6^{\circ}$, y por tanto para cubrir los 360 grados será necesario emplear 3 satélites. La configuración para maximizar la cobertura y minimizar el solape es la de la figura, un triángulo equilátero.

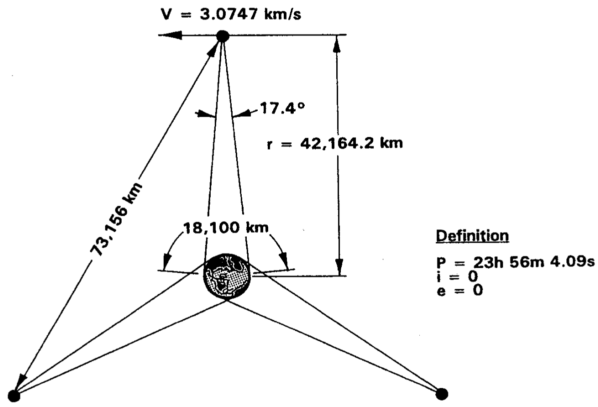


Fig. 5.1 Geosynchronous orbit.

Figura 1: Figura del problema 4.

5. Escribir las fórmulas para la maniobra de cambio de perigeo desde un perigeo inicial r_{pi} a uno final r_{pf}, para una órbita de apogeo r_a.

   Solución:

   La maniobra para cambiar el perigeo se debe realizar en el apogeo, aplicando un ΔV en la dirección del movimiento si se desea subir el perigeo, o contrario al movimiento si se desea bajar. Las velocidades inicial y final son:

$$V_i = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_a} - \frac{\mu_\oplus}{a_i}} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_a} - \frac{2\mu_\oplus}{r_a + r_{pi}}},$$

$$V_f = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_a} - \frac{\mu_\oplus}{a_f}} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_a} - \frac{2\mu_\oplus}{r_a + r_{pf}}},$$

   y por tanto, simplificando:

$$\Delta V = |V_f - V_i| = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_a}}\left|\sqrt{\frac{r_{pf}}{r_a + r_{pf}}} - \sqrt{\frac{r_{pi}}{r_a + r_{pi}}}\right|.$$

   Otra forma de escribir esta fórmula es teniendo en cuenta que $r_p = a(1-e) = \frac{r_p + r_a}{2}(1-e)$, por tanto:

$$\Delta V = |V_f - V_i| = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_a}}\left|\sqrt{1-e_f} - \sqrt{1-e_i}\right|.$$

6. Calcular ψ y $\Delta V/V_i$ para el cambio de la línea de ápsides de una órbita de excentricidad $e = 0{,}5$, cuando el cambio del argumento del perigeo es $\Delta\omega = 30^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}$.

   Solución:

   En todos los casos, $\Delta V/V_i = 2\,\mathrm{sen}\,\varphi/2$ y $\psi = 90 + \varphi/2$, donde $\varphi = 2\gamma_i$ y $\tan\gamma_i = \frac{e\,\mathrm{sen}\,\Delta\omega/2}{1 + e\cos\Delta\omega/2}$. Escribimos una tabla con los resultados:

Cuadro 1: Resultados del problema 6.

$\Delta\omega$ (º)	γ_i (º)	φ (º)	ψ (º)	$\Delta V/V_i$
30	4.99	9.98	94.99	0.1739
45	7.46	14.91	97.46	0.2596
90	14.64	29.28	104.64	0.5054
180	26.57	53. 13	116.57	0.8944

7. Se decide desorbitar (arrojar a la atmósfera para que se volatilice en la reentrada) un satélite en una órbita circular a 1000 km de altitud. Para ello se disminuye el perigeo a una altitud de 100 km donde los efectos atmosféricos finalizarán el trabajo. Si la masa del satélite sin combustible es de 500 kg, ¿cuánto combustible con $I_{\mathrm{SP}} = 200$ s es necesario haber almacenado para completar la maniobra?

   Solución:

   En primer lugar encontremos el ΔV de la maniobra. Puesto que la órbita inicial es circular, su velocidad V_i (a una altitud de 1000 km) es $V_i = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R_\oplus + h}} = 7{,}35$ km/s. La órbita final tiene un semieje mayor $a = \frac{r_a + r_p}{2} = 6928{,}14$ km, y puesto que la maniobra se efectúa en el apogeo, $V_f = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{R_\oplus + h} - \frac{\mu_\oplus}{a}} = 7{,}11$ km/s. Por tanto $\Delta V = |V_f - V_i| = 0{,}25$ km/s. Por otro lado nos dicen que $m_0 = 500$ kg y $V_e = I_{\mathrm{SP}} g = 1962$ m/s $= 1{,}962$ km/s. Por tanto,

$$m_p = m_0 \left(\mathrm{e}^{\Delta V/V_e} - 1 \right) = 65{,}84 \text{ kg}.$$

8. A una órbita inicial ($a_i = 2$ UD$, e_i = 0{,}1, \omega_i = 0^{\circ}$) se aplica un $\Delta V = 0{,}2$ UV con ángulo $\psi = 45^{\circ}$ en $\theta = 90^{\circ}$. Describir la órbita alcanzada.

   Solución:

   En primer lugar, de la ecuación de la órbita $r_i = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i\cos\theta_i}$ hallamos el radio en el que se realiza el impulso, que será $r_i = 1{,}98$ UD. Puesto que el radio no puede cambiar instantáneamente también se tiene $r_f = 1{,}98$ UD. De la ecuación de las fuerzas vivas $v = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r} - \frac{\mu_\oplus}{a}}$ hallamos $v_i = 0{,}7142$ UV. También podemos hallar el ángulo de trayectoria inicial de la ecuación $\tan\gamma = \frac{e \operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}$, obteniendo $\gamma_i = 5{,}71^{\circ}$. Llegados a este punto, se puede optar por distintos métodos de resolución del problema, usando fasores (como se muestra al final del ejercicio) o por trigonometría, como se procede a continuación.

   Para hallar la velocidad final usamos el teorema del coseno, y teniendo en cuenta (ver figura) que el ángulo opuesto a v_f será $180 - \psi = 135^{\circ}$, se tiene que $v_f = \sqrt{v_i^2 + \Delta V^2 - 2 v_i \Delta V \cos(135^{\circ})} = 0{,}8672$ UV. Por otro lado usando el teorema del seno (y puesto que $\operatorname{sen}(180 - \psi) = \operatorname{sen}\psi$) se tiene que $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\Delta V}{v_f} \operatorname{sen}\psi$ de donde $\varphi = 9{,}3851^{\circ}$. De la ecuación $v = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r} - \frac{\mu_\oplus}{a}}$ podemos despejar a_f en función de r_f y v_f, y obtenemos $a_f = 3{,}8761$ UD. Puesto que $\varphi = \gamma_i - \gamma_f$, obtenemos que $\gamma_f = -3{,}6745^{\circ}$. Para encontrar la excentricidad usamos $h_f = v_f r_f \cos\gamma_f = \sqrt{a_f(1-e_f^2)\mu_\oplus}$, de donde despejando encontramos $e_f = 0{,}4924$. De la ecuación de la cónica $r_f = \frac{a_f(1-e_f^2)}{1+e_f\cos(\theta_f)}$ encontramos el valor de $\theta_f = 348{,}8463^{\circ}$ (hay que coger la solución negativa puesto que $\gamma_f < 0$) y finalmente puesto que, como se ve en la figura, $\omega_i + \theta_i = \omega_f + \theta_f$, encontramos $\omega_f = 101{,}1537^{\circ}$.

   Otra forma de resolver el problema es mediante fasores, el cual resulta ser un método más rápido y sencillo, disminuyendo el riesgo de fallo. Este permite girar fácilmente los vectores.

   Para hallar la velocidad final, y teniendo en cuenta la definición de los ángulos mostrados en la figura 3 (considerándolos todos en grados), se tiene que $v_f\underline{/\ \varphi} = \Delta V\underline{/\psi} + v_i\underline{/0^{\circ}} = 0{,}8672 \text{ UV}\underline{/9{,}3851^{\circ}}$. Quedando invariantes el resto de procedimientos y cálculos realizados anteriormente para la resolución del ejercicio.

9. Desde la órbita inicial del anterior problema se quiere alcanzar una órbita final ($a_f = 1{,}5$ UD$, e_f = 0{,}2, \omega_f = 20^{\circ}$). Diseñar una maniobra de un impulso para realizar el cambio. Repetir con $a_f = 1{,}9$ UD.

   Solución:

   La órbita del anterior problema tiene elementos ($a_i = 2$ UD$, e_i = 0{,}1, \omega_i = 0^{\circ}$). Eso significa que el radio de perigeo inicial es $r_{pi} = a_i(1 - e_i) = 1{,}8$ UD. Del mismo modo el radio de apogeo final es $r_{af} = a_f(1 + e_f) = 1{,}8$ UD. Puesto que apogeo final y perigeo inicial coinciden, pero $\Delta\omega = \omega_f - \omega_i = 20^{\circ}$, eso implica que las dos órbitas no se cortan (sólo lo harían si $\Delta\omega = 180^{\circ}$), luego no es posible pasar de una a otra con un solo impulso.

   Para el segundo caso $r_{af} = 2{,}28$ UD y $r_{pf} = 1{,}52$ UD, mientras que $r_{pi} = 1{,}8$ UD y $r_{ai} = 2{,}2$ UD, con lo que necesariamente ambas órbitas deben cortarse (en dos puntos). Calculemos ambos puntos y las dos maniobras resultantes; se usará la de menor ΔV. Para calcular el punto de corte entre dos cónicas cuyas líneas de ápsides no

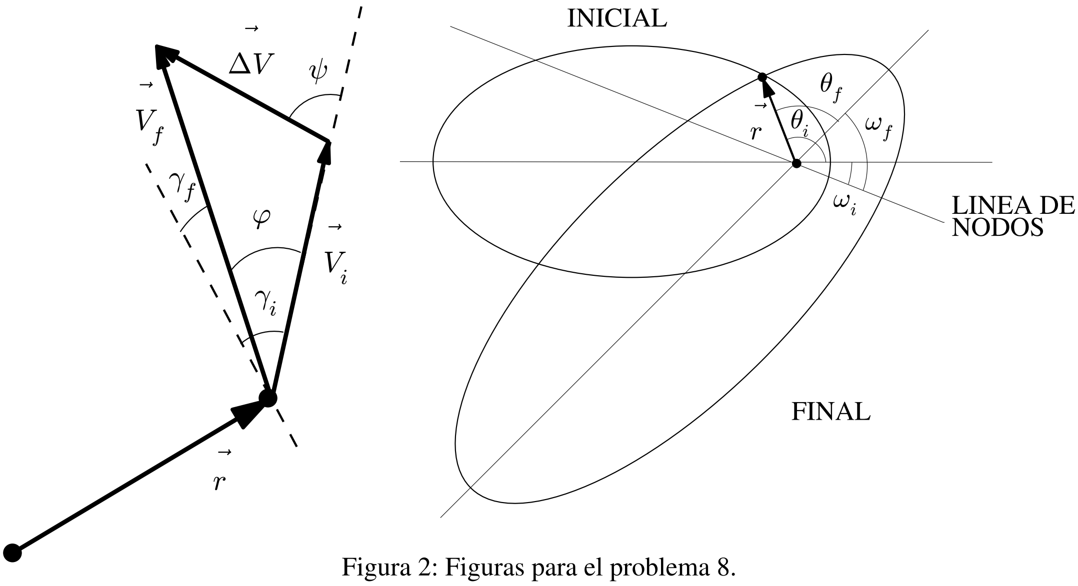


Figura 2: Figuras para el problema 8.

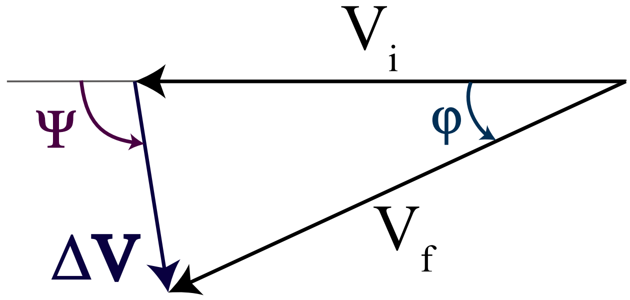


Figura 3: Triángulo asociado a la resolución del problema 8 por fasores.

son coincidentes, hay que expresar la anomalía verdadera de una en función de la otra e igualar las ecuaciones de las cónicas, es decir:

$$r_i = r_f \Rightarrow \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i\cos\theta_i} = \frac{a_f(1-e_f^2)}{1+e_f\cos\theta_f}$$

Puesto que se sabe que $\omega_i+\theta_i = \omega_f+\theta_f$ (ver figura del problema anterior), podemos escribir $\theta_i = \theta_f+(\omega_f-\omega_i) = \theta_f + \Delta\omega$. Por tanto hay que resolver la siguiente ecuación en θ_f:

$$\frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i\cos(\theta_f+\Delta\omega)} = \frac{a_f(1-e_f^2)}{1+e_f\cos\theta_f}$$

Usando la fórmula del coseno de una suma, podemos llegar a:

$$a_i(1-e_i^2)(1+e_f\cos\theta_f) = a_f(1-e_f^2)\left(1+e_i\cos\theta_f\cos\Delta\omega - e_i\,\mathrm{sen}\,\theta_f\,\mathrm{sen}\,\Delta\omega\right)$$

Lo que se puede escribir como:

$$\left[a_i(1-e_i^2)-a_f(1-e_f^2)\right]+\cos\theta_f\left[e_fa_i(1-e_i^2)-e_ia_f(1-e_f^2)\cos\Delta\omega\right] = -\left[e_ia_f(1-e_f^2)\,\mathrm{sen}\,\Delta\omega\right]\mathrm{sen}\,\theta_f$$

o definiendo:

$$\begin{aligned} A &= -e_ia_f(1-e_f^2)\,\mathrm{sen}\,\Delta\omega = -0{,}0624,\\ B &= -\left(e_fa_i(1-e_i^2)-e_ia_f(1-e_f^2)\cos\Delta\omega\right) = -0{,}2246,\\ C &= a_i(1-e_i^2)-a_f(1-e_f^2) = 0{,}156, \end{aligned}$$

se puede escribir como

$$A\,\mathrm{sen}\,\theta_f + B\cos\theta_f = C.$$

La forma de resolver esta ecuación es usar el hecho de que $A\,\mathrm{sen}\,\theta_f + B\cos\theta_f = D\cos(\theta_f-\alpha)$, donde

$$D = \sqrt{A^2+B^2} = 0{,}2331, \quad \cos\alpha = B/D,\ \mathrm{sen}\,\alpha = A/D \rightarrow \alpha = 195{,}53^{\circ}.$$

Por tanto:

$$\theta_f = \pm \arccos(C/D) + \alpha = 147{,}53^\text{o},\ 243{,}52^\text{o}.$$

Para $\theta_f = 147{,}5309^\text{o}$, obtenemos $\theta_i = 167{,}5309^\text{o}$ y $r_i = r_f = 2{,}1942$ UD. De ahí usando la ecuación de las fuerzas vivas $v_i = 0{,}6415$ UV y $v_f = 0{,}6206$ UV. Por otro lado calculamos $\gamma_i = 1{,}3707^\text{o}$ y $\gamma_f = 7{,}3598^\text{o}$ por lo que $\varphi = \gamma_i - \gamma_f = -5{,}989^\text{o}$. Como se mostró en el problema 8, hay varias formas de resolverlo. Podemos hacerlo por trigonometría: $\Delta V = \sqrt{v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos\varphi} = 0{,}0691$ UV. Por tanto, obtenemos ψ de $\frac{v_f}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{\Delta V}{\operatorname{sen}\varphi}$ de donde $\psi = -110{,}5219^\text{o}$.

O podemos resolverlo por fasores (figura 4): $\Delta V \underline{/\psi} = v_f \underline{/\varphi} - v_i \underline{/0^\circ} = 0{,}06915\ \text{UV}\underline{/-110{,}5219^\circ}$. Es importante recordar que deben respetarse los signos de los ángulos, y que todos ellos están en grados.

Para $\theta_f = 243{,}52^\text{o}$, obtenemos $\theta_i = 263{,}5152^\text{o}$ y $r_i = r_f = 2{,}0026$ UD. De ahí usando la ecuación de las fuerzas vivas $v_i = 0{,}7062$ UV y $v_f = 0{,}6873$ UV. Por otro lado calculamos $\gamma_i = -4{,}827^\text{o}$ y $\gamma_f = -11{,}1192^\text{o}$ por lo que $\varphi = \gamma_i - \gamma_f = 6{,}2922^\text{o}$. Por tanto $\Delta V = \sqrt{v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos\varphi} = 0{,}0788$ UV. Finalmente obtenemos $\psi = 107^\text{o}$. Realizando el procedimiento análogo con fasores, observando para ello el triángulo de la figura 3, obtenemos: $\Delta V \underline{/\psi} = v_f \underline{/\varphi} - v_i \underline{/0^\circ} = 0{,}0788\ \text{UV}\underline{/107{,}0073^\circ}$.

Cabe destacar, que la formulación es independiente del convenio de ángulos elegido, como claramente se puede observar en este ejercicio; recordando que ambos deben definirse en el mismo sentido, respetando los signos.

Comparando ambas posibilidades se escogería la primera que requiere menor cantidad de combustible.

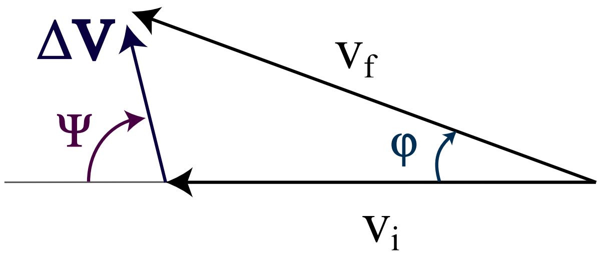


Figura 4: Triángulo asociado a la resolución del problema 9 por fasores.

10. Dada una órbita circular de radio 2 UD:

a) Para transferir a un radio 5 UD comparar $(\Delta V_{\text{TRANS}}, T_{\text{TRANS}})$ para la transferencia de Hohmann y una transferencia "rápida" (tangencial sólo en el radio inicial) tal que $a_t = 2a_{\text{HOHMANN}}$.

b) Para una transferencia a una órbita de radio 25 UD comparar $(\Delta V_{\text{TRANS}}, T_{\text{TRANS}})$ para la transferencia de Hohmann, una transferencia biparabólica y una bielíptica con radio exterior 50 UD.

<u>Solución</u>:

a) Para este apartado calculamos en primer lugar la transferencia de Hohmann, con $r_1 = 2$ UD y $r_2 = 5$ UD. La elipse de Hohmann tendrá $a_H = \frac{r_1+r_2}{2} = 3{,}5$ UD. Por tanto el tiempo de transferencia será $T_H = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_\oplus}} = 20{,}57\ \text{UT} = 16597\ \text{s} = 4{,}61$ h. Por otro lado el ΔV de las maniobras será:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_1} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_1}} = 0{,}138\ \text{UV},\\ \Delta V_2 &= \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_2} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} = 0{,}1092\ \text{UV}\end{aligned}$$

Luego $\Delta V_H = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 0{,}2472\ \text{UV} = 1{,}9542$ km/s. Consideremos ahora una transferencia "rápida" con $a_R = 2a_H = 7$ UD. La primera transferencia es tangencial, luego

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_1} - \frac{\mu_\oplus}{a_R}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_1}} = 0{,}2187\ \text{UV}.$$

No obstante la segunda transferencia requiere más cálculos, ya que no es tangencial. La velocidad de la órbita de transferencia en r_2 es $V_{2R} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_2} - \frac{\mu_\oplus}{a_R}} = 0{,}5071$ y la velocidad final es $V_2 = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_2}} = 0{,}4472$ UV, pero no se pueden restar directamente sino que hay que encontrar el ángulo φ que forman. Para ello, en primer lugar hay que hallar la anomalía verdadera θ_2 de la órbita de transferencia en la que se realiza el segundo impulso. Para ello usamos la ecuación de la cónica en r_2: $r_2 = \frac{a_R(1-e_R^2)}{1+e_R\cos\theta_2}$. Es necesario encontrar primero e_R. Para ello, observemos que el perigeo de la órbita de transferencia ha de ser r_1, por lo que $r_1 = a_R(1-e_R)$ de donde $e_R = 0{,}7143$. Hallamos entonces $\theta_2 = 116{,}1039^{\circ}$. Usando θ_2 podemos hallar el ángulo de trayectoria de la ecuación $\tan\gamma_2 = \frac{e_R \operatorname{sen}\theta_2}{1+e_R\cos\theta_2}$, de donde $\gamma_2 = 43{,}09^{\circ}$. Se tiene que como la órbita final es circular, su ángulo de trayectoria es siempre cero y por tanto $\varphi = \gamma_2 = 43{,}09^{\circ}$. Usando entonces el teorema del coseno: $\Delta V_2 = \sqrt{V_2^2 + V_{2R}^2 - 2V_2V_{2R}\cos\varphi} = 0{,}3548$ UV. Luego finalmente $\Delta V_R = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 0{,}5736\ \mathrm{UV} = 4{,}534\ \mathrm{km/s}$. El tiempo de la transferencia rápida ha de calcularse usando las leyes horarias. Puesto que se inicia en el perigeo y termina en $\theta_2 = 116{,}1039^{\circ}$, su duración será $\Delta t(\theta_2)$. Calculamos $E_2 = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\theta_2/2\right) = 1{,}1593$ rad, de donde $M_2 = E_2 - e_R \operatorname{sen} E_2 = 0{,}504$ rad. Finalmente $\Delta t = M_2/n$, donde $n = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a_R^3}}$, y obtenemos $\Delta t = 9{,}3458\ \mathrm{UT} = 7540{,}3\ \mathrm{s} = 2{,}0945\ \mathrm{h}$.

b) Para este apartado $r_1 = 2$ UD y $r_2 = 25$ UD. Calculando la transferencia de Hohmann como antes, se tiene $a_H = \frac{r_1+r_2}{2} = 13{,}5$ UD. Luego $T_H = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_\oplus}} = 155{,}8298\ \mathrm{UT} = 34{,}92$ h. El ΔV de las maniobras será:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_1} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_1}} = 0{,}2551 \text{ UV},\\ \Delta V_2 &= \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_2} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} = 0{,}1230 \text{ UV}\end{aligned}$$

Luego $\Delta V_H = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 0{,}3782\ \mathrm{UV} = 2{,}9895\ \mathrm{km/s}$.

La transferencia biparabólica pasa de la primera órbita a una parábola, luego habrá que pasar a la velocidad de escape: $\Delta V_1 = (\sqrt{2}-1)V_1 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_1}} = 0{,}2929$ UV. En la segunda maniobra habría que cambiar entre dos parábolas en el infinito, lo que no tiene coste: $\Delta V_2 = 0$. En la tercera maniobra se vuelve por una parábola y hay que frenar hasta la órbita circular final, luego $\Delta V_3 = (\sqrt{2}-1)V_2 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_2}} = 0{,}0828$ UV. Por tanto, $\Delta V_{BP} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 0{,}3757\ \mathrm{UV} = 2{,}9703\ \mathrm{km/s}$. No obstante esta transferencia llevaría un tiempo infinito (hay que llegar hasta el "final" de las parábolas), luego sólo sirve a efectos teóricos, para ver que mejora a la de Hohmann y por tanto existirán transferencias bielípticas (con el radio intermedio muy grande) que mejorarán a la de Hohmann.

Finalmente realizamos una transferencia bielíptica con $r_t = 50$ UD. La primera elipse de transferencia tendrá semieje mayor $a_1 = \frac{r_1+r_t}{2} = 26$ UD. Para la segunda elipse $a_2 = \frac{r_2+r_t}{2} = 37{,}5$ UD. El tiempo de la transferencia será $T_{BE} = \pi\left(\sqrt{\frac{a_1^3}{\mu_\oplus}} + \sqrt{\frac{a_2^3}{\mu_\oplus}}\right) = 1137{,}9\ \mathrm{UT} = 10{,}63$ dias. El ΔV de las maniobras será:

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_1} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_1}} = 0{,}2735 \text{ UV},\\ \Delta V_2 &= \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_t} - \frac{\mu_\oplus}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_t} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}} = 0{,}0762 \text{ UV},\\ \Delta V_3 &= \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_2} - \frac{\mu_\oplus}{a_2}} = 0{,}0309 \text{ UV}.\end{aligned}$$

Obsérvese que las dos primeras maniobras aceleran, mientras que la última frena. Las tres son tangenciales. Por tanto $\Delta V_{BE} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 0{,}3807\ \mathrm{UV} = 3,9983\ \mathrm{km/s}$.

11. Obtener razonadamente la expresión para ΔV y la latitud ϕ para la maniobra genérica de cambio de plano orbital (Ω e i) de una órbita circular, manteniendo constantes el resto de elementos orbitales.

Solución:

Puesto que sólo se cambia el plano, no se modifican las velocidades, luego $V_1 = V_2$. Por tanto $\Delta V = 2V_1 \operatorname{sen}\varphi/2$, donde φ es el ángulo formado entre la velocidad inicial y final, o lo que es lo mismo, el ángulo formado entre las órbitas, tal como se muestra en la figura del problema.

Un cambio de plano implica una modificación de i_1 a i_2 y un $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Aplicamos la trigonometría esférica a los dos triángulos de la figura, de forma que:

$$\cos\varphi = -\cos i_1 \cos(180^{\circ} - i_2) + \operatorname{sen} i_1 \operatorname{sen}(180^{\circ} - i_2)\cos\Delta\Omega,$$

y puesto que $\cos(180^{\circ} - i_2) = -\cos i_2$ y $\operatorname{sen}(180^{\circ} - i_2) = \operatorname{sen} i_2$, llegamos a

$$\cos\varphi = \cos i_1 \cos i_2 + \operatorname{sen} i_1 \operatorname{sen} i_2 \cos\Delta\Omega.$$

Por otro lado, para encontrar ϕ, la latitud a la que hay qu efectuar la maniobra, observamos que $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen} i_2$, y por otro lado $\frac{\operatorname{sen}\chi}{\operatorname{sen} i_1} = \frac{\operatorname{sen}\Delta\Omega}{\operatorname{sen}\varphi}$, luego:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\operatorname{sen} i_1 \operatorname{sen} i_2 \operatorname{sen}\Delta\Omega}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Si sólo se quiere cambiar la inclinación, entonces $\Delta\Omega = 0$ y se tiene:

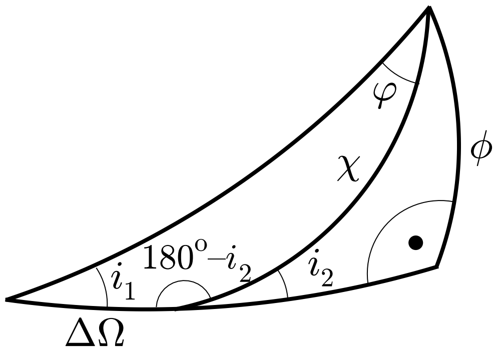


Figura 5: Figura del problema 11.

$$\cos\varphi = \cos i_1 \cos i_2 + \operatorname{sen} i_1 \operatorname{sen} i_2 = \cos(i_2 - i_1),$$

luego $\varphi = i_2 - i_1$, y $\phi = 0^{\mathrm{o}}$. Por otro lado si sólo se quiere cambiar Ω, entonces $i_1 = i_2 = i$ y se tiene:

$$\cos\varphi = \cos^2 i + \operatorname{sen}^2 i \cos\Delta\Omega,$$

y puesto que $\cos^2 i = 1 - \operatorname{sen}^2 i$, llegamos a

$$\cos\varphi - 1 = (\cos\Delta\Omega - 1)\operatorname{sen}^2 i,$$

y usando $\cos\varphi - 1 = 2\operatorname{sen}^2\varphi/2$, llegamos a:

$$2\operatorname{sen}^2\varphi/2 = 2\operatorname{sen}^2\Delta\Omega/2 \operatorname{sen}^2 i,$$

de donde:

$$\operatorname{sen}\varphi/2 = \operatorname{sen}\Delta\Omega/2 \operatorname{sen} i.$$

Similarmente se puede hallar:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\tan\varphi/2}{\tan\Delta\Omega/2}$$

12. Demostrar la optimalidad (mínimo ΔV) de la transferencia de Hohmann, dentro del conjunto de maniobras de dos impulsos entre órbitas circulares.

    Solución:

    Fijemos para este problema los radios inicial y final como r_1 y r_2, y para fijar ideas asumamos $r_2 > r_1$. Puesto que se pueden dar sólo dos impulsos, la maniobra ha de hacerse mediante una cónica de transferencia. La cónica de transferencia tendrá pues un parámetro p y excentricidad e (usamos p para permitir la posibilidad de que sea una parábola o una hipérbola). Tenemos que encontrar que la cónica de transferencia que minimiza ΔV. Las ligaduras que ha de verificar la elipse son:

    - El perigeo ha de ser menor o igual que r_1 (si no no cortaría a la órbita inicial), por tanto $\frac{p}{1+e} \leq r_1$, o lo que es lo mismo: $p \leq r_1(1+e)$.
    - El apogeo ha de ser mayor o igual que r_2 (si no no cortaría a la órbita final), por tanto $\frac{p}{1-e} \geq r_2$, o lo que es lo mismo: $p \geq r_2(1-e)$.

Estas dos ligaduras son rectas y el aspecto de la región permisible es el mostrado en la figura, limitado también por $p \geq 0$. Obsérvese que el punto de intersección p^*, e^* de las dos rectas es aquel que hace $r_1(1+e^*) = r_2(1-e^*)$ o lo que es lo mismo $e^* = \frac{r_2-r_1}{r_2+r_1} < 1$ y $p^* = \frac{2r_2r_1}{r_2+r_1}$, por tanto corresponde a una elipse, y si se calcula su semieje mayor se tiene que $a = \frac{r_p+r_a}{2}$, luego es el punto que corresponde a la transferencia de Hohmann. Tenemos que demostrar que dicho punto es el máximo. Obsérvese que puesto que está en la esquina, se tiene que para todos los valores admisibles de p, $p > p^*$.

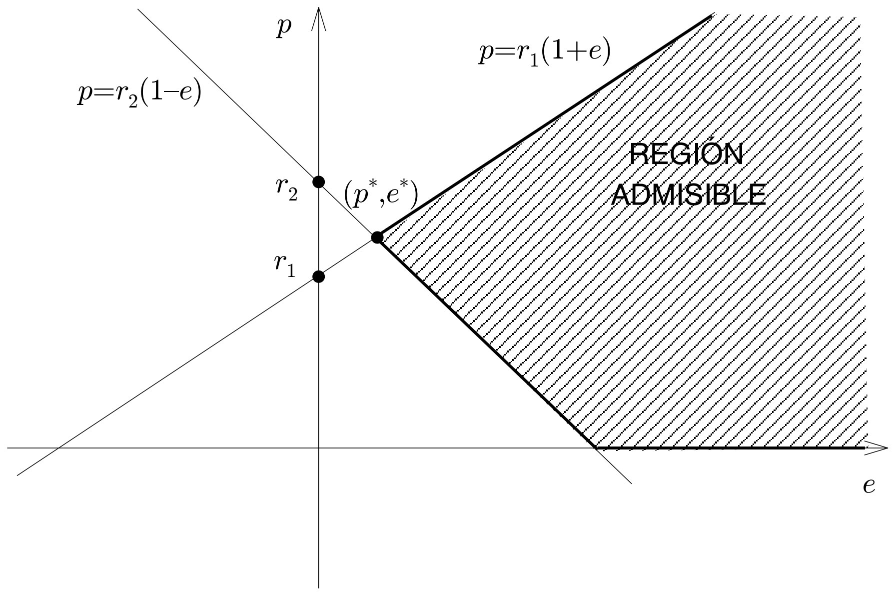


Figura 6: Figuras del problema 12.

En primer lugar construyamos la función que queremos minimizar (ΔV) a partir de los datos del problema. Puesto que $a = \frac{p}{1-e^2}$, se tiene que:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2,$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta V_1^2 &= V_1^2 + V_{T1}^2 - 2V_1 V_{T1}\cos\varphi_1,\\ \Delta V_2^2 &= V_2^2 + V_{T2}^2 - 2V_2 V_{T2}\cos\varphi_2,\end{aligned}$$

donde $V_1^2 = \mu_\bigoplus/r_1$, $V_2^2 = \mu_\bigoplus/r_2$, $V_{T1}^2 = 2\mu_\bigoplus/r_1 - \mu_\bigoplus(1-e^2)/p$, $V_{T2}^2 = 2\mu_\bigoplus/r_2 - \mu_\bigoplus(1-e^2)/p$. Además se tiene que $\varphi_1 = \gamma_{T1}$ y $\varphi_2 = \gamma_{T2}$ y como $h = vr\cos\gamma = \sqrt{\mu_\bigoplus p}$, se tiene que $\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{\mu_\bigoplus p}}{V_{T1}r_1}$ y $\cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{\mu_\bigoplus p}}{V_{T2}r_2}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\Delta V_1^2 &= \frac{3\mu_\bigoplus}{r_1} - \frac{\mu_\bigoplus(1-e^2)}{p} - 2\mu_\bigoplus\sqrt{\frac{p}{r_1^3}},\\ \Delta V_2^2 &= \frac{3\mu_\bigoplus}{r_2} - \frac{\mu_\bigoplus(1-e^2)}{p} - 2\mu_\bigoplus\sqrt{\frac{p}{r_2^3}}.\end{aligned}$$

Veamos que en el interior de la región permisible no existe un mínimo. Para ello recordemos que se debe verificar, en el mínimo, que $\frac{\partial\Delta V}{\partial p} = 0$ y $\frac{\partial\Delta V}{\partial e} = 0$. Derivando respecto a e:

$$\frac{\partial\Delta V}{\partial e} = \frac{\partial\Delta V_1}{\partial e} + \frac{\partial\Delta V_2}{\partial e},$$

y por otro lado:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial e}\Delta V_1^2 &= 2\Delta V_1\frac{\partial\Delta V_1}{\partial e} = \frac{2e\mu_\bigoplus}{p},\\ \frac{\partial}{\partial e}\Delta V_2^2 &= 2\Delta V_1\frac{\partial\Delta V_2}{\partial e} = \frac{2e\mu_\bigoplus}{p},\end{aligned}$$

de donde deducimos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta V_1}{\partial e} &= \frac{2e\mu_\bigoplus}{2p\Delta V_1} > 0,\\ \frac{\partial\Delta V_2}{\partial e} &= \frac{2e\mu_\bigoplus}{2p\Delta V_2} > 0,\end{aligned}$$

por lo que $\frac{\partial\Delta V}{\partial e} > 0$, por lo que nunca se puede hacer cero. Por tanto el mínimo ha de estar en la frontera o en infinito. No puede estar en infinito puesto que $\frac{\partial\Delta V}{\partial e} > 0$ lo que significa que ΔV crece con e; por tanto debe estar a una e pequeña, y en la frontera.

Podemos descartar $p = 0$. Luego el mínimo ha de estar situado en la recta $p = r_1(1+e)$ o en la otra recta $p = r_2(1-e)$. Estudiemos la primera recta, sustituyendo $e = p/r_1 - 1$. Por tanto $1 - e^2 = 1 - p^2/r_1^2 + 2p/r_1 - 1 = p/r_1(2 - p/r_1)$ y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\Delta V_1^2 &= \frac{3\mu_\oplus}{r_1} - \frac{\mu_\oplus}{r_1}\left(2 - \frac{p}{r_1}\right) - 2\mu_\oplus\sqrt{\frac{p}{r_1^3}} = \frac{\mu_\oplus}{r_1}\left(1 - \sqrt{\frac{p}{r_1}}\right)^2, \\
\Delta V_2^2 &= \frac{3\mu_\oplus}{r_2} - \frac{\mu_\oplus}{r_1}\left(2 - \frac{p}{r_1}\right) - 2\mu_\oplus\sqrt{\frac{p}{r_2^3}}
\end{aligned}
$$

Calculemos ahora

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} = \frac{\partial \Delta V_1}{\partial p} + \frac{\partial \Delta V_2}{\partial p},$$

y como antes:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p}\Delta V_1^2 &= 2\Delta V_1 \frac{\partial \Delta V_1}{\partial p} = \frac{\mu_\oplus}{r_1}\left(\sqrt{\frac{p}{r_1}} - 1\right)\sqrt{\frac{1}{pr_1}}, \\
\frac{\partial}{\partial p}\Delta V_2^2 &= 2\Delta V_1 \frac{\partial \Delta V_2}{\partial p} = \frac{\mu_\oplus}{r_1^2} - \mu_\oplus\sqrt{\frac{1}{pr_2^3}} = \frac{\mu_\oplus\left(r_2^{3/2}p^{1/2} - r_1^2\right)}{r_1^2 r_2^{3/2} p^{1/2}},
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta V_1}{\partial p} &= \frac{\mu_\oplus}{2\Delta V_1 r_1}\left(\sqrt{\frac{p}{r_1}} - 1\right)\sqrt{\frac{1}{pr_1}} > 0, \\
\frac{\partial \Delta V_2}{\partial p} &= \frac{\mu_\oplus\left(r_2^{3/2}p^{1/2} - r_1^2\right)}{r_1^2 r_2^{3/2} p^{1/2} 2\Delta V_1} > 0,
\end{aligned}
$$

ya que $p = r_1(1+e) > r_1$ y $r_2 > r_1$. Por tanto el mínimo no se puede alcanzar en la recta, y además ΔV crece al aumentar p. Por tanto el único candidato al mínimo sería el menor valor posible de p en la recta, que es p^* (y por tanto e^*).

Procediendo de la misma forma en la otra recta $p = r_2(1-e)$ se llega a que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta V_1}{\partial p} &= \frac{\mu_\oplus\left(r_1^{3/2}p^{1/2} - r_2^2\right)}{r_2^2 r_1^{3/2} p^{1/2} 2\Delta V_1} < 0, \\
\frac{\partial \Delta V_2}{\partial p} &= \frac{\mu_\oplus}{2\Delta V_2 r_2}\left(\sqrt{\frac{p}{r_2}} - 1\right)\sqrt{\frac{1}{pr_2}} < 0,
\end{aligned}
$$

ya que $p = r_2(1-e) < r_2$ y $r_2 > r_1$. Por tanto el mínimo no se puede alcanzar en la recta, y además ΔV disminuye al aumentar p. Por tanto el único candidato al mínimo sería el mayor valor posible de p en la recta, que es p^* (y por tanto e^*).

Por tanto se concluye que el mínimo ha de estar necesariamente en p^*, e^* que corresponde a la transferencia de Hohmann.

13. Se lanza un satélite (que se pretende situar en órbita ecuatorial) desde Cabo Kennedy situándose en una órbita de aparcamiento en LEO a 296 km de altitud. Elegir razonadamente un azimut de lanzamiento. Se desea alcanzar una órbita ecuatorial a una altitud de 741 km. Describir la maniobra necesaria, realizando una transferencia de Hohmann con cambio de plano en el segundo impulso.

    <u>Solución</u>:

    Puesto que se desea alcanzar una órbita ecuatorial conviene que la órbita de aparcamiento tenga la menor inclinación posible. Por ello elegimos un azimut de 90°, que está dentro de los permisibles para Cabo Keneddy y nos da una inclinación inicial de $i = 28{,}5°$. Para la transferencia de Hohmann, identificamos $r_1 = R_\oplus + 296 = 6674{,}14$ km y $r_2 = R_\oplus + 741 = 7119{,}14$ km. Por tanto $a_H = 6896{,}64$ km. Ya podemos calcular el tiempo de transferencia, $T_H = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_\oplus}} = 47{,}5$ min. El impulso en la primera maniobra será:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_1} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_1}} = 0{,}1237 \text{ km/s},$$

Por otro lado, para la segunda maniobra calculamos $V_2 = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_2}} = 7{,}4826$ km/s y $V_{H2} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_2} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} = 7{,}361$ km/s. Teniendo en cuenta el cambio de plano de la segunda maniobra, el impulso será:

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_2^2 + V_{H2}^2 - 2V_2 V_{H2} \cos \Delta i} = 3{,}6557 \text{ km/s},$$

Finalmente $\Delta V_H = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 0{,}3782$ UV $= 3{,}7794$ km/s.

14. Comparar, para una órbita circular de altitud $h = 1000$ km, una maniobra de cambio de inclinación Δi de un impulso con la maniobra restringida (óptima) de tres impulsos, para $\Delta i = 15^o, 30^o, 45^o, 60^o, 80^o$.

    Solución:

    La velocidad circular a una altitud de $h = 1000$ km es $V_i = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R_\oplus + h}} = 7{,}35$ km/s. Por tanto la maniobra de cambio de inclinación convencional (de un impulso) tendrá un coste $\Delta V = 2V_i \operatorname{sen} \Delta i/2$. Para la manibra restringida de tres impulsos seguimos la teoría, seleccionando λ (el radio donde se realiza el cambio de plano) según la regla óptima. En el caso de que se deba elegir el mayor λ posible, elegimos $\lambda = 10$. Los resultados se reflejan en la siguiente tabla.

Cuadro 2: Resultados del problema 14.

Δi (^{o})	ΔV (km/s), 1 impulso	λ (3 imp.)	ΔV (km/s), 3 imp.
15	1.9188	NO	NO
30	3.8047	NO	NO
45	5.6256	1.631	5.5087
60	7.3501	10	6.1127
80	9.4492	10	6.3957

15. Un satélite terrestre tiene una órbita inicial definida por $a_1 = 5$ UD y $e_1 = 0{,}7$, y se pretende llevar a una órbita definida por $a_2 = 10$ UD y $e_2 = 0{,}3$, sin que importe el cambio de la línea de ápsides. Considerar inicialmente que el impulso se realiza en el apogeo, y calcular el combustible consumido si $I_{\text{SP}} = 200$ s y $m_0 = 1000$ kg.

    Solución: Puesto que no importa el cambio de línea de ápsides, $\Delta\omega$ es una variable del problema, que habrá que elegir. Siguiendo el problema 9, hay que resolver

$$\frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos\theta_1} = \frac{a_2(1-e_2^2)}{1+e_2\cos(\theta_1-\Delta\omega)}$$

    donde θ_1 es la anomalía verdadera a la que se realiza la maniobra (desde el punto de vista de la órbita inicial). Además $\theta_2 = \theta_1 - \Delta\omega$.

    Consideramos, siguiendo el enunciado, que el impulso se da en $\theta_1 = 180^o$. Se obtienen dos soluciones, la primera de ellas tiene $\Delta\omega = 103{,}609^o$ y $\theta_2 = 76{,}391^o$, y la segunda, $\Delta\omega = 256{,}39^o$ y $\theta_2 = 283{,}609^o$. En ambos casos, $r = 8{,}5$ UD. Por tanto se tiene que $v_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}} = 0{,}1879$ UV y $v_2 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r} - \frac{\mu_\oplus}{a_2}} = 0{,}3678$ UV. Calculamos $\gamma_1 = 0^o$ y $\gamma_2 = 15{,}2351^o$ en el primer caso, $\gamma_2 = -15{,}2351^o$ en el segundo. Luego $\varphi = \pm 15{,}2351^o$. Por tanto $\Delta V = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\varphi} = 0{,}193$ UV en ambos casos (son iguales por simetría). El consumo de combustible, usando los datos del problema, será $m_p = 1176{,}2$ kg.

16. Estudiar la puesta en órbita de un satélite geoestacionario desde Cabo Kennedy, supuesta una órbita de aparcamiento de altitud 300 km, y realizando el cambio de plano en el segundo impulso de Hohmann. Estudiar igualmente la puesta en órbita de un satélite Molniya desde Baikonur, con una órbita de aparcamiento de la misma altitud.

    Solución:

    En primer lugar hay que elegir un azimut de lanzamiento desde Cabo Kennedy, se elige 90^o para conseguir la mínima inclinación posible que es la latitud de Cabo Kennedy, es decir $i_p = 28{,}5^o$ y tendremos que hacer una maniobra de cambio de plano de $\Delta i = 28{,}5^o$.

    Ahora estudiamos la puesta en órbita del GEO. Se tiene que $r_1 = h_p + R_\oplus$ y que $r_2 = r_{\text{GEO}} = 42164$ km. Realizamos una transferencia de Hohmann con cambio de plano, tal como se describe en la figura del problema. Por tanto $a_H = \frac{r_1+r_2}{2} = 24421$ km y el tiempo de transferencia será $T_H = \pi\sqrt{a_H^3/\mu_\oplus} = 5{,}2751$ h. Para el primer impulso tenemos:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_1} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_1}} = 2{,}4257 \text{ km/s}.$$

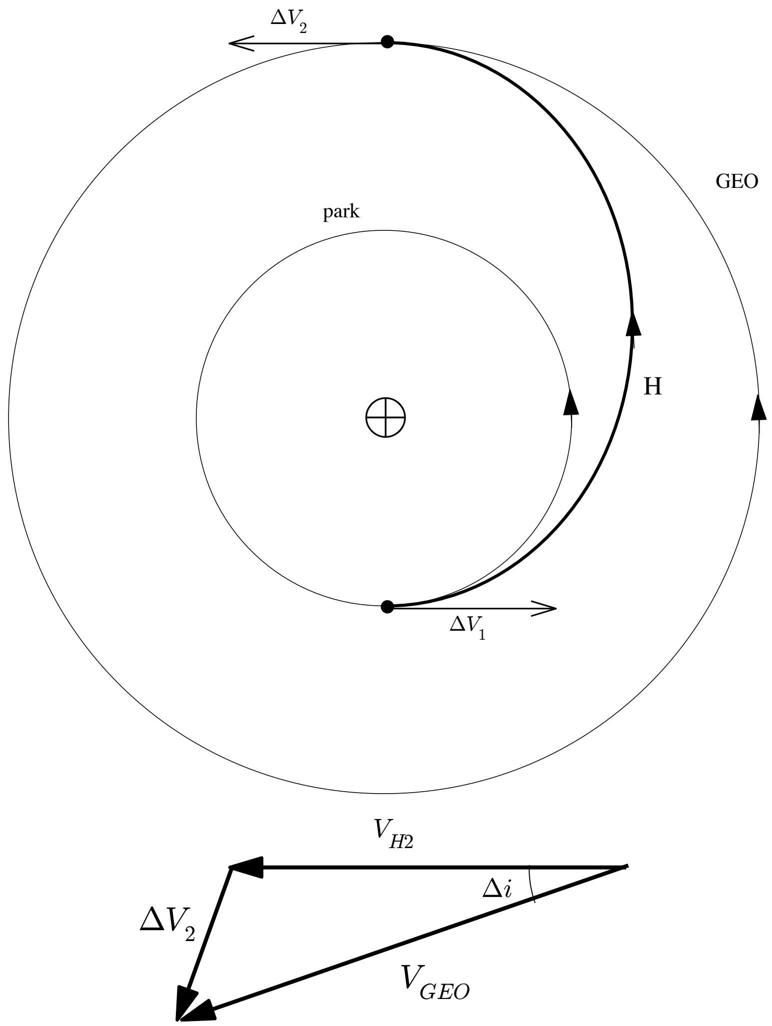


Figura 7: Figuras del problema 16.

Para el segundo impulso, tenemos que la velocidad de la órbita circular es $V_2 = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_2}} = 3{,}0747\ \mathrm{km/s}$ y que la velocidad de la órbita de la elipse de Hohmann en el punto de transferencia es $V_{H2} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_2} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} = 1{,}6078\ \mathrm{km/s}$. Teniendo en cuenta el cambio de plano, como se ve en la figura, se verifica que

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_2^2 + V_{2H}^2 - 2V_2 V_{2H} \cos \Delta i} = 1{,}8302\ \mathrm{km/s}.$$

Por tanto, $\Delta V_H = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 4{,}256\ \mathrm{km/s}$.

Para el Molniya, tomamos $r_p = 300\ \mathrm{km}$ (el de la órbita de aparcamiento) y $e = 0{,}75$. Por tanto $a_M = 26713\ \mathrm{km}$. La inclinación será la inclinación crítica, $i = 63{,}4^\circ$. Puesto que la latitud de Baikonur es $\phi = 45{,}6^\circ$, se tiene de la fórmula $\cos i = \operatorname{sen} \mathrm{Az} \cos \phi$ que se ha de lanzar con un azimut $\mathrm{Az} = 39{,}79^\circ$, que está dentro del rango permitido para Baikonur ($[340^\circ, 90^\circ]$). Puesto que hemos lanzado directamente a la inclinación requerida, lo único que hay que hacer es aumentar el perigeo. Por tanto:

$$\Delta V_M = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_p} - \frac{\mu_\oplus}{a_M}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_p}} = 2{,}4945\ \mathrm{km/s}.$$

17. Estudiar una transferencia tipo Hohmann entre dos órbitas coplanarias elípticas definidas por (a_i, e_i) y (a_f, e_f) con la línea de ápsides coincidente (en dirección y orientación), y comprobar la regla de optimalidad (elegir siempre el mayor apogeo) usando dos casos particulares: primero para (2,0.2) y (4,0.5), y luego para (4,0.7), (6,0.1). Si las órbitas cortan en un punto (que no sea ni perigeo ni apogeo), comparar la maniobra de un impulso para cambiar la órbita con la tipo Hohmann.

    Solución:

    En el primero de los casos, $r_{p1} = 1{,}6$ UD, $r_{a1} = 2{,}4$ UD, $r_{p2} = 2$ UD, $r_{a2} = 6$ UD. La regla de optimalidad dice que debemos ir al mayor apogeo, que sería el de la segunda órbita. Vamos a comprobarla haciendo las dos posibilidades.

Si partiéramos del perigeo de la primera órbita al apogeo de la segunda, $a_H = \frac{r_{p1}+r_{a2}}{2} = 3{,}8$ UD y tenemos:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \left(\sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{p1}} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{p1}} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}}\right) + \left(\sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{a2}} - \frac{\mu_\oplus}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{a2}} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}}\right) = 0{,}1511 \text{ UV}.$$

Por otro lado, si partiéramos del apogeo de la primera órbita al perigeo de la segunda, $a_H = \frac{r_{a1}+r_{p2}}{2} = 2{,}2$ UD y tenemos:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \left(\sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{p1}} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{p1}} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}}\right) + \left(\sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{a2}} - \frac{\mu_\oplus}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{a2}} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}}\right) = 0{,}1656 \text{ UV}.$$

En efecto, el primer valor es menor que el segundo como predice la regla de optimalidad.

Comprobemos si estas órbitas se cortan:

$$\frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos\theta} = \frac{a_2(1-e_2^2)}{1+e_1\cos\theta},$$

por tanto $\cos\theta = \frac{a_2(1-e_2^2)-a_1(1-e_1^2)}{a_1 e_2(1-e_1^2)-a_2 e_1(1-e_2^2)} = 3$, ecuación que no tiene solución; luego las órbitas no se cortan. Otra forma de ver esto es la siguiente: puesto que ambas órbitas tienen la misma línea de ápsides, la condición geométrica para que no se corten es que $r_{p1} < r_{p2}$ y $r_{a1} < r_{a2}$, condición que se cumple en este caso, luego no se pueden cortar.

Para el segundo caso $r_{p1} = 1{,}2$ UD, $r_{a1} = 6{,}8$ UD, $r_{p2} = 5{,}4$ UD, $r_{a2} = 6{,}6$ UD. La regla de optimalidad dice que debemos usar el mayor apogeo, que sería el de la primera órbita. Comprobémoslo.
Si partiéramos del perigeo de la primera órbita al apogeo de la segunda, $a_H = \frac{r_{p1}+r_{a2}}{2} = 3{,}9$ UD y se tiene:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \left|\sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{p1}} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{p1}} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}}\right| + \left(\sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{a2}} - \frac{\mu_\oplus}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{a2}} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}}\right) = 0{,}1561 \text{ UV}.$$

Por otro lado, si partiéramos del apogeo de la primera órbita al perigeo de la segunda, $a_H = \frac{r_{a1}+r_{p2}}{2} = 6{,}1$ UD, y se tiene:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \left(\sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{a1}} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{a1}} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}}\right) + \left(\sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{p2}} - \frac{\mu_\oplus}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{p2}} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}}\right) = 0{,}1478 \text{ UV}.$$

Como predice la regla de optimalidad, en este caso el segundo valor es menor que el primero.

Comprobemos si estas órbitas se cortan en este caso:

$$\frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos\theta} = \frac{a_2(1-e_2^2)}{1+e_1\cos\theta},$$

por tanto $\cos\theta = \frac{a_2(1-e_2^2)-a_1(1-e_1^2)}{a_1 e_2(1-e_1^2)-a_2 e_1(1-e_2^2)} = -0{,}9863$, luego se cortan en $\theta = 170{,}52^\circ$ (y en $\theta = 189{,}48^\circ$, donde la solución debe ser simétrica).

Para realizar una maniobra de un impulso, necesitamos calcular las velocidades inicial y final y el ángulo φ. Para ello necesitamos el radio, $r = \frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos\theta} = 6{,}59$ UD. La velocidad en las diferentes órbitas será $V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}} = 0{,}2313$ UV y $V_2 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r} - \frac{\mu_\oplus}{a_2}} = 0{,}3699$ UV. Por otro lado $\varphi = \gamma_1 - \gamma_2$, donde $\gamma_1 = \arctan\left(\frac{e_1 \operatorname{sen}\theta}{1+e_1\cos\theta}\right) = 20{,}4275^\circ$ y $\gamma_2 = \arctan\left(\frac{e_2 \operatorname{sen}\theta}{1+e_2\cos\theta}\right) = 1{,}047^\circ$; por tanto $\varphi = 19{,}38^\circ$.

Finalmente, $\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\varphi} = 0{,}17$ UV, que en efecto es mayor que la transferencia de Hohmann, luego merece más la transferencia (dos impulsos) que una maniobra de un impulso.

18. Plantear el problema de optimización para la maniobra de Hohmann con cambio de plano Δi repartido entre los dos impulsos.

Solución:

Denótese r_1 al radio interior, r_2 al radio exterior, y Δi al cambio de plano total a efectuar. Como siempre, se tendrá que $a_H = \frac{r_1+r_2}{2}$. La diferencia es que ahora se efectúan dos cambios de plano, uno de valor θ_1 en el primer impulso y otro de valor θ_2 en el segundo, que deben cumplir $\theta_1 + \theta_2 = \Delta i$. El ΔV total será:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \sqrt{V_1^2 + V_{H1}^2 - 2V_1V_{H1}\cos\theta_1} + \sqrt{V_2^2 + V_{H2}^2 - 2V_2V_{H2}\cos\theta_2},$$

donde $V_1 = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_1}}$, $V_{H1} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_1} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}}$, $V_2 = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_2}}$, $V_{H2} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_2} - \frac{\mu_\oplus}{a_H}}$. Obsérvese que los valores de estas velocidades son constantes. Expresando ΔV en función solamente de θ_1:

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_{H1}^2 - 2V_1V_{H1}\cos\theta_1} + \sqrt{V_2^2 + V_{H2}^2 - 2V_2V_{H2}\cos(\Delta i - \theta_1)}.$$

El mínimo se encontrará derivando:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \theta_1} = \frac{V_1V_{H1}\operatorname{sen}\theta_1}{\sqrt{V_1^2 + V_{H1}^2 - 2V_1V_{H1}\cos\theta_1}} - \frac{V_2V_{H2}\operatorname{sen}(\Delta i - \theta_1)}{\sqrt{V_2^2 + V_{H2}^2 - 2V_2V_{H2}\cos(\Delta i - \theta_1)}} = 0.$$

Esta es la ecuación que habría que resolver. Analíticamente es complejo, se podría resolver de la siguiente manera:

$$V_1^2V_{H1}^2\operatorname{sen}^2\theta_1\left(V_2^2 + V_{H2}^2 - 2V_2V_{H2}\cos(\Delta i - \theta_1)\right) = V_2^2V_{H2}^2\operatorname{sen}^2(\Delta i - \theta_1)\left(V_1^2 + V_{H1}^2 - 2V_1V_{H1}\cos\theta_1\right)$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$\operatorname{sen}^2\theta_1\left(A + B\cos(\Delta i - \theta_1)\right) = \operatorname{sen}^2(\Delta i - \theta_1)\left(C + D\cos\theta_1\right)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_{H2}^2}, \\ B &= -2\frac{1}{V_2V_{H2}}, \\ C &= \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_{H1}^2}, \\ D &= -2\frac{1}{V_1V_{H1}}. \end{aligned}$$

La ecuación no se puede resolver analíticamente excepto en casos especiales, pero no es compleja de resolver numéricamente. Por ejemplo, para el caso típico del lanzamiento a GEO desde KSC, como en el problema 16, se tiene $r_1 =$, $r_2 = 42164$ km, $\Delta i = 28{,}5^{\mathrm{o}}$, y la solución óptima es $\theta_1 = 2{,}2^{\mathrm{o}}$, $\theta_2 = 26{,}3^{\mathrm{o}}$, obteniendo un $\Delta V = 4{,}2313$ km/s lo que mejora la solución del problema 16 en simplemente $0{,}025$ km/s. En general, la transferencia realizando el cambio de plano en la segunda maniobra está casi en el óptimo.

19. Diseñar los elementos orbitales de una constelación tipo Walker 15/3/2 de inclinación 65 grados, altitud $h = 20000$ km, de forma que el primer satélite tenga $\Omega = u = 0^{\mathrm{o}}$.

    Solución:

    Los elementos orbitales fijos de la constelación son la inclinación $i = 65^{\mathrm{o}}$, $e = 0$, y $a = 26378{,}14$ km. Por otro lado, Ω_i y u_i cambiarán según el satélite, para $i = 1 \ldots 15$. En primer lugar habrá tres planos orbitales (separados 120^{o}) y en cada uno de ellos cinco satélites, espaciados uniformemente (por 72^{o}). El desfase entre satélites de planos adyacentes será $360^{\mathrm{o}} \cdot 2/15 = 48^{\mathrm{o}}$. Por tanto:

    a) Primer plano orbital: $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = \Omega_5 = 0^{\mathrm{o}}$. Los valores de u son $u_1 = 0^{\mathrm{o}}$, $u_2 = 72^{\mathrm{o}}$, $u_3 = 144^{\mathrm{o}}$, $u_4 = 216^{\mathrm{o}}$, $u_5 = 288^{\mathrm{o}}$.

    b) Segundo plano orbital: $\Omega_6 = \Omega_7 = \Omega_8 = \Omega_9 = \Omega_{10} = 120^{\mathrm{o}}$. Los valores de u son $u_6 = 48^{\mathrm{o}}$, $u_7 = 120^{\mathrm{o}}$, $u_8 = 192^{\mathrm{o}}$, $u_9 = 264^{\mathrm{o}}$, $u_{10} = 336^{\mathrm{o}}$.

    c) Tercer plano orbital: $\Omega_{11} = \Omega_{12} = \Omega_{13} = \Omega_{14} = \Omega_{15} = 240^{\mathrm{o}}$. Los valores de u son $u_{11} = 96^{\mathrm{o}}$, $u_{12} = 168^{\mathrm{o}}$, $u_{13} = 240^{\mathrm{o}}$, $u_{14} = 312^{\mathrm{o}}$, $u_{15} = 24^{\mathrm{o}}$.

20. Se tiene un satélite en una órbita geoestacionaria a una longitud geográfica de $25^{\mathrm{o}}W$. Describir la maniobra necesaria para ubicar dicho satélite en una longitud de $10^{\mathrm{o}}E$. Si el combustible no permite realizar un ΔV superior a $0{,}1$ km/s, ¿es posible realizar la maniobra? En caso afirmativo, describirla.

    Solución:

    Para solucionar el problema realizaremos una maniobra de phasing. Puesto que el GEO está en retraso (35 grados) respecto a la posición que se quiere ocupar, la órbita de phasing tendrá que ser más baja que la GEO, es decir, habrá que reducir el periodo. El periodo de la órbita de phasing será pues:

    $$T_{\mathrm{ph}} = \frac{360 - 35}{360}T_\oplus = 21{,}6 \text{ h}.$$

Por tanto a_{ph} se obtiene de T_{ph} usando la fórmula del periodo: $a_{\mathrm{ph}} = \left(\mu_\oplus \left(\frac{T_{\mathrm{ph}}}{2\pi}\right)^2\right)^{1/3} = 39385$ km. La maniobra a realizar será un cambio (frenando) a esta órbita, y luego volver (acelerando) a la órbita original, pero ya en la posición correcta. Por tanto:

$$\Delta V = 2\left(\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{\mathrm{GEO}}}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{\mathrm{GEO}}} - \frac{\mu_\oplus}{a_{\mathrm{ph}}}}\right) = 0{,}2209 \text{ km/s}.$$

El tiempo de maniobra será igual al periodo de la órbita de phasing.

Puesto que este consumo es excesivo (mayor de $0{,}1$ km/s), se puede realizar la maniobra de phasing con una órbita de phasing más próxima, que se recorrerá k veces. Probamos primero con $k = 2$:

$$T_{\mathrm{ph}} = \frac{360 - 35/2}{360} T_\oplus,$$

y siguiendo los pasos anteriores, llegamos a $\Delta V = 0{,}1048$ km/s. Aún es mayor de $0{,}1$ km/s, luego probamos con $k = 3$:

$$T_{\mathrm{ph}} = \frac{360 - 35/3}{360} T_\oplus,$$

y ahora llegamos a $\Delta V = 0{,}0687$ km/s, que sí es aceptable. El tiempo de maniobra será $T = 3T_{\mathrm{ph}} = 69{,}48$ h.

21. Un satélite heliosíncrono en una órbita circular de 500 kilómetros de altitud pasa por el Ecuador, cuando viaja de Sur a Norte, a las 07:00 hora solar media. ¿A qué hora solar media pasa por la latitud 30º cuando viaja **de Norte a Sur**? Realizar las simplificaciones que se crean necesarias, detallándolas y justificándolas.

    Solución: En primer lugar, puesto que el satélite es heliosíncrono obtenemos su inclinación de la fórmula del formulario, llegando a $i = 97{,}4^{\circ}$. La fórmula de la hora solar media para el satélite es HSM $= \frac{\Omega+\lambda_u-\mathrm{AR}_{SM}}{15} + 12$, donde AR_{SM} es la ascensión recta del Sol Medio. En el cruce con el Ecuador de S a N (el nodo ascendente), $\lambda_u = 0$ y por tanto: $7 = \frac{\Omega-\mathrm{AR}_{SM}}{15} + 12$, de donde $\Omega - \mathrm{AR}_{SM} = -75^{\circ}$. Ahora, por ser el satélite heliosíncrono, esta cantidad se mantiene constante en el tiempo. En el paso por la latitud 30 grados de Norte a Sur, tenemos por un lado que $u = \arcsen\left(\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen} i}\right) = 149{,}72^{\circ}$ (hay que coger la segunda solución del arco seno al ser el paso de N a S). Por otro lado $\lambda_u = \arccos\left(\frac{\cos u}{\cos\phi}\right) = 184{,}3^{\circ}$, ya que hay que coger la segunda solución del arco coseno por ser la órbita retrógrada. Por tanto en el paso por 30 grados de N a S, HSM $= \frac{\Omega+\lambda_u-\mathrm{AR}_{SM}}{15} + 12 = \frac{-75+184{,}3}{15} + 12 = 19{,}28$, por lo que pasará a las 19:17:12 hora solar media. Esta solución tiene sentido ya que es próxima al cruce del Ecuador de N a S que será 12 horas después del cruce de S a N, es decir a las 19 hora solar media.

22. Calcular la altitud de un satélite geoestacionario teniendo en cuenta la perturbación secular debida al J_2.

    Solución:

    Para resolver el problema, tenemos que tener en cuenta que no están definidos (para la órbita geoestacionaria) ninguno de los ángulos usuales. Tenemos que usar $\lambda_T = \Omega + \omega + M$ (obsérvese que se puede usar M al ser una órbita circular). Usando las fórmulas del formulario, se tiene que $\dot{\lambda}_T = \dot{\Omega} + \dot{\omega} + \dot{M} = n + 3nJ_2\frac{R_\oplus^2}{r^2}$, donde hemos usado $p = r$, $i = 0^{\circ}$ y $e = 0$. El periodo real del satélite será $T = \frac{2\pi}{\dot{\lambda}_T}$ y este periodo tiene que igualar al de la Tierra, de donde obtenemos la ecuación que deberíamos resolver para r:

$$T_\oplus = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r^3}}\left(1 + 3J_2\frac{R_\oplus^2}{r^2}\right)}$$

Este problema habría que resolverlo numéricamente. Otra alternativa es desarrollar la expresión en serie de potencias en torno a $r = R_{GEO}$ (calculada sin perturbaciones) y quedarse con el término de primer orden, para encontrar una corrección Δr. Si hacemos eso:

$$T_\oplus \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R_{GEO}^3}}\left(1 + 3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right)} + \frac{2\pi\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R_{GEO}^5}}\left(1 + 3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right) + \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R_{GEO}^3}}6J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^3}\right)}{\frac{\mu_\oplus}{R_{GEO}^3}\left(1 + 3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right)^2}\Delta r$$

Puesto que por definición R_{GEO} está calculada de forma que $T_\oplus = 2\pi\sqrt{\frac{R_{GEO}^3}{\mu_\oplus}}$, operando:

$$1 \approx \frac{1}{1 + 3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}} + \frac{\left(\frac{3}{2R_{GEO}}\left(1 + 3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right) + 6J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^3}\right)}{\left(1 + 3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right)^2}\Delta r$$

de donde podemos despejar Δr:

$$\Delta r \approx \frac{1-\frac{1}{1+3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}}}{\frac{\left(\frac{3}{2R_{GEO}}\left(1+3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right)+6J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^3}\right)}{\left(1+3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right)^2}} = \frac{3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}}\left(1+3J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right)}{\frac{3}{2}\left(1+7J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2}\right)} \approx 2J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}} = 2{,}09 \text{ km}.$$

donde hemos usado que $J_2\frac{R_\oplus^2}{R_{GEO}^2} \ll 1$ ya que J_2 es del orden de 10^{-3} y $R_{GEO} \approx 7R_\oplus$. Esta última simplificación la hacemos para obtener una fórmula simple, pero no es realmente necesaria. Vemos que la corrección es realmente muy pequeña frente a los aproximadamente 42164 kilómetros del radio de una órbita geoestacionaria, no obstante a largo plazo evitaría desplazamientos de longitud debidos al J_2.

23. Demostrar la fórmula que aproxima la excentricidad para una "frozen orbit" de altitud constante.

    Solución: Partimos de los efectos seculares y de largo periodo del J_2 y J_3 sobre el argumento del perigeo y la excentricidad. El objetivo es que la excentricidad sea pequeña y varíe lo menos posible para que la altitud permanezca aproximadamente constante.

$$\begin{aligned}\dot\omega &= \frac{3}{4}nJ_2\frac{R_\oplus^2}{p^2}\left(5\cos^2 i-1\right)+\frac{3}{8e}nJ_3\frac{R_\oplus^3}{p^3}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} i}\left(\operatorname{sen}^2 i-e^2\cos^2 i\right)\left(5\cos^2 i-1\right),\\ \dot e &= \frac{3}{2}nJ_3\frac{R_\oplus^3}{p^3}(1-e^2)\operatorname{sen} i\cos\omega\left(\frac{5}{4}\operatorname{sen}^2 i-1\right),\end{aligned}$$

    Para hacer $\dot e = 0$, elegimos $\omega = 90^{\circ}$ u $\omega = 270^{\circ}$. Pero eso implica que tenemos también que hacer $\dot\omega = 0$ o eventualmente ω cambiará induciendo a su vez cambios en e. Es por esta razón que $e = 0$ no es una buena solución. Haciendo $\dot\omega = 0$, multiplicando la ecuación de $\dot\omega$ por p^2, y expresando $p = a(1-e^2)$, la ecuación que tiene que verificar e es:

$$0 = \frac{3}{4}nJ_2R_\oplus^2\left(5\cos^2 i-1\right)+\frac{3}{8e}nJ_3\frac{R_\oplus^3}{a(1-e^2)}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} i}\left(\operatorname{sen}^2 i-e^2\cos^2 i\right)\left(5\cos^2 i-1\right),$$

    lo cual se desarrolla en la siguiente cúbica en e:

$$C_0+C_1e+C_2e^2+C_3e^3 = 0,$$

    donde

$$\begin{aligned}C_0 &= J_3\frac{R_\oplus}{a}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen} i,\\ C_1 &= 2J_2,\\ C_2 &= -J_3\frac{R_\oplus}{a}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} i}\cos^2 i,\\ C_3 &= -2J_2.\end{aligned}$$

    La cúbica se puede resolver numéricamente, o, sabiendo que queremos encontrar una solución muy pequeña, despreciando los términos de orden superior. Si hacemos eso llegamos a:

$$e = -\frac{C_0}{C_1} = -\frac{J_3}{2J_2}\frac{R_\oplus}{a}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen} i.$$

    Efectivamente este será un valor pequeño y positivo, ya que $J_2 = 1{,}083\times10^{-3}$, $J_3 = -2{,}534\times10^{-6}$, necesariamente $a > R_\oplus$, y los dos senos obviamente son menores de uno. Obsérvese que para que sea positivo hay que elegir $\omega = 90^{\circ}$. Por tanto la aproximación de primer orden es adecuada y hemos obtenido el valor deseado. Por ejemplo, para una órbita de $i = 45^{\circ}$, $a = 8000$ km, tomando $\omega = 90^{\circ}$, obtenemos $e = 0{,}0006594$ con la aproximación. Resolviendo la cúbica con Matlab las tres soluciones son: $e = 1, -1, 0{,}0006594$, obteniendo, para la misma solución, una coincidencia al menos hasta el séptimo decimal. Para entender lo poco excéntrica que es esta órbita, observamos que las altitudes de perigeo y apogeo son $h_p = 1616{,}6$ km, $h_a = 1627{,}1$ km, muy pequeñas, por lo que se puede considerar de altitud constante.

24. Dada una órbita no ecuatorial, buscar los elementos orbitales que permiten, con la menor excentricidad posible, que un satélite en dicha órbita se encuentre una fracción f de su periodo (superior a la mitad) en el hemisferio Norte. ¿Qué elementos orbitales habrá que fijar y a qué valores?

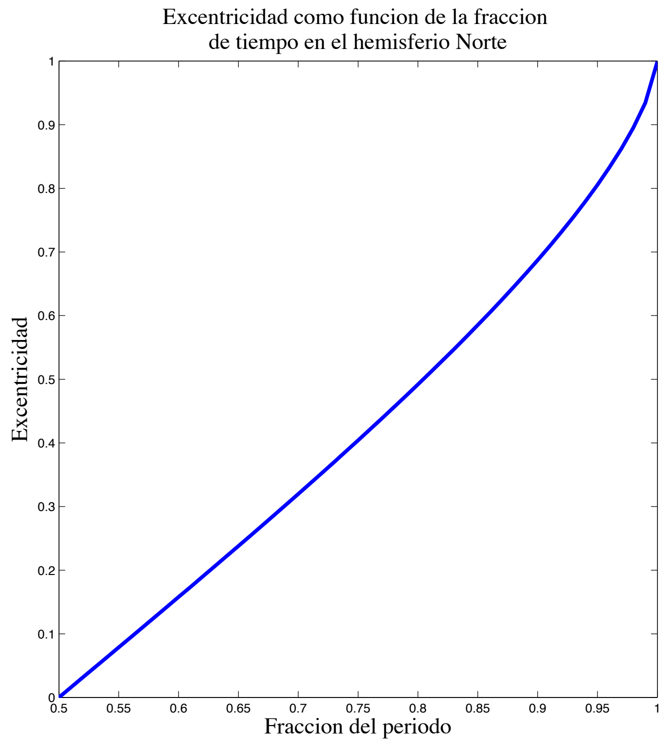
    Solución: En primer lugar la órbita debe ser excéntrica ya que si fuera circular, por simetría permanecería la mitad del tiempo en el hemisferio Norte y la mitad en el Sur. Para maximizar la permanencia en el hemisferio norte situamos el apogeo en el punto más elevado en latitud de la órbita, ya que el satélite permanecerá la mayor parte de su tiempo en las proximidades del apogeo. Por tanto se escoge $\omega = 270^o$. Ahora elegiremos el valor de la excentricidad que permite obtener el resultado. El cruce al hemisferio N sucede con $u = 0^o$ (es decir $\theta = 90^o$) y el cruce al hemisferio S con $u = 180^o$ (es decir $\theta = 270^o$). Por lo que el tiempo que permanece el satélite en el hemisferio N, T_N, será el tiempo que tarde en pasar de $\theta = 90^o$ a $\theta = 270^o$. Usando las propiedades de tiempos y simetrías de una elipse, $T_N = T - 2\Delta T(90^o)$, donde T es el periodo de la órbita y $\Delta T(90^o)$ el tiempo transcurrido entre perigeo y $\theta = 90^o$. Se quiere $T_N = fT$, es decir, $T - 2\Delta T(90^o) = fT$, de donde obtenemos $\Delta T(90^o) = \frac{(1-f)T}{2}$. Usando la anomalía media y llamando M a la anomalía media que corresponde a $\theta = 90^o$, obtenemos $\frac{M}{n} = \frac{(1-f)T}{2}$, de donde $M = \frac{1-f}{2}Tn = (1-f)\pi$. Llamando E a la anomalía media que corresponde a $\theta = 90^o$, se tendrá entonces que $E - e \operatorname{sen} E = (1-f)\pi$. Recordando que $\cos\theta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$, si sustituimos $\theta = 90^o$ obtenemos $\cos E = e$, y por tanto la ecuación que hay que resolver numéricamente es

$$E - \cos E \operatorname{sen} E = (1-f)\pi,$$

una vez obtengamos el valor de E, encontramos $e = \cos E$. Se puede resolver por ejemplo con el método de Newton, observando que la solución debe estar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, y que en dicho intervalo el lado izquierdo de la ecuación es creciente, por lo que sólo habrá una solución. La siguiente tabla resume algunos valores típicos, y la figura representa todos los posibles valores.

f	E (rad)	e
0.6	1.4124	0.1577
0.7	1.2454	0.3197
0.8	1.0566	0.4919
0.9	0.8134	0.6870
0.95	0.6345	0.8045
0.99	0.3644	0.9343

(a) Algunos valores de f y e



(b) Excentricidad en función de la fracción de periodo f

25. Comparar la maniobra de cambio de argumento del perigeo $\Delta\omega$ de un impulso con la misma maniobra realizada con dos impulsos. ¿Cuándo será más costosa una que otra?

    Solución: Como vimos en teoría, la maniobra de cambio de argumento del perigeo tenía un coste $\Delta V_\omega = 2V \operatorname{sen}\gamma$, donde γ es el ángulo de trayectoria correspondiente a $\theta = \frac{\Delta\omega}{2}$. Obsérvese que por la conservación del momento cinético, $V = \frac{h}{r\cos\gamma}$, de donde $\Delta V_\omega = 2\frac{h}{r}\tan\gamma$, y sustituyendo las expresiones de r y $\tan\gamma$ se llega a $\Delta V_\omega = 2\frac{h}{p}e \operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2} = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}}e \operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}$. Esta es la expresión más sencilla en función de elementos orbitales y $\Delta\omega$.

    Por otro lado, la maniobra de dos impulsos se efectuaría con un arco de órbita circular que uniera los perigeos (o apogeos), o lo que es lo mismo, circularizando la órbita desde el perigeo (o apogeo) y al llegar al nuevo punto de perigeo (o apogeo) volviendo a la órbita original; estos dos impulsos son iguales entre sí (y de signo contrario) en ambos casos. Llamando r_a y r_p a los radios de apogeo y perigeo, la primera opción (transferencia desde el perigeo), tendría un coste $\Delta V_p = 2\left(\sqrt{\frac{\mu}{r_p}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_a+r_p} - \frac{2\mu}{r_p}}\right)$. El coste de la segunda opción (transferencia desde el apogeo) sería $\Delta V_a = 2\left(\sqrt{\frac{2\mu}{r_a} - \frac{2\mu}{r_a+r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_a}}\right)$. Usando $r_a = a(1+e)$ y $r_p = a(1-e)$ encontramos:

$$\begin{aligned} \Delta V_p &= 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(\sqrt{\frac{2}{1-e} - 1} - \sqrt{\frac{1}{1-e}}\right) = 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1-e}} \\ \Delta V_a &= 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(\sqrt{\frac{1}{1+e}} - \sqrt{\frac{2}{1+e} - 1}\right) = 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \end{aligned}$$

Para ver cual de los dos es menor, comparemos $f_p = \frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1-e}}$ y $f_a = \frac{1-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}}$. Se tiene:

$$f_p - f_a = \frac{1+e-\sqrt{1+e}-(\sqrt{1-e}-1+e)}{\sqrt{1+e}\sqrt{1-e}} = \frac{2-\sqrt{1+e}-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}\sqrt{1-e}},$$

y llamando $C = \sqrt{1+e}+\sqrt{1-e}$, observamos que $C^2 = 2+2\sqrt{1-e^2} \leq 4$, luego $C \leq 2$, luego $f_p - f_a \geq 0$, luego $f_p \geq f_a$, es decir, es más costosa la maniobra en el perigeo. Por lo que tomamos la maniobra en el apogeo.

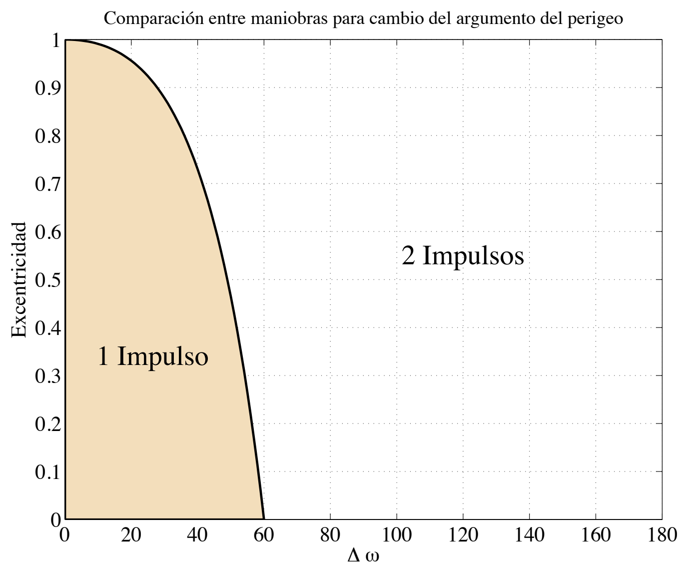
Por tanto hay que comparar $\Delta V_\omega = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}}e \operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}$ con $\Delta V_a = 2\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}}$. Vemos que

$$\frac{\Delta V_\omega}{\Delta V_a} = \frac{e \operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}}{\sqrt{1-e}-1+e} = F(e,\Delta\omega).$$

Luego para los valores para los cuales $F > 1$, conviene usar la transferencia de dos impulsos, y si $F < 1$, la ordinaria de un impulso. Estudiemos para que combinación de excentricidad y cambio del argumento del perigeo para obtener $F < 1$. Partimos de $e \operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2} < \sqrt{1-e}-1+e$. Podemos escribir $1+e(\operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}-1) < \sqrt{1-e}$. Elevando al cuadrado y como ambos lados son positivos, $1+2e(\operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}-1)+e^2(\operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}-1)^2 < 1-e$. Simplificando: $2\operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}-1+e(\operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}-1)^2 < 0$. Finalmente, despejando e:

$$e < \frac{1-2\operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}}{(\operatorname{sen}\frac{\Delta\omega}{2}-1)^2}.$$

Esta es la condición que debe verificar e para que merezca usar la trayectoria de un impulso. Obsérvese que para $\Delta\omega = 60^{\text{o}}$ se tiene que $e < 0$, por lo que si $\Delta\omega \geq 60^{\text{o}}$ nunca conviene usar un impulso. Si $\Delta\omega < 60^{\text{o}}$, entonces depende de la excentricidad. En la siguiente figura resumimos este resultado gráficamente representando la función que hemos obtenido para la excentricidad y damos algunos valores.



Problemas y cuestiones del Tema 8

(problemas o partes de problema marcados con *: para ampliar, con †:problema teórico complementario a teoría)

1. (*) Demostrar la fórmula de la esfera de influencia.
2. (†) Dada la fórmula de ΔV para una maniobra asistida por gravedad, demostrar el valor del máximo ΔV teórico, así como la excentricidad de la hipérbola que corresponde a dicha maniobra máxima. Calcular dicho máximo para los planetas del Sistema Solar.
3. ¿Cuáles son los elementos a y e de una órbita selenocéntrica si el punto de llegada de la órbita geocéntrica a la esfera de influencia lunar tiene $v = 1{,}3133$ km/s, $\gamma = 20^o$, $\lambda = 30^o$? ¿Se trata de una órbita de impacto/alunizaje?
4. Estudiar una misión lunar para $h_0 = 200$ km, $\lambda = 30^o$ y $V_i = V_0 + \Delta V = 10{,}93$ km/s. ¿Cuál es el ángulo de fase Ψ y el tiempo de vuelo? ¿Es una misión de impacto/alunizaje o de sobrevuelo? En el segundo caso, calcular el ΔV necesario para obtener una órbita lunar circular en el mínimo radio de sobrevuelo. Repetir para $\lambda = 60^o$.
5. Repetir el problema anterior para unos valores iniciales de $r_i = 6700$ km, $V_i = 10{,}88$ km/s, $\lambda = 60^o$.
6. (†) Plantear el problema del cálculo del tiempo de escape de la esfera de influencia lunar, para una misión de sobrevuelo. Aplicar al problema 5.
7. Demostrar, para el caso $\lambda = 0^o$, $h_0 = 200$ km, e inyección tangencial, que si la órbita geocéntrica es elíptica, la órbita selenocéntrica es siempre hiperbólica.
8. El Voyager 2 tardó 12 años en visitar Neptuno gracias a sus múltiples maniobras asistidas por gravedad. ¿Cuánto tiempo habría tardado de no poder realizar dichas maniobras? (usar una transferencia tipo Hohmann)
9. Se pretende realizar una misión a Venus que consta de las siguientes fases: una primera fase con escape directo desde una órbita de aparcamiento de 200 km de altitud. Una segunda fase que consiste en una transferencia de Hohmann heliocéntrica. Una tercera fase que consiste en adquirir una órbita venusiana con una altura de periapsis de 500 km y un periodo de 12 h (se supone que la órbita de llegada tiene ya una periapsis con la altitud adecuada, gracias a correcciones realizadas durante el vuelo). Encontrar el coste energético total de la misión (km/s), y el tiempo de transferencia.
10. Se desea realizar una misión interplanetaria a Mercurio mediante una transferencia tipo Hohmann. ¿Cuál es el tiempo de vuelo? ¿Cuál es el ángulo de fase inicial que debe tener Mercurio? Si se perdiera una oportunidad de lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardaría en repetirse? Considerar las órbitas de la Tierra y Mercurio coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares.
11. Se planea una misión Tierra-Saturno con cuatro fases: una primera fase con escape desde una órbita de aparcamiento de 180 km de altitud. Una segunda que consiste en una transferencia de Hohmann heliocéntrica hasta Júpiter. Una tercera en la que se realiza la maniobra asistida por gravedad, con una aproximación de 11 radios jovianos. Finalmente una nueva órbita heliocéntrica hasta Saturno. Se pide: encontrar la órbita joviana, y describir la maniobra asistida por gravedad. ¿Llega la nave a Saturno? (suponiendo éste adecuadamente ubicado en su órbita). En caso afirmativo, calcular la órbita de llegada, suponiendo una altitud de periapsis de 1000 km, y calcular ΔV para circularizar la órbita.
12. El 1 de Diciembre de 2008 el ángulo de fase entre la Tierra y Urano es de 20°. Si se quisiera realizar una misión interplanetaria directa a Urano, mediante una transferencia de Hohmann, ¿aproximadamente en qué fecha habría que realizar el lanzamiento? Si no se pudiera en dicha fecha, ¿cuándo sería la siguiente oportunidad? Calcular el C_3 necesario, y el ΔV para la inyección desde una órbita de aparcamiento a 200 km.
13. Un cometa viaja en una órbita que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con el elemento orbital $p = 9$ AU. El cometa, antes de llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2$ AU, $R_{♃} = 71492$ km), pasando a una distancia de 10 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar. Hallar la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y calcular si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra.
14. Como parte de una misión a Urano (♅) una sonda realiza una maniobra asistida por gravedad en Saturno (♄) a una distancia igual a seis veces el radio de Saturno. Suponiendo las órbitas de los planetas coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares (de radio igual a su radio medio), se pide estudiar la maniobra sabiendo que la órbita heliocéntrica de la sonda, antes de su encuentro con Saturno (que sucede justo **antes** del afelio de la sonda), tiene como elementos $a = 5{,}8$ AU y $e = 0{,}7$. Encontrar los elementos de la órbita heliocéntrica tras el encuentro y determinar si se alcanza o no la órbita de Urano. En caso afirmativo, ¿cuánto se tardaría en alcanzar Urano desde Saturno?

15. La NASA decide diseñar una misión interplanetaria para visitar Júpiter (♃). Para ello se pide comparar tres posibles escenarios:

   a) Viaje directo a Júpiter mediante una trayectoria elíptica con perihelio en la Tierra y $e = 0{,}7$, de forma que la llegada a la órbita de Júpiter sucede después del perihelio y antes del afelio.

   b) Viaje a Júpiter mediante una trayectoria parabólica (estando situado el perihelio de la parábola en la órbita de la Tierra).

   c) Viaje a Venus (♀) mediante una trayectoria parabólica (estando situado el perihelio de la parábola en la órbita de Venus), se realiza una maniobra asistida por gravedad (a una altitud de 2 veces el radio de Venus) y se continúa hacia Júpiter. (Observación: La salida de la Tierra no es tangente).

   Suponiendo que se parte de una órbita geocéntrica de aparcamiento a 150 kilómetros de altitud, calcular para los tres casos si el escenario es viable (es decir si se puede llegar a Júpiter por dicho procedimiento), el ΔV empleado a partir de la órbita de aparcamiento geocéntrica, el tiempo total de vuelo y el ángulo de fase que debe tener Júpiter el día del lanzamiento. Rellenar con los resultados la siguiente tabla:

Escenario	¿Viable o no viable?	ΔV (km/s)	T_{vuelo} (días)	ψ (^{o})
a				
b				
c				

   Si el día que se dé dicho ángulo la misión no se puede llevar a cabo, ¿cuánto tiempo habría que esperar para que se repitiera el ángulo de fase? Elegir el escenario más favorable en términos de tiempo que no supere un ΔV de $9\ \mathrm{km/s}$ desde la órbita de aparcamiento, y para dicho escenario calcular el ΔV adicional que sería necesario para dejar la sonda interplanetaria en una órbita circular en torno a Júpiter con un radio igual a 10 veces el radio del planeta.

16. Resolver las maniobras de los problemas 13,14, y 15c utilizando trigonometría.

Planeta	Símbolo	μ ($\mathrm{km^3/s^2}$)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Mercurio	☿	22032.1	2439.7	0.387098
Venus	♀	324858.8	6051.8	0.723327
Marte	♂	42828.3	3397	1.52372
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Saturno	♄	37939519.7	60268	9.58078
Urano	⛢	5780158.5	25559	19.2709
Neptuno	♆	6871307.8	24764	30.1927
Plutón	♇	1020.9	1195	39.3782

Valores de constantes físicas para planetas del Sistema Solar

Solución a los problemas y cuestiones del Tema 8

1. Demostrar la fórmula de la esfera de influencia.

   Solución:

   Para demostrar la fórmula de la esfera de influencia, supongamos que tenemos un vehículo espacial que siente la influencia de dos cuerpos, un cuerpo 1 que supondremos el más masivo de parámetro gravitatorio μ_1, y un segundo cuerpo de parámetro gravitatorio μ_2. La posición del vehículo respecto al primer cuerpo la denotaremos por $\vec{r}_1$ y al segundo cuerpo por $\vec{r}_2$, mientras que la posición del segundo cuerpo respecto al primero la denotamos por $\vec{L}$; suponemos que $L = |\vec{L}|$ es aproximadamente constante. Se cumple pues que $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{L}$.

   Si suponemos el vehículo más cercano al primer cuerpo de forma que el segundo cuerpo se puede suponer una perturbación, la ecuación diferencial que se verifica es (siguiendo el resultado de teoría del Tema 2):

   $$\ddot{\vec{r}}_1 = -\mu_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\vec{L} - \vec{r}_1}{|\vec{L} - \vec{r}_1|^3} - \mu_2 \frac{\vec{L}}{L^3}.$$

   En este caso, si comparamos (en módulo) la aceleración debida a la gravedad del primer cuerpo con la aceleración de perturbación, obtenemos la relación

   $$\frac{\mu_1 \frac{1}{r_1^2}}{\left|\mu_2 \frac{\vec{L}-\vec{r}_1}{|\vec{L}-\vec{r}_1|^3} - \mu_2 \frac{\vec{L}}{L^3}\right|}$$

   Igualmente, si suponemos el vehículo lo suficientemente próximo al cuerpo 2 de forma que el primer cuerpo se puede suponer una perturbación, la ecuación diferencial que se verifica es:

   $$\ddot{\vec{r}}_2 = -\mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \mu_1 \frac{\vec{L} - \vec{r}_2}{|\vec{L} - \vec{r}_2|^3} + \mu_1 \frac{\vec{L}}{L^3}.$$

   Estudiando como en el anterior caso la relación (en módulo) entre la aceleración debida a la gravedad del segundo cuerpo con la aceleración de perturbación, obtenemos

   $$\frac{\mu_2 \frac{1}{r_2^2}}{\left|\mu_1 \frac{\vec{L}-\vec{r}_2}{|\vec{L}-\vec{r}_2|^3} - \mu_1 \frac{\vec{L}}{L^3}\right|}$$

   La frontera de la esfera de influencia se dará cuando la primera y la segunda relación sean iguales, es decir:

   $$\frac{\mu_1 \frac{1}{r_1^2}}{\left|\mu_2 \frac{\vec{L}-\vec{r}_1}{|\vec{L}-\vec{r}_1|^3} - \mu_2 \frac{\vec{L}}{L^3}\right|} = \frac{\mu_2 \frac{1}{r_2^2}}{\left|\mu_1 \frac{\vec{L}-\vec{r}_2}{|\vec{L}-\vec{r}_2|^3} - \mu_1 \frac{\vec{L}}{L^3}\right|}.$$

   Teniendo en cuenta que $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{L}$, obtenemos:

   $$\frac{\mu_1 \frac{1}{|\vec{r}_2+\vec{L}|^2}}{\left|\mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \mu_2 \frac{\vec{L}}{L^3}\right|} = \frac{\mu_2 \frac{1}{r_2^2}}{\left|\mu_1 \frac{\vec{L}-\vec{r}_2}{|\vec{L}-\vec{r}_2|^3} - \mu_1 \frac{\vec{L}}{L^3}\right|}.$$

   Esto sucederá "cerca" del cuerpo 2, de forma que $L \gg r_2$. Por tanto: $|\vec{r}_2 \pm \vec{L}| \approx L$, $\left|\mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \mu_2 \frac{\vec{L}}{L^3}\right| \approx \mu_2 \frac{1}{r_2^2}$, de donde:

   $$\frac{\mu_1 \frac{1}{L^2}}{\mu_2 \frac{1}{r_2^2}} = \frac{\mu_2 \frac{1}{r_2^2}}{\mu_1 \frac{r_2}{L^3}},$$

   es decir: $\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} = \frac{L^5}{r_2^5}$, o despejando r_2 (la distancia al segundo cuerpo y por tanto el radio de la esfera de influencia):

   $$r_2 = L \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2/5}$$

2. Dada la fórmula de ΔV para una maniobra asistida por gravedad, demostrar el valor del máximo ΔV teórico, así como la excentricidad de la hipérbola que corresponde a dicha maniobra máxima. Calcular dicho máximo para los planetas del Sistema Solar.

   Solución:

   La fórmula de ΔV para una maniobra asistida por gravedad es:

   $$\Delta V = \frac{2V_\infty}{1 + r_p \frac{V_\infty^2}{\mu_P}}.$$

Es evidente que ΔV aumenta al disminuir el radio de periapsis r_p. El valor mínimo teórico es $r_p = R_P$, donde R_P es el radio del planeta (evidentemente en la práctica $r_p > R_P$. Por tanto:

$$\Delta V = \frac{2V_\infty}{1 + R_P \frac{V_\infty^2}{\mu_P}}.$$

Derivando con respecto a V_∞ para hallar el radio:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial V_\infty} = \frac{2\left(1 + R_P \frac{V_\infty^2}{\mu_P}\right) - 2V_\infty R_P \frac{2V_\infty}{\mu_P}}{\left(1 + R_P \frac{V_\infty^2}{\mu_P}\right)^2} = 2\frac{1 - R_P \frac{V_\infty^2}{\mu_P}}{\left(1 + R_P \frac{V_\infty^2}{\mu_P}\right)^2}.$$

Haciendo $\frac{\partial \Delta V}{\partial V_\infty} = 0$, encontramos $V_\infty = \sqrt{\frac{\mu_P}{R_P}}$, es decir la velocidad circular en el radio del planeta; con dicha V_∞ se tiene también que $\Delta V = \sqrt{\frac{\mu_P}{R_P}}$. Calculando estos valores máximos teóricos se tiene:

	ΔV (km/s)
Mercurio	3.00
Venus	7.28
La Tierra	7.90
Marte	3.54
Júpiter	43.0
Saturno	26.6
Urano	15.6
Neptuno	17.6

Figura 1: Valores máximos de la maniobra asistida por gravedad por planeta.

Puesto que $\Delta V = 2V_\infty \operatorname{sen} \delta/2$, se tiene que $\operatorname{sen} \delta/2 = 1/2$, es decir, $\delta = 60^o$, y como $\delta = 2 \operatorname{arcsen} 1/e$, obtenemos $e = 2$.

3. ¿Cuáles son los elementos a y e de una órbita selenocéntrica si el punto de llegada de la órbita geocéntrica a la esfera de influencia lunar tiene $v = 1{,}3133$ km/s, $\gamma = 20^o$, $\lambda = 30^o$? ¿Se trata de una órbita de impacto/alunizaje?

   Solución:

   Del enunciado obtenemos $v_L^G = 1{,}3133$ km/s, $\gamma_L^G = 20^o$, y además $\lambda = 30^o$. En primer lugar calculamos $R_{e\leftmoon} = L_\leftmoon \left(\frac{\mu_\leftmoon}{\mu_\oplus}\right)^{2/5} = 66183$ km. Por otro lado, $r_L \underline{/\beta} = L_\leftmoon \underline{/0^o} + R_{e\leftmoon} \underline{/180 - \lambda} = 328750 \underline{/5{,}78^o}$Km. Además $V_\leftmoon = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{L_\leftmoon}} = 1{,}0183$ km/s.

   Para la órbita selenocéntrica tenemos que $V_L^S \underline{/180 + \gamma_L^S + \lambda} = V_L^G \underline{/\gamma_L^G - \beta} - V_\leftmoon \underline{/0^o} = 0{,}411 \underline{/51{,}7021^o}$ Km/s. Por tanto, $\gamma_L^S = 51{,}7021 - 180 - \lambda = -158{,}29^o$

   Para obtener los parámetros a_S y e_S de la hipérbola selenocéntrica usamos por un lado la ecuación de las fuerzas vivas despejando $a_S = \frac{\mu_\leftmoon}{\frac{2\mu_\leftmoon}{R_{e\leftmoon}} - (V_L^S)^2} = -235130$ km, negativo como era de esperar. Por otro lado, $h_S = R_{e\leftmoon} V_L^S \cos \gamma_L^S = \sqrt{(}a_S(1 - e_S^2)\mu_\leftmoon$, luego despejamos $e_S = \sqrt{1 - \frac{\left(R_{e\leftmoon} V_L^S \cos \gamma_L^S\right)^2}{a_S \mu_\leftmoon}} = 1{,}2467$. De donde el radio del perilunio de la órbita $r_p^S = a_S * (1 - e_S) = 58011$ km $> R_\leftmoon = 1737{,}4$ km, luego la órbita es de sobrevuelo.

4. Estudiar una misión lunar para $h_0 = 200$ km, $\lambda = 30^o$ y $V_i = V_0 + \Delta V = 10{,}93$ km/s. ¿Cuál es el ángulo de fase Ψ y el tiempo de vuelo? ¿Es una misión de impacto/alunizaje o de sobrevuelo? En el segundo caso, calcular el ΔV necesario para obtener una órbita lunar circular en el mínimo radio de sobrevuelo. Repetir para $\lambda = 60^o$.

   Solución:

   En primer lugar tenemos que obtener las condiciones a la entrada de la esfera de influencia lunar, es decir, r_L, v_L^G y γ_L^G. Como en el anterior problema, obtenemos $r_L = 328750$ km y $\beta = 5{,}78^o$. Para calcular v_L^G tenemos que obtener la órbita geocéntrica. Para ello, partimos de $r_0 = R_\oplus + h_0 = 6578{,}14$ km, $v_0 = V_i$ y $\gamma_0 = 0^o$, es decir inyección tangencial y por tanto el punto de partida es el perigeo de la órbita. De la ecuación de las fuerzas vivas despejando $a_G = \frac{\mu_\oplus}{\frac{2\mu_\oplus}{r_0} - (v_0^2} = 231140$ km y puesto $h_G = r_0 v_0 = \sqrt{(}a_G(1 - e_G^2)\mu_\oplus$, despejamos $e_G = \sqrt{1 - \frac{(r_0 v_0)^2}{a_G \mu_\oplus}} = 0{,}9715$.

   De la ecuación de la cónica $r_L = \frac{a_G(1 - e_G^2)}{1 + e_G \cos \theta_L^G}$ obtenemos $\theta_L^G = 171{,}374^o$ y por tanto $\gamma_L^G = \arctan\left(\frac{e_G \operatorname{sen} \theta_L^G}{1 + e_G \cos \theta_L^G}\right) = 74{,}8516^o$. Por otro lado $v_L^G = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_L} - \frac{\mu_\oplus}{a_G}} = 0{,}837$ km/s.

Para obtener el tiempo de vuelo y el ángulo de fase de la Luna, hemos de calcular el tiempo que se tarda en recorrer θ_L^G. Usando las leyes horarias, obtenemos primero de $\tan E_L^G/2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\theta_L^G/2$ que $E_L^G = 2{,}0205$ rad y por tanto $M_L^G = E_L^G - e_G \sin E_L^G = 1{,}1455$ rad. Puesto que $n_G = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a_G^3}} = 5{,}6814\cdot 10^{-6}$ rad/s, se tiene que $t_v = M_L^G/n_G = 56$ h. Finalmente se tiene que $\psi + n_☾\, t_v = \theta_L^G - \beta$, donde $n_☾ = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{L_☾^3}}$, y se obtiene $\psi = 134{,}9937^o$.

Finalmente, repitiendo el procedimiento del anterior problema con los datos ya obtenidos llegamos a los siguientes resultados: $v_L^S = 1{,}0624$ km/s, $\gamma_L^S = -77{,}37^o$, $a_S = -5000$ km y $e_S = 3{,}2603$, luego $r_p^S = 11303$ km $> R_☾$ y la órbita es de sobrevuelo. Para circularizar la órbita habría que aplicar un ΔV igual a:

$$\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_☾}{r_p^S} - \frac{\mu_☾}{a_S}} - \sqrt{\frac{\mu_☾}{r_p^S}} = 0{,}7 \text{ km/s}.$$

Repitiendo el problema para $\lambda = 60^o$, obtenemos los siguientes resultados: $r_L = 355950$ km, $\beta = 9{,}2662^o$, a_G y e_G son los mismos, $\theta_L^G = 172{,}6536^o$, $t_v = 66{,}1259$ h, $\psi = 127{,}255^o$, $v_L^S = 0{,}9593$ km/s, $\gamma_L^S = -102{,}4292^o$ (equivalente a $\gamma_L^S = -77{,}57^o$), $a_S = -6305{,}4$ km y $e_S = 2{,}6452$. Se tiene que $r_p^S = 10448$ km $> R_☾$ y la órbita es de sobrevuelo. Para circularizar la órbita habría que aplicar un $\Delta V = 0{,}623$ km/s.

5. Repetir el problema anterior para unos valores iniciales de $r_i = 6700$ km, $V_i = 10{,}88$ km/s, $\lambda = 60^o$.

   <u>Solución:</u>

   Repitiendo el problema anterior obtenemos los siguientes resultados: $r_L = 355950$ km, $\beta = 9{,}2662^o$, $a_G = 652590$ km, $e_G = 0{,}9897$, $\theta_L^G = 166{,}54^o$, $t_v = 49{,}74$ h, $\psi = 130{,}095^o$, $v_L^S = 1{,}3568$ km/s, $\gamma_L^S = -123{,}126^o$ (equivalente a $\gamma_L^S = -56{,}87^o$), $a_S = -2896{,}2$ km y $e_S = 13{,}0614$. Se tiene que $r_p^S = 34932$ km $> R_☾$ y la órbita es de sobrevuelo. Para circularizar la órbita habría que aplicar un $\Delta V = 1{,}0302$ km/s.

6. Plantear el problema del cálculo del tiempo de escape de la esfera de influencia lunar, para una misión de sobrevuelo. Aplicar al problema 5.

   <u>Solución:</u> Para calcular el tiempo de escape, es necesario conocer la hipérbola selenocéntrica de llegada. Por tanto tomamos como dato a_S y e_S. Puesto que el radio de entrada es el de la esfera de influencia lunar, $R_{e☾}$, se tendrá que la anomalía verdadera a la llegada es

$$\theta_L^S = -\arccos\left(\frac{\frac{a_S(1-e_S^2)}{R_{e☾}} - 1}{e_S}\right),$$

   donde se toma el signo menos como solución para θ_L^S a la llegada. Conociendo θ_L^S, se puede encontrar la anomalía hiperbólica correspondiente de la ecuación

$$\tanh H/2 = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\theta_L^S/2$$

   y de la ecuación de Kepler hiperbólica, $N = e\,\mathrm{senh}\, H - H$, donde N es la anomalía media hiperbólica. Finalmente $t = N/n$, donde $n = \sqrt{\frac{\mu_☾}{-a_S^3}}$, y el tiempo de la maniobra será $T_{MAN} = 2t$, ya que se debe llegar al perilunio y luego volver a salir de la esfera de influencia.

   Aplicándolo al problema anterior, partimos de $a_S = -2896{,}2$ km y $e_S = 13{,}0614$. Calculamos de la ecuación de la cónica $r_{e☾} = \frac{a_S(1-e_S^2)}{1+e_S\cos\theta_L^S}$ el valor $\theta_L^S = 60{,}55^o$, de donde $H = 1{,}21$, $N = 18{,}75$, $n_S = \sqrt{\frac{\mu_☾}{-a_S^3}} = 4{,}4924\cdot 10^{-4}$, y por tanto $t = 41731$ s $= 11{,}59$ h, luego se llega a $T_{MAN} = 2t = 23{,}18$ h.

7. Demostrar, para el caso $\lambda = 0^o$, $h_0 = 200$ km, e inyección tangencial, que si la órbita geocéntrica es elíptica, la órbita selenocéntrica es siempre hiperbólica.

   <u>Solución:</u> Si $\lambda = 0$, entonces también $\beta = 0$ y $r_L = L_☾ - R_{e☾}$. Por tanto $(V_L^S)^2 = (V_L^G)^2 + V_☾^2 - 2V_L^G V_☾ \cos\gamma_L^G$.

   Para que la órbita sea hiperbólica, tiene que suceder que la energía específica de la órbita selenocéntrica sea positiva, es decir $\varepsilon_S = \frac{(V_L^S)^2}{2} - \frac{\mu_☾}{R_{e☾}} > 0$, o lo que es lo mismo, $(V_L^S)^2 > 2\frac{\mu_☾}{R_{e☾}}$.

   Llamemos V_i a la velocidad de inyección en la órbita de aparcamiento. Por conservación del momento cinético, $V_i r_0 = V_L^G r_L \cos\gamma_L^G$ y por tanto $V_L^G\cos\gamma_L^G = \frac{V_i r_0}{r_L}$. Igualmente, por conservación de la energía, $V_i^2/2 - \frac{\mu_\oplus}{r_0} = (V_L^G)^2/2 - \frac{\mu_\oplus}{r_L}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación del párrafo anterior:

$$(V_L^S)^2 = V_i^2 - 2\mu_\oplus\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_L}\right) + V_☾^2 - 2V_☾\frac{V_i r_0}{r_L},$$

y aplicando la condición anteriormente expuesta para que la órbita sea hiperbólica, se ha de cumplir

$$V_i^2 - 2\mu_\oplus\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_L}\right) + V_☾^2 - 2V_☾\frac{V_i r_0}{r_L} - 2\frac{\mu_☾}{R_{e☾}} > 0.$$

En esta ecuación todo es conocido excepto V_i. Por tanto esta ecuación es del tipo $V_i^2 + BV_i + C > 0$. Para ver si se verifica siempre, buscamos el mínimo de la función $V_i^2 + BV_i + C$.

Usando el cálculo, vemos que matemáticamente el mínimo se da en $V_i = -B/2$; por tanto el mínimo es $C - B^2/4$ y hay que ver si es positivo. En nuestro caso, $B = -2V_☾\frac{r_0}{r_L}$, luego $V_i = V_☾\frac{r_0}{r_L} = 0{,}02$ km/s, un valor tan pequeño que no se llegaría a la luna, luego el análisis no es válido.

Por tanto hay que buscar el valor mínimo de velocidad con el que se llega a la esfera de influencia lunar, y ver si con dicho valor $V_i^2 + BV_i + C > 0$. La mínima velocidad sucede con un radio de apogeo igual a r_L. En tal caso, la velocidad de inyección será $V_i = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_0} - \frac{2\mu_\oplus}{r_0+r_L}} = 10{,}897$ km/s, un valor más razonable. Con este valor, $V_i^2 + BV_i + C = 0{,}4808$ km^2/s^2, un valor positivo, luego la órbita es hiperbólica.

8. El Voyager 2 tardó 12 años en visitar Neptuno gracias a sus múltiples maniobras asistidas por gravedad. ¿Cuánto tiempo habría tardado de no poder realizar dichas maniobras? (usar una transferencia tipo Hohmann)

   Solución:

   El semieje mayor de la transferencia de Hohmann sería $a_H = \frac{L_\oplus + L_♆}{2} = 15{,}596$ AU. Por tanto, $T_H = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_\odot}} = 193{,}5$ UT $= 11249$ dias $= 30{,}8$ años.

9. Se pretende realizar una misión a Venus que consta de las siguientes fases: una primera fase con escape directo desde una órbita de aparcamiento de 200 km de altitud. Una segunda fase que consiste en una transferencia de Hohmann heliocéntrica. Una tercera fase que consiste en adquirir una órbita venusiana con una altura de periapsis de 500 km y un periodo de 12 h (se supone que la órbita de llegada tiene ya una periapsis con la altitud adecuada, gracias a correcciones realizadas durante el vuelo). Encontrar el coste energético total de la misión (km/s), y el tiempo de transferencia.

   Solución:

   En primer lugar calculamos la transferencia de Hohmann de la segunda fase. Encontramos $a_H = \frac{a_\oplus + a_♀}{2} = 0{,}8617$ AU. Por tanto la velocidad a la salida de la Tierra (en el sistema de referencia heliocéntrico) será $V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_\oplus} - \frac{\mu_\odot}{a_H}} = 0{,}9162$ UV, y por tanto la velocidad a la salida de la Tierra en el sistema de referencia geocéntrico será $V_\infty = 2{,}495$ km/s, con la asíntota de la hipérbola oponiéndose a la velocidad de la Tierra. Esto significa que el semieje mayor de la hipérbola será $a_1 = -\frac{\mu_\oplus}{V_\infty^2} = -64009$ km, y por tanto el ΔV de inyección es $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} - \frac{\mu_\oplus}{a_1}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 3{,}5$ km/s.

   Por otro lado, de a_H obtenemos el tiempo de transferencia como $T_H = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_\odot}} = 2{,}51$ UT $= 146{,}08$ dias.

   Finalmente, la velocidad a la llegada en el sistema de referencia heliocéntrico es $V_2 = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_♀} - \frac{\mu_\odot}{a_H}} = 1{,}267$ UV y puesto que $V_♀ = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{L_♀}} = 1{,}176$ UV, la velocidad de llegada en el sistema de referencia de Venus es $V_{\inf}^♀ = V_2 - V_♀ = 2{,}71$ km/s. Luego la hipérbola venusina de llegada tiene un semieje mayor $a_2 = -\frac{\mu_♀}{(V_\infty^♀)^2} = -44344$ km.

   Se quiere llegar a una órbita en Venus con un periodo de 12 horas, lo que implica que el semieje mayor tiene $a_3 = \left(\mu_♀\left(\frac{12\cdot 3600}{2\pi}\right)^2\right)^{1/3} = 24856$ km, y la periapsis se encuentra a $r_3 = R_♀ + 500 = 6551{,}8$ km. Por tanto, la maniobra de circularización requerirá un $\Delta V_3 = \sqrt{\frac{2\mu_♀}{r_3} - \frac{\mu_♀}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_♀}{r_3} - \frac{\mu_♀}{a_3}} = 1{,}04$ km/s. Luego el consumo total de combustible vendrá dado por $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_3 = 4{,}544$ km/s.

10. Se desea realizar una misión interplanetaria a Mercurio mediante una transferencia tipo Hohmann. ¿Cuál es el tiempo de vuelo? ¿Cuál es el ángulo de fase inicial que debe tener Mercurio? Si se perdiera una oportunidad de lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardaría en repetirse? Considerar las órbitas de la Tierra y Mercurio coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares.

Solución:

Considerando sólo el tiempo de la transferencia de Hohmann, puesto que $a_H = \frac{L_\oplus + L_☿}{2} = 0{,}6935$ AU, se tiene que $T_H = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_\odot}} = 1{,}8145$ UT $= 105{,}48$ dias.

El ángulo de fase inicial ψ será tal que $\psi + n_☿ T_H = 180^o$. De modo que $\psi = 180^o - n_☿ T_H = -251{,}6749^o = 108{,}33^o$.

Si se pierde la oportunidad habrá que esperar un tiempo igual al periodo sinódico de Mercurio, que es:

$$T_☿^{\text{sin}} = \frac{1}{\frac{1}{T_☿^H} - \frac{1}{T_\oplus^H}} = 115{,}877 \text{ dias}.$$

11. Se planea una misión Tierra-Saturno con cuatro fases: una primera fase con escape desde una órbita de aparcamiento de 180 km de altitud. Una segunda que consiste en una transferencia de Hohmann heliocéntrica hasta Júpiter. Una tercera en la que se realiza la maniobra asistida por gravedad, con una aproximación de 11 radios jovianos. Finalmente una nueva órbita heliocéntrica hasta Saturno. Se pide: encontrar la órbita joviana, y describir la maniobra asistida por gravedad. ¿Llega la nave a Saturno? (suponiendo éste adecuadamente ubicado en su órbita). En caso afirmativo, calcular la órbita de llegada, suponiendo una altitud de periapsis de 1000 km, y calcular ΔV para circularizar la órbita.

Solución:

Numeremos los diferentes puntos de interés: 1 será la salida de la Tierra, 2 la llegada a Júpiter, 3 la salida de Júpiter y 4 la llegada a Saturno. El superíndice H se referirá al sistema de referencia heliocéntrico y si no usará como superíndice el símbolo del planeta correspondiente. Se usarán unidades canónicas heliocéntricas en los tramos heliocéntricos, y unidades físicas en los planetocéntricos.

En primer lugar estudiemos la transferencia tipo Hohmann entre la Tierra y Júpiter. Se tiene que $a_H = \frac{L_\oplus + L_♃}{2} = 3{,}102$ AU. La velocidad heliocéntrica a la salida de la Tierra será $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_\oplus} - \frac{\mu_\odot}{a_H}} = 1{,}3$ UV. Por tanto $V_1^\oplus = V_\infty^\oplus = 0{,}3$ UV $= 8{,}793$ km/s. Por tanto $C_3 = (V_\infty^\oplus)^2 = 77{,}32$ km^2/s^2. Obsérvese que $C_3 = -\frac{\mu_\oplus}{a_{h1}}$ donde a_{h1} es el semieje mayor de la hipérbola de salida de la Tierra. Puesto que el radio de la órbita de aparcamiento es $r_0 = R_\oplus + 180 = 6558{,}14$ km, se tiene entonces que $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_0} + C_3} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_0}} = 6{,}3062$ km/s.

Ahora, la nave llega a Júpiter con $V_2^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_♃} - \frac{\mu_\odot}{a_H}} = 0{,}2489$ UV. Por tanto, $V_2^♃ = V_\infty^♃ = V_♃ - V_2^H = 0{,}1895$ UV $= 5{,}6432$ km/s; siendo $\beta = 180^o$, ya que $V_{infty}^♃$ y $V_♃$ tienen sentido opuesto. Puesto que para la maniobra asistida por gravedad $r_p = 11R_♃ = 786412$ km, usando la fórmula del incremento de velocidad para maniobras asistidas por gravedad llegamos a que $\Delta V = 9{,}424$ km/s y que $\delta = 113{,}2257^o$. Eso implica que $e = 1{,}1976$ y que $a = -3978900$ km. Por otro lado, se tiene que $V_3^H \angle \gamma_3^H = V_\infty^♃ \angle \beta - \delta + V_♃ \angle 0^o = 16{,}1386 \angle 18{,}7424^o$ km/s $= 0{,}5418 \angle 18{,}7424^o$ UV. Conocidos estos parámetros de la órbita, obtenemos que $a_3 = \frac{\mu_\odot}{\frac{2\mu_\odot}{L_♃} - (V_3^H)^2} = 11{,}016$ AU y puesto $h_3 = L_♃ V_3^H \cos\gamma_3^H = \sqrt{a_3(1-e_3^2)\mu_\odot}$, despejamos $e_3 = \sqrt{1 - \frac{\left(L_♃ V_3^H \cos\gamma_3^H\right)^2}{a_3\mu_\odot}} = 0{,}5941$. Por tanto el afelio de esta órbita es $r_a = 17{,}56$ AU $> L_♄ = 9{,}58$ AU, luego la sonda llega a Saturno.

Las condiciones al llegar a Saturno son $V_4^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_♄} - \frac{\mu_\odot}{a_3}} = 0{,}3435$ UV y $\gamma_4^H = \arccos\left(\frac{\cos\gamma_3^H L_♃ V_3^H}{L_♄ V_4^H}\right) = 35{,}7748^o$. Finalmente $V_\infty^♄ \angle \beta = V_4^H \angle \gamma_4^H - V_♄ \angle 0^o = 0{,}2056 \angle 102{,}46^o$ UV $= 6{,}125 \angle 102{,}46^o$ km/s. Luego $a_♄ = -\frac{\mu_♄}{(V_\infty^♄)^2)} = -1011300$ km, y del radio de periapsis se obtiene $e_♄ = 1{,}0606$. Finalmente la última maniobra de circularización requiere un ΔV que se calcula como $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_♄}{r_p^♄} - \frac{\mu_♄}{a_♄}} - \sqrt{\frac{\mu_♄}{r_p^♄}} = 10{,}8366$ km/s.

12. El 1 de Diciembre de 2008 el ángulo de fase entre la Tierra y Urano es de 20^o. Si se quisiera realizar una misión interplanetaria directa a Urano, mediante una transferencia de Hohmann, ¿aproximadamente en qué fecha habría que realizar el lanzamiento? Si no se pudiera en dicha fecha, ¿cuándo sería la siguiente oportunidad? Calcular el C_3 necesario, y el ΔV para la inyección desde una órbita de aparcamiento a 200 km.

Solución:

Para calcular la solución, en primer lugar calculamos la transferencia de Hohmann. Se tiene que $a_H = \frac{L_{\oplus}+L_{⛢}}{2} = 10{,}1355$ AU. Por tanto $T_H = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_{\odot}}} = 101{,}37$ UT $= 16{,}134$ años. El ángulo de fase ψ en el lanzamiento ha de ser tal que $\psi + n_{⛢}T_H = 180^{\circ}$, ya que se trata de una transferencia tipo Hohmann, donde $n_{⛢} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{L_{⛢}^3}}$. Se llega a $\psi = 111{,}3431^{\circ}$. Puesto que el ángulo de fase el 1 de Diciembre de 2008 es de 20 grados, hay que calcular la velocidad angular n_{ψ} con la que se mueve el ángulo de fase. Se tiene que $n_{\psi} = n_{⛢} - n_{\oplus} = -0{,}9882$ rad/UT. Puesto que es negativo, lo que hacemos para obtener una respuesta con sentido es considerar el ángulo inicial como 380° en vez de 20°. Por tanto $\Delta T = \frac{\psi - 380^{\circ}}{n_{\psi}} = 4{,}7449$ UT $= 275{,}84$ dias, luego hay que esperar al 3 de Septiembre de 2009. Si no se pudiera realizar el lanzamiento dicho día, la siguiente oportunidad se daría una vez transcurrido el periodo sinódico de Urano, que es $T_{⛢}^{\text{sin}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{\oplus}^H} - \frac{1}{T_{⛢}^H}} = 369{,}6262$ dias, es decir, aproximadamente el 7 de Septiembre de 2010.

La velocidad a la salida en la órbita heliocéntrica sería $V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{L_{\oplus}} - \frac{\mu_{\odot}}{a_H}} = 1{,}3789$ UV, luego $V_{\infty} = 0{,}3789$ UV $= 11{,}2851$ km/s y el $C_3 = V_{\infty}^2 = 127{,}35$ km^2/s^2. Obsérvese que de la ecuación de las fuerzas vivas $C_3 = -\frac{\mu_{\oplus}}{a}$, donde a es el semieje mayor de la hipérbola de salida. Por tanto, el ΔV a aplicar en la órbita de aparcamiento será $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_0} + C_3} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_0}} = 7{,}981$ km/s.

13. Un cometa viaja en una órbita que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con el elemento orbital $p = 9$ AU. El cometa, antes de llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\text{km}^3/\text{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2$ AU, $R_{♃} = 71492$ km), pasando a una distancia de 10 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar. Hallar la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y calcular si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra.

    Solución: En primer lugar hallemos el estado de la órbita al llegar a la esfera de influencia de Júpiter. Esto sucederá cuando $r = L_{♃}$. Hallamos $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r}} = 18{,}47$ km/s, $\theta = \arccos\left(\frac{p}{r} - 1\right) = -43{,}14^{\circ}$ (se coge la solución negativa ya que sucede antes del perihelio), y $\gamma_1^H = \frac{\theta}{2} = -21{,}57^{\circ}$ (también se puede usar la fórmula del formulario para hallar γ). Por otro lado $V_{♃} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r}} = 13{,}06$ km/s.

    Formando el triángulo, calculamos $V_1^{♃}\angle\beta = V_1^H\angle\gamma_1^H - V_{♃}\angle 0^o = 7{,}94\angle -58{,}774^o$ km/s , y usando la fórmula de la maniobra asistida por gravedad con $r_p = 10R_{♃}$, encontramos $\Delta V = 11{,}71$ km/s y $\delta = 95{,}07^{\circ}$.

    Ahora existen dos opciones, o bien $V_2^{♃}\angle\beta - \delta$ (y resulta un ángulo de trayectoria negativo) o bien $V_2^{♃}\angle\beta + \delta$ y resulta un ángulo de trayectoria positivo. Como nos dicen en el enunciado que se deflecta la órbita al interior del sistema solar, tomamos la primera opción. Por tanto, $V_2^H\angle\gamma_2^H = V_2^{♃}\angle\beta - \delta + V_{♃}\angle 0^o = 6{,}89\angle -30{,}54^o$ km/s.

    Despejando ahora a de la ecuación de las fuerzas vivas para la nueva órbita, $a = 3{,}02$ AU, por lo que el resultado de la maniobra ha sido una elipse heliocéntrica. Por otro lado usamos $h = L_{♃}V_2^H\cos\gamma_2^H = \sqrt{a(1-e^2)\mu_{\odot}}$ y despejamos $e = 0{,}803$. Por tanto el nuevo perihelio de la órbita es $R_p = a(1-e) = 0{,}6$ AU $< L_{\oplus} = 1$ AU, por lo que el cometa alcanzará la órbita de la Tierra (otra cosa es que pase cerca de la Tierra, pero para eso ya habría que estudiar la geometría del Sistema Solar para el periodo de tiempo en el que aparece el cometa).

14. Como parte de una misión a Urano (⛢) una sonda realiza una maniobra asistida por gravedad en Saturno (♄) a una distancia igual a seis veces el radio de Saturno. Suponiendo las órbitas de los planetas coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares (de radio igual a su radio medio), se pide estudiar la maniobra sabiendo que la órbita heliocéntrica de la sonda, antes de su encuentro con Saturno (que sucede justo **antes** del afelio de la sonda), tiene como elementos $a = 5{,}8$ AU y $e = 0{,}7$. Encontrar los elementos de la órbita heliocéntrica tras el encuentro y determinar si se alcanza o no la órbita de Urano. En caso afirmativo, ¿cuánto se tardaría en alcanzar Urano desde Saturno?

    Solución:

    En primer lugar calculamos los datos del encuentro con Saturno: $\theta_1^H = 170{,}94^{\circ}$, $\gamma_1^H = 19{,}66^{\circ}$, $V_1^H = 0{,}19$ UV. Por otro lado $V_{♄} = 0{,}3231$. Del triángulo de velocidades obtenemos $V_1^{♄}\angle\beta = V_1^H\angle\gamma_1^H - V_{♄}\angle 0^o = 0{,}1577\angle 156{,}089^o$ UV $= 4{,}68\angle 156{,}089^o$ km/s, luego $\Delta V = 7{,}75$ km/s y $\delta = 111{,}6^{\circ}$. Luego, o tomamos $V_2^{♄}\angle\beta - \delta$ (y resulta un ángulo de trayectoria positivo) o $V_2^{♄}\angle\beta + \delta$ (y resulta un ángulo de trayectoria negativo), como despuÈs de la maniobra la sonda se deflecta al exterior del sistema solar, tomamos la primera opciÛn, $V_2^H\angle\gamma_2^H = V_2^{♄}\angle\beta - \delta + V_{♄}\angle 0^o = 0{,}4494\angle 14{,}24^o$ UV. De aquí los elementos orbitales tras el encuentro son $a = 143{,}38$ AU y $e = 0{,}9373$. Evidentemente se alcanza la órbita de Urano. Para calcular el tiempo, observamos que justo tras el encuentro $\theta_2^H = 29{,}28^{\circ}$ y al llegar a Urano $\theta_3^H = 95{,}9^{\circ}$. Por lo que es un problema de tiempo de vuelo. Calculando los resultados, obtenemos

$\Delta T(\theta_2^H) = 10{,}33$ UT y $\Delta T(\theta_3^H) = 58{,}62$ UT, luego $T = \Delta T(\theta_3^H) - \Delta T(\theta_2^H) = 48{,}29$ UT $= 2807$ dias $= 7{,}69$ años.

15. La NASA decide diseñar una misión interplanetaria para visitar Júpiter (♃). Para ello se pide comparar tres posibles escenarios:

   a) Viaje directo a Júpiter mediante una trayectoria elíptica con perihelio en la Tierra y $e = 0{,}7$, de forma que la llegada a la órbita de Júpiter sucede después del perihelio y antes del afelio.

   b) Viaje a Júpiter mediante una trayectoria parabólica (estando situado el perihelio de la parábola en la órbita de la Tierra).

   c) Viaje a Venus (♀) mediante una trayectoria parabólica (estando situado el perihelio de la parábola en la órbita de Venus), se realiza una maniobra asistida por gravedad (a una altitud de 2 veces el radio de Venus) y se continúa hacia Júpiter. (Observación: La salida de la Tierra no es tangente).

Suponiendo que se parte de una órbita geocéntrica de aparcamiento a 150 kilómetros de altitud, calcular para los tres casos si el escenario es viable (es decir si se puede llegar a Júpiter por dicho procedimiento), el ΔV empleado a partir de la órbita de aparcamiento geocéntrica, el tiempo total de vuelo y el ángulo de fase que debe tener Júpiter el día del lanzamiento. Rellenar con los resultados la siguiente tabla:

Escenario	¿Viable o no viable?	ΔV (km/s)	T_{vuelo} (días)	ψ (^{o})
a				
b				
c				

Si el día que se dé dicho ángulo la misión no se puede llevar a cabo, ¿cuánto tiempo habría que esperar para que se repitiera el ángulo de fase? Elegir el escenario más favorable en términos de tiempo que no supere un ΔV de 9 km/s desde la órbita de aparcamiento, y para dicho escenario calcular el ΔV adicional que sería necesario para dejar la sonda interplanetaria en una órbita circular en torno a Júpiter con un radio igual a 10 veces el radio del planeta.

Solución:

Se describe la solución para cada escenario. Las figuras (triángulos y trayectorias heliocéntricas) se encuentran en la siguiente página. La tabla solución es la siguiente:

Escenario	¿Viable o no viable?	ΔV (km/s)	T_{vuelo} (días)	ψ (^{o})
a	Sí	6.47	736.50	102.96
b	Sí	8.75	404.71	94.39
c	Sí	17.67	423.73	160.00

a) En este caso la elipse heliocéntrica tiene como elementos $e = 0{,}7$ y el elemento a hay que obtenerlo sabiendo que $r_p = a(1-e) = 1$ AU. Por tanto $a = 3{,}33$ AU. El afelio de la órbita será $r_a = a(1+e) = 5{,}67$ AU luego es viable. La velocidad al salir de la esfera de influencia de la Tierra será $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_\oplus} - \frac{\mu_\odot}{a}} = 1{,}3038$ UV luego en el sistema de referencia geocéntrico $v_\infty = V_1^H - V_\oplus = 0{,}3039$ UV $= 9{,}0498$ km/s. Por tanto $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} - \frac{\mu_\oplus}{a_{hip}}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 6{,}47$ km/s. Para calcular el tiempo de vuelo observamos que en el encuentro con Júpiter se tiene $L_♃ = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_2}$, luego $\theta_2 = 164{,}1195^o$. De las leyes horarias $E_2 = 2{,}5$ rad, $M_2 = 2{,}0818$ rad, y como $n = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a}} = 0{,}1643$ rad/UT, obtenemos $T = 12{,}67$ UT $= 736{,}4964$ dias. Finalmente para calcular el ángulo de fase observamos que $\psi + n_♃ T = \theta_2$, con $n = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{L_♃}} = 0{,}0843$ rad/UT de donde $\psi = 102{,}9611^o$.

b) El segundo escenario es análogo al primero exceptuando el hecho de que la órbita heliocéntrica es parabólica. Como el perihelio están en la Tierra y para parábolas $r_p = p/2$, obtenemos $p = 2$ AU. Obviamente la parábola cortará con la órbita de Júpiter luego es viable. La velocidad al salir de la esfera de influencia de la Tierra será $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_\oplus}} = \sqrt{2}$ UV luego en el sistema de referencia geocéntrico $v_\infty = V_1^H - V_\oplus = \sqrt{2} - 1$ UV $= 12{,}3372$ km/s. Por tanto $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 8{,}75$ km/s. Para calcular el tiempo de vuelo observamos que en el encuentro con Júpiter se tiene $L_♃ = \frac{p}{1+\cos\theta_2}$, luego $\theta_2 = 127{,}9976^o$. De las leyes horarias $B = 7{,}3841$ y obtenemos $T = 6{,}9618$ UT $= 404{,}7054$ dias. Finalmente para calcular el ángulo de fase, como antes, $\psi + n_♃ T = \theta_2$, luego $\psi = 94{,}3910^o$.

c) En el tercer escenario tenemos que encontrar en primer lugar las condiciones tanto de la llegada a Venus como de la salida de la Tierra. En primer lugar como $r_p = p/2$, obtenemos $p = 1{,}4467$ AU. El ángulo a la salida de la Tierra θ_1 se calcula de $L_\oplus = \frac{p}{1+\cos\theta_1}$, luego $\theta_1 = -63{,}4708^o$. Igualmente $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_\oplus}} = \sqrt{2}$ UV y el ángulo de trayectoria en parábolas es $\gamma_1 = \theta_1/2 = -31{,}7354^o$. Formando un triángulo a la salida de la Tierra obtenemos que $v_\infty\underline{/\beta} = V_1^H\underline{/\gamma_1} - V_\oplus\underline{/0^o} = 0{,}771\underline{/-74{,}75}$ UV $= 22{,}9644\underline{/-74{,}75}$ km/s. Por tanto $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 17{,}67$ km/s (lo cual es indudablemente excesivo y haría este escenario no viable por razones técnicas; en cualquier caso seguimos adelante en la resolución del problema). La duración de este tramo Tierra-Venus lo calculamos de las leyes horarias, obteniendo $B = 1{,}0406$ y por tanto $T_1 = 0{,}6067$ UT (posteriormente se le sumará el tramo Venus-Júpiter). Por otro lado obsérvese que la llegada a Venus es tangente (al estar en el perihelio), teniéndose que $V_2^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_♀}} = 1{,}6628$ UV. Por tanto $V_2^♀\underline{/\beta} = v_\infty\underline{/\beta} = V_2^H\underline{/0^o} - V_♀\underline{/0^o} = 0{,}487\underline{/0^o}$ UV $= 14{,}5061\underline{/0^o}$ km/s. Calculando la maniobra asistida por gravedad con las fórmulas del formulario obtenemos $\Delta V = 2{,}2737$ km/s y $\delta = 8{,}9897^o$. Realizando la maniobra de forma que la sonda interplanetaria se propulse hacia el exterior del Sistema Solar, tendríamos $V_3^H\underline{/\gamma_3^H} = V_3^♀\underline{/\beta+\delta} + V_♀\underline{/0^o} = 1{,}6585\underline{/2{,}6297^o}$ UV. Calculando la cónica resultante por los procedimiento usuales obtenemos $a = 71{,}0819$ AU, $e = 0{,}9898$, cuyo afelio evidentemente está por encima de la órbita de Júpiter, luego (en términos de llegar a la órbita de Júpiter) el escenario será "viable". Los cortes con las órbitas de Venus y Júpiter vienen dados respectivamente por $\theta_2 = 5{,}2867^o$ y $\theta_3 = 137{,}0037^o$, luego de leyes horarias obtenemos $\Delta T_2 = 0{,}0402$ UT y $\Delta T_3 = 6{,}7225$ UT, por lo que la duración de este segmento es $T_2 = \Delta T_3 - \Delta T_2 = 6{,}6824$ UT. Sumando ambas partes de la trayectoria, $T = T_1 + T_2 = 7{,}289$ UT $= 423{,}73$ dias. Finalmente el ángulo de fase verificará $\psi + n_♃ T = -\theta_1 + \theta_3 - \theta_2$ de donde $\psi = 160{,}0014^o$.

Finalmente y siguiendo las indicaciones del escenario, para circularizar se elige el escenario b. Como $\theta_2 = 127{,}9976^o$ se tendrá que $\gamma_2 = 64^o$, además $V_2^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_♃}}$ y del triángulo de velocidades: $V_{infty}\underline{/\beta} = V_2^H\underline{/\gamma_2} - V_♃\underline{/0^o} = 0{,}5817\underline{/106{,}66^o}$ UV Elegimos que el perijovio de la hipérbola coincida con el de la órbita deseada (a 10 veces el radio de Júpiter) y por tanto el ΔV para circularizar será una frenada tangente con $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_♃}{10R_♃} - \frac{\mu_♃}{a_{hip}}} - \sqrt{\frac{\mu_♃}{10R_♃}} = \sqrt{\frac{2\mu_♃}{10R_♃} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu_♃}{10R_♃}} = 12{,}27$ km/s.

16. Resolver las maniobras de los problemas 13,14, y 15c utilizando trigonometría.

<u>Solución:</u> Hay que tener cuidado porque β no está medida en la misma dirección por lo que sale un valor diferente que en las soluciones usando fasores, pero el resultado final es el mismo.

a) Para el problema 13, considerando γ_1^H positivo pero orientado hacia abajo (hacia el Sol), obtenemos $v_\infty = V_1^♃ = \sqrt{V_♃^2 + (V_1^H)^2 - 2V_1^H V_♃ \cos\gamma_1^H} = 7{,}94$ km/s, y obtenemos $\delta = 95{,}07^o$. El ángulo β lo obtenemos de $\beta = \arcsin\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma_1^H V_1^H}{V_1^♃}\right) = 121{,}22^o$. Propulsamos el vehículo más hacia el interior, luego $\alpha = \beta - \delta$, y por tanto, $\alpha = 26{,}15^o$, y obtenemos: $V_2^H = \sqrt{V_♃^2 + V_\infty^2 - 2V_\infty V_♃ \cos\alpha} = 6{,}9$ km/s $= 0{,}23$ UV, $\gamma_2^H = \arcsin\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha V_\infty}{V_2^H}\right) = 30{,}54^o$ (realmente hay que tomar $\gamma_2^H = -30{,}54^o$), obteniendo los mismos resultados que en la resolución con fasores.

b) Para el problema 14, del triángulo de velocidades obtenemos $V_1^♄ = V_2^♄ = v_\infty = \sqrt{V_♄^2 + (V_1^H)^2 - 2V_1^H V_♄ \cos\gamma_1^H} = 0{,}1572$ UV $= 4,68$ km/s, luego $\delta = 111{,}6^o$. Tenemos que $\beta = \arcsin\left(V_1^H \frac{\operatorname{sen}\gamma_1^H}{v_\infty}\right) = 24{,}07^o$, propulsamos el vehículo hacia el exterior,luego $\alpha = \beta + \delta = 135{,}68^o$, , llegando a $V_2^H = \sqrt{V_♄^2 + (V_2^♄)^2 - 2V_♄ V_2^♄ \cos\alpha} = 0{,}4492$ UV y $\gamma_2^H = \frac{V_2^♄}{V_2^H}\sin\alpha = 14{,}16^o$, obteniendo los mismos resultados que en la resolución con fasores.

c) Para el problema 15c, $V_2^♀ = v_\infty = V_2^H - V_♀ = 0{,}487$ UV $= 14{,}5061$ km/s y obtenemos $\delta = 8{,}9897^o$. Propulsando el vehículo hacia el exterior $\alpha = 180 - \delta = 171{,}01^o$. Resolviendo el triángulo obtenemos por tanto $V_3^H = \sqrt{V_♀^2 + (V_3^♀)^2 - 2V_♀ V_3^♀ \cos\alpha} = 1{,}6586$ UV y $\gamma_3^H = \frac{V_3^♀}{V_3^H}\sin\alpha = 2{,}6298^o$, obteniendo los mismos resultados que en la resolución con fasores.

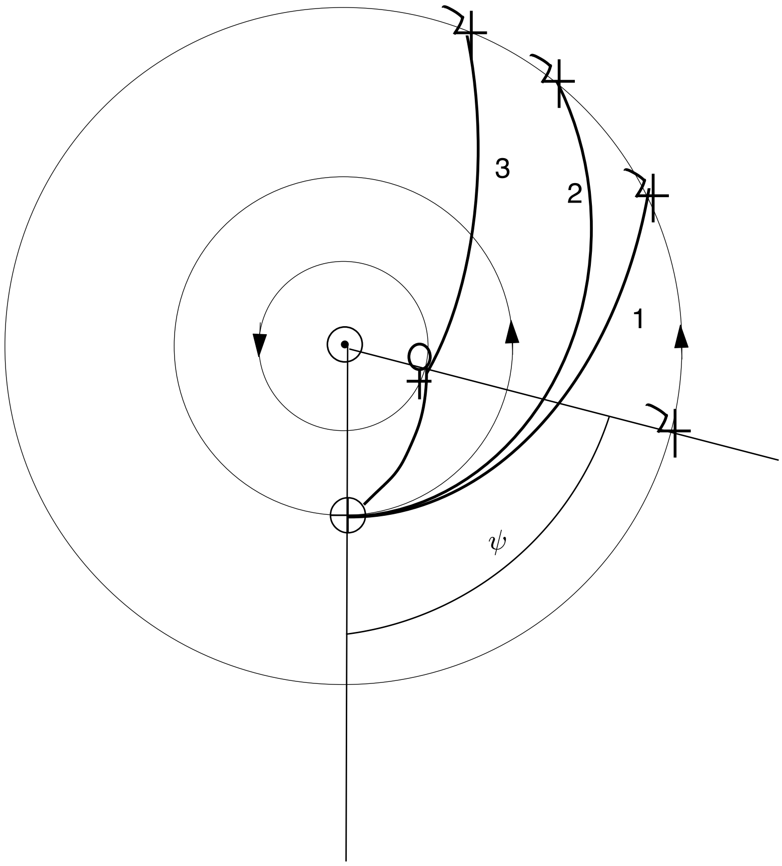


Figura 2: Trayectorias heliocéntricas de los diferentes escenarios (1=a,2=b,3=c) y definición del ángulo de fase ψ.

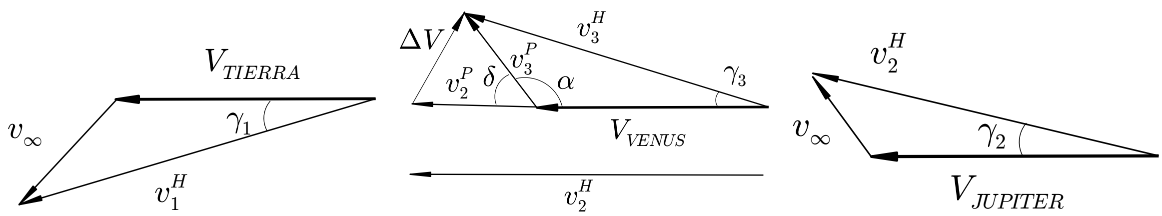


Figura 3: Triángulos de velocidades. Izquierda: salida de la Tierra en el escenario 3. Centro: maniobra asistida por gravedad del escenario 2 (se saca v_2^H del triángulo por claridad). Derecha: llegada a Júpiter.

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas 40 minutos

Grado en Ingeniería Aeroespacial Escuela Técnica Superior de Ingeniería Universidad de Sevilla	N$^{\mathrm{o}}$DNI ______ 1$^{\mathrm{er}}$Apellido ______ 2$^{\mathrm{do}}$Apellido ______ Nombre ______	Curso 22/23 26/1/23	
		Problemas	

Valor total:8 puntos.

1. (**2 puntos**) Responda brevemente las siguientes preguntas de teoría:
   a) Defina efemérides, analemma, año tropical.
   b) Enumere (sin necesidad de definir) los sistemas de referencias vistos en la asignatura y nombre las coordenadas angulares que se usan en cada uno.
   c) Describa brevemente los dos efectos seculares que genera el achatamiento de la tierra al perturbar una órbita Kepleriana (efectos seculares del J2).
   d) Tras adimensionalizar las ecuaciones del movimiento del problema circular de 3 cuerpos, ¿De cuantos parámetros dependen? Describa brevemente la naturaleza física y/o geométrica de dicho/s parámetro/s y su orden de magnitud en casos reales (como pueden ser Tierra-Luna, Sol-Júpiter, Marte-Phobos)
   e) Ordene los puntos de Lagrange según el valor de su constante de Jacobi (C) de menos a más energéticos, y comente como cambian las áreas (en el problema plano) de estados alcanzables cuando se superan los valores de C para cada equilibrio. Puede ayudarse de un diagrama con equilibrios de Lagrange del sistema.
   f) Describa brevemente las fuentes primarias que se suelen usar en satélites, sus cualidades y el tipo de misiones que mas se adecuan a sus ventajas y desventajas
   g) De los sistemas vistos en la asignatura, ¿cuáles serían fundamentales para el correcto funcionamiento del James Webb Telescope (o para vehículos con instrumentos del mismo tipo) y por qué?

2. (**2 puntos**) Dibuje de forma aproximada la traza de un satélite geosíncrono y circular tal que $i = 60^{\mathrm{o}}$, $u(t_0) = 45$, GST(t_0)=120º, $\Omega = 105^{\mathrm{o}}$. Repita el problema para $i = 120^{\mathrm{o}}$ y el resto de elementos orbitales iguales.

3. (**4 puntos**) La NASA lanzó la misión Double Asteroid Redirection Test (DART) para demostrar la posibilidad de desviar un asteroide de su órbita en caso de que fuera una amenaza para la Tierra. El asteroide escogido para demostrar la misión, en realidad, es un sistema binario llamado Didymos 65803, compuesto por un asteroide primario (Didymos) de 780 metros de diámetro y un pequeño asteroide que orbita al primario a modo de luna, llamado Dimorphos, con un tamaño de 160 metros de diámetro, que fue con el que de hecho se impactó. En este problema se pretende simular una versión muy simplificada de la misión usando los métodos aprendidos para misiones interplanetarias (salidas y entradas por hipérbolas, esferas de influencia, etc, si bien en este caso no habrá maniobra asistida por gravedad), tratando a Didymos como si se tratara de un planeta, pero, OJO su órbita es excéntrica y no se puede suponer circular, así que el problema tendrá variantes respecto a las misiones interplanetarias estándar típicas, aunque sí supondremos que todos los cuerpos y el vehículo orbitan en el plano de la eclíptica para no complicarlo en exceso. Los parámetros relevantes de Didymos son: $a_D = 1{,}6442 AU$, $e_D = 0{,}38385$, y $\mu_D = 3{,}16 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$.
   a) ¿Que tamaño tendría la esfera de influencia de Didymos si la órbita fuera se pudiera suponer circular? ¿Cree que el procedimiento de ajuste de cónicas que se va a usar, empleando la esfera de influencia y llegadas y salidas hiperbólicas, ofrecerá resultados realistas?
   b) Estudie primero el viaje interplanetario.Para ello, asuma que se parte de una órbita geocéntrica de aparcamiento a 180 km de altitud, contenida en el plano de la eclíptica, desde donde comienza la parte de la misión que se quiere diseñar, y que se da un impulso tangente de $\Delta V = 3{,}4\ \mathrm{km/s}$, de forma que la velocidad de exceso de la hipérbola resultante se suma, en el sistema de referencia heliocéntrico, a la de la Tierra en relación al Sol (es decir salida tangente). ¿Sería suficiente este ΔV para alcanzar la órbita de Didymos? Suponiendo que así sea, y sabiendo que se tardaron 10 meses (de 30 días) en alcanzar Didymos, y que se alcanzó antes de que este llegara a su afelio, encuentre las condiciones en el encuentro tanto para la sonda DART como para Didymos (radio, velocidad de cada objeto, ángulo de trayectoria de cada objeto) y plantee el triángulo para encontrar el valor de V_∞ con el que la sonda entra en la esfera de influencia de Didymos (OJO: este triángulo no es igual que el típico de otras misiones interplanetarias puesto que Didymos no se puede suponer en órbita circular, pero no es complejo de obtener recordando que simplemente hay que aplicar la relación vectorial, posiblemente planteada en fasores: velocidad heliocéntrica de DART = velocidad de DART respecto a Didymos + velocidad de Didymos). ¿Cuál sería el ángulo de fase de Didymos al principio de la misión (definido como usualmente)? Pinte las trayectorias de la sonda y de Didymos en el sistema de referencia heliocéntrico.

(**Sigue por detrás**)

c) En segundo lugar, para el impacto con Dimorphos, suponga que dicha luna se encuentra en una órbita circular directa de 1.19 km en torno a Didymos. ¿Es congruente tener una luna a esta distancia, considerando el radio de la esfera de influencia de Didymos? Sin realizar ninguna maniobra, decida cual sería la hipérbola apropiada para DART al entrar en la esfera de influencia de Didymos para maximizar el efecto del impacto, fijando su radio de periapsis y si es directa o retrógrada (lado iluminado o lado en sombra de Dydimos). Usando el valor de V_∞ calculado en el anterior apartado encuentre la velocidad relativa entre Dimorphos y la sonda en el instante del impacto. Sabiendo que DART tiene una masa de 570 kg y Dimorphos una masa de $5{\cdot}10^9$ kg, y suponiendo que toda la cantidad de movimiento de DART se transfiere a Dimorphos, calcule el ΔV que el impacto ejerce en Dimorphos y su dirección, y como se modifica su órbita a raíz de dicho impacto. Dibuje la trayectoria de impacto, y la órbita de Dimorphos antes y después, en torno a Didymos. ¿Sería observable la modificación de la órbita de Dimorphos, a pesar de la enorme diferencia en masas?

d) A raíz del resultado obtenido en el anterior apartado, razone por qué la NASA eligió realizar la demostración usando específicamente este sistema binario de asteroides.

Observación 1: si no sabe realizar este problema tal y como se plantea, simplifíquelo en el apartado b) suponiendo la órbita de Didymos circular (en cuyo caso todo se vuelve bastante estándar, pero ya no se tardarían 10 meses en alcanzarlo sino que habría que calcular dicho tiempo) o si no ha sido capaz de calcular el V_∞ suponga uno en el apartado c) conmensurable en orden de magnitud con los hallados en otros problemas de la asignatura que se hayan hecho en la preparación del examen.

Observación 2: Los órdenes de magnitud que se obtienen en el segundo apartado del problema pueden parecer extraños debido al pequeño valor de μ_D.

Observación 3: En los apartados b) y c) se piden dibujos que son necesarios para obtener toda la puntuación.

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, **adjuntar los razonamientos, resultados intermedios y fórmulas empleadas**.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

<u>Solución:</u>

1. (**2 puntos**) Pregunta de teoría.

2. (**2 puntos**) Es importante saber la forma de estas trazas de teoría antes de empezar a trabajar, ya que son muy específicas y son de las especificadas en clase como "preguntables". Consúltense las transparencias (Tema 5, página 46) o los problemas (Problema 16 del boletín de problemas del tema 5) para más detalles. Obsérvese también que es inútil perder tiempo calculando las coordenadas geográficas del punto que se da en el enunciado, los valores se usarán para obtener los puntos notables que son los importantes.

   Para ambos casos (directo y retrógrado), hay que comenzar calculando la longitud del nodo ascendente (☊). Obsérvese en primer lugar que como $n = \omega_\oplus$, $u_{\text{☊}} = 0^{\text{o}} = u(t_0) + \omega_\oplus(t_{\text{☊}} - t_0)$. Ahora, de la ecuación de la traza en $t_{\text{☊}}$ y como $\lambda_u(\text{☊}) = 0^{\text{o}}$ tenemos: $\Omega = GST(t_0) + \omega_\oplus(t_{\text{☊}} - t_0) + \lambda(\text{☊}) = GST(t_0) - u(t_0) + \lambda(\text{☊})$. Luego por tanto: $\lambda(\text{☊}) = \Omega - GST(t_0) + u(t_0) = 105 - 120 + 45 = 30^{\text{o}}$E. El caso retrógrado no difiere ya que igualmente $u_{\text{☊}} = \lambda_u(\text{☊}) = 0^{\text{o}}$.

   Con esto ya es posible pintar el caso retrógrado: un "ocho" tumbado que recorre todo el mapa, siempre hacia el O, con los nodos en 30ºE y los puntos de máxima y mínima latitud a 60ºN/S en $30 - 180 = -150^{\text{o}} = 150^{\text{o}}W$. Se marca uno de ellos como A en la figura 1.

   Para el caso directo, hay que calcular la "caja" donde se encuentra el 8. Evidentemente, el máximo y mínimo será 60º. Los puntos de tangencia estarán a una ϕ que sale de hacer $\dot{\lambda} = 0$, es decir $\phi = \arccos(\sqrt{\cos i}) = 45^{\text{o}}$ N/S. Sea t_1 el valor de tiempo con el que se recorre el primero de estos puntos, de S a N. Para este valor de ϕ, encontramos $u(t_1) = 54{,}7356^{\text{o}}$. Obsérvese como antes, $u(t_1) = u(t_0) + \omega_\oplus(t_1 - t_0)$. También hallamos $\lambda_u(t_1) = 35{,}2644^{\text{o}}$. Ahora, de la ecuación de la traza en t_1 tenemos: $\Omega + \lambda_u(t_1) = GST(t_0) + \omega_\oplus(t_1 - t_0) + \lambda(t_1) = GST(t_0) + u(t_1) - u(t_0) + \lambda(t_1)$ de donde $\lambda(t_1) = \Omega + \lambda_u(t_1) - GST(t_0) - u(t_1) + u(t_0) = \lambda(t_{\text{☊}}) + \lambda_u(t_1) - u(t_1) = 10{,}5287^{\text{o}}$ E. Este es el punto B marcado en la figura. Por simetría ya se puede dibujar. Se pueden ver los dos dibujos conjuntos en la figura 1, así como la "caja" donde se ubica el "ocho" del caso directo.

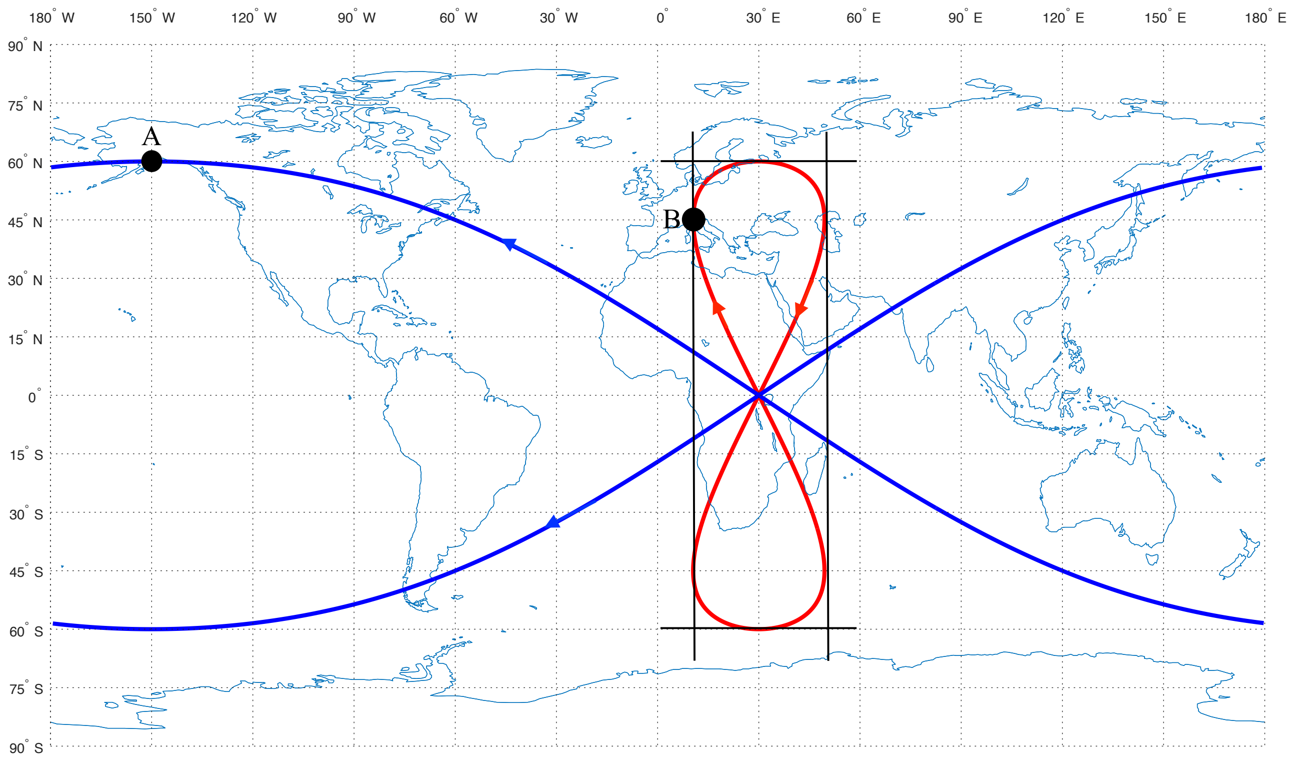


Figura 1: Trazas del problema 2, caso directo (rojo) y retrógrado (azul). Se ha marcado el único punto que hace falta pintar para extraer la forma de la traza usando simetría, y en particular con trazos negros la "caja" donde estaría contenido el caso directo.

3. (**4 puntos**) Respuestas:

   a) Utilizando la fórmula de la esfera de influencia tomando el semieje mayor como si fuera el radio de una órbita circular, obtenemos $R_e = 8{,}741$ km. Tiene perfecto sentido considerar dicha esfera de influencia un punto en el sistema de referencia heliocéntrico. Esta esfera de influencia es 20 veces el radio de Didymos. Como referencia el radio de la esfera de influencia terrestre es 144 veces el radio de la Tierra. Por tanto los resultados empleando hipérbolas serán como mucho aproximados. Al menos, de cara al apartado c), la órbita de Dimorphos está dentro de dicha esfera de influencia, como cabía esperar.

b) En primer lugar, con la metodología usual y de la fórmula $V_{park} + \Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + V_\infty^2}$, obtenemos $V_\infty =$ 1,9479 km/s. Por tanto $V_0^H = 1{,}0654$ UV. De ahí, y usando el procedimiento usual considerando el perihelio de la órbita en la Tierra, los elementos orbitales relevantes de la órbita heliocéntrica de DART son $a = 1{,}1561$ AU, $e = 0{,}1351$. Se puede observar que la órbita de Didymos tiene su perihelio (1.0130 AU) situado entre el perihelio (1 AU) y el afelio (1.3123 AU) de DART, luego algunos radios de Dydimos son accesibles para DART, es decir podríamos decir que la órbita en principio se alcanza, aunque visto en el plano orbital, las órbitas de DART y Dydimos podrían cortarse o no cortarse según estén orientadas. Puesto que en el enunciado nos afirman que se cortan a los 10 meses, asumimos que la orientación es apropiada para que se produzca el corte. Puesto que DART empieza en su perihelio, de leyes horarias obtenemos que en 10 meses, que son 5.16 UT, el valor $\theta_1^H = 225{,}91^o$, de donde $\gamma_1^H = -6{,}11^o$, $r_1^H = 1{,}2528$ AU y $V_1^H = 0{,}8553$ UV. Para ese mismo valor de radio, y antes de su afelio, los valores para Dydimos son $\theta_D^H = 71{,}934^o$, $\gamma_D^H = 18{,}0615^o$, $V_D^H = 0{,}9940$ UV. Véase la figura 2 (ojo: no es exactamente esa situación geométrica pero es una figura genérica del encuentro entre dos curpos en el sistema de referencia heliocéntrico simple de entender). Usando estos valores en la ecuación fasorial $V_1^D \angle \beta = V_D^H \angle \theta_D^H - V_1^H \angle \gamma_1^H$, obtenemos $V_\infty = V_1^D = 0{,}4103$UV y en físicas $V_\infty = 12{,}2219$ km/s. En este caso, calcular el ángulo de fase es diferente al ser la órbita de Didymos excéntrica, tendríamos $\psi_D = \theta_1^H - \Delta\theta_D$, donde $\Delta\theta_D$, el ángulo recorrido por Didymos en 10 meses, se calcula como $\Delta\theta_D = \theta_D^H - \theta_{D0}^H$ donde θ_{D0}^H es la posición inicial de Didymos al empezar la misión; con leyes horarias aplicadas a la órbita de Didymos y retrocediendo 10 meses, hallamos $\theta_{D0}^H = -140{,}96^o$ (conviene escribirlo negativo para que $\Delta\theta_D$ salga positivo) y por tanto $\Delta\theta_D = 212{,}90^o$ y $\psi_D = 13^o$.

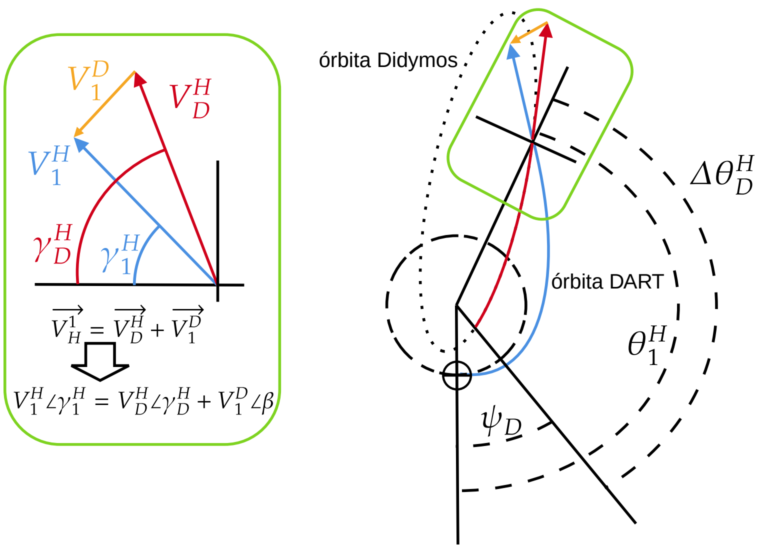


Figura 2: Ejemplo de órbitas en el sistema de referencia heliocéntrico con detalle del triángulo de velocidades (ojo: no se corresponde exactamente a los valores del problema, y la órbita de Didymos está siempre por encima de la Tierra y no como en la figura, pero es más sencillo comprender los conceptos aplicados en la situación de la figura).

c) En la figura 3 se pueden ver las dos opciones, congruentes con la dirección de V_∞, pero puesto que la órbita de Dimorphos se supone circular y coplanaria (suponemos $a = 1{,}19$ km aunque el enunciado es ambiguo y se podría tomar ese valor como altitud) con la llegada, la dirección de V_∞ en sí no juega ningún papel. La diferencia por tanto entre los dos casos consiste en que en un caso la órbita de llegada es retrógrada y en el otro es directa. Los valores de la velocidad de la sonda en el impacto, ignorando el radio del propio Dimorphos, son $V_{DART} = \sqrt{\frac{2\mu_D}{r_{dim}} + V_\infty^2} = 12{,}2219$ km/s y la velocidad de Dimorphos es $V_{dim} = \sqrt{\frac{\mu_D}{r_{dim}}} = 0{,}1629$ m/s (obsérvese la diferencia de unidades!!). Suponiendo que en el impacto la cantidad de movimiento se conserva (es decir no hay disipación ninguna, lo cual puede ser mucho suponer) y que DART pasa a formar parte de Dimorphos, la velocidad de Dimorphos tras el impacto será $V'_{dim} = \frac{m_{dim} V_{dim} \pm m_{DART} V_{DART}}{m_{dim} + m_{DART}} \approx V_{dim} \pm \frac{m_{DART}}{m_{DART}} V_{DART}$. Donde el signo dependerá de por donde sea la aproximación. Es decir, aproximadamente la maniobra equivaldría a $\Delta V = V_{DART} \frac{m_{DART}}{m_{dim}} = 0{,}0013933$ m/s, apenas poco más de 1 mm/s!!, que es pequeño pero conmensurable con la velocidad del propio Dimorphos de dm/s.

Elegimos el caso retrógrado (donde se chocan "de frente"), pero los resultados son similares en el otro caso y sería igualmente buena la solución (de hecho tiene algo más de efecto, pero en realidad no es tan buena idea alejar la órbita de Dimorphos acercándola a la esfera de influencia). Se puede asimilar por tanto a una maniobra donde una órbita circular se vuele excéntrica al frenarla en un punto, que se transforma en el apoapsis, mientras que el punto diametralmente opuesto se transforma en periapsis. Con el procedimiento usual calculamos los nuevos elementos orbitales de Dimorphos: $a' = 1{,}1700$ km, $e' = 0{,}0293$, de forma que el periapsis de Dimorphos es ahora de 1.1358 km, es decir, hay una diferencia de 54 metros respecto a la anterior órbita circular y además el periodo ha cambiado en una cantidad apreciable de tiempo (1147 segundos de diferencia o 19.12 minutos); estos cambios son medibles para poder comprobar el éxito de la misión, a pesar de la enorme diferencia de masas entre Dimorphos y la sonda DART.

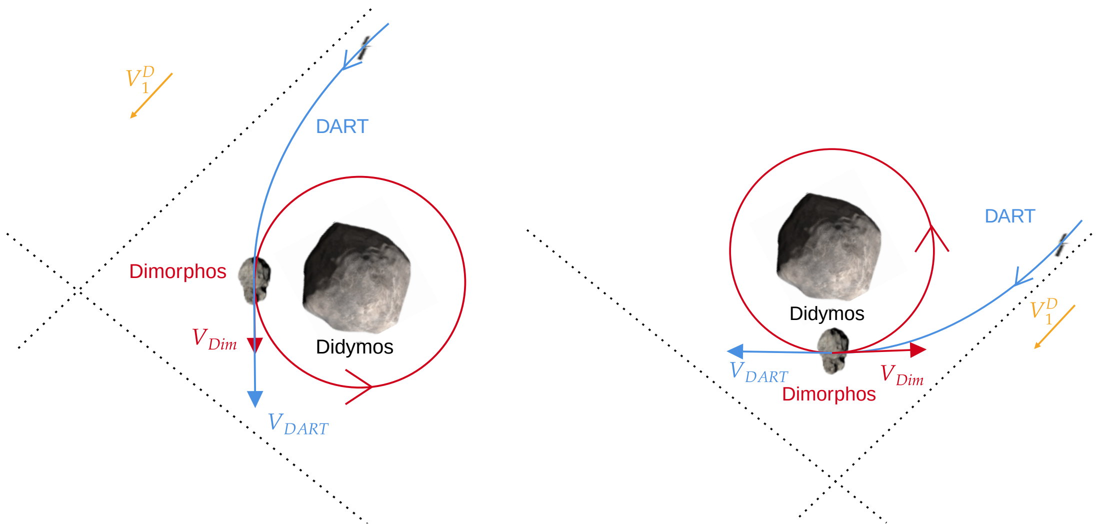


Figura 3: Órbitas en el sistema de referencia de Didymos, dos posibles elecciones de acercamiento por dos caras diferentes.

d) De lo observado en el enunciado, se trata de una misión astutamente elegida: Didymos 65803 se encuentra lo suficientemente cerca de la Tierra como para no necesitar emplear mucho combustible en la misión. El impacto contra el propio Didymos sería casi inapreciable, pero al impactar contra el más pequeño Dimorphos que orbita un cuerpo poco masivo, es posible modificar la órbita lo suficiente para poder ser medida pero no tanto como para afectar a la estabilidad del sistema binario. Y finalmente, la órbita heliocéntrica del propio Didymos 65803 no se modifica apreciablemente a raíz de esta demostración, con lo que no se altera la órbita de ningún asteroide con las consecuencias impredecibles que ello podría tener. Además (esto no se puede deducir del enunciado, evidentemente) el plano orbital de Dimorphos en torno a Didymos es tal que se puede observar frontalmente desde la Tierra y calcular el periodo con el que orbita en torno a su primario por las modificaciones periódicas de brillo, observando rápida y fácilmente si este cambia.

Observación: La misión real fue, obviamente, más compleja, y concluyó en Septiembre de 2022, aunque además la misión desplegó, antes del impacto, un Cubesat (LICIACUBE) en el sistema Didymos para observar la consecución de la misión el cual SI volvió al espacio heliocéntrico (es decir, se podría decir que realizó una maniobra asistida por gravedad en Didymos). La ESA planea la misión Hera para 2024, para revisitar Didymos 65803 y observar en detalle los efectos de la colisión en la superficie de Dimorphos.

Fundamentalmente, la misión es un “milagro” de la navegación y el guiado espacial, si se piensa en la precisión requerida para poder impactar en un cuerpo de 160 metros a millones de kilómetros de distancia con un “disparo” prácticamente balístico y pequeñas correcciones. Se empleó propulsión eléctrica (continua) en algunos arcos de la órbita de DART, se realizaron varios impulsos de corrección y se observaron otros asteroides; aquí se puede observar una animación de las órbitas `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Animation_of_DART_trajectory_around_Sun.gif`. Las órbitas en torno a Didymos están altamente perturbadas, y la aproximación de cuerpo circular no da valores perfectos, nada es coplanario, el modelo de impacto se ha simplificado mucho (de hecho, es reseñable que Didymos ha adquirido una estela, como si fuera un cometa, debido a los restos del impacto, ver `https://www.bbc.com/mundo/noticias-63144259`) pero aún así es notable que en realidad la modificación del periodo fue de 32 minutos, no tan lejos del valor obtenido. Este valor no era el esperado, se había fijado que la misión sería exitosa con un cambio de 73 segundos o más y se esperaban en torno a 10 minutos, por lo que la misión fue todo un éxito. Para más información: `https://dart.jhuapl.edu/Mission/index.php`

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 3 horas

Ingenieros Aeronáuticos	$\mathrm{N^o}$DNI	______	Curso 22/23
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido	______	16/12/22
	2^{do}Apellido	______	
Universidad de Sevilla	Nombre	______	**Problemas**

Valor total:10 puntos.

1. (**1,5 puntos**) Supongamos que, en una misión interplanetaria, se llega a la esfera de influencia de un planeta (con parámetro gravitatorio μ_P) con una cierta v_∞, y que se quiere permanecer orbitando en torno a dicho planeta. Recordemos que el radio de periapsis con el que se llega lo puede fijar el diseñador de la misión, pero existe un radio mínimo R_{min} que vendrá dado por las condiciones ambientales del planeta (radiación, etc). Supongamos que no se puede realizar una maniobra de aerobraking. Si la órbita final que se desea alcanzar es una órbita $r_p \times r_a$ (sin que importe el resto de elementos orbitales), donde $r_p > R_{min}$, estudie **razonadamente** una forma eficiente (en términos de combustible) para alcanzar dicha órbita y describa la maniobra o maniobras para ello.

2. (**4,5 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Urano (⛢) cuyo objetivo es alcanzar una órbita en Urano con periapsis $10R_⛢$ y apoapsis $20R_⛢$. Para realizar un análisis preliminar de la misión, se supone que el lanzador deja la sonda en una órbita geocéntrica de aparcamiento a 150 km de altitud, contenida en el plano de la eclíptica, desde donde comienza la parte de la misión que se quiere diseñar. Puesto que una transferencia directa es muy costosa y lenta, se decide realizar una maniobra asistida por gravedad en Júpiter (♃). Para llegar a Júpiter, se aplica en la órbita de aparcamiento un impulso tangente de $\Delta V = 6{,}38$ km/s, de forma que la velocidad de exceso de la hipérbola resultante se sume, en el sistema de referencia heliocéntrico, a la de la Tierra en relación al Sol. ¿Es suficiente este ΔV para alcanzar Júpiter? En caso afirmativo, en Júpiter se realiza una maniobra asistida por gravedad con una **altitud** de 19 radios jovianos. ¿Alcanza finalmente la misión Urano? Justificar la respuesta y en caso afirmativo concluir la misión **aplicando el apartado anterior** (si no se ha resuelto, use la solución más sencilla), suponiendo que uno se puede acercar a Urano un **radio minimo** igual a $1{,}1R_⛢$. Finalmene, calcular el tiempo total de vuelo de la misión y encontrar cuales deberían ser los ángulo de configuración (ángulos de fase) tanto de Júpiter como de Urano en el lanzamiento. Calcule también el coste total de la misión, en términos de combustible, si el combustible empleado tiene un impulso específico I_{sp} de 200 segundos y la masa de la sonda que se quiere hacer llegar a Urano es de 300 kg.

   Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Datos:

Planeta	Símbolo	μ ($\mathrm{km^3/s^2}$)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Urano	⛢	5780158.5	25559	19.2709

3. (**2,5 puntos**) La agencia espacial rusa desea poner en órbita un satélite cartográfico que obtendrá fotos de Ucrania. Los requisitos son los siguientes:

   a) El satélite debe pasar **cada 5 o menos días** exactamente sobre Kiev (latitud $50{,}45^{\mathrm{o}}$N, longitud $30{,}52^{\mathrm{o}}$E), cruzando de Sur a Norte, y siempre lo hará a la misma hora solar media.

   b) En particular debe pasar por Kiev el 17 de Diciembre de 2022.

   c) La órbita será circular y del tipo amanecer—atardecer.

   d) El satélite tendrá una altitud entre 370 y 400 kilómetros.

   Datos: $GST_0 = 100^{\mathrm{o}}$ el 17 de diciembre de 2022.

   ¿Qué tipo de órbita se va a emplear? ¿Cada cuántas revoluciones del satélite se repite la traza? Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época del 17 de diciembre a las 00:00 UT.

   ¿Cuál es la hora solar media cuando el satélite pasa por Dallas el 17 de diciembre de 2022?

   Pasados tres meses, ¿cuál es la hora solar media a su paso por Dallas?

En la resolución del problema se debe tener en cuenta (cuando sea razonable hacerlo) la perturbación media del J2 (otras perturbaciones se pueden ignorar). El propagador medio J2 para una órbita circular viene dado por:

$$a = a_0,\ e = e_0,\ i = i_0,\ \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0),\ u = u_0 + (\dot{\omega} + \dot{M})(t - t_0),$$

donde los valores de $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ y $\dot{M}$ vienen en el formulario.

4. (**1,5 puntos**) [CAMBIAR] Responda a las siguientes preguntas de forma breve:

   a) ¿Cuál es la diferencia entre rendezvous e intercepción?

   b) Históricamente, ¿cuáles son las diferencias entre el procedimiento seguido por EEUU y el seguido por la URSS/Rusia para llevar a cabo un rendezvous?

   c) Nombre 3 misiones donde el rendezvous era/es una parte crítica de la misión.

   d) Defina los puntos de Lagrange y comente su estabilidad. Explique donde se ubican cuando uno de los dos cuerpos es mucho más masivo que el otro.

   e) Defina una órbita Halo. ¿Por qué se usan? ¿Son estas órbitas estables? Nombre 2 misiones que hayan hecho, estén haciendo o vayan a hacer uso de este tipo de órbitas.

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, **adjuntar los razonamientos, resultados intermedios y fórmulas empleadas**.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Grado en Ingeniería Aeroespacial	N^{o}DNI ______	Curso 22/23
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido ______	28/10/22
	2doApellido ______	
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total 7,5 puntos.

Datos comunes: El 28 de octubre de 2022, GST$_0$=230º. Época (T_0): 28/10/22 a las 00:00.

1. (**2 puntos**) Responda a las siguientes dos preguntas:

   a) Encuentre el azimut y elevación del Sol el día de hoy (28/10/22), durante el mediodía solar, en Quito ($0°13'$ S $78°31'$ O), suponiendo que en el año actual el Equinoccio de Otoño fue el día 21 de septiembre.

Azimut=180º Elevacion= 76.5º

   b) Sea un objeto en órbita baja circular en torno a la Tierra, a una altitud de unos 500 kilómetros. ¿A qué perturbaciones estará sometido dicho objeto? ¿Qué perturbación tendrá mayor orden de magnitud? ¿Qué perturbación será más determinante a largo plazo? El "area-to-mass ratio" (A/M) se define como el cociente entre el área y la masa de un objeto. ¿Qué perturbaciones dependerán del A/M y cómo será esa dependencia? (es decir, al aumentar el A/M, ¿disminuye o aumenta la magnitud de la perturbación?) Finalmente, y en base a la respuesta obtenida, compare la posible evolución de dos fragmentos de basura espacial, modelados como objetos esféricos de densidad homogénea, orbitando inicialmente a 500 kilómetros, uno modelado como esfera de radio 10 milímetros y otro como esfera de radio 10 metros, ambos con la misma densidad. ¿Cuál cree que tardaría más en re-entrar y por qué?

2. (**2,5 puntos**) El 28/10/2021 a las 04:00 UT (denótese este instante como T_2) se observa un satélite con la siguiente posición y velocidad, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ UV}.$$

   ¿Cuáles son sus elementos orbitales en la época T_0? Escriba los ángulos pedidos en grados y a en UD.

   Nota: Si algún elemento orbital no estuviera bien definido, táchelo y escriba el correcto.

Elementos orbitales: $a = 2$ UD $e = 0$ $i = 90°$ $\cancel{\omega}$ $\Omega = 225°$ $\cancel{\theta(T_0)}$ $u(T_0) = 178{,}45°$

   Dibuje con la mayor precisión posible la traza del satélite (una revolución, comenzando en T_2).

3. (**3 puntos**) En $T_1 = 28/10/22$ a las 12:00, un satélite sobrevuela Kiev (coordenadas geográficas 30°31'E, 50°27'N), cruzando justo hacia el Oeste (es decir en ese instante su movimiento no tiene ni componente Norte ni Sur), obteniéndose con sensores su velocidad $v = 6{,}9214$ km/s, su ángulo de trayectoria $\gamma = -4{,}3513°$, y su altitud $h = 1398{,}77$ km. En base a estos datos:

   a) Determine los elementos orbitales en T_0.

   Nota: Si algún elemento orbital no estuviera bien definido, táchelo y escriba el correcto.

Elementos orbitales: $a = 7300$ km $e = 0{,}1$ $i = 129{,}55°$ $\omega = 225°$ $\Omega = 171°$ $\theta(T_0) = 237{,}96°$

   b) Suponiendo que el satélite tenga a bordo un instrumento con ángulo de visión $\alpha = 30°$, ¿Se encuentra Kiev en T_1 dentro de la cobertura instrumental? ¿Y cinco minutos después?

Kiev cubierta en T_1: SI/~~NO~~	Kiev cubierta en T_1 + 5 minutos: ~~SI~~/NO	(táchese lo que no proceda)

   c) Cuál es la elevación que tiene el satélite, visto de Kiev, en T_1. ¿Y cinco minutos después? ¿Es consistente con el resultado anterior?

Elevación(T_1)=90º Elevación($T_1 + 5$ min)=23.055º

Nota: Si no consigue obtener alguno de los elementos orbitales, suponga un valor (razonable) para poder tratar de responder los apartados siguientes.

Solución:

1. (**2 puntos**) Solución a las cuestiones:

   a) En primer lugar es necesario encontrar $\delta_{\odot}$. Para ello, calculamos $u_{\odot} = 180^{\rm o} + (9+28)\frac{360}{365{,}25} = 216{,}46^{\rm o}$. Del triángulo esférico de la "órbita" del Sol, obtenemos $\delta_{\odot} = \operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\epsilon \operatorname{sen} u_{\odot}\right) = -13{,}7^{\rm o}$ y finalmente puesto que el Sol se encuentra más al Sur que Quito, siguiendo el problema 2c del examen del 28/11/20 o haciendo un dibujo específico de la geometría del problema, obtenemos $h = 90 + \delta_{astrosun} - \phi = 76{,}5^{\rm o}$. El azimut será 180º al encontrarse el Sol (relativo a un observador en Quito, al mediodía solar) en dirección Sur.

   b) El objeto estará sometido a todas las perturbaciones estudiadas (armónicos del potencial gravitatorio debido a la forma no esférica de la Tierra, terceros cuerpos como el Sol y la Luna, resistencia atmosférica al encontrarse aún en una zona de atmósfera residual, presión de radiación solar). El efecto de mayor orden de magnitud será el J_2, pero la perturbación más determinante a largo plazo es la resistencia atmosférica, ya que los efectos seculares del J_2 solo "rotan" la órbita, mientras que la resistencia atmosférica reduciría secularmente el semieje mayor hasta que un objeto re-entra y por tanto determinará el "tiempo de vida" de la órbita. Las únicas perturbaciones que dependen de la superficie o la masa son la resistencia atmosférica y la presión de radiación solar, siendo proporcionales a la superficie (expuesta a la atmósfera residual o al Sol, respectivamente) e inversamente proporcionales a la masa (ya que es necesario convertir la fuerza en aceleración, en la formulación del tema 4); por tanto serán directamente proporcionales al cociente A/M. Un objeto esférico de radio l tiene una superficie proporcional a l^2 (y se puede asumir que la superficie expuesta será la mitad del total y no cambiará mucho a lo largo del tiempo) y un volumen proporcional a l^3, luego si tiene una densidad homogénea, tiene un A/M proporcional a $1/l$. En base a este razonamiento, y teniendo los objetos la misma densidad, el objeto de menor radio tendría un A/M 1000 veces mayor que el de radio más grande, por lo que re-entraría mucho antes (de hecho, tardaría días/semanas contra meses/años, aunque encontrar estos tiempos característicos requeriría un cálculo más complejo que lo visto en la asignatura y no se espera que se conozcan).

2. (**2,5 puntos**) Tomando módulo de $\vec{r}$ obtenemos $r = 2$. De la ecuación de la energía obtenemos rápidamente $a = 2$. Puesto que a y r son iguales y $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, rápidamente concluimos que la órbita es circular ($e = 0$) y ω, θ no están definidos, teniendo que usar u. Además, $\vec{r}$ está en el Ecuador y la velocidad solo tiene componente en la dirección Sur: la órbita debe ser polar ($i = 90^{\rm o}$) y nos encontramos en el nodo descendente (☋). Puesto que el nodo descendente forma 45º con ♈, necesariamente ☊ forma 225º, encontrando por tanto $\Omega = 225^{\rm o}$. Estos razonamientos cuadran con las fórmulas para hallar los elementos orbitales, que también se podrían usar. Finalmente, puesto que $u(T_2) = 180^{\rm o}$, debemos retroceder 4 horas en el tiempo, encontrando $u(T_0) = u(T_2) + n(T_0 - T_2) = 178,45^{\rm o}$, donde hay que acordarse de pasar a a unidades físicas para calcular n.

   Para calcular la traza, recordamos que para un satélite ecuatorial circular está compuesta por rectas (problema 21 del boletín del tema 5 o calculando $\dot{\omega}, \dot{\phi}$). Simplemente debemos calcular la pendiente; rápidamente encontramos $\dot{\lambda} = -\omega_{\oplus}$ y $\dot{\phi} = \pm n$, de donde $\dot{\phi} = \pm\dot{\lambda}\frac{n}{\omega_{\oplus}} \approx \pm 6\dot{\lambda}$. Es decir por cada grado de longitud (siempre hacia el oeste), la traza se desplaza aproximadamente 6 de latitud (hacia el sur o el norte dependiendo de la zona de la traza); o dicho de otra forma, cada 90º de latitud supondrán -15º de longitud. Es necesario calcular la posición inicial en T_2 que es cuando nos piden iniciar la traza (en ☋, lo cual no es lo usual, pero no supone un gran problema). De la ecuación de la traza y usando $\lambda_u = 180^{\rm o}$, $\lambda(T_2) = \Omega + \lambda_u(T_2) - GST_0 - \omega_{\oplus}(T_2 - T_0) = 114{,}84^{\rm o}$. Entonces la traza (ver la última página de esta resolución para la figura) comienza en $(0, 114{,}84^{\rm o}E)$ (punto A en la figura), prosigue hasta $(90^{\rm o}S, 99{,}84^{\rm o}E)$ (punto B en la figura), rodea la Tierra y continúa desde $(90^{\rm o}S, 80{,}15^{\rm o}O)$ hasta $(90^{\rm o}N, 110{,}15^{\rm o}O)$ (puntos C a D en la figura) y ahí rodea la Tierra siendo el último trazo desde $(90^{\rm o}N, 69{,}85^{\rm o}E)$ hasta $(0, 54{,}85^{\rm o}E)$ (puntos E a F en la figura). El retraso nodal es -59.9º luego encaja con el resultado obtenido de ☋ a ☋.

3. (**3 puntos**) En primer lugar, de r, v y γ en T_1, y usando las cantidades conservadas y el procedimiento usual (problema 4 del boletín del tema 3, muy importante no perder el tiempo con ningún tipo de cálculo numérico innecesario que además puede producir soluciones erróneas), obtenemos $a =$ 7300 km., $e =$ 0,1, y de la ecuación de la cónica y teniendo en cuenta que el ángulo de trayectoria es negativo, $\theta(T_1) = 225^{\rm o}$. Por otro lado, los únicos puntos de la traza sin componente norte o sur son los de máxima y mínima latitud. Obviamente es el de máxima latitud, siendo una órbita relativamente baja, podemos asumir directamente que la órbita es retrógrada (recordar el problema 3 del examen 12/12/11; alternativamente se pueden sustituir los datos en la ecuación de $\dot{\lambda}$ suponiendo la órbita directa y ver rápidamente que es imposible que salga negativa). Luego $i = 180 - \phi = 129{,}55^{\rm o}$ (retrógrada). Por tanto $u(T_1) = 90^{\rm o}$ y $\lambda_u(T_1) = 270^{\rm o}$. De la ecuación de la traza, $\Omega = \mathrm{GST}_0 + \omega_{\oplus}(T_1 - T_0) + \lambda(T_1) - \lambda_u(T_1) = 171^{\rm o}$. También, $\omega = u(T_1) - \theta(T_1) = 225^{\rm o}$. Finalmente, calculamos $\theta(T_0)$ con leyes horarias, obteniendo $\theta(T_0) = 237{,}96^{\rm o}$.

   Podemos responder a las primeras preguntas de los apartados b y c, respectivamente, sin ningún cálculo e incluso sin haber hecho el primer apartado. Si se sobrevuela Kiev, se está en el cénit de Kiev, luego se está dentro de cualquier tipo de cobertura y la elevación es 90º. Para responder a las segundas preguntas, es necesario conocer la posición geográfica transcurridos cinco minutos. Llamemos T_3= T_1 + 5 minutos. Por leyes horarias (desde T_1) obtenemos $\theta(T_3) = 240{,}59^{\rm o}$. Luego $u(T_3) = 105{,}6$, y obtenemos $\phi(T_3) = 47{,}96^{\rm o}$N. Calculamos $\lambda_u(T_3) =$

246,33º (cuadrante opuesto a $u(T_3)$ al ser la órbita retrógrada) y de la ecuación de la traza en diferencias obtenemos $\lambda(T_3) = 5{,}59$ºE. La altitud en T_3 la encontramos de la ecuación de la cónica $h(T_3) = 1222$ km.

Para evalúar la cobertura instrumental, calculamos $\gamma = 6{,}569$º. La distancia ortodrómica es $16{,}39º > \gamma$, luego no estará contenido en la cobertura instrumental. La elevación, por otro lado (y usando como ψ la distancia ortodrómica ya calculada) es $23{,}055$º. Luego el satélite es aún visible desde Kiev transcurridos 5 minutos de su sobrevuelo. Es consistente con el resultado de cobertura ya que nos están preguntando por la cobertura instrumental y no la geográfica (dentro de la segunda estaría necesariamente contenido al ser la elevación positiva).

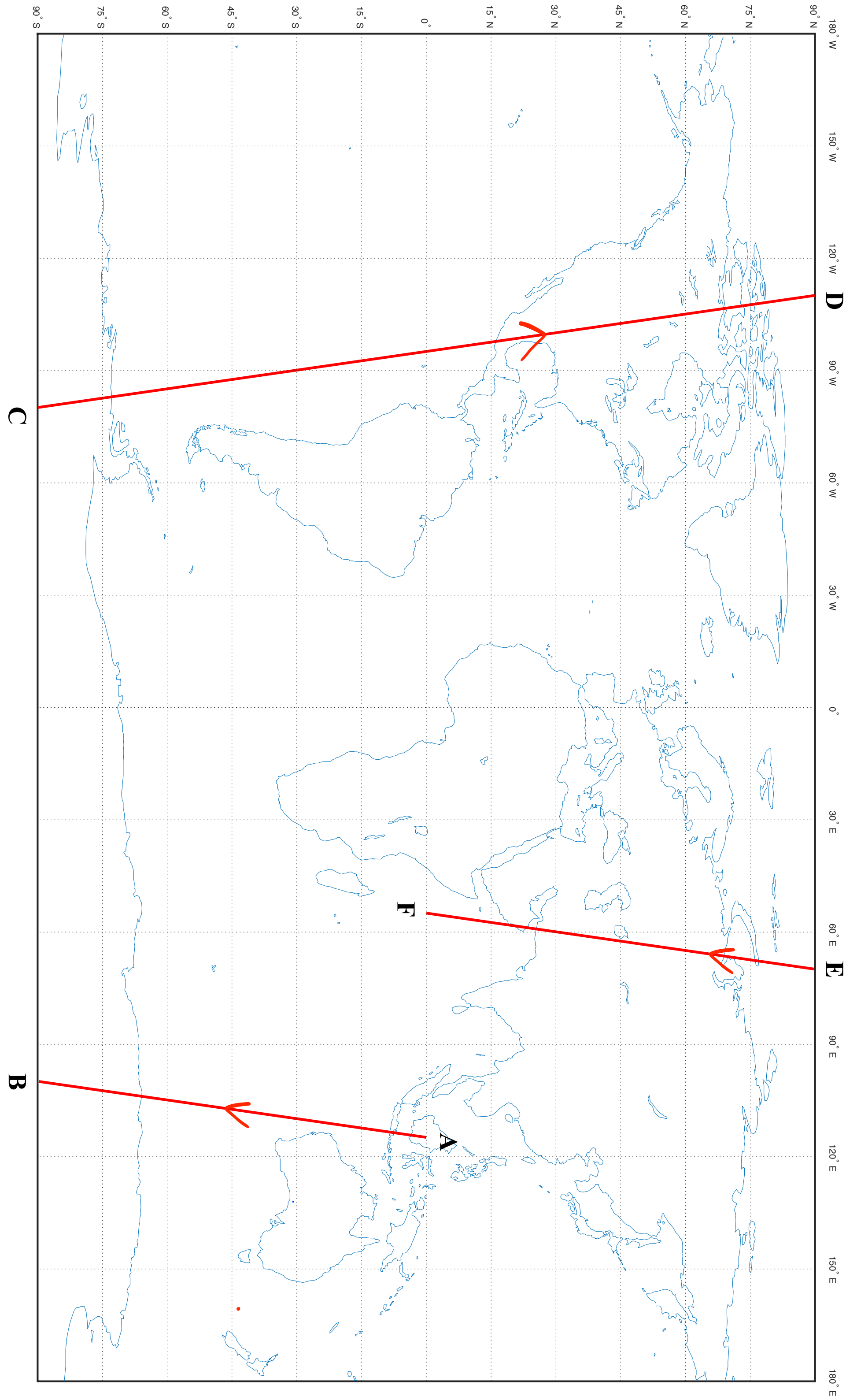


Figura 1: Traza del problema 2.

Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI ______	Curso 21/22
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ______ 2^{do}Apellido ______	14/1/21
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Problemas**

Valor total:10 puntos.

1. (**5 puntos**) Dos astrónomos de la Michigan State University observan preocupados un cometa, que se encuentra en el plano de la eclíptica orbitando en sentido directo, con los siguientes elementos orbitales: $r = 32$ AU, $v = 0{,}25$ UV (heliocéntricas), $\gamma = -60^{\text{o}}$. Calculan que el cometa va a tener un encuentro con Saturno (la primera vez que cruza su órbita) a una altitud igual a 6 veces el radio de Saturno, que lo va a deflectar al interior del sistema solar. Deduzca si el cometa supone un peligro para la Tierra y en caso afirmativo calcule los dos primeros potenciales encuentros que podría tener con la misma (los dos primeros posibles cruces con la órbita de la Tierra), así como el tiempo transcurrido desde la observación al segundo encuentro potencial, y el ángulo de fase o de configuración que tendría que tener el cometa en su observación inicial con la Tierra para que sucediera este segundo encuentro potencial. Finalmente, y suponiendo que efectivamente sucediera el segundo de los encuentros, calcule el valor de V_∞ que tendría el cometa al entrar en la esfera de influencia de la Tierra. ¿Sería posible, sin mayor información, saber si el cometa puede impactar con la Tierra?

   Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Datos:

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Saturno	♄	37939519.7	60268	9.58078

2. (**3,5 puntos**) Para el encuentro descrito en el anterior problema, los astrónomos han realizado numerosas simulaciones y se afinan los elementos orbitales de la órbita de llegada del cometa de forma que son los siguientes $a = -6000$km, $e = 2$, $\omega = 90^{\text{o}}$, en el plano de la eclíptica, en una cierta época T_0 en la que se sabe $\theta(T_0) = -90^{\text{o}}$. Para evitar la destrucción de la Tierra, se lanza la misión JLU (Just Look Up), que pretende desviar la órbita impactando con el cometa. Dicha misión se puede modelar como una maniobra de un único impulso que por tanto modifica la órbita inicial que tiene el cometa en esta fase geocéntrica. Suponiendo que la misión JLU es capaz de ejercer sobre el cometa un impulso de 0.5 km/s en cualquier dirección, y que se busca que la maniobra no modifique el elemento orbital a del cometa pero si el elemento orbital e, elegir un punto de aplicación de la maniobra (a partir de la época T_0) y dirección tal que el cometa pase lo más lejos posible de la Tierra. Argumente la elección de dicho punto. Encuentre los elementos orbitales del cometa tras la misión JLU... asumiendo que fue exitosa.

   Comentarios: no es necesario resolver el problema anterior para resolver este. Si no se puede encontrar la maniobra pedida, encuentre una maniobra cualquiera que salve la Tierra (incluso aumentado el valor de ΔV, si fuera necesario).

3. (**1,5 puntos**) Responda a las siguientes preguntas de forma breve:

   a) ¿Cuál es la diferencia entre rendezvous e intercepción?

   b) Históricamente, ¿cuáles son las diferencias entre el procedimiento seguido por EEUU y el seguido por la URSS/Rusia para llevar a cabo un rendezvous?

   c) Nombre 3 misiones donde el rendezvous era/es una parte crítica de la misión.

   d) Defina los puntos de Lagrange y comente su estabilidad. Explique donde se ubican cuando uno de los dos cuerpos es mucho más masivo que el otro.

   e) Defina una órbita Halo. ¿Por qué se usan? ¿Son estas órbitas estables? Nombre 2 misiones que hayan hecho, estén haciendo o vayan a hacer uso de este tipo de órbitas.

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, **adjuntar los razonamientos, resultados intermedios y fórmulas empleadas**.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Solución:

1. (**5 puntos**) Calculando la energía se obtiene fácilmente que se trata de una órbita parabólica, detectada por tanto en $\theta = -120^{\text{o}}$ y con valor de $p = 16$ AU. El problema es por tanto análogo al problema del cometa del boletín. El encuentro es con $\theta_1^H = -47{,}9321^{\text{o}}$, la "maniobra" tiene $\delta = 88{,}92^{\text{o}}$ y la cónica a la salida tiene como valores $a = 5{,}5629$ AU, $e = 0{,}8245$ (siendo el perihelio inferior al radio de la Tierra), con $\theta_2^H = 189{,}11^{\text{o}}$. El primer encuentro con la tierra tiene lugar en 341.32º y el segundo en $\theta_3^H = 18{,}68^{\text{o}}$ que es el que se toma. Los tiempos calculados son 15.2297 años desde la observación al encuentro con Saturno y 4.7164 años hasta la Tierra, en total, 19.9462 años. El ángulo de fase de la Tierra con el cometa se calcula como 360 grados menos el ángulo de fase del cometa con la Tierra (que es lo que se puede calcular con las fórmulas usuales) obteniendo finalmente 78.86º. Finalmente, para el encuentro con la Tierra, como $\gamma_3^H = 8{,}4347^{\text{o}}$ y $V_3^H = 1{,}3491$ UV, se obtiene $v_\infty = 0{,}3887$UV y en unidades físicas $v_\infty = 11{,}5778$km/s (se correspondería a una hipérbola con $a = -2973$ km, pero no se podría calcular el valor de e porque se pierde información con el método del ajuste de cónicas y el cambio de escalas; luego no es posible determinar su impacto o no con la Tierra).

2. (**3,5 puntos**) Puesto que no se desea cambiar la a pero si la e, la maniobra se describe con un triángulo isósceles (ver figura), siendo φ el ángulo formado entre velocidad inicial y final que tendrán igual magnitud (ya que si cambia la magnitud de la velocidad, cambiaría la energía, y necesariamente tendría que cambiar a). Si v es la velocidad en el instante de maniobra, se tendrá del triángulo isósceles $\Delta V = 2V \sin \varphi/2$. La maniobra cambiará el ángulo de trayectoria en una magnitud igual a $\pm\varphi$, es decir, $\gamma_f = \gamma_i \pm \varphi$, y en consecuencia el momento cinético se modificará. Es evidente que interesa aumentar la excentricidad; partiendo de que $h = rv\cos\gamma = \sqrt{a(1-e_f^2)}$, es fácil ver que lo que habrá que hacer es <u>aumentar</u> el momento cinético, lo cual exige aumentar el $\cos\gamma$ ya que es la única variable que se puede modificar. Luego, puesto que γ_i es negativo, φ ha de ser positivo (el coseno tiene su máximo valor en cero y hay que acercarse): la maniobra hay que orientarla hacia el exterior de la cónica (lógicamente).

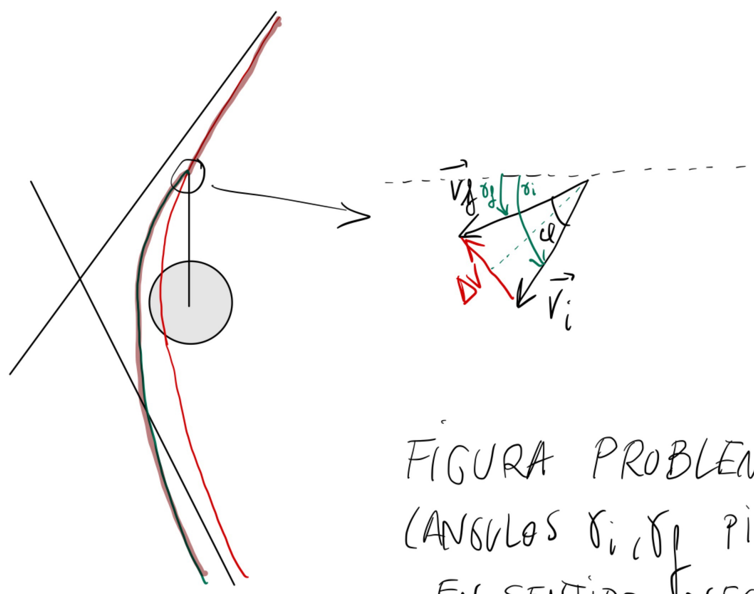


FIGURA PROBLEMA 2 (ANGULOS γ_i, γ_f PINTADOS EN SENTIDO NEGATIVO)

¿En qué instante aplicarlo? Existen dos factores que influyen en el cálculo del mejor instante. Por un lado, querremos el mayor φ posible, y puesto que $\varphi = 2\arcsen\left(\frac{\Delta V}{2V}\right)$, nos interesa que la velocidad sea pequeña: luego en base a este factor, lo mejor es lo más lejos posible de perigeo. Por otro lado, querríamos la máxima modificación posible de la función $\cos(\gamma_i + \varphi)$ respecto a $\cos(\gamma_i)$; linealizando, $\cos(\gamma_i + \varphi) \approx \cos(\gamma_i) - \operatorname{sen}(\gamma_i)\varphi$, luego cuanto mayor sea $|\gamma_i|$ más efecto tiene la maniobra. Puesto que los dos factores que afectan: velocidad pequeña y ángulo de trayectoria grande en magnitud, se maximizan ambos cuanto más lejos se encuentre uno de perigeo, se deduce que hay que hacer la maniobra en T_0 (lo que por otro lado dictaba el sentido común), es decir $\theta_i = -90^{\text{o}}$.

Con los números del problema: $v = 10{,}5225$ km/s, $\varphi = 2{,}7228^{\text{o}}$ (luego el ángulo que debe formar el ΔV con la velocidad inicial, del triángulo isósceles, será $\psi = 91{,}3614^{\text{o}}$ y orientado hacia el exterior de la cónica-alejándose de la Tierra, ver figura), $\gamma_i = -63{,}4349^{\text{o}}$, $\gamma_f = -60{,}7121^{\text{o}}$, $e_f = 2{,}1424$, $r_p = 6854{,}1$km, mayor que el radio de la Tierra (luego la maniobra es efectiva). Los otros parámetros que se modifican son $\theta_f = -84{,}7355^{\text{o}}$ y $\omega_f = 84{,}7354^{\text{o}}$. Ni a ni los parámetros que definen el plano ($\Omega = 0^{\text{o}}$ e $i = \epsilon$) se modifican, por diseño de la maniobra.

3. Problema teórico.

Grado en Ingeniería Aeroespacial	N$^{\text{o}}$DNI ________	Curso 21/22
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ________	12/11/21
	2$^{\text{do}}$Apellido ________	
Universidad de Sevilla	Nombre ________	**Cuestiones**

Valor total 7,5 puntos.

Datos comunes: El 12 de noviembre de 2021, GST$_0$=150º. Época (T_0): 12/11/21 a las 00:00.

1. (**3 puntos**) Sea la traza de la figura (véase detrás de la hoja), de la que se sabe: se cierra en un día sidéreo, recorre su nodo ascendente (marcado con A) con un ángulo de trayectoria igual a 36.87º y el primer punto subsatélite de máxima latitud tras el nodo ascendente (marcado con B) tiene como longitud 21.64ºO y se recorre a las 5:45:37. En base a estos datos, encuentre los elementos orbitales. Escriba los ángulos pedidos en grados y a en km. Nota: Si algún elemento orbital no estuviera bien definido, táchelo y escriba el correcto.

   Elementos orbitales: $a = 26561{,}74$ km $\quad e = 0{,}75 \quad i = 60^{\text{o}} \quad \omega = 270^{\text{o}} \quad \Omega = 125^{\text{o}} \quad \theta(T_0) = 60^{\text{o}}$

   Una vez caracterizados los elementos orbitales, se pide encontrar los siguientes puntos en la traza:

   a) La primera vez que el Polo norte es visible tras el nodo ascendente. Encuentre las coordenadas geográficas y el instante en el que esto sucede. $\boxed{\phi = 21{,}84^{\text{o}}\text{N} \quad \lambda = 20{,}22^{\text{o}}\text{O} \quad t = 00:34:19 \quad \text{UT}}$

      ¿Cuándo y donde dejaría de ser visible? $\boxed{\phi = 21{,}84^{\text{o}}\text{N} \quad \lambda = 23{,}06^{\text{o}}\text{O} \quad t = 10:56:55 \quad \text{UT}}$

   b) ¿Cómo se calcularían las coordenadas del primer punto donde la traza pasa a ser retrógrada tras el nodo ascendente, marcado con C? Plantee la ecuación que habría que resolver de forma que solo haya que encontrar una variable y resuélvala para hallar las coordenadas del punto. $\boxed{\phi = 46{,}93^{\text{o}}\text{N} \quad \lambda = 15{,}095^{\text{o}}\text{O}}$

2. (**2 puntos**) Responda a las siguientes preguntas de teoría (la tercera vale doble):

   a) Exponga dos posibles aplicaciones prácticas de efectos de perturbación (es decir, ejemplos en los cuales se aprovecha una perturbación para ayudar a cumplir una misión).

   b) ¿Qué son los TLEs? ¿Cuál es su utilidad? ¿Qué propagador los emplea?

   c) ¿Cuál es el significado físico del vector excentricidad? Demuestre que es una cantidad conservada a partir de la ecuación del movimiento y de la definición del momento cinético específico. Use la definición de dicho vector para demostrar que una solución del problema de los dos cuerpos verifica la ecuación de una cónica.

   d) Defina el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial. Si aplica la definición el día de hoy y la compara con el mismo sistema de referencia en J2000, ¿qué diferencias habrían y a qué efectos se deberían? (En su respuesta, no considere la translación del centro de la Tierra, es decir, coteje ambos sistemas de referencia como si estuvieran centrados en el mismo punto del espacio y considere solamente las posibles rotaciones que hayan podido sufrir en 20 años).

3. (**2,5 puntos**) El 12/11/2021 a las 02:00 UT se observa un satélite con la siguiente posición y velocidad, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UV}.$$

   ¿Cuáles son sus elementos orbitales en la época 12 de noviembre de 2021 a las $T_0 = 00:00:00$ UT? Escriba los ángulos pedidos en grados y a en UD. Nota: Si algún elemento orbital no estuviera bien definido, táchelo y escriba el correcto.

   Elementos orbitales: $a = 2$ UD $\quad e = 0 \quad i = 90^{\text{o}} \quad \cancel{\omega =} \quad \Omega = 225^{\text{o}} \quad \cancel{\theta(T_0) =} \quad u(T_0) = 269{,}23^{\text{o}}$

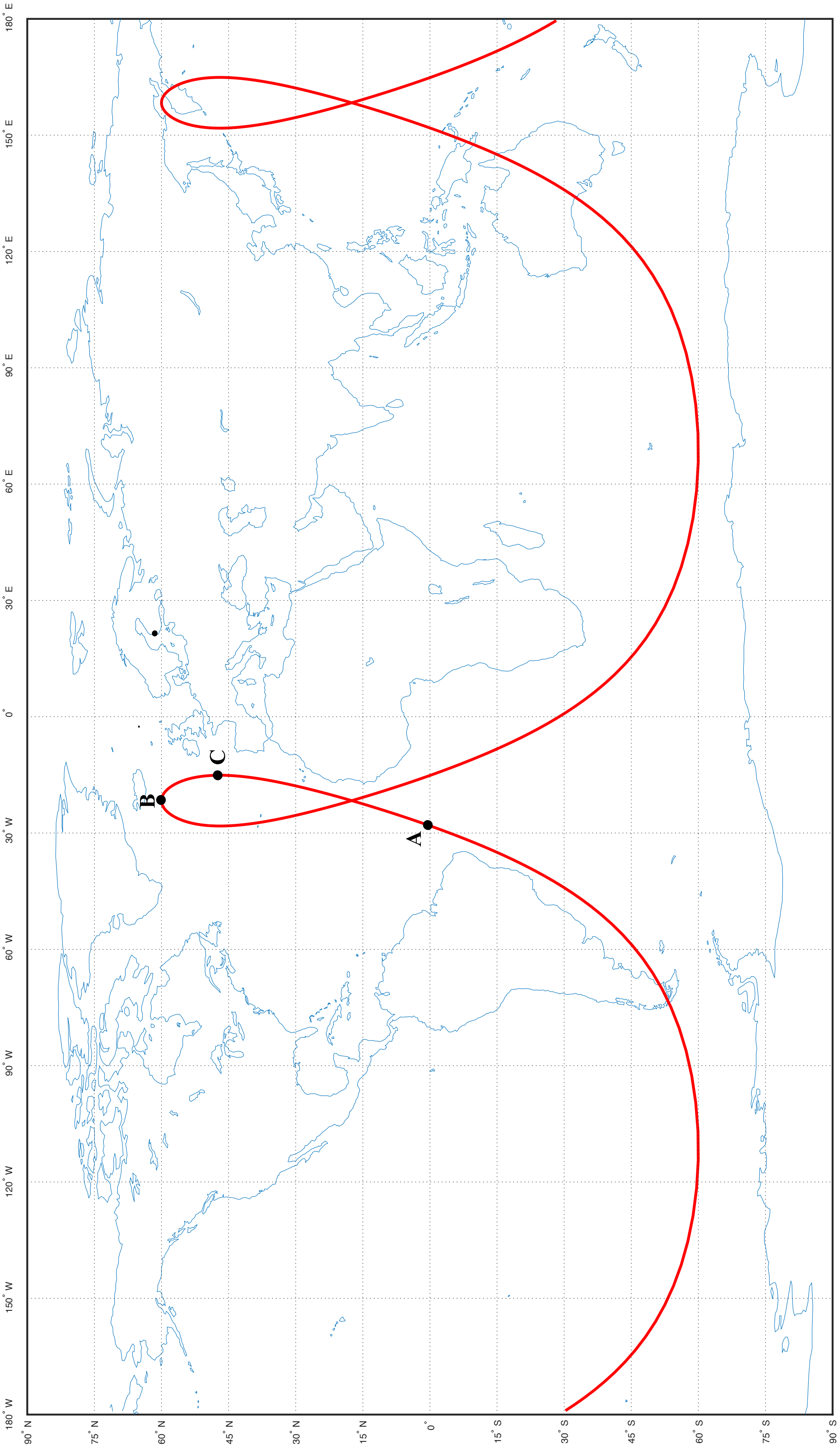
   ¿Cuáles serán las coordenadas en la esfera celeste (º) y altitud (km) del satélite ese mismo día en $T_1 = 14:45$ UT?

   $\boxed{\delta(T_1) = 17{,}56^{\text{o}} \quad AR(T_1) = 45^{\text{o}} \quad h(T_1) = 6378{,}14 \text{ km}}$

   Sabiendo que el equinoccio de Otoño fue el 21 de septiembre ¿Cuáles serían las coordenadas en la esfera celeste del Sol el 12 de noviembre? (Se puede suponer la órbita de la Tierra circular para simplificar) $\boxed{\delta_{\odot} = -18{,}11^{\text{o}} \quad AR_{\odot} = 228{,}81^{\text{o}}}$

   ¿Estaría el satélite eclipsado en T_1? SI/ ~~NO~~ (tache lo que no proceda). Si la respuesta es afirmativa, calcule cuando empezó el eclipse y cuando termina, en hora UT (observación: el problema es resoluble analíticamente en este caso). Si es negativa, calcule cuando empieza el próximo eclipse y cuando termina, en hora UT.

   $\boxed{\text{Comienza} = 14:24:49 \quad \text{UT} \quad \text{Termina} = 15:04:23 \quad \text{UT}}$


A
B
C
180° E
150° E
120° E
90° E
60° E
30° E
0°
30° W
60° W
90° W
120° W
150° W
180° W
90° N
75° N
60° N
45° N
30° N
15° N
0°
15° S
30° S
45° S
60° S
75° S
90° S

Solución:

1. (**3 puntos**) En primer lugar, al ser la traza mixta, la órbita debe ser directa, de lo que inmediatamente se deduce $i = 60^{\rm o}$. Asimismo, $T = \frac{T_\oplus}{2}$ de donde $a = 26561{,}74$ km. De la simetría E-O obtenemos que ω debe ser 90º o 270º, pero habida cuenta que el ángulo de trayectoria es positivo en el nodo ascendente, eso quiere decir que está viajando hacia el apogeo, por lo que $\omega = 270^{\rm o}$. Por tanto, en el nodo ascendente, puesto que $u = 0^{\rm o} = \omega + \theta$, obtenemos $\theta = 90^{\rm o}$. Por lo que de la fórmula del ángulo de trayectoria $\tan\gamma = \frac{e \operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}$ en $\theta = 90^{\rm o}$ obtenemos $\tan\gamma = e$, luego $e = 0{,}75$. Finalmente, nos dan datos en el punto de máxima latitud, donde sabemos $\lambda = -21{,}64$ y $t_1 = 5 \cdot 3600 + 45 \cdot 45 + 37 = 20737$ s. Teniendo en cuenta $\lambda_u = 90^{\rm o}$, obtenemos $\Omega = 125^{\rm o}$. Asimismo, puesto que el punto de máxima latitud es el apogeo, $\theta(t_1) = 180^{\rm o}$. Se tendrá por tanto que $\theta(t_0)$ será por tanto el ángulo correspondiente a t_1 segundos antes del apogeo o lo que es lo mismo $T/2 - t_1 = 804$ segundos después del perigeo. Se llega a $\theta(t_0) = 30^{\rm o}$.

   El Polo Norte sería visible por primera vez cuando entre por primera vez en la cobertura geográfica del satélite, o lo que es lo mismo, cuando la distancia ortodrómica al Polo Norte sea igual al radio de la circunferencia de cobertura. Usando la fórmula de distancia ortodrómica al polo norte se llega a la fórmula sencilla $\cos\alpha = \operatorname{sen}\phi$ donde ϕ es la latitud sobrevolada por el satélite (equivalentemente, $\alpha = 90 - \phi$). Puesto que la distancia ortodrómica tiene que ser igual al radio, $\alpha = \Gamma$ y por otro lado $\cos\Gamma = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = \frac{R_\oplus}{r} = \frac{R_\oplus}{a(1-e^2)}(1 + e\cos\theta)$.

   Llegamos a la ecuación $\frac{R_\oplus}{a(1-e^2)}(1+e\cos\theta) = \operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\theta - 90^{\rm o}) = -\operatorname{sen} i\cos\theta$, despejando $\cos\theta$ hallamos:

$$\cos\theta = -\frac{\frac{R_\oplus}{a(1-e^2)}}{\operatorname{sen} i + e\frac{R_\oplus}{a(1-e^2)}} = -0{,}4296$$

   De donde $\theta_2 = 115{,}44$ o $\theta_3 = 244{,}56$, correspondiendo la primera solución a cuando el Polo Norte comienza a verse y la segunda a cuando deja de hacerlo. De leyes horarias, el tiempo transcurrido desde el perigeo para θ_2 son 2862,6 segundos. Como el perigeo sucede 804 antes de las 00:00, obtenemos $t_2 = 2058{,}7$ segundos o lo que es lo mismo $t_2 = 00 : 34 : 19$. Por simetría el tiempo transcurrido desde el perigeo para θ_3 debe ser $T - 2862{,}6$ segundos, luego $t_3 = 39415{,}3$ segundos o lo que es lo mismo $t_3 = 10 : 56 : 55$ (obsérvese también la simetría que uno esperaría respecto al tiempo de paso por el apogeo). Se tiene también $\phi_2 = 21{,}84^{\rm o}N = \phi_3$ (por simetría deben tener la misma latitud). Por otro lado $\lambda_{u2} = 13{,}38^{\rm o}$ luego $\lambda_2 = 20{,}22^{\rm o}$O. Igualmente, $\lambda_{u3} = 166{,}62^{\rm o}$ luego $\lambda_3 = 23{,}06^{\rm o}$ O.

   En relación a cómo se calcularían las coordenadas del primer punto donde la traza pasa a ser retrógrada tras el nodo ascendente, sabemos que en dicho instante $\dot\lambda = 0$. Es decir:

$$0 = -\omega_\oplus + \frac{\cos i}{\cos^2\phi} n \frac{(1 + e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

   Teniendo en cuenta $\cos^2\phi = 1 - \operatorname{sen}^2\phi = 1 - \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2(\theta - 90^{\rm o}) = 1 - \operatorname{sen}^2 i\cos^2\theta$, sustituyendo en la ecuación de $\dot\lambda$ se llega a:

$$0 = -\omega_\oplus + \frac{\cos i}{1 - \operatorname{sen}^2 i\cos^2\theta} n \frac{(1 + e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

   de donde:

$$(1-e^2)^{3/2}\omega_\oplus \frac{1 - \operatorname{sen}^2 i\cos^2\theta}{n\cos i} = (1 + e\cos\theta)^2 = 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta$$

   es decir se tiene una cuadrática $A\cos^2\theta + B\cos\theta + C = 0$ donde

$$A = e^2 + (1-e^2)^{3/2}\omega_\oplus\frac{\operatorname{sen}^2 i}{n\cos i} = 0{,}7795, \quad B = 2e = 1{,}5, \quad C = 1 - (1-e^2)^{3/2}\omega_\oplus\frac{1}{n\cos i} = 0{,}7106$$

   Obtenemos dos soluciones, $\cos\theta = -0{,}8435$ y $\cos\theta = -1{,}0807$, solo la primera tiene un arco coseno válido, luego $\theta_C = 147{,}51^{\rm o}$ y de ahí sacamos como antes $t_C = 01 : 52 : 38$, $\phi_C = 46{,}93^{\rm o}$N, $\lambda_C = 15{,}0948^{\rm o}$O.

2. (**2 puntos**) Pregunta teórica.

3. (**2,5 puntos**) Para empezar obtenemos $r = 2$UD y $v = \frac{\sqrt{2}}{2}$UV. Además puesto que ambos vectores son perpendiculares y la velocidad es la de una órbita circular, necesariamente la órbita debe ser circular (ambas condiciones son necesarias para obtener la deducción). Alternativamente, si se calcula el vector excentricidad se obtiene fácilmente $e = 0$. En conclusión $a = r = 2$UD. También es sencillo deducir que la órbita es polar, $i = 90^{\rm o}$, puesto que está sobrevolando el polo norte. Llamando t_2=02:00 UT=7200 s, se tiene obviamente $u(t_2) = 90^{\rm o}$. Por tanto $u(t_0) = u(t_2) + n(t_0 - t_1) = 269{,}23^{\rm o}$. Finalmente Ω se puede deducir de la geometría (es obvio que el plano orbital forma un ángulo de 45º con la dirección x y por el sentido, se puede deducir $\Omega = 225^{\rm o}$) o con las fórmulas pasando por el vector nodal.

Calculamos ahora $u(t_1) = u(t_2) + n(t_1 - t_2) = 162{,}44^{\text{o}}$. Por tanto, $\delta(t_1) = 180^{\text{o}} - u(t_1) = 17{,}56^{\text{o}}$ y $\text{AR}(t_1) = \Omega + \lambda_u = 225^{\text{o}} + 180^{\text{o}} = v$. Al ser circular $h(t_1) = a - R_\oplus = R_\oplus = 6378{,}14$ km.

Para calcular las coordenadas del Sol, contamos que han transcurrido 9+31+12=52 días, por tanto, $u_\odot = 180 + \frac{52}{365{,}25}360 = 231{,}25^{\text{o}}$. Del triángulo, $\delta_\odot = -18{,}11^{\text{o}}$ y $\text{AR}_\odot = 228{,}81^{\text{o}}$.

Calculamos ahora el radio de la circunferencia de eclipse, que estará centrado en el punto antipodal al Sol $(\delta_E, \text{AR}_E) = (-\delta_\odot, 180^{\text{o}} + \text{AR}_\odot)$, obteniendo $\Gamma = 30^{\text{o}}$. Calculando la distancia ortodrómica de la fórmula $\cos\alpha = \sin\delta_E \sin\delta + \cos\delta_E \cos\delta \cos(\text{AR}_E - \text{AR})$ se obtiene $\alpha = 3{,}67^{\text{o}}$, luego está muy claramente eclipsado (muy próximo al centro de la circunferencia).

Finalmente, nos piden calcular las horas de comienzo y fin del eclipse. En condiciones usuales, no sería sencilla esta cuenta, pero al tratarse de un satélite polar, su AR se mantiene constante mientras esté en la pasada de N a S, que es cuando potencialmente se puede eclipsar. Por tanto, hay que fijar $\alpha = \Gamma$ y encontrar δ de la ecuación de la distancia ortodrómica. Es decir, encontrar δ de $\cos\gamma = \sin\delta_E \sin\delta + \cos\delta_E \cos\delta \cos(\text{AR}_E - 45^{\text{o}})$, una ecuación del tipo $C = A\sin\theta + B\cos\theta$ que se resuelve siguiendo los pasos del formulario. Las dos soluciones son $\delta_3 = -11{,}64$ y $\delta_4 = 47{,}96$. Claramente la primera solución corresponde a cuando termina y la segunda a cuando empieza, siendo correspondientes a $u_3 = 191{,}64^{\text{o}}$ y $u_4 = 132{,}04^{\text{o}}$. Tomando como referencia t_1, despejando de $u_3 = u_1 + n(t_3 - t_1)$ tendríamos $t_3 = t_1 + \frac{u_3 - u_1}{n}$ e igualmente $t_4 = t_1 + \frac{u_4 - u_1}{n}$. Se obtiene $t_3 = 15:04:23$ (cuando termina) y $t_4 = 14:24:49$ (cuando acaba).

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Ingenieros Aeronáuticos	N$^{\text{o}}$DNI	______________________	Curso 20/21
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido	______________________	21/1/21
	2$^{\text{do}}$Apellido	______________________	
Universidad de Sevilla	Nombre	______________________	**2º Parcial**

Valor total:10 puntos.

1. (**2 puntos**) **(ENTREGAR ESTE EJERCICIO APARTE CON EL NOMBRE CLARAMENTE INDICADO)**

   a) Sabiendo que el movimiento en el plano orbital de las ecuaciones HCW viene dado por:

$$x(t) = [4 - 3\cos(nt)]x_0 + \frac{\sin(nt)}{n}\dot{x}_0 + \frac{2 - 2\cos(nt)}{n}\dot{y}_0,$$
$$y(t) = [6\sin(nt) - 6nt]x_0 + y_0 + \frac{2\cos(nt) - 2}{n}\dot{x}_0 + \frac{4\sin(nt) - 3nt}{n}\dot{y}_0,$$

   diseñe unas condiciones iniciales $\{x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0\}$ que mantengan de forma periódica una separación mínima de 200 m con un blanco en órbita circular de 700 km de altitud. Pista: asuma $y_0 = \dot{x}_0 = 0$.

   b) Haga un dibujo esquemático de los cuerpos primarios y sus puntos de equilibrio en el contexto del problema de los tres cuerpos circular restringido. Indique si dichos equilibrios son estables o inestables.

   c) Indique el sistema primario de generación de potencia eléctrica más adecuado para las siguientes aplicaciones. Justifique brevemente su respuesta:

   - Satélite geoestacionario de comunicaciones.
   - Misión tripulada de circumnavegación lunar ($\approx$ 6 días de duración).
   - Primera etapa de un lanzador.
   - Sonda de exploración con destino Plutón.

2. (**3 puntos**) Responda a las siguientes preguntas.

   a) Sea un satélite heliosíncrono, en órbita circular medianoche-mediodía, con altitud 400 kilómetros. ¿Qué latitud o latitudes sobrevuela a las 15:00 HSM? Especifique si se sobrevuelan de S a N o de N a S.

   b) Un satélite geoestacionario, de 2 Tm de masa total (incluido combustible), situado a la longitud 60ºO, se quiere recolocar en 75ºO. Suponiendo que se pueda emplear en ello hasta 10 kg de combustible con impulso específico 200 s, especifique y calcule la(s) maniobra(s) que permita(n) realizar dicho cambio sin superar el máximo de combustible en el menor tiempo posible, especificando el combustible finalmente gastado.

3. (**5 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Urano (⛢) partiendo de una órbita de aparcamiento en la Tierra a 150 kilómetros. Calcular el ΔV de la misión directa (óptima) y el tiempo que se tardaría. Para disminuir el coste y duración se decide realizar una misión pasando por Júpiter con las siguientes características: se comienza aplicando un impulso en la órbita de aparcamiento $\Delta V_1 = 6,2$ km/s. ¿Sería ese impulso suficiente para alcanzar Júpiter? Además, en el segmento heliocéntrico incial, se realiza una "*maniobra de espacio profundo*", con $\Delta V_2 = 0,5$ km/s. Esta maniobra es **tangente, de aceleración, y se realiza con una anomalía verdadera en la órbita heliocéntrica hacia Júpiter** $\theta = 120$**º**. Finalmente, en Júpiter (si es que se alcanza finalmente) se realiza una maniobra asistida por gravedad con una **altitud** de 10 radios jovianos. ¿Alcanza finalmente la misión Urano? Justificar la respuesta. Encontrar tiempos de vuelo y ángulos de trayectoria de los dos planetas. Dibuje un esquema, como mínimo, de las trayectorias heliocéntricas y de los triángulos asociados a las maniobras.

   Observación: si no se sabe modelar la maniobra de espacio profundo, se puede hacer el problema considerando solo $\Delta V_1 = 6,5$ km/s en la órbita de aparcamiento para llegar a Júpiter sin dicha maniobra y planteando después todos los detalles de como se modificaría la solución por la existencia de la maniobra adicional (max 4 ptos).

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Urano	⛢	5780158.5	25559	19.2709

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, **adjuntar los razonamientos, resultados intermedios y fórmulas empleadas**.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Solución:

1. Cuestión teórica, excepto el apartado a), el cual se resuelve...

2. Los apartados pedidos se hacen como sigue:

    a) En primer lugar puesto que es heliosíncrono obtenemos la inclinación a partir de la altitud: $i = 97{,}0286^{\circ}$. Por otro lado del enunciado obtenemos HSM_0 y de la fórmula $\mathrm{HSM} = \mathrm{HSM}_0 + \frac{\lambda_u}{15}$ para $\mathrm{HSM} = 15$ obtenemos $\lambda_u = 225^{\circ}$. De ahí obtenemos (de forma unívoca) despejando u de la ecuación $\tan\lambda_u = \tan u \cos i$ que $u = 96{,}9763^{\circ}$ (puesto que la órbita es retrógrada el cuadrante ha de ser opuesto). Luego el sobrevuelo es de N a S. Finalmente, la solución es única y se obtiene de la fórmula $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} i$: $\phi = 80{,}1094^{\circ}$N.

    b) Para llevar a cabo el cambio pedido es necesario un phasing, que se puede repartir en varias revoluciones. Del requisito de combustible obtenemos que (para 10 kg) la máxima ΔV posible es $\Delta V = 0{,}009835$ km/s (ojo: dan la masa total y no la masa seca, luego hay que modificar la fórmula y es crítico no confundir unidades). El satélite se encuentra en adelanto 15º. Si se realizara el phasing de una vez, se obtiene $T_{ph} = 89754{,}16$ s y $\Delta V = 0{,}082$ km/s lo cual tiene un orden de magnitud más de lo requerido. Ensayando posibilidades, la más ajustada es realizarlo dando 9 vueltas (este número se puede calcular por prueba y error o bien a partir del ΔV máximo redondeando al siguiente entero), en tal caso $T_{ph} = 86562{,}91$ s (el tiempo total en realizar el cambio se obtendría multiplicando esta cifra por nueve, $T_{man} = 9{,}017$ días) y $\Delta V = 0{,}00945$ km/s, gastando finalmente 9,6058 kg de combustible.

3. La misión directa tipo Hohmann tiene $\Delta V = 7{,}98$ km/s y $T_v = 16{,}134$ años. En la misión propuesta, partiendo del primer segmento (geocéntrico) se calcula la cónica a la salida de la Tierra como en otros ejemplos, obteniendo $a_1 = 2{,}9624$ AU y $e_1 = 0{,}6624$. Con esas cifras no se llega a Júpiter, ya que el radio de afelio sería inferior a la distancia media de Júpiter al Sol. Comprobemos si esto cambia tras la maniobra. Para calcular la maniobra, usemos la nomenclatura $\theta_1^H = 120^{\circ}$ para denotar las condiciones antes de la maniobra. Calculamos posición, velocidad y ángulo de trayectoria en dicho punto obteniendo: $r_1^H = 2{,}4858$ AU, $v_1^H = 0{,}6834$ UV, $\gamma_1^H = 40{,}623^{\circ}$. Por efecto de la maniobra tangente obtenemos $v_2^H = v_1^H + \Delta V_2 = 0{,}7001$ UV, mientras que el radio y ángulo de trayectoria no cambian. Por tanto tras la maniobra, obtenemos $a_2 = 3{,}1812$ AU, $e_2 = 0{,}6719$ y también $\theta_2^H = 116{,}3246^{\circ}$. Observamos que ahora si llega a Júpiter y las condiciones a la llegada son $v_3^H = 0{,}2646$ UV, $\gamma_3^H = 16{,}3852^{\circ}$, $\theta_3^H = 171{,}5601^{\circ}$. Usando cálculo fasorial obtenemos $V_\infty = 0{,}199$ UV $= 5{,}9283$ km/s, y en la maniobra se tiene que $\delta = 110{,}3581^{\circ}$. De nuevo usando cálculo fasorial y restando δ (para que se incremente la velocidad) obtenemos $V_4^H = 0{,}5911$ UV y $\gamma_4^H = 14{,}4003^{\circ}$, de donde finalmente se obtiene la cónica $a_3 = 28{,}6302$ AU, $e_3 = 0{,}8306$ que se comprueba fácilmente llega a Urano. La salida de Júpiter es con $\theta_4^H = 31{,}8217^{\circ}$ y la llegada a Urano con $\theta_5^H = 130{,}4958^{\circ}$. Para calcular el tiempo total de vuelo hay que tener en cuenta tres tramos: Tierra-maniobra de espacio profundo (T_1), maniobra de espacio profundo-Júpiter (T_2) y Júpiter-Urano (T_3). Obtenemos $T_1 = 3{,}4817$ UT, $T_2 = 11{,}2896$ UT, $T_3 = 57{,}0912$ UT y por tanto $T_v = T_1 + T_2 + T_3 = 11{,}4375$ años. En relación a los ángulos de fase, igualmente hay que tener en cuenta los tramos: $n_{♃}(T_1 + T_2) + \psi_{♃} = \theta_1^H + \theta_3^H - \theta_2^H$ y $n_{♅} T_v + \psi_{♅} = \theta_1^H + \theta_3^H - \theta_2^H + \theta_5^H - \theta_4^H$, obteniendo $\psi_{♃} = 103{,}9298^{\circ}$ y $\psi_{♅} = 225{,}2382^{\circ}$.

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Grado en Ingeniería Aeroespacial	N$^{\text{o}}$DNI ______	Curso 19/20
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ______ 2$^{\text{do}}$Apellido ______	28/11/20
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total 7 puntos.

Datos comunes: El 28 de noviembre de 2020, GST$_0$=120º. Época (T_0): 28/11/20 a las 00:00.

1. (**3 puntos**) Sea T_1 la época dada en el 28/11/2020 a las 08:00. Sea un satélite con los siguientes elementos orbitales: $i = 0$º, $\lambda_T(T_0) = 160$º, $e = 0$, altitud 20000 kilómetros. Se pide:

   a) Pinte su traza durante una revolución, es decir, empezando en T_1 y acabando en $T_1 + T_{sat}$ donde T_{sat} es el periodo del satélite. Observación: puesto que la órbita es ecuatorial, debe obtener una fórmula para la longitud usando los elementos orbitales disponibles.

   b) Considere una estación terrestre ubicada en Kourou (5.16° N, 52.65° O), en la cual se puede observar un satélite si se encuentra a una elevación mínima de 10º sobre el horizonte. ¿En qué instante se verá el satélite con mayor elevación durante el periodo comprendido entre T_1 y $T_1 + T_{sat}$? Calcule todo el tiempo durante el periodo comprendido entre T_1 y $T_1 + T_{sat}$ en el cual el satélite es visible. Observación: se puede responder de forma exacta a todas estas preguntas dada la órbita del satélite.

2. (**1,5 puntos**) Responda a las siguientes preguntas de teoría (la tercera vale doble):

   a) Explique y clasifique los armónicos esféricos del potencial gravitatorio. ¿Cuáles son los más relevantes en relación a órbitas geocéntricas? ¿Cuáles pueden provocar efectos seculares en los elementos orbitales?

   b) Defina los periodos no keplerianos que aparecen debido a la presencia de perturbaciones.

   c) Encuentre la expresión de la elevación del Sol a mediodía un cierto día del año, dada la declinación del Sol, desde un punto arbitrario de la Tierra de latitud conocida. ¿Cuál sería el azimut correspondiente a la observación del Sol al mediodía?

   d) Defina el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial. Si aplica la definición el día de hoy y la compara con el mismo sistema de referencia en J2000, ¿qué diferencias habrían y a qué efectos se deberían? (En su respuesta, no considere la translación del centro de la Tierra, es decir, coteje ambos sistemas de referencia como si estuvieran centrados en el mismo punto del espacio y considere solamente las posibles rotaciones que hayan podido sufrir en 20 años).

3. (**2,5 puntos**) Como si 2020 no hubiera sido suficientemente nefasto, el 28/11/2020 a las 00:00 UT se observa un asteroide inesperado con la siguiente posición y velocidad, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r}(T_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v}(T_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ UV}.$$

   Calcule sus elementos orbitales en la época. Observación: es necesario usar las fórmulas, dada la situación geométrica, para la mayor parte de los elementos.

   ¿Es un peligro para la Tierra? Responder razonadamente.

   En caso afirmativo, calcule punto de impacto y hora (UT) en la que sucede (despreciando el tramo atmosférico).

   En caso negativo, calcule el punto de mayor aproximación a la Tierra y el instante (UT) en el que sucede. En dicho punto ¿Que localidad geográfica de la Tierra se está sobrevolando, y a qué altitud? Observación: en caso de que el satélite se estuviera alejando de la Tierra, se considera correcta la respuesta calculando dicho punto aunque fuera anterior a la observación.

Solución:

1. (**3 puntos**) Para resolver el problema, es clave encontrar una relación entre la longitud geográfica donde se encuentra el satélite y el tiempo. Para ello, observando que en realidad λ_T es la ascensión recta, se concluye fácilmente que $\lambda_T(t) = \mathrm{GST}_0 + \omega_\oplus t + \lambda(t)$, y puesto que en T_0 nos dan λ_T y la órbita es circular, obtenemos $\lambda_T(t) = \lambda_T(T_0) + nt$, donde n es la velocidad orbital media, $n = \sqrt{\frac{\omega_\oplus}{a^3}}$ y $a = h + R_\oplus$. En conclusión, despejando $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \lambda_T(T_0) - \mathrm{GST}_0 + (n - \omega_\oplus)t$$

Sea T_1 la época dada en el 28/11/2020 a las 08:00. Sea un satélite con los siguientes elementos orbitales: $i = 0$º, $\lambda_T(T_0) = 160$º, $e = 0$, altitud 20000 kilómetros. Se pide:

a) La traza será un segmento en el Ecuador. Puesto que el movimiento es regular y la órbita directa, podemos simplemente calcular el primer y último puntos y unirlos. Sustituimos T_1 y $T_1 + T_{sat}$ en la fórmula para hallar el segmento ecuatorial, obteniendo: $\lambda(T_1) = 162{,}85$ºE, $\lambda(T_1 + T_{sat}) = 15{,}29$ºO.Se dibuja la traza en la Figura 1 (en rojo).

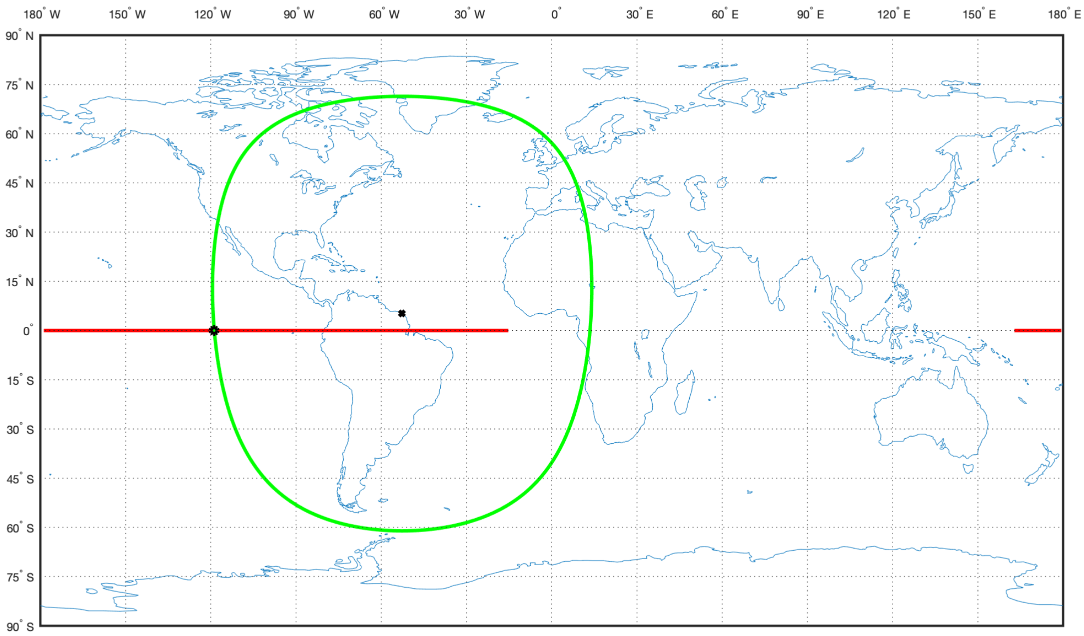


Figura 1: Traza Problema 1. Rojo: traza. Verde: circunferencia de visibilidad

b) Calculamos en primer lugar la circunferencia de visibilidad. Se proporciona en la Figura 1 (no era necesario representarla). El instante de mayor elevación será el de menor distancia a la traza, en este caso, $\alpha = 5{,}16$º cuando pasa por el meridiano de Kourou (lo que sucede a las 17:24:37.7 UT), porque la traza está en el Ecuador. Usando por tanto $\psi = 5{,}16$º en las fórmulas de elevación se obtiene $h_{max} = 83{,}2$º. Para calcular el periodo que es visible, simplemente calculamos los cortes de la circunferencia con el Ecuador, ya que en este caso, se puede hacer fácilmente (por ser el ecuador círculo máximo). Calculando primero el radio de la circunferencia de visibilidad, $\Phi = 66{,}22$º, de la fórmula $\cos \Delta\lambda$ en el formulario sustituimos $\phi = 0$ (cortes con el Ecuador) y obtenemos $\Delta\lambda = \arccos\left(\frac{\cos\Phi}{\cos\phi_0}\right) = 66{,}12$º, por lo que los cortes son en $\lambda = -52{,}62 \pm 66{,}12$º, observando que el corte al Este es posterior al periodo solicitado. Por tanto, el intervalo de visibilidad será entre el tiempo t correspondiente a $\lambda(t) = -118{,}77$º, que se puede calcular de la fórmula de $\lambda(t)$ despejando el tiempo, y $T_1 + T_{sat}$. Finalmente, escribiendo estos tiempos en formato horario, se obtiene que el satélite es visible entre las 13:06:16.12 UT y las 19:50:36.08 en el intervalo pedido. Observación: no se ha hecho ninguna aproximación más allá de Tierra esférica y ausencia de perturbaciones, por lo que este procedimiento sirve para cualquier base, esté donde esté en la Tierra, y se sustenta en que los cortes de una circunferencia esférica con un círculo máximo se pueden encontrar exactos. Se pueden hacer otras aproximaciones (satélite en el infinito, que nos daría $h_{max} = 84{,}84$º, base aproximadamente en el Ecuador, que nos daría el mismo corte a dos decimales) pero dependerían críticamente de la altitud del satélite y de la posición de la base, por lo cual son soluciones menos correctas/más burdas que esta y no otorgarían la puntuación completa del apartado (si están bien justificadas y a la vista de la buena aproximación particular se penalizarían solo ligeramente).

2. (**1,5 puntos**) Responda a las siguientes preguntas de teoría (la tercera vale doble): En relación a estas preguntas, ver las transparencias; la primera hace alusión a la clasificación de los armónicos del potencial gravitatorio en zonales,

sectoriales y teserales. La segunda a los periodos nodal (o dracónico), anomalístico y sidéreo. La tercera, se muestra resuelta en la Figura 2 manuscrita adjunta, bajo hipótesis de Sol en el infinito; la Figura 2 considera una ubicación en la Tierra entre los trópicos y muestra simultáneamente las tres posibles situaciones (fuera de los trópicos, será siempre una de las dos primeras, según hemisferio); también se puede resolver con el triángulo astronómico si uno se da cuenta que el mediodía solar implica que el ángulo horario del Sol es cero y se despejan los valores de las funciones trigonométricas (no debe quedar ninguna función trigonométrica en la solución). La cuarta, hace referencia a los efectos de precesión de los equinoccios, nutación de la Tierra, y desplazamiento de los polos, que modifican los planos y direcciones en la que se basa la definición del sistema de referencia pedido.

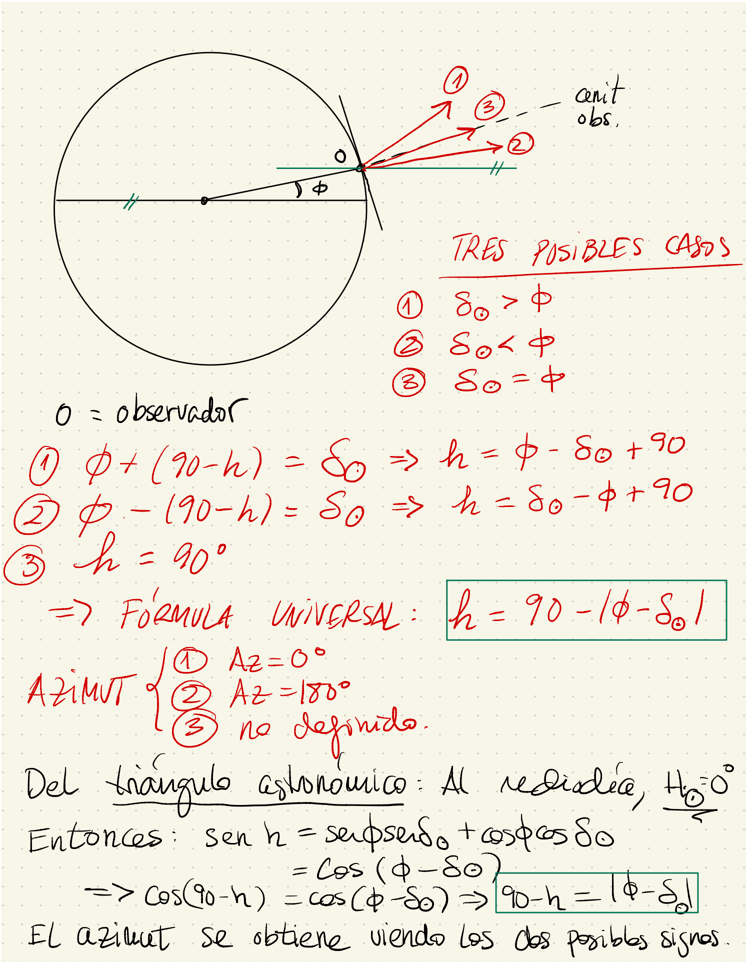


Figura 2: Resolución 2c, incluyendo la alternativa con el triángulo astronómico.

3. (**2,5 puntos**) Calculamos las cantidades conservadas y el vector nodal normalizado, obteniendo:

$$\epsilon = -0{,}75\ \text{UV}^2, \qquad \vec{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UD} \cdot \text{UV}, \qquad \vec{e} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De estos valores obtenemos rápidamente: $a = -2/3$ UD, $e = 5$ (una hipérbola), y por inspección $i = 90$º, $\Omega = 180$º. De las fórmulas sacamos también: $\omega = 36{,}87$º, $\theta(T_0) = 53{,}13$º, siendo los cuadrantes correctos a la vista de $e_z > 0$ y $\vec{r} \cdot \vec{v} > 0$. Puesto que el radio de perigeo es $r_p = a(1-e) = 2{,}66$ UD y es mayor que el radio de la Tierra (1 unidad canónica), nunca fue un peligro para la Tierra. El punto de mayor acercamiento fue en el pasado (ya que $\theta(T_0) > 0$), sucedio a una altitud de $1{,}66 R_\oplus = 10630{,}23$km, y con $\theta = 0$º, luego $u = 36{,}87$º y la latitud de máximo aproximamiento es también $\phi = 36{,}87$ºN al ser la órbita polar. Para calcular el instante y la longitud geográfica es necesario usar las leyes horarias de una hipérbola. Es fácil ver que para $\theta = 53{,}13$º, se tiene $H = 0{,}867$ (ojo: las funciones hiperbólicas no tienen unidades ni se pueden denominar radiantes, es como el argumento de una exponencial), $N = 4{,}032$ y por tanto $\Delta t = 1770{,}73$ segundos (observación: para calcular n hay que acordarse de pasar a a unidades físicas o bien calcular Δt en unidades canónicas y pasarlo a físicas), luego el instante fue Δt segundos antes de las 00:00 del día 28/11/20, es decir, el 27/11/20 a las 23:30:29.27 UT. Finalmente, la longitud sale de la fórmula $\Omega + \lambda_u = \text{GST}_0 + \omega_\oplus t + \lambda$, poniendo el tiempo negativo (también se podría calcular GST_0 del día anterior y poner el tiempo positivo, obviamente el resultado debe ser el mismo) y recordando que si un satélite polar va de Sur a Norte, $\lambda_u = 0$º, luego la longitud de máximo aproximamiento es, despejando, $\lambda = 67{,}4$ºE.

Ingenieros Aeronáuticos	$\mathrm{N^o}$DNI ______	Curso 19/20
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ______ 2^{do}Apellido ______	9/1/20
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**2º Parcial**

Valor total:10 puntos.

1. (**1,5 puntos**) Explique las hipótesis del problema de los tres cuerpos circular restringido. Defina los puntos de Lagrange y comente su estabilidad, así como dónde se ubican cuando uno de los dos cuerpos es mucho más masivo que el otro. Comente sobre el efecto de la atmósfera residual y el vacío parcial en un vehículo espacial. Explique los efectos del espacio en seres humanos.

2. (**3,5 puntos**) La ESA desea poner en órbita un satélite cartográfico que obtendrá fotos de la provincia de Sevilla. Se decide que el satélite debe pasar **al menos una vez cada 5 días** exactamente sobre Sevilla (latitud $37{,}23^{\mathrm{o}}$N, longitud $5{,}58^{\mathrm{o}}$O), y lo debe hacer a las 12:00 hora solar media, cruzando **de Norte a Sur**. Además se desea una órbita circular cuya altitud no debe ser ni inferior a 720 kilómetros ni superior a 760 kilómetros.

   ¿Qué tipo de órbita se va a emplear? Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época del 11 de Enero de 2019 a las 00:00 sabiendo que dicho día $\mathrm{GST}_0 = 120^{\mathrm{o}}$.

   Pasados 90 días, ¿cuál será la hora solar media a su paso por Sevilla?

   En la resolución del problema se debe tener en cuenta (cuando sea razonable hacerlo) la perturbación media del J2 (otras perturbaciones se pueden ignorar).

3. (**5 puntos**) Un vehículo se encuentra en el planeta enano Ceres, después de realizar una misión, en una órbita de aparcamiento circular a 10 kilómetros de altitud. ¿Se encuentra el vehículo en la esfera de influencia de Ceres? Justificar la respuesta. Se quiere retornar a la Tierra, siendo el destino una órbita geocéntrica de aparcamiento circular a 200 kilómetros de altitud. Comparar en términos de coste total (ΔV) una transferencia directa a la Tierra con una trayectoria que incluya una maniobra asistida por gravedad efectuada en Júpiter a una altitud igual a nueve radios jovianos; para llegar a Júpiter se aplica un $\Delta V = 3{,}8$ km/s en la órbita de aparcamiento. ¿Es viable realizar la misión usando dicha maniobra? (No es necesario calcular tiempos ni ángulos de fase)

   Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas (enanos o no) se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Datos:

Cuerpo	Símbolo	μ ($\mathrm{km^3/s^2}$)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Ceres	⚳	62.6325	473	2.7671

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, **adjuntar los razonamientos, resultados intermedios y fórmulas empleadas**.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Solución:

1. Pregunta teórica.

2. En primer lugar de los datos del enunciado obtenemos $a = 7123{,}63$ km ($h = 745{,}49$ km, contenida en el intervalo requerido) e $i = 98{,}37^{\circ}$. En el instante de tiempo en que el satélite pasa por Sevilla (T$_1$), se tiene $u_1 = 142{,}53^{\circ}$ y $\lambda_{u1} = 186{,}37^{\circ}$. Asumiremos que T$_1$ se da a las 12:00 HSM del día de la época. Como UT $=$ HSM $- \frac{\lambda_{SVQ}}{15}$, T$_1 = 12{,}372$ UT, y por tanto debemos propagar los elementos orbitales 12,372 horas (es decir, $t = 44539{,}2$ s) hacia atrás en el tiempo para obtener los correspondientes a época dada (T$_0$). Ya que se trata de poco tiempo, los efectos de la perturbación media del J2 serán muy pequeños. Haciendo cálculos sin tenerla en cuenta obtenemos: $\Omega = \mathrm{GST}_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda_{SVQ} + \lambda_{u1} = 114{,}14^{\circ}$ y $u_0 = u_1 - t\sqrt{\mu_{\oplus}/a^3} = -2537{,}14^{\circ} = -17{,}14^{\circ} = 342{,}86^{\circ}$. Considerando la perturbación, los resultados son: $\Omega_{pert} = \Omega - t\dot{\Omega} = 113{,}63^{\circ}$ y $u_{0pert} = u_0 - (\dot{\omega} + \dot{M})t = 346{,}06^{\circ}$. Junto con la inclinación y el semieje mayor, tenemos definidos los elementos orbitales del satélite en la época ($e = 0$ al ser circular).

   Pasados 90 días, la hora solar media a su paso por Sevilla será la misma (12:00 HSM). Al tratarse de una órbita heliosíncrona, se ha elegido i de manera que la perturbación media del J2 modifique Ω a la misma velocidad que se mueve el Sol medio. Por ello, con respecto al Sol medio la órbita no varía. Esto es asumiendo que ninguna perturbación adicional varía las propiedades de traza repetida o heliosincronismo de la órbita.

3. El radio de la esfera de influencia de Ceres es $R_{e⚳} = L_{⚳}(\mu_{⚳}/\mu_{\odot})^{2/5} = 77014$ km. Ya que el vehículo orbita a 483 km del planeta, se encuentra en la esfera de influencia del mismo con un amplio márgen. A continuación, se analizan las dos opciones que se proponen en el enunciado.

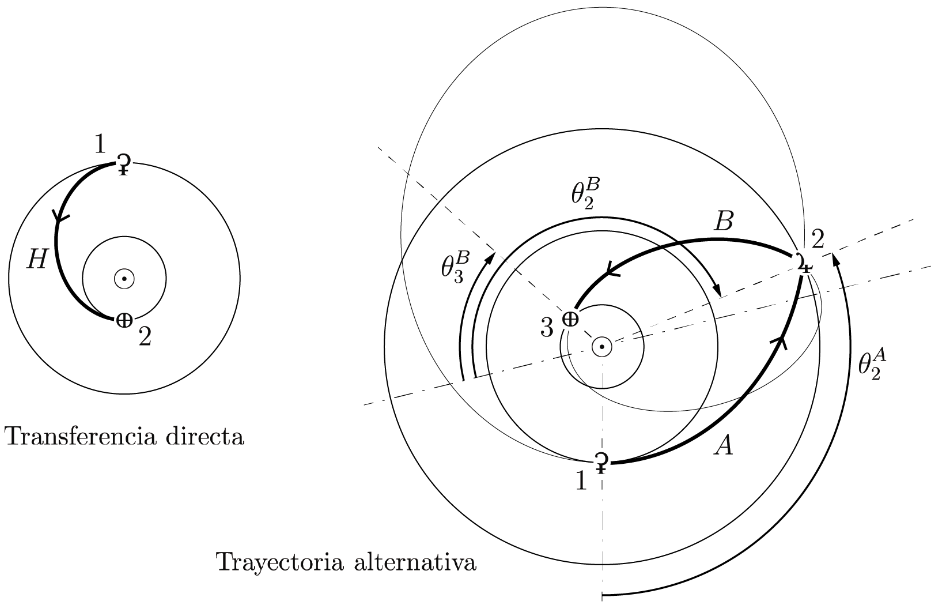
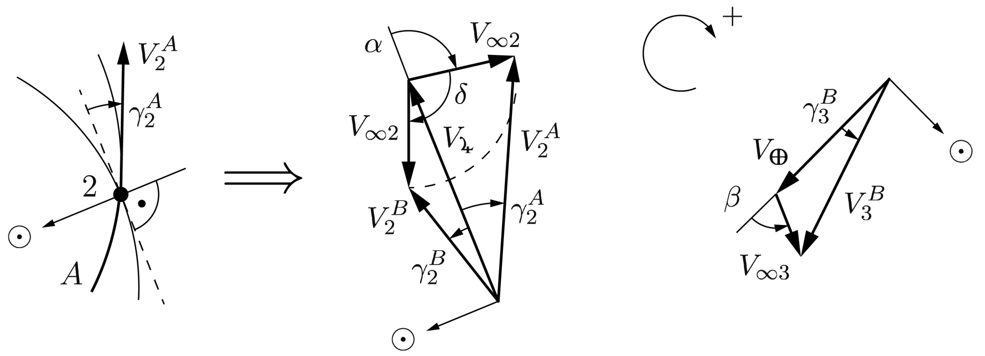


Figura 1: Representación a escala de ambas opciones. Se denotarán las órbitas heliocéntricas mediante letras y las posiciones de los planetas mediante números. En esta figura también se muestran los ángulos con los que se trabaja en los pasos intermedios de la trayectoria alternativa, y que son también relevantes para el cálculo de tiempos.

Transferencia directa: para optimizar ΔV se realiza una transferencia de Hohmann. Ya que la órbita de Ceres tiene un radio superior a la de la Tierra, con el primer impulso se escapa de la órbita de aparcamiento en sentido contrario a la velocidad que lleva el planeta. La elipse de Hohmann tendrá $a_H = 1{,}8838$ AU. Conociendo la velocidad circular de Ceres ($V_{⚳}$) y la que deberá tener el vehículo para seguir la trayectoria deseada $V_1^H = \sqrt{2\mu_{\odot}/L_{⚳} - \mu_{\odot}/a_H}$, se calcula $V_{\infty 1}$ como la diferencia entre ambas ($V_{\infty 1} = 0{,}1631$ UV$_{\odot}$ $= 4{,}859$ km/s). Con este dato es posible obtener la velocidad en el periapsis de la hipérbola de escape de Ceres: $V_{p1} = \sqrt{2\mu_{⚳}/(R_{⚳} + h_{park1}) + V_{\infty 1}^2} = 4{,}8858$ km/s, por lo que el impulso requerido para escapar será $\Delta V_{H1} = V_{p1} - V_{park1} = 4{,}5257$ km/s. De manera análoga se obtiene el valor del segundo impulso (para llegar a la órbita de aparcamiento en la Tierra), $\Delta V_{H2} = 4{,}9079$ km/s. Luego $\Delta V_H = \Delta V_{H1} + \Delta V_{H2} = 9{,}4336$ km/s. Por otra parte, $T_H = 472{,}194$ días $= 1{,}2928$ años.

Trayectoria alternativa: Con un impulso inicial $\Delta V_1 = 3{,}8$ km/s (dato del enunciado) en la órbita de aparcamiento alrededor de Ceres y asumiendo una salida tangente a la órbita del planeta, se tiene que la velocidad en el periapsis de la hipérbola de escape es: $V_{p1} = \sqrt{\mu_{⚳}/(R_{⚳} + h_{park1})} + \Delta V_1 = 4{,}1601$ km/s. Obtenemos $V_{\infty 1}$ de la ecuación de la energía específica de la hipérbola: $V_{p1} = \sqrt{2\mu_{⚳}/(R_{⚳} + h_{park1}) + V_{\infty 1}^2} \rightarrow V_{\infty 1} = 4{,}1288$ km/s $= 0{,}1386$ UV$_\odot$. Es decir, en el marco heliocéntrico se alcanza una velocidad $V_1^A = V_{⚳} + V_{\infty 1} = 0{,}7398$ UV$_\odot$. Los elementos que caracterizan la primera órbita heliocéntrica son $a_A = 5{,}6991$ AU y $e_A = 0{,}5144$. Como el radio en el afelio $r_a^A = a_A(1 + e_A) = 8{,}6307$ AU $> L_{♃}$, el vehículo llega a Júpiter, y lo hace con un ángulo de trayectoria $\gamma_2^A = 30{,}5918^{\text{o}}$. Por otra parte, la velocidad de llegada es $V_2^A = 0{,}4571$ UV$_\odot$. Con estos datos se plantea el triángulo de velocidades que permite resolver la maniobra asistida por gravedad, teniendo en cuenta que el vehículo es deflectado hacia el interior del sistema solar, y por tanto su velocidad absoluta debe disminuir ($V_2^A > V_2^B$).



Maniobra asistida por gravedad

Llegada a la Tierra

Figura 2: Triángulos de velocidades. En los cálculos con fasores se ha utilizado el criterio de signos indicado.

Mediante cálculo fasorial se tiene que $V_{\infty 2}\angle\alpha = V_2^A\angle\gamma_2^A - V_{♃}\angle 0^{\text{o}} = 0{,}2369\angle 100{,}936^{\text{o}}$ UV$_\odot$ $= 7{,}0563\angle 100{,}936^{\text{o}}$ km/s. Junto con la condición del enunciado (Ojo! Nos dicen que $r_{p2} = 10R_{♃}$) obtenemos $\delta = 102{,}647^{\text{o}}$, y finalmente $V_2^B\angle\gamma_2^B = V_{♃}\angle 0^{\text{o}} + V_{\infty 2}\angle(\alpha+\delta) = 0{,}2407\angle -23{,}1882^{\text{o}}$ UV$_\odot$. Luego la segunda órbita heliocéntrica tiene como elementos $a_B = 3{,}0635$ AU y $e_B = 0{,}7532$. Ya que $r_p^B = a_B(1-e_B) = 0{,}7561$ AU $> L_{\oplus}$, el vehículo llega a la Tierra y por tanto sí es viable realizar la misión. Para obtener la magnitud del impulso necesario para llegar a la órbita geocéntrica de destino, se calculan la velocidad de llegada a la Tierra, $V_3^B = 1{,}2937$ UV$_\odot$, y el ángulo de trayectoria, $\gamma_3^B = -27{,}1311^{\text{o}}$. Como la llegada no es tangente a la órbita de la Tierra, es necesario plantear un nuevo triángulo de velocidades. Se obtiene que $V_{\infty 3}\angle\beta = V_3^B\angle\gamma_3^B - V_{\oplus}\angle 0^{\text{o}} = 0{,}6090\angle - 75{,}61^{\text{o}}$ UV$_\odot$ $= 18{,}1402\angle - 75{,}61^{\text{o}}$ km/s. Finalmente, $\Delta V_2 = \sqrt{2\mu_{\oplus}/(R_{\oplus} + h_{park2}) + V_{\infty 3}^2} - \sqrt{\mu_{\oplus}/(R_{\oplus} + h_{park2})} = 13{,}435$ km/s y el impulso total será $\Delta V_T = 17{,}235$ km/s, mucho mayor que el necesario en la transferencia directa de Hohmann. Por tanto, aunque es viable realizar la misión usando una maniobra asistida por gravedad, no es ventajoso desde un punto de vista económico.

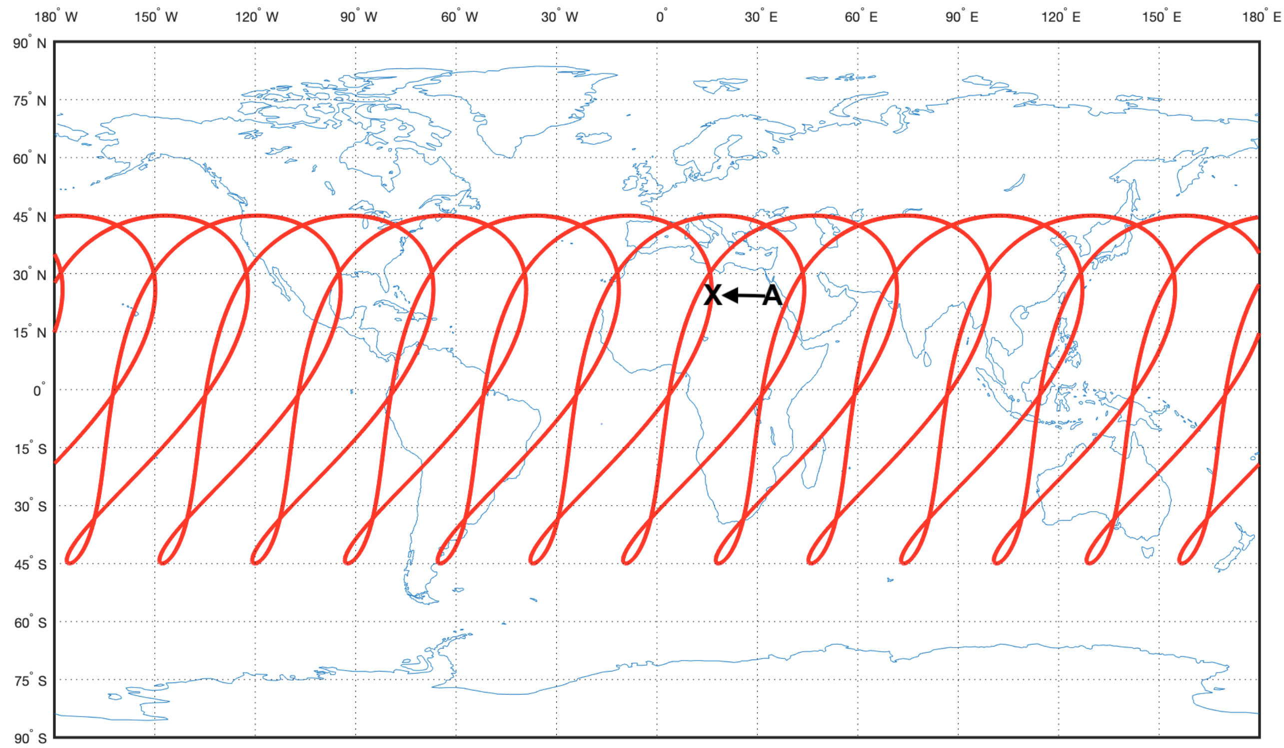
Por otra parte, los valores de los ángulos del esquema inicial son: $\theta_2^A = 112{,}22^{\text{o}}$, $\theta_2^B = 188{,}33^{\text{o}}$ y $\theta_3^B = 295{,}61^{\text{o}}$. Aplicando la ley horaria de la elipse, se tiene que el tiempo transcurrido en la trayectoria A es $T_A = 706{,}98$ días y en la trayectoria B es $T_B = 732{,}36$ días. En total, el tiempo de la misión sería $T_{TOT} = T_A + T_B = 1439{,}34$ días $= 3{,}9047$ años, que es bastante elevado y muy superior al requerido por la transferencia directa.

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas 30 minutos

Grado en Ingeniería Aeroespacial	N^{o}DNI ______	Curso 19/20
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido ______	15/11/19
	2doApellido ______	
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total 7 puntos.

Datos comunes: el Solsticio de Invierno de 2019 es el 22 de diciembre. El 15 de noviembre, GST$_0$=53.7964º. Datos de Sevilla: UT+1, $\phi = 37°22'56''$ N, $\lambda = 5°58'34''$ O.



1. (**2,5 puntos**) En la figura, se muestra la traza descrita por un satélite, que se cierra transcurridos *doce* días sidéreos, y se mueve exactamente entre las latitudes 45ºN y 45ºS. Se marca una ubicación de la Tierra (punto A), donde un observador, con coordenadas $\phi_A = 25{,}91^o N$, $\lambda_A = 16{,}31^o E$, observa el 15 de noviembre que el satélite pasa justo por su cénit en $t_A = 03 : 57 : 51$ UT y además, se mueve hacia el Sur (sin componente ni Este ni Oeste), determinando con ciertos instrumentos que la altitud del satélite al pasar era $h_A = 31731$ km. Encontrar los elementos orbitales del satélite con la mayor precisión posible. Escribir los ángulos pedidos en grados y a en km.

Elementos orbitales: $a = 39973$ km $\quad e = 0{,}28 \quad i = 45^o \quad \omega = 45^o \quad \Omega = 338{,}796^o \quad \theta(T_0) = 0^o$

2. (**1,5 puntos**) Responda las siguientes preguntas relacionadas con el tiempo:

   a) Definir Sol Medio, Hora Solar Aparente (HSA), Hora Solar Media (HSM), Hora Local (HL), Tiempo UT, de forma conceptual y explicando muy brevemente su utilidad, así como la relación entre ellas. Para una persona en un cierto punto de la Tierra, a una cierta hora UT, un cierto día, ¿de qué dependerán su HSA, HSM y HL? Razonar brevemente la respuesta. Definir también la Analemma y la Ecuación del Tiempo.

   b) Aplicación: Sea un observador en Sevilla el 15 de noviembre de 2019 a las 10:00 UT. Encontrar su HSA, HSM, HL (en formato horas:minutos:segundos), en que punto se encontraría el Sol en el cielo (en términos de elevación y azimut, en grados), y el valor de la Ecuación del Tiempo dicho día del año (en minutos).

HSA=9:48:23.55 HSM=9:36:5.73 HL=11:00:00 $h_{\odot}$= 25.93º, $Az_{\odot}$=145.1033º Ec. Tiempo (15/11)=12.3 min

Nota: Para simplificar, se puede suponer la órbita de la Tierra aproximadamente circular y el Sol en el infinito.

(sigue por detrás)

3. (**3 puntos**) El 15/11/2019 a las 02:00 UT se observa un satélite con la siguiente posición y velocidad, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UV.}$$

¿Cuáles son sus elementos orbitales en la época 15 de noviembre de 2019 a las $T_0 = 00:00:00$ UT? Escribir los ángulos pedidos en grados y a en UD.

$\boxed{\text{Elementos orbitales: } a = 12 \text{ UD} \quad e = 0{,}5 \quad i = 90^{\circ} \quad \omega = 270^{\circ} \quad \Omega = 210^{\circ} \quad \theta(T_0) = 319{,}7168^{\circ}}$

¿Cuáles serán las coordenadas (grados) y altitud (km) del satélite en $T_1 = 10:00$ UT?

$\boxed{\phi(T_1) = 18{,}18^{\circ}\text{N} \quad \lambda(T_1) = 5{,}79^{\circ}\text{E} \quad h(T_1) = 61635 \text{ km}}$

¿Con qué elevación (grados) se observaría desde Sevilla el satélite en T_1? $\boxed{h(T_1) = 66{,}0158^{\circ}}$

¿Estaría un observador en Sevilla dentro de la cobertura geográfica del satélite en T_1? $\boxed{\text{SI/X}}$ (tachar lo que no proceda).

¿Estaría un observador en Sevilla dentro de la cobertura instrumental del satélite en T_1, para un instrumento con $\alpha = 30^{\circ}$? $\boxed{\text{SI/X}}$ (tachar lo que no proceda).

¿Estaría el satélite eclipsado en T_1? $\boxed{\text{X/NO}}$ (tachar lo que no proceda).

Observación: los cálculos realizados en el problema 2 pueden ayudar a resolver el último apartado.

Solución:

1. Puesto que la traza es mixta, la órbita solo puede ser directa y teniendo en cuenta las latitudes cubiertas $i = 45^{\circ}$. Igualmente, tenemos la información de que la traza se cierra pasados 12 días sidéreos, y en la figura podemos contar 13 revoluciones (contando por ejemplo el número de veces que se alcanza la latitud mínima). Por tanto $T_{sat} = \frac{12}{13} T_{\oplus}$, de donde se deduce inmediatamente de la fórmula del periodo que $a = 39973$ km. En relación a Ω, encontramos que para el punto sobrevolado, se tiene $u = 141{,}8332^{\circ}$ y $\lambda_u = 150{,}9358^{\circ}$, por tanto de la fórmula $\Omega + \lambda_u = \mathrm{GST}_0 + \omega_{\oplus} t_A + \lambda$ despejamos $\Omega = 338{,}796^{\circ}$. Ahora, es necesario encontrar θ y e. En el punto de observación tenemos el dato de la altitud y el dato de que solamente se recorre hacia el sur, es decir:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} - R_{\oplus}, \\
\dot{\lambda} = 0 &= -\omega_{\oplus} + \frac{\cos i}{\cos^2\phi} n \frac{(1+e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

y sustituyendo el valor de $1 + e\cos\theta$ de la primera ecuación en la segunda, llegamos a:

$$
0 = -\omega_{\oplus} + \frac{\cos i}{\cos^2\phi} n \frac{(1-e^2)^{1/2} a^2}{(h+R_{\oplus})^2},
$$

y teniendo en cuenta $n = \frac{13}{12}\omega_{\oplus}$ y despejando e:

$$
e = \sqrt{1 - \left(\frac{h+R_{\oplus}}{a}\right)^4 \left(\frac{12\cos^2\phi}{13\cos i}\right)^2} = 0{,}28,
$$

y de la altitud, $\theta = 96{,}8440^{\circ}$ o $\theta = 263{,}1560$. Puesto que sabemos u, esto implicaría $\omega = 45^{\circ}$ u $\omega = 238{,}6772^{\circ}$. Por la forma de la traza, el perigeo debe encontrarse en el hemisferio norte y el apogeo en el hemisferio sur (puesto que es donde parte de la traza es retrógrada), en conclusión $\theta(t_A) = 96{,}8440^{\circ}$ y finalmente $\omega = 45^{\circ}$. Concluimos propagando θ con leyes horarias hasta la época, se obtiene directamente $\theta(T_0) = 0^{\circ}$ puesto que $\Delta t(\theta) = t_A$ (numéricamente sale 0.037 grados y se puede ignorar).

2. Problema sobre tiempos.

   a) Definiciones:

   - Sol Medio: Construcción abstracta matemática, es un objeto que se mueve en la esfera celeste en el plano del Ecuador con velocidad constante igual a la velocidad media del Sol respecto a la Tierra, de forma que su AR coincide con la del Sol en afelio y perihelio. Su objeto es proporcionar una aproximación uniforme al Sol.
   - HSA: Hora que mediría un reloj de Sol. Dada UT, depende de la longitud y el día del año. Es una hora importante desde el punto de vista biológico.
   - HSM: Hora que mediría un reloj del Sol si el sol fuera el Sol Medio. Dada UT, depende de la longitud. Proporciona una hora solar regularizada.
   - UT: HSM en Greenwich. Aproxima UTC (medida con relojes atómicos, que es más regular). Proporciona un tiempo universal para coordinarse y usarlo de referencia.
   - HL: UT corregida con los husos horarios y posible cambio de horario de verano. Dada UT, depende de la longitud, la latitud y el día del año. Es la hora marcada por un reloj convencional y supuestamente trata de aproximar HSM de forma racional para una región o país.
   - Analemma: curva trazada por el Sol en el cielo del observador en un punto concreto de la Tierra, tomando un punto cada día del año a la misma HSM.
   - Ecuación del tiempo: diferencia entre HSA y HSM como función del día del año, que resulta ser como mucho de 18 minutos.

   b) En Sevilla, y en horario de invierno (UT+1 como se indica en el enunciado), a las 10:00 UT se tiene $HL = 11:00$. Por otro lado, el 15 de noviembre son 37 días antes del Solsticio de invierno, luego $u_{\odot} = 270^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{365{,}25} 37 = 233{,}5318^{\circ}$ y del triángulo del Sol sacamos $\delta_{\odot} = -18{,}7034^{\circ}$, y $\mathrm{AR}_{\odot} = 231{,}1330^{\circ}$ (es necesario corregir el cuadrante). También en Sevilla a las 10:00 UT, $\mathrm{LST} = \mathrm{GST}_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda = 198{,}2311^{\circ}$. Por tanto $HSA = 12 + \frac{\mathrm{LST}-\mathrm{AR}_{\odot}}{15} = 9{,}8065 = 9:48:23{,}55$. Por otro lado $HSM = UT + \frac{\lambda}{15} = 9{,}6016 = 9:36:5{,}73$, y por tanto el valor de la ecuación del tiempo es la diferencia entre HSA y HSM, es decir, 12.3 minutos (observación: la ecuación del tiempo se puede definir como $HSA - HSM$ o $HSM - HSA$, ambas acepciones son válidas según el autor). Finalmente, la elevación y Azimut se calculan del triángulo astronómico, para el cual tenemos que $H_{\odot} = \mathrm{LST} - \mathrm{AR}_{\odot} = 327{,}0981^{\circ}$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} h &= \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\delta_{\odot} + \cos\phi\cos\delta_{\odot}\cos H_{\odot}, \\
\operatorname{sen} Az &= -\cos\delta_{\odot} \frac{\operatorname{sen} H_{\odot}}{\cos h}
\end{aligned}
$$

obteniendo $h_\odot = 25{,}93^o$, $Az_\odot = 145{,}1033^o$ (hay que coger la segunda solución ya que el Sol nunca se ve hacia el norte desde Sevilla).

c) Llamemos t_2 al instante de observación. De los datos obtenemos directamente $r = 6$ UD, $v = 1/2$ UV. Nos encontramos en perigeo o apogeo puesto que los vectores son perpendiculares, y como de la ecuación de la energía se obtiene $a = 12$ UD, se concluye $\theta(t_2) = 0^o$. Por tanto, de la fórmula del radio del perigeo, $e = 0{,}5$. Además como la órbita sobrevuela el polo sur, $i = 90^o$, y por estar el perigeo en el polo sur, $\omega = 270^o$. Para calcular Ω es necesario calcular $\vec{h}$ y $\vec{n}$:

$$\vec{h} = 6/4 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \text{UD} \cdot \text{UV}, \qquad \vec{n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego $\Omega = 210^o$. Para concluir esta parte del problema propagamos θ hasta T_0 obteniendo $\theta(T_0) = 319{,}7168^o$. Propagamos ocho horas hacia adelante, obteniendo $\theta(T_1) = 108{,}1791^o$, $u(T_1) = 18{,}1791^o$, $\lambda_u(T_1) = 0^o$. Luego, como el satélite es polar, $\phi(T_1) = 18{,}18^o$N, $\lambda(T_1) = \Omega + \lambda_u - \text{GST}_0 - \omega_\oplus t = 5{,}79^o$E, y calculamos su altitud $h(T_1) = 61635$ km. Para calcular la elevación obtenemos la distancia loxodrómica entre la Tierra y el punto subsatélite $\psi = 21{,}7996^o$ y de la fórmula de la elevación $h(T_1) = 66{,}0158^o$. Obviamente la elevación positiva implica que un observador de Sevilla SI estaríadentro de la cobertura geográfica del satélite en T_1. Por otro lado usando la fórmula de la cobertura instrumental en T_1, observamos que es igual que la geográfica, por lo que también estaría. Finalmente, para calcular si el satélite está eclipsado en T_1, suponiendo el Sol inmóvil, obtenemos el centro de la circunferencia de eclipse $\delta_O = 18{,}7034^o$, y $\text{AR}_O = 51{,}1330^o$, así como el radio de la circunferencia de eclipse $\Gamma = 5{,}3810^o$, por otro lado $\delta_{sat} = \phi_{sat} = 18{,}18^o$, y $\text{AR}_{sat} = \Omega + \lambda_u = 210^o$, por tanto la distancia loxodrómica $\alpha = 137{,}6757^o$ y no está eclipsado (como cabía esperar, ya que está muy cerca del meridiano de Sevilla y son las diez de la mañana en dicha ciudad).

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas y 40 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI ________________	Curso 18/19
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ________________ 2^{do}Apellido ________________	31/1/19
Universidad de Sevilla	Nombre ________________	**Problemas**

Valor total:8 puntos.

1. (**1 puntos**) Responder las siguientes preguntas de forma breve y concisa:

   a) Explicar los tres problemas básicos de la astronomía esférica y como se pueden resolver con el triángulo astronómico (no es necesario demostrar ninguna fórmula y se puede partir del triángulo astronómico tal y como viene en el formulario).

   b) Definir con precisión, y conceptualmente: Analemma, problema de Lambert, rendezvous, función de visibilidad, periodo anomalístico.

2. (**2 puntos**) Resolver los siguientes dos apartados (siendo el primero necesario para hacer el segundo completo):

   a) Sea un vehículo en una órbita elíptica con elementos orbitales relevantes a_i, e_i, ω_i. Supongamos que cuando se encuentra en una cierta anomalía verdadera θ_i (que puede tener cualquier valor) se realiza una maniobra tangente y coplanaria, de forma que la velocidad se incrementa una cantidad ΔV. Describa un procedimiento para hallar los nuevos valores a_f, e_f, ω_f y θ_f. ¿Si pudiéramos cambiarlo, en qué punto de la órbita θ_i se debería aplicar el impulso para obtener el mayor valor posible de a_f? Hacer un ejemplo numérico para $a_i = 2$ UD, $e_i = 0{,}2$, $\omega_i = 0^{\text{o}}$, $\Delta V = 0{,}1$ UV, realizando el impulso en $\theta_i = 90^{\text{o}}$ y luego alternativamente en el punto donde se ha encontrado que se maximiza a_f.

   b) Supongamos que en una órbita elíptica de elementos a, e, se desea realizar un phasing (de una sola vuelta) para pasar de $\theta_i(t_0)$ a otro valor distinto $\theta_f(t_0)$. ¿Cuál es el procedimiento para calcular dicho phasing teniendo en cuenta que la órbita es elíptica? Razonar, usando el resultado del apartado anterior, si se puede realizar en cualquier punto de la órbita, y si habría un punto particular donde sería más eficiente. Ejemplificar con $a = 2$ UD, $e = 0{,}2$, $\theta_i = 90^{\text{o}}$, $\theta_f = 60^{\text{o}}$, realizando primero el phasing en el instante inicial, o esperando al punto donde sería más eficiente.

3. (**2 puntos**) Dibuje de forma aproximada la traza de un satélite geosíncrono y circular tal que $i = 30^{\text{o}}$, $u(t_0) = 60^{\text{o}}$, GST(t_0)=120º, $\Omega = 90^{\text{o}}$. Repita el problema para $i = 150^{\text{o}}$ y el resto de elementos orbitales iguales.

4. (**3 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Mercurio (☿). Para realizar un análisis preliminar de la misión, se supone que el lanzador deja la sonda en una órbita geocéntrica de aparcamiento a 150 km de altitud, contenida en el plano de la eclíptica, desde donde comienza la parte de la misión que se quiere diseñar. Estudiar en primer lugar la transferencia directa (tipo Hohmann) y obtener el coste en términos de ΔV y duración del viaje interplanetario. Puesto que una transferencia directa es muy costosa, se decide realizar una maniobra asistida por gravedad en Venus (♀). Para llegar a Venus, se aplica en la órbita de aparcamiento un impulso tangente de $\Delta V = 4{,}6$ km/s, de forma que la velocidad de exceso de la hipérbola resultante se resta, en el sistema de referencia heliocéntrico, a la de la Tierra en relación al Sol (es decir salida tangente). ¿Sería suficiente este ΔV para alcanzar Mercurio?¿Es suficiente este ΔV para alcanzar Venus? En caso negativo a la primera pregunta y afirmativo a la segunda y suponiendo que el encuentro con Venus tiene lugar después del perihelio y que se realiza una maniobra asistida por gravedad con una aproximación a una altitud igual a 0.2 radios venusianos, ¿alcanza finalmente la misión Mercurio? Justificar la respuesta y en caso afirmativo indicar la anomalía verdadera con la que se alcanza. Finalmente, calcular el tiempo de vuelo y los ángulos de fase de ambos planetas.

   Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Datos:

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Mercurio	☿	22032.1	2439.7	0.387098
Venus	♀	324858.8	6051.8	0.723327

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, **adjuntar los razonamientos, resultados intermedios y fórmulas empleadas**.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Grado en Ingeniería Aeroespacial Escuela Superior de Ingenieros Universidad de Sevilla	N$^{\text{o}}$DNI __________ 1$^{\text{er}}$Apellido __________ 2$^{\text{do}}$Apellido __________ Nombre __________	Curso 18/19 9/11/17 **Cuestiones**

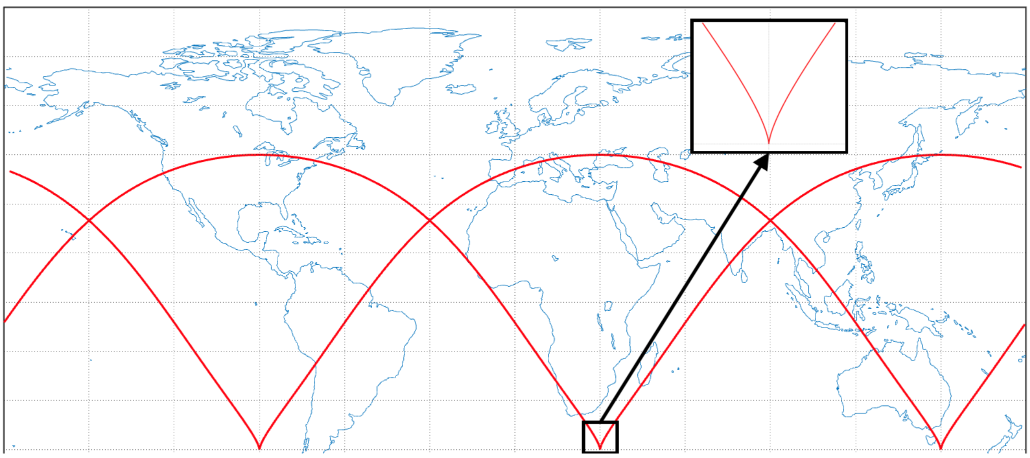
Valor total 7 puntos.

1. (**2 puntos**) Deducir la expresión $h = r^2\dot{\theta}$. Deducir matemáticamente la ley horaria de una parábola (ecuación de Barker) partiendo de dicha ecuación. Partiendo de la ecuación de Barker, ¿cómo se puede encontrar el ángulo si lo que se conoce es el tiempo? Razonar en detalle la respuesta. Finalmente, encontrar para un cuerpo en velocidad de escape que se encuentra a una altitud inicial de 10.000 kilómetros, y ángulo de trayectoria -20^{o}, su altitud transcurridas cuatro horas.

   Altitud a las 4 horas=49609 km

   Nota: Los diferentes apartados de esta cuestión están en orden lógico pero se pueden contestar en otro orden.

2. (**2,5 puntos**) En la figura, se muestra la traza descrita por tres revoluciones de un satélite, que se mueve entre las latitudes 45ºN y 45ºS. Se da un detalle de la traza en una ubicación de la Tierra, donde un observador, con coordenadas son $30^{\text{o}}E$, $45^{\text{o}}S$, observa el curioso efecto de que el satélite parece, cuando está en su cénit (lo que sucede a las 06:00 UT), no moverse en ninguna dirección, por un instante. Encontrar razonadamente los elementos orbitales, sabiendo que $GST_0 = 120^{\text{o}}$ el día de la observación, a las 00:00 UT de dicho día. Pista: la condición del observador se puede usar para obtener un polinomio en cierta variable que debe ser resuelto numéricamente.



   Elementos orbitales: $a = 20270km$ $e = 0{,}7182$ $i = 45^{\text{o}}$ $\omega = 90^{\text{o}}$ $\Omega = 330{,}2465^{\text{o}}$ $\theta(T_0) = 204{,}0031^{\text{o}}$

3. (**2,5 puntos**) El 9/11/2017 a las 03:00 UT se observa un satélite sobre el Ecuador a la longitud 30ºO con la siguiente posición y velocidad, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/3 \end{bmatrix} \text{ UV}.$$

   ¿Cuáles son sus elementos orbitales dicho día a dicha hora (denotada por T_0)?

   Elementos orbitales: $a = 9/2$ UD $= 28702$ km $e = 1/3$ $i = 90^{\text{o}}$ $\omega = 0^{\text{o}}$ $\Omega = 0^{\text{o}}$ $\theta(T_0) = 180^{\text{o}}$

   ¿Cuáles serán las coordenadas y tiempo de paso del siguiente nodo ascendente (denotado por T_1)?

   $\phi = 0^{\text{o}}$ $\lambda = 48{,}91^{\text{o}}E$ $T_1 = 09:43:16$ UT

   ¿Con qué elevación se observaría desde $\phi = 5^{\text{o}}S$, $\lambda = 30^{\text{o}}E$ el satélite en T_1? $\boxed{h(T_1) = 61{,}24^{\text{o}}}$

   ¿Estaría un observador en dicho punto dentro de la cobertura geográfica del satélite en T_1? SI/X (tachar lo que no proceda).

   ¿Estaría un observador en dicho punto dentro de la cobertura instrumental del satélite en T_1, para un instrumento con $\alpha = 30^{\text{o}}$? SI/X (tachar lo que no proceda).

Solución:

1. (**2 puntos**) Cuestión fundamentalmente teórica, excepto la parte final. Recordando que, para una parábola, $\gamma = \theta/2$, obtenemos $\theta = -40^{\circ}$. De la altitud a dicha anomalía verdadera, despejamos $p = 28925$ km (se comprueba que el radio de perigeo es sensiblemente mayor que el de la Tierra, luego no se podría estrellar contra ella). De la ecuación de Barker obtenemos $B = 0{,}5701$ (se puede interpretar como positivo o dejarle el signo negativo), luego faltan $1480{,}6$ segundos para pasar por el perigeo, que es menos de cuatro horas. Por tanto habrá que calcular el ángulo correspondiente a $4 \cdot 3600 - 1480{,}6 = 12919$ s. Se observa que para dicho tiempo $B = 4{,}9743$ y por tanto $\theta = 118{,}9057^{\circ}$. Finalmente computamos la altitud obteniendo $h = 49609$ km.

2. (**2,5 puntos**) En primer lugar, interpretamos la condición que se dice en el enunciado como que, desde el punto de vista del observador, $\dot{\lambda} = 0$ simultáneamente con $\dot{\phi} = 0$ (esto último siempre sucede en el punto de máxima y mínima latitud, pero es inusual que se combine con lo primero). Por tanto $i < 90^{\circ}$ ya que, si no $\dot{\lambda} < 0$ siempre, por su fórmula. Deduciendo por tanto $i = 45^{\circ}$ por las latitudes visitadas. Otro elemento orbital que se puede deducir por las simetrías es ω, que tiene que valer o bien 90° o bien 270°. Luego estudiaremos cual es exactamente su valor. Para calcular a, observamos que se repite tras tres revoluciones. Quedaría la duda de si dicha repetición es en un día sidéreo o no (la forma de la traza sugiere que sí, si se recuerda el aspecto de una órbita circular con periodo el de la Tierra dividido por tres, como la de la primera práctica; se considera argumento suficiente, ya que una traza retrógrada tendría un aspecto muy claramente distinto). En cualquier caso, para estar totalmente seguros, podemos considerar el siguiente argumento: seguimos un nodo ascendente hasta otro nodo ascendente. Si la traza fuera directa, obtenemos que el retraso nodal es -120º, y por tanto sería una traza del tipo que se repite cada día tras tres revoluciones. Si la traza fuera retrógrada, el retraso nodal es -240º, y la traza sería del tipo que se repite cada 2 días cada tres revoluciones (periodo 2/3 del de la Tierra). Pero sabemos que ninguna órbita por debajo de la geosíncrona puede tener una traza completamente retrógrada. Por tanto solamente puede ser la primera opción. Incluso un tercer argumento sería calcular la diferencia de longitud entre el punto de máxima y mínima latitud, que fácilmente se puede encontrar es $180^{\circ} - \omega_{\oplus} T/2$. Para el periodo un tercio el de la Tierra se obtiene 120º (para 2/3 sería 60º). Por cualquiera de estos argumentos, $T = \frac{T_{\oplus}}{3}$. De donde $a = 20270$ km. Además como ya sabemos que la traza es directa, podemos concluir $\omega = 90^{\circ}$ (en el punto de mínima latitud $\dot{\lambda} = 0$ y en el punto de máxima latitud $\dot{\lambda}$ es positiva, luego se mueve más rápido en el punto de máxima latitud y por ello debe ser el perigeo). Del observador, que está en el punto de mínima latitud a las 6:00 UT, obtenemos $\Omega = 330{,}2465^{\circ}$. También sabemos que en dicho instante $\theta = 180^{\circ}$, pero no es la época que nos piden. Para deducir la excentricidad y poder propagar la anomalía verdadera, usamos la condición $\dot{\lambda} = 0$ en el punto de máxima latitud:

$$0 = -\omega_{\oplus} + \frac{\cos i}{\cos^2 \phi} \dot{u} = -\omega_{\oplus} + \sqrt{2} n \frac{(1 + e \cos \theta)}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

Puesto que $T = \frac{T_{\oplus}}{3}$, $n = 3\omega_{\oplus}$, y además estamos en el apogeo luego $\theta = 180^{\circ}$. Por tanto:

$$\omega_{\oplus} = 3\sqrt{2}\omega_{\oplus} \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad \longrightarrow \quad (1 - e^2)^3 = 18(1 - e)^4 \longrightarrow \quad (1 + e)^3 = 18(1 - e)$$

La última ecuación es el polilnomio cúbico $e^3 + 3e^2 + 21e - 17 = 0$, cuya (única) solución real es $e = 0{,}7182$. Finamente, propagando la anomalía verdadera hacia atrás en el tiempo 6 horas desde $\theta = 180^{\circ}$ obtenemos: $\theta(T_0) = 204{,}0031^{\circ}$.

3. (**2,5 puntos**) De la ecuación de la energía obtenemos directamente $a = 9/2$ UD. Como $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares debemos estar en perigeo o apogeo. Pero como $r > a$, debe ser el apogeo y por tanto $\theta(T_0) = 180^{\circ}$, $e = 1/3$. Puesto que $\vec{r}$ está en el Ecuador y $\vec{v}$ apunta completamente hacia el sur, estamos en el nodo descendente y la órbita es polar, y también se tiene que nodo ascendente contiene al perigeo y está en la dirección x positiva. Luego $i = 90^{\circ}$, $\Omega = 0^{\circ}$, $\omega = 0^{\circ}$.

   En lo que se refiere al siguiente nodo ascendente, como hemos determinado que allí está el perigeo y estamos en el apogeo, no es necesario utilizar leyes horarias sino simplemente calcular medio periodo. Calculando el periodo en segundos, y luego sumándolo a las 03:00 UT, se determina que el paso es a las 09:43:16. Siendo un nodo ascendente obviamente la latitud es 0º. La longitud se determina de la ecuación que relaciona λ y λ_u, usándola en diferencias. Llegamos a que $\lambda = 48{,}91^{\circ}$E. Con esos datos, calculamos ψ para la elevación, obteniendo $\psi = 19{,}53^{\circ}$, y por tanto $h = 61{,}24^{\circ}$. Si la elevación es positiva, el punto donde está el observador debe estar dentro de la cobertura geográfica (se puede calcular la distancia ortodrómica, que es igual que ψ, y ver que es menor que el radio de la circunferencia de cobertura $\Gamma = 70{,}5288^{\circ}$). Finalmente, se observa que la fórmula de la cobertura instrumental no se puede usar porque $\frac{r}{R_{\oplus}} \operatorname{sen} \alpha > 1$, lo que implica que la cobertura instrumental coincide con la geográfica y por tanto también está dentro de la instrumental.

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas 40 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	$\mathrm{N^o}$DNI __________	Curso 17/18
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido __________ 2doApellido __________	23/1/18
Universidad de Sevilla	Nombre __________	**Problemas**

Valor total:8 puntos.

1. (**2 puntos**) Dibujar la traza de un satélite semisíncrono (es decir, su periodo es la mitad del periodo sidéreo de la Tierra) polar circular, uno de cuyos cruces por el Ecuador (nodo ascendente) es en la longitud 0º.

2. (**3 puntos**) La ESA desea poner en órbita un satélite cartográfico que obtendrá fotos de la provincia de Sevilla.

   Se decide que el satélite debe pasar **al menos una vez cada 15 días** exactamente sobre Sevilla (latitud $37{,}23^{\mathrm{o}}\mathrm{N}$, longitud $5{,}58^{\mathrm{o}}\mathrm{O}$), y lo debe hacer a las 13:00 hora solar media, cruzando **de Norte a Sur**. Además se desea una órbita circular cuya altitud debe ser lo más próxima posible a los 650 kilómetros.

   ¿Qué tipo de órbita se va a emplear? Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época del 23 de Enero de 2018 a las 00:00, suponiendo que dicho día es el que pasa por Sevilla, sabiendo además que en dicho día $\mathrm{GST}_0 = 120^{\mathrm{o}}$.

   Suponiendo que se parta de una órbita de aparcamiento a altitud 150 kilómetros, ya en el plano (i, Ω) adecuado y cuyo valor de u en la época es 100º, y que el vehículo se encuentra en dicha órbita el 23 de Diciembre a las 01:00, diseñar la maniobra o maniobras para llegar a la órbita destino gastando el menor combustible posible, calculando los instantes en los que se realizan los impulsos, en un tiempo máximo de quince horas.

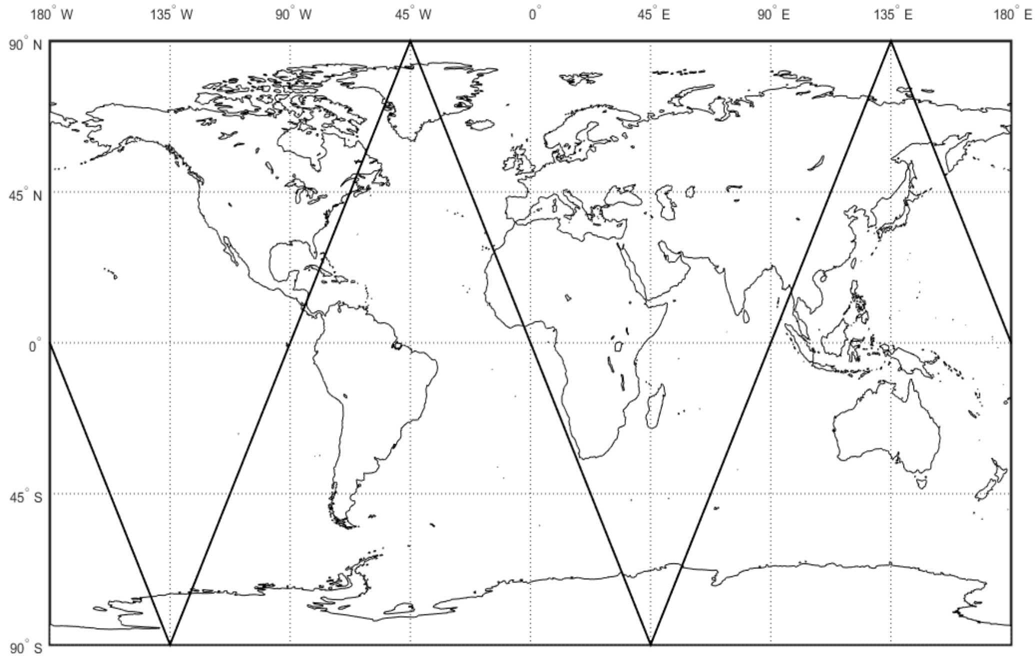
3. (**3 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Mercurio (☿). Para realizar un análisis preliminar de la misión, se supone que el lanzador deja la sonda en una órbita geocéntrica de aparcamiento a $180\ \mathrm{km}$ de altitud, contenida en el plano de la eclíptica, desde donde comienza la parte de la misión que se quiere diseñar. Puesto que una transferencia directa es muy costosa y lenta, se decide realizar una maniobra asistida por gravedad en Venus (♀). Para llegar a Venus, se aplica en la órbita de aparcamiento un impulso tangente de $\Delta V = 4{,}25\ \mathrm{km/s}$, de forma que la velocidad de exceso de la hipérbola resultante se resta, en el sistema de referencia heliocéntrico, a la de la Tierra en relación al Sol (es decir salida tangente). ¿Sería suficiente este ΔV para alcanzar Mercurio?¿Es suficiente este ΔV para alcanzar Venus? En caso negativo a la primera pregunta y afirmativo a la segunda y suponiendo que en Venus se realiza una maniobra asistida por gravedad con una aproximación a una distancia igual a 1.2 radios venusianos, ¿alcanza finalmente la misión Mercurio? Justificar la respuesta y en caso afirmativo indicar la anomalía verdadera con la que se alcanza. Finalmente, calcular el tiempo de vuelo y los ángulos de fase de ambos planetas.

   Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Datos:

Planeta	Símbolo	$\mu\ (\mathrm{km^3/s^2})$	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Mercurio	☿	22032.1	2439.7	0.387098
Venus	♀	324858.8	6051.8	0.723327
Marte	♂	42828.3	3397	1.52372
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Saturno	♄	37939519.7	60268	9.58078
Urano	⛢	5780158.5	25559	19.2709
Neptuno	♆	6871307.8	24764	30.1927
Plutón	♇	1020.9	1195	39.3782

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, **adjuntar los razonamientos, resultados intermedios y fórmulas empleadas**.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

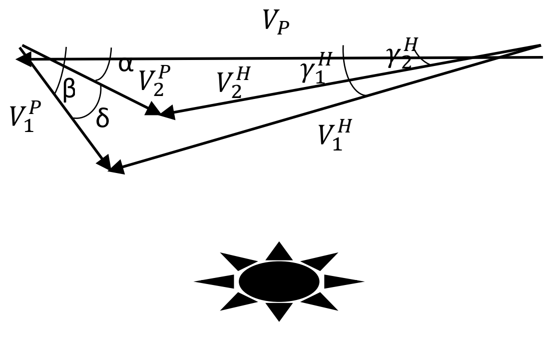
1.



2. Dado que se desea un sobrevuelo sobre Sevilla a una Hora Solar Media concreta cada 15 días, la órbita elegida será una heliosíncrona. En primer lugar calculamos los elementos orbitales. Para empezar $e = 0$. También sabemos $h \approx 650$ km y dividiendo el período correspondiente a dicha altitud con el período sidéreo de la Tierra se obtiene un valor de 0.06805276216, y aplicando el método de la fracción continua obtenemos como coeficientes $a_0 = 0$, $a_1 = 14$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$ y $a_5 = 1$. La primera aproximación sería 1/14, la segunda 1/(14+1)=1/15, la tercera 1/(14+1/(1+1/2))=3/44, la cuarta 1/(14+1/(1+1/(2+1/3)))=10/147 y la quinta 1/(14+1/(1+1/(2+1/(3+1))))=13/191, introduciendo los valores de m/k para cada aproximación en $T = mT_{\oplus}/k$ y calculando la altitud para cada una de las aproximaciones obtenemos: $h = 880.544, 554.241, 658.883, 648.241$ y 650.693 km para la primera, segunda, tercera, cuarta y quinta respectivamente. Por tanto, nos quedamos con la quinta aproximación obteniéndose $a = 7028.83$ km. Por otra parte, al ser una órbita heliosíncrona circular se calcula $i = 97.9871°$. Usando trigonometría esférica y teniendo en cuenta que la órbita es retrógrada se calcula $u(t_1) = 142.3423°$ y $\lambda_u(t_1) = 186.1204°$ siendo t_1 la época de sobrevuelo por Sevilla. Dicho tiempo de sobrevuelo se calcula a partir de la hora solar media como $t_1 = HSM - \frac{\lambda}{15} = 48139.20$ s = 13h 22m 19s. La ascensión recta del nodo ascendente en dicha época se calcula de la ecuación $\Omega(t_1) + \lambda_u(t_1) = GST_0 + \omega_{\oplus} t_1 + \lambda$, obteniéndose $\Omega(t_1) = 129.4290°$. Dado que los elementos orbitales se piden en el mismo día de sobrevuelo, se puede aproximar $\Omega(t_1) = \Omega(t_0)$, siendo t_0 la época a la que se piden los elementos orbitales. Por último, $u(t_0) = 67.2876°$ se puede calcular fácilmente al ser la órbita circular.
   Respecto a la maniobra requerida, ésta será una Hohmann (al encontrarnos ya en el plano orbital requerido). La dificultad está en que se ha de calcular el momento en el que iniciar dicha maniobra. Los parámetros de la maniobra de Hohmann son

fácilmente calculables resultando en $a_H = 6778.49$ km, $T_H = 5554.05$ s $= 1.5428$ h, $\Delta V_1 = 142.987$ m/s y $\Delta V_2 = 140.370$ m/s. Para calcular la época de inicio de la maniobra, t_M, se usará el intervalo de tiempo transcurrido entre ésta y la época inicial, 23 de Diciembre a las 01:00 (t_0), dado por T_M, siendo la época de inicio de la maniobra $t_M = t_0 + T_M$. Denotando por $u_0 = 33.02474°$ el argumento de la latitud de la órbita final en t_0, se tiene que el argumento de la latitud en la época de fin de la maniobra (t_f) viene dado por $u_0 + n(T_M + T_H)$ donde n es la velocidad angular de la órbita final. Por otra parte, dicho argumento de la latitud también está dado por $u_P + n_P T_M + \pi$, donde u_P es el valor inicial del argumento de la latitud de la órbita de parking y n_P la velocidad angular de dicha órbita. Igualando las anteriores expresiones y despejando se tiene $T_M = \frac{u_0 + nT_H - u_p - \pi}{n_p - n}$. Se obtiene $T_M = 13057.9$ s $= 3.6271$ h. En consecuencia, la maniobra se iniciará en $t_M = 16657.9$ s = 04h 37m 38s y acabará en $t_f = 22211.95$ s = 06h 10m 12s del 23 de Diciembre de 2017 siendo la duración total $T_M + T_H < 15$ h.

3. En primer lugar, al darse un impulso tangente en la órbita de aparcamiento la sonda se tiene que $V_P + \Delta V = 12.046$ km/s, lo que resulta en $a = -16925.68$ km y $V_\infty = 4.8528$ km/s. Al ser la salida tangente, la velocidad de salida de la Tierra $V_0^H = V_\oplus - V_\infty = 0.8371$ UV, con dicha velocidad se obtiene $a_H = 0.7696$ AU. Como la salida es tangente, la Tierra se encuentra inicialmente en el afelio de la sonda y por tanto $e_H = 0.2993$. Con el semieje mayor y la excentricidad de la órbita podemos calcular el radio de perihelio y ver si llega a Mercurio, $r_{H,p} = 0.5393$ AU > $r_{H,}$. Por tanto, el impulso aplicado no es suficiente. Sin embargo, $r_{H,p}$ < $r_{H,}$, y llegaría a Venus con $V_1^H = 1.2106$ UV, $\theta_1^H = 263.99°$ y $\gamma_1^H = -17.0818°$. El tiempo de vuelo hacia Venus sería de $t_{v,1} = 81.0953$ dias y el ángulo de fase de $\psi = \Delta\theta - t_{v,1} n = 314.0504°$.
Estudiemos ahora la maniobra asistida por gravedad en Venus, calculamos $V_\infty = 10.606$ km/s, $a = -2887.96$ km, $e = 3.5146$, $\delta = 33.0598°$, así como $\beta = 87.0142°$, $\alpha = \beta - \delta = 53.9544°$, $V_2^H = 1.0083$ UV y $\gamma_2^H = -16.5928°$. Luego, la órbita de salida tiene como parámetros $a_H = 0.5719$ AU, $e_H = 0.3820$ y $\theta_2^H = 211.79°$. El radio de perihelio es igual a $r_{H,p} = 0.3535$ AU < $r_{H,}$, y por tanto la misión alcanzará finalmente a Mercurio con $\theta_3^H = 313.29°$. El tiempo de vuelo de Venus a Mercurio es de $t_{v,2}$ =42.8004 días y el ángulo de fase es $\psi = (\theta_3^H - \theta_2^H) + (\theta_1^H - \pi) - (t_{v,1} + t_{v,2})n = 38.3961°$. El tiempo total de misión es $t_v = t_{v,2} + t_{v,1}$ =123.8957 días.



Ingenieros Aeronáuticos	N^o DNI ______	Curso 17/18
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er} Apellido ______ 2^{do} Apellido ______	21/12/17
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**2º Parcial**

Valor total:10 puntos.

1. (**2 puntos**) Desarrollar brevemente (3 párrafos máximos) los siguientes temas:
   - Equilibrios del problema de los tres cuerpos.
   - Paneles solares como fuente de potencia primaria.
   - Efecto de la atmósfera residual y el vacío parcial en un vehículo espacial.
   - Efectos del espacio en seres humanos.

2. (**5 puntos**) El objetivo de este apartado es diseñar una **constelación Walker de 12 satélites heliosíncronos circulares distribuidos en 4 planos**. Se tiene que la época es el 22 de Diciembre de 2017 a las 00:00 y dicho día GST_0=30º. Se buscan los siguientes requisitos:
   - Buscar una altitud lo más próxima posible a 500 kilómetros que resulte en una traza repetida, como mucho cada 10 días (si no se sabe resolver este apartado, considérese una traza que se repita todos los días próxima a dicha altitud).
   - Determinar en base a la altitud la inclinación de la órbita.
   - El satélite base de la constelación Walker debe pasar por el punto de coordenadas 30ºS, 30ºO, a las 12:00 HSM, cruzando de S a N, el 23 de Diciembre de 2017.
   - La separación entre satélites en planos adyacentes es de 30º (es decir se trata de una constelación Walker 12/4/1).

   Determinar los elementos orbitales de todos los satélites en la época, rellenando la tabla, así como la Hora Solar Media de paso por el Ecuador (HSM_0) para cada uno de ellos.

Satélite	a (km)	i(º)	e	Ω(º)	u(º)	HSM_0
1	6881.5	97.4130	0	207.2532	301.0425	11:42:46
2	”	”	0	207.2532	61.0425	11:42:46
3	”	”	0	207.2532	181.0425	11:42:46
4	”	”	0	297.2532	331.0425	17:42:46
5	”	”	0	297.2532	91.0425	17:42:46
6	”	”	0	297.2532	211.0425	17:42:46
7	”	”	0	27.2532	1.0425	23:42:46
8	”	”	0	27.2532	121.0425	23:42:46
9	”	”	0	27.2532	241.0425	23:42:46
10	”	”	0	117.2532	31.0425	5:42:46
11	”	”	0	117.2532	151.0425	5:42:46
12	”	”	0	117.2532	271.0425	5:42:46

   Suponiendo que los satélites 1, 2 y 3 se lanzan con el mismo vehículo lanzador y se encuentran en una órbita de aparcamiento en el plano (i, Ω) correcto a 120 kilómetros de altitud, justo a las 6:00 UT del 22/12/17, con u en dicho instante igual a 100º (se supone que los tres satélites ocupan inicialmente el mismo punto sin colisionar), **diseñar a partir de ese momento la maniobra o maniobras que tendrán que efectuar cada uno de estos satélites (1,2,3) para situarse en la órbita diseñada consumiendo el menor combustible posible y antes de las 1:00 UT del 23/12/17**, indicando para cada satélite cuando se efectúan los impulsos, su amplitud y dirección.

   Observación: en caso de que al alumno no le "gusten" las constelaciones, se puede resolver el problema sólo para el satélite base para obtener hasta 3 puntos en el problema.

(Sigue por detrás)

3. (**3 puntos**) Un cometa fue detectado a 40 AU del Sol, viajando en una órbita heliocéntrica que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con perihelio a $4{,}8$ AU del Sol. El cometa, en la parte de su órbita **anterior** a llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2\,\mathrm{AU}$, $R_{♃} = 71492\,\mathrm{km}$), pasando a una distancia (radio) de 7 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar (frena su velocidad). Halle la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y determine si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra o no. En caso de que pudiera llegar, calcule el tiempo que tardaría en cruzarse por primera vez con la órbita de la Tierra, desde que fue detectado. Se puede realizar la simplificación usual de considerar las órbitas de todos los planetas circulares y coplanarias con la eclíptica. Rellene el recuadro con las respuestas. Se pide también incluir el dibujo del triángulo de velocidades para la "maniobra".

Semieje mayor tras el encuentro (AU)=3.0098,Excentricidad tras el encuentro=0.7604

Llega a la órbita de la Tierra: S, Tiempo total en llegar al primer cruce (años)=23.45

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, **adjuntar los razonamientos, resultados intermedios y fórmulas empleadas**.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Solución:

1. Pregunta teórica.

2. En primer lugar, se van a realizar todos los cálculos ignorando perturbaciones para facilitar las cuentas. Puesto que las propagaciones nunca van a superar un día o un día y medio, no debería suponer una gran diferencia, si bien se podría incorporar sin mucho problema la perturbación media del J2.

   Para responder a la pregunta comenzamos diseñando el satéilte base de la constelación. Para calcular el semieje mayor (radio, al ser circular la órbita) usamos el algoritmo de la fracción continua. Para una órbita a 500 kilómetros, el valor del periodo dividido por el periodo sidéreo de la Tierra sería 0.065885776430244; las aproximaciones que se encuentran con dicho algoritmo vienen dadas por una fracción continua con coeficientes 15,5,1,1. Por tanto, tomando un único coeficiente, la primera aproximación sería 1/15. La segunda, 1/(15+1/5)=5/76. La tercera, 1/(15+1/(5+1/1))=6/91. La cuarta, 1/(15+1/(5+1/(1+1/1)))=11/167, que ya no cumpliría las condiciones del enunciado. Las altitudes con estos valores serían, respectivamente, 554.24 km, 493.3 km, 503.36 km, 498.78 km, observándose como se acercan a 500 tal y como era de esperar. Por tanto nos quedamos con 6/91, es decir, la órbita se repite tras 91 revoluciones que se realizarán en 6 días sidéreos. La altitud resultante es $h = 503{,}36 km$ y por tanto $a = 6881{,}5$ km, que será igual para todos los satélites, y de la fórmula de los satélites heliosíncronos, $i = 97{,}4130^{\circ}$.

   Seguimos con el satélite base. En el paso por las coordenadas obtenemos $u = -30{,}2792^{\circ}$ y $\lambda_u = 4{,}3080^{\circ}$. De la hora solar media de paso y la longitud sacamos que la UT de paso es $t = 50400$s. Teniendo en cuenta que el paso es el día 23/12, hay que propagar GST un día (o sumar 86400 segundos al tiempo). En cualquiera de los casos, obtenemos $\Omega = 207{,}2532$. Por otro lado propagando hasta la época $u = 301{,}0425^{\circ}$. Ahora realizamos la constelación Walker, ordenando los satélites por plano (1,2,3 en el primer plano, etc). Al haber cuatro planos deben estar desfasados 360/4=90º entre sí, y al haber 3 satélites por plano estos deben estar separados 360/3=120º entre sí. Además teniendo en cuenta la separación por plano esto permite rellenar la tabla.

   Finalmente para calcular HSM_0 tenemos en cuenta que $HSM = HSM_0 + \lambda_u/15$, con λ_u en grados. Luego para el satélite base $HSM_0 = 11 : 42 : 46$. Hay que observar que todos los satélites en el mismo plano tendrán la misma HSM_0. Los satélites en otros planos la modificarán, puesto que hay un desfase de 90º, eso implica 6 horas de diferencia. Con ello rellenamos la tabla.

   Relativo a la maniobra, claramente será una tipo Hohmann y la única duda es cuando comenzarla (no es necesario un phasing si se realiza la maniobra de Hohmann en el instante apropiado). En primer lugar, calculamos los costes. Se calcula fácilmente $a_H = 6689{,}8$ km, $T_H = 0{,}7563$ horas, $\Delta V_1 = 0{,}1114$ km/s, $\Delta V_2 = 0{,}1098$ km/s, $\Delta V_T = 0{,}2212$. Relativo a cuando comenzarla, sea t_M el instante en el que se comienza la maniobra medido desde la época (luego se termina en t_M+t_H), n_p la velocidad angular de la órbita de aparcamiento, n la velocidad angular de la órbita final. Empezamos por el satélite 1. Queremos que u a la llegada sea el correcto. Como conocemos u de la órbita final en la época (llamémoslo u_0), el valor de u que queremos alcanzar es $u_0 + n(T_M + T_H)$. Por otro lado partimos de $u_p = 100^{\circ}$ en $t_p = 6 \times 3600$s, luego el u alcanzado es $u_p + n_p(T_M - t_p) + 180^{\circ}$. Igualando ambas expresiones: $u_p + n_p(T_M - t_p) + 180^{\circ} = u_0 + n(T_M + T_H)$, y despejando $t_M = \frac{u_0 - u_p + n_p t_p + n T_H - 180^{\circ}}{n_p - n}$. Antes de escribir la expresión observamos que el numerador es un ángulo y por tanto podemos sumarle o restarle tantas veces 2π como sea necesario para encontrar un número entre 0 y 2π (sumando o restando 2π encontramos otras posibles soluciones). En este caso hay que restar 4 veces 2π. Obtenemos $T_M = 43098$ s, es decir a las 11:58:18. Las maniobras para el satélite 2 y 3 son iguales pero comienzan a horas diferentes porque la u_0 es diferente. Se obtiene para el satélite 2 que se debe comenzar o 5,8587 horas después ($\frac{120^{\circ}}{n_p - n}$), o 11,7175 horas antes ($\frac{-240^{\circ}}{n_p - n}$). Nos quedamos con la primera solución, 17:49:49. El 3 debe comenzar a las 23:41:21 o a las 6:6:46 (parece mejor la segunda solución). Los satélites llegan a su destino transcurrido el tiempo de la transferencia de Hohmann, en cualquier caso dentro de plazo.

3. Problema similar al realizado en otras ocasiones. La solución numérica se escribe sobre el enunciado.

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Grado en Ingeniería Aeroespacial Escuela Superior de Ingenieros Universidad de Sevilla	N^o DNI ____ 1er Apellido ____ 2do Apellido ____ Nombre ____	Curso 17/18 15/11/17 **Cuestiones**

Valor total 7 puntos.

1. (**1,5 puntos**) Responder las siguientes preguntas de forma breve y concisa:

   (a) Explicar los tres problemas básicos de la astronomía esférica y como se pueden resolver con el triángulo astronómico (no es necesario demostrar ninguna fórmula y se puede partir del triángulo astronómico tal y como viene en el formulario).

   (b) Enumerar los efectos de perturbación que afectan a los satélites en órbita geocéntrica. ¿Cuáles son los más importantes en órbita baja? ¿Y en órbitas más elevadas?

   (c) Definir (conceptualmente): Analemma, problema de Lambert, propagador, Día Juliano, función de visibilidad, periodo anomalístico, retraso nodal.

2. (**1,5 puntos**) Dibujar la traza de un satélite geosíncrono polar circular que cruza el Ecuador en la longitud 0º.

3. (**4 puntos**) Responder los siguientes apartados (los dos primeros se pueden responder por separado):

   (a) El solsticio de invierno es el día 21/12 en el año 2017. ¿Cuál es la posición del Sol en la esfera celeste (declinación, ascensión recta) el día de hoy (15/11/2017)? Se puede suponer la órbita de la Tierra circular para simplificar.

   (b) El 15/11/2017 a las 00:00 se observa un satélite sobrevolando el Ecuador a la longitud 15ºE con la siguiente posición y velocidad, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UD}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UV}.$$

   ¿Cuáles son sus elementos orbitales a las 00:00 del mismo día? ¿Qué punto de la Tierra (latitud y longitud) sobrevuela el satélite a las 07:58 UT del mismo día?

   (c) Suponiendo en este apartado que el Sol no se mueve de las coordenadas calculadas en el apartado (a) durante todo el día, ¿Está eclipsado el satélite a las 07:58 UT del 15/11/2017? En caso afirmativo, plantear el cálculo del tiempo en el que dejaría de estar eclipsado ese mismo día. En caso negativo, plantear el cálculo del último tiempo anterior a las 07:58 en el que dejó de estar eclipsado ese mismo día. En ambos casos, reducir el problema a la resolución numérica de cierta ecuación (no es necesario resolverla).

Solución:

1. Pregunta de teoría.
2. De las ecuaciones que expresan la derivada de latitud y longitud a lo largo de la traza se deduce:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -\omega_{\oplus} + \frac{\cos i}{\cos^2 \phi}\, \dot{u} = -\omega_{\oplus} \\ \dot{\phi} &= \frac{\tan \phi}{\tan u} = \pm \omega_{\oplus}\end{aligned}$$

donde se ha usado que $i = 90^{\text{o}}$ (órbita polar), que $\dot{u} = \omega_{\oplus}$ (órbita geosíncrona circular), y que $\phi = u$ (el pase de S a N) o $\phi = 180^{\text{o}} - u$ (en el pase de N a S), que son respectivamente el signo positivo y negativo de $\dot{\phi}$. Llegándose a la conclusión de que la traza es una recta con pendiente unidad que se recorre siempre hacia el Oeste. Por tanto estará compuesta de un segmento que termina en (90ºN,90ºO) y comienza en (90ºS,90ºE), cruzando el Ecuador por la longitud 0º como se indica en el enunciado (nodo ascendente). Posteriormente a dicho segmento, rodea la Tierra y cruza desde (90ºN, 90ºE) hasta (90ºS,90ºO), cruzando de nuevo el Ecuador por la longitud cero en el nodo descendente. Por lo que la traza tiene la forma exacta de una X, tal y como se ve en la figura.

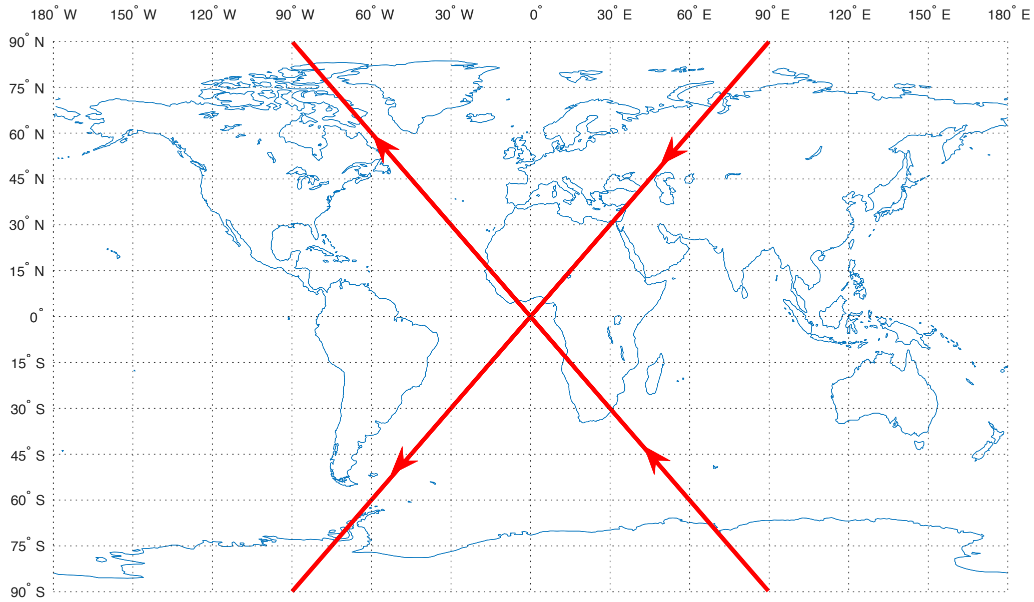


Figura 1: Traza del problema 2.

3. Llamemos T_0 al 15/11/2017 a las 00:00 UT.

   Para el apartado (a) y recordando que noviembre tiene 30 días, se tiene que el tiempo transcurrido entre el solsticio de invierno y T_0 son 36 días. Por tanto y usando como referencia el solsticio se tiene $u_{\odot}(T_0) = 270^{\text{o}} - \frac{36}{365{,}25}360^{\text{o}} = 234{,}5175^{\text{o}}$. Usando trigonometría esférica obtenemos rápidamente $\delta_{\odot}(T_0) = -18{,}9473^{\text{o}}$ y $\text{AR}_{\odot}(T_0) = 232{,}142^{\text{o}}$

   Para el apartado (b), de los datos del enunciado, obtenemos $a = 3$ UD (de la ecuación de la energía), $i = 0^{\text{o}}$ (ya que posición y velocidad están en el Ecuador y el producto vectorial de ambas tiene componente z positiva), $\theta = 0^{\text{o}}$ (puesto que r y v son perpendiculares se está en perigeo o apogeo, pero el radio es menor que a luego tiene que ser perigeo), $e = 1/2$ (de la fórmula del radio de perigeo), $\bar{\omega} = 0^{\text{o}}$ (ya que el perigeo está en la dirección x coincidiendo con la dirección del primer punto de Aries).

   Para encontrar la latitud y longitud en el instante T_1 (15/11/2017 a las 07:58), en primer lugar $\phi = 0^{\text{o}}$ en todo instante por ser ecuatorial. Para hallar $\lambda(T_1)$, empezamos por resolver leyes horarias (hay que pasar a a unidades físicas recordando que la unidad canónica geocéntrica es el radio de la Tierra y restarle un periodo al tiempo porque es ligeramente superior al periodo) y obtenemos $M(T_1) = 0{,}5579$ rad, $E(T_1) = 232{,}1420$, $\theta(T_1) = 84{,}8103^{\text{o}}$. Por otro lado, la ecuación de la traza para una órbita ecuatorial es $\bar{\omega} + \theta = \text{GST}_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda$ (se puede deducir fácilmente por la definición de los diferentes ángulos cortando la Tierra por el Ecuador), por lo que trabajando en diferencias, $\theta(T_1) - \theta(T_0) = \omega_{\oplus}(T_1 - T_0) + \lambda(T_1) - \lambda(T_0)$, y por tanto $\lambda(T_1) = \lambda(T_0) + \theta(T_1) - \theta(T_0) - \omega_{\oplus}(T_1 - T_0) = 20{,}017^{\text{o}}$O.

   Para ver si está eclipsado en T_1, calculamos el radio en dicho instante de la ecuación de la cónica, obteniendo $r = 13730$ km, luego la circunferencia de eclipse tiene como radio $\Gamma = 27{,}6808^{\text{o}}$. Por otro lado, el centro de la circunferencia de eclipse tiene coordenadas $(\delta, AR) = (18{,}9473^o, 52{,}142^o)$. La AR del satélite se calcula como $\bar{\omega} + \theta$, luego $(\delta(T_1), AR(T_1)) = (0^o, 84{,}8103^o)$. Calculando la distancia ortodrómica (sobre la esfera celeste) obtenemos $\alpha = 37{,}2315^o < \Gamma$ luego no está eclipsado.

El último instante de eclipse no es sencillo de calcular porque el satélite es excéntrico y la altura va variando. Nos centramos en encontrar el valor de anomalía verdadera del último eclipse que llamamos θ_E sabiendo que es equivalente al tiempo de eclipse a través de las leyes horarias. Para que "justo" esté en eclipse, la distancia ortodrómica tiene que ser igual a Γ, por lo que

$$\cos\Gamma = \operatorname{sen}\delta_E \operatorname{sen}\delta_O + \cos\delta_E \cos\delta_O \cos(AR_E - AR_O)$$

Puesto que el satélite es ecuatorial se tiene $\delta_E = 0^o$ (independientemente de cuanto valga θ_E y por otro lado $AR_E = \bar{\omega} + \theta_E = \theta_E$, luego

$$\cos\Gamma = \cos\delta_O \cos(\theta_E - AR_O)$$

y por otro lado la ecuación de Gamma, del formulario, es:

$$\operatorname{sen}\Gamma = \frac{R_\oplus}{\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_E}} = \frac{R_\oplus(1+e\cos\theta_E)}{a(1-e^2)}$$

Puesto que seno al cuadrado más coseno al cuadrado suman uno, obtenemos:

$$\cos^2\delta_O \cos^2(\theta_E - AR_O) + \left(\frac{R_\oplus(1+e\cos\theta_E)}{a(1-e^2)}\right)^2 = 1$$

Ecuación que resuelta numéricamente con una estimación inicial igual a $\theta(T_1)$ (ya que hay varias soluciones pero está claro que T_1 estaba relativamente cerca del eclipse) arroja el valor de $\theta_E = 75{,}7660^o$, y calculando el tiempo, se obtiene que el último instante de eclipse fue a las 7:51:54 UT. (Observación: para obtener este apartado bien en el examen se puede plantear la ecuación numérica de diversas maneras, que son todas equivalentes. No es necesario resolverla como se indica en el enunciado).

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Ingenieros Aeronáuticos	N^oDNI ______	Curso 15/16
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ______ 2^{do}Apellido ______	20/1/17
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**2º Parcial**

Valor total:10 puntos.

1. (**2 puntos**) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
   - ¿Por qué razón o razones la oxidación de materiales superficiales puede ser significativa en órbita baja?
   - Describir usos, ventajas y desventajas de los paneles solares.
   - Definir el albedo. ¿Qué factores influyen en la radiación por albedo que recibe un vehículo espacial?
   - Describir la configuración de los equilibrios del problema de los tres cuerpos circular restringido, incluyendo un pequeño esquema. ¿Dónde se encuentran, aproximadamente, dichos puntos, cuando uno de los cuerpos masivos tiene mucha mayor masa que el otro? En dicho, caso, ¿qué puntos son estables?
2. (**2 puntos**) Un satélite heliosíncrono se encuentra en una órbita circular que se repite cada día, después de 15 revoluciones del satélite. Sabemos que un cierto día, viajando de Sur a Norte pasa por la latitud 30ºN, a las 10:00 Hora Solar Media. ¿A qué hora solar media pasa por la latitud 45^oS cuando viaja **de Norte a Sur**?
3. (**3.5 puntos**) Se quiere pasar de una órbita circular de elementos orbitales relevantes $u(t_0) = 180^o$, $a = 2$ UD, situada en un cierto plano, a otra órbita situada en el mismo plano con elementos $\theta(t_0) = 0^o$, $e = 0{,}5$, $a = 2$ UD, $\omega = 0^o$. Encontrar una maniobra o maniobras para cumplir la misión, describiéndolas en detalle y calculando ΔV total, así como el instante o instante de tiempos, a partir de t_0, en los que habrá que realizarlas. Se puede trabajar en unidades canónicas. Puede haber múltiples soluciones. No se pide en concreto optimizar estas maniobras, pero sí comentar en opinión del alumno una vez obtenida una solución, si es la mejor o como se podría mejorar.
4. (**2.5 puntos**) Un cometa viaja en una órbita que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con el elemento orbital $p = 10$ AU. El cometa, antes de llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2$ AU, $R_{♃} = 71492$ km), pasando a una distancia de 25 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar. Hallar la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una “maniobra” asistida por gravedad que “deflecta” la órbita en dirección al interior del sistema solar) y calcular si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra.

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas (excepto el problema 3).

Solución:

1. Cuestión téorica.

2. En primer lugar de los datos del enunciado obtenemos $a = 6932{,}4$ km, $i = 97{,}61^{\text{o}}$. Posteriormente, usando la fórmula $\text{HSM} = \text{HSM}_0 + \frac{\lambda_u}{15}$ y llamando 1 al punto conocido y 2 al punto por conocer, y restando las fórmulas evaluadas en ambos puntos, obtenemos $\text{HSM}_2 = \text{HSM}_1 + \frac{\lambda_{u2}-\lambda_{u1}}{15}$. Calculamos en el punto 1 $\lambda_{u1} = 355{,}5773^{\text{o}}$. Calculamos en el punto 2 $\lambda_{u2} = 172{,}3243^{\text{o}}$. Por lo que $\text{HSM}_2 = -2{,}2169 = 21{,}7831 = 21 : 46 : 59{,}28$.

3. El problema se puede romper en dos partes: cambiar a la cónica objetivo, y luego sincronizar el ángulo en la cónica objetivo para que la anomalía verdadera en la época sea la correcta. Ya que no se pide optimizar, hay infinitas maneras de cumplir los requisitos. Vamos a realizar tres. La primera idea sería usar una transferencia de Hohmann entre la circunferencia inicial y la elipse final y luego un phasing (ojo! un phasing en órbitas elípticas se debe hacer usando tiempos, no ángulos, ya que las ley de áreas determina que los ángulos no se recorren de forma regular); la transferencia de Hohmann puede ser de nada más empezar (al periapsis, que no es la óptima) o esperando medio periodo de la órbita circular (al apoapsis). Como tercera posibilidad, usar una maniobra única en el corte entre la circunferencia y la elipse. Finalmente, consideramos $t_0 = 0$ ya que no juega ningún papel y observamos que $\theta(0) = 0^{\text{o}}$ es equivalente a $\theta(kT_f) = 0^{\text{o}}$ para k cualquier entero y T_f el periodo de la órbita final que es $T_f = 17{,}7715$ UT. También equivalentemente $\theta((k + 1/2)T_f) = 180^{\text{o}}$

   a) En el primer caso, si hacemos la Hohmann nada más empezar, obtenemos $\Delta V_H = 0{,}1998$ UV, $T_H = 5{,}7715$ UT. Tendríamos entonces $\theta(T_H) = 0^{\text{o}}$. Si en ese instante hiciéramos un phasing buscando una órbita con periodo $T_{ph} = T_f - T_H$, obtendríamos $\theta(T_f) = 0^{\text{o}}$ resolviendo el problema. El coste de este phasing es $\Delta_V = 0{,}1254$ UV por lo que finalmente hemos llegado al destino en un tiempo T_f y el coste total ha sido $\Delta_V = 0{,}3252$ UV. Sin embargo se puede observar que si realizamos el phasing a partir de la órbita de Hohmann en la segunda maniobra podemos hacerlo a coste cero (primero incrementando la velocidad hasta la órbita de phasing, y después desde esta a la órbita final, solución planteada por un alumno).

   b) En el segundo caso, si hacemos la Hohmann en dirección a apoapsis, obtenemos $\Delta V_H = 0{,}1756$ UV, $T_H = 12{,}4182$ UT, y además hay que esperar medio periodo de la órbita inicial, luego llegamos a apoapsis en $t_1 = T_H + T_i/2 = 21{,}3040$, es decir $\theta(t_1) = 180^{\text{o}}$. Si en ese instante hiciéramos un phasing buscando una órbita con periodo $T_{ph} = 3/2T_f - T_H$, obtendríamos $\theta(3/2T_f) = 180^{\text{o}}$ resolviendo el problema. El coste de este phasing es $\Delta_V = 0{,}2264$ UV por lo que finalmente hemos llegado al destino en un tiempo $3/2T_f$ y el coste total ha sido $\Delta_V = 0{,}4020$.

   c) En el tercer caso obtenemos que en el corte $\theta = 120^{\text{o}}$ y $\theta = 240^{\text{o}}$. Si usamos la segunda solución, en llegar ahí se tarda $t_1 = 2{,}9619$ UT. Calculando como usualmente la maniobra (sale un triángulo isósceles) necesaria, como $\gamma = -30^{\text{o}}$, obtenemos $\Delta V = 0{,}366$ UV. De leyes horarias, tardamos en llegar a periapsis un tiempo igual a $t_2 = 3{,}0287$ UT. Luego tenemos $\theta(t_1 + t_2) = 0^{\text{o}}$. Haciendo un phasing a una órbita de periodo $T_f - (t_1 + t_2)$, obtendríamos $\theta(T_f) = 180^{\text{o}}$ resolviendo el problema. El coste de este phasing es $\Delta_V = 0{,}6267$ UV por lo que finalmente hemos llegado al destino en un tiempo T_f y el coste total ha sido $\Delta_V = 0{,}9927$.

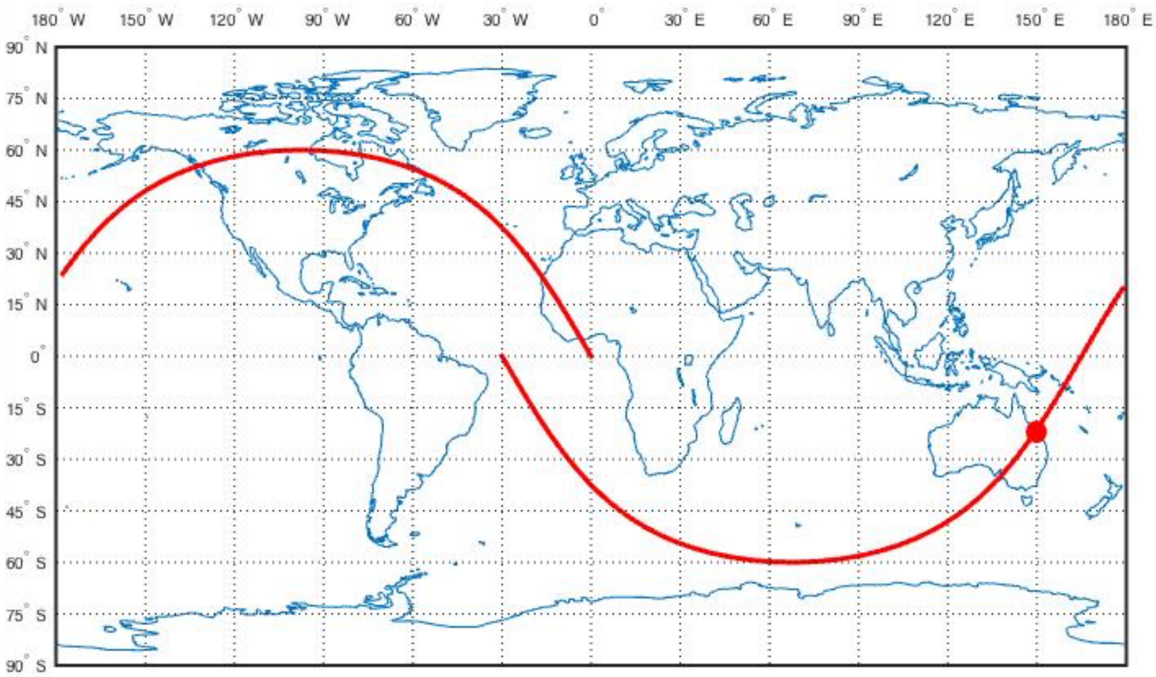
   Discutiendo las soluciones halladas (hay infinitas más) la mejor ha sido la número 1 combinando el phasing con la maniobra de Hohmann, tanto en tiempo como en combustible. Sin embargo, se puede observar que la maniobra número 2 se puede optimizar aún más usando la misma idea y combinándola con un phasing apropiado (que no sería el planteado).

   Otra opción no explorada es hacer el phasing en la primera órbita, donde se puede aplicar directamente la teoría, buscando que el corte con la órbita final (o el arranque de la maniobra de Hohmann) se produzca en el instante adecuado. Dicha solución también es válida. Incluso se podría plantear una órbita "de phasing" intermedia cuyo único objetivo es sincronizar las órbitas, desde la cual se hace una Hohmann a la órbita final, por ejemplo dando dos vueltas, de forma que $2T_f = T_H + 2T_{ph}$ (solución planteada por alumno exitosamente).

4. Problema similar al planteado en otras ocasiones, luego simplemente se dan los resultados numéricos. En el encuentro obtenemos $V_1^H = 0{,}62$ UV, $\theta_1^H = -22{,}8^{\text{o}}$, $\gamma_1^H = -11{,}4^{\text{o}}$. Por tanto $V_1^{♃} = 0{,}2090$ UV luego en unidades físicas $v_\infty = 6{,}2263$ km/s. De la maniobra, $\Delta V = 8{,}0505$ km/s, $\delta = 80{,}5552^{\text{o}}$. Además, $\beta = 144{,}1099^{\text{o}}$. Por tanto $\alpha = \beta - \delta = 63{,}5547^{\text{o}}$, y calculamos $V_2^H = 0{,}3928$ UV, $\gamma_2^H = -28{,}4602^{\text{o}}$. Luego la cónica tras el encuentro tiene como datos $a = 4{,}3457$ AU, $e = 0{,}5071$. Calculando el perihelio es $r_p = 2{,}1418$ AU que está más lejos del Sol que la Tierra, luego no hay encuentro.

Grado en Ingeniería Aeroespacial	N^oDNI ______	Curso 16/17
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ______	11/11/16
	2^{do}Apellido ______	
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total 7 puntos + 0.5 puntos extra (máximo 10 sumando la nota del test).



1. (**1 punto**) (a) Definir conceptualmente la Hora Solar Aparente (HSA). Definir conceptualmente el Sol Medio y la Hora Solar Media (HSM). ¿Cuál es la relación entre HSA y HSM y por qué razón o razones no coinciden? Definir conceptualmente la Hora Local (HL). ¿Cuál es su relación con las anteriores? Explicar razonadamente, para cada hora (HSA, HSM, HL), si para un mismo UT, varían o no según: la latitud, la longitud, el día del año.

   (b) Para una órbita elíptica, encontrar una fórmula para el máximo ángulo de trayectoria posible (y para la anomalía verdadera en la que dicho ángulo se alcanza) en función exclusivamente de la excentricidad de dicha órbita.

2. (**2.5 puntos**) De la traza de la figura (se muestra una revolución de nodo ascendente a nodo ascendente), se sabe que en un cierto instante el satélite se encuentra en el punto marcado en la traza, con coordendas $\phi = 20{,}9^o$S, $\lambda = 150^o$E. ¿Qué punto de la Tierra sobrevolaba el satélite 30 minutos antes de encontrarse dicha posición? Trabajar al nivel de precisión que permite la figura, sabiendo que se trata de una órbita circular.

3. (**2.5 puntos**) Se sabe que en una cierta época T_0, un cuerpo orbitando la Tierra tiene como posición y velocidad las siguientes, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UD}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UV}.$$

   Escribir los elementos orbitales en el instante $T_1 = T_0 + 10$ UT.

4. (**1.5 puntos**) Se tiene un satélite tal que su periodo es $T = \frac{T_\oplus}{15}$ y su inclinación es $i = 97^o$. Supongamos que se tiene una antena que requiere que el satélite esté elevado al menos 5^o en el horizonte para poder observarlo adecuadamentes. ¿Qué condición o condiciones deben verificar las coordenadas geográficas de la Tierra donde esté ubicada la antena para que sea capaz de observar al satélite durante un tiempo no nulo en todas sus revoluciones?

Solución:

1. (**1 punto**) (a) HSA=la que marcaría un reloj de Sol (ángulo entre la ascensión recta del observador y el del Sol, expresado como hora y sumándole 12). Sol medio: un objeto ficticio que se mueve a velocidad constante en el plano del Ecuador, definido de forma que ocuparía el mismo lugar que el Sol real durante el afelio y perihelio si el Ecuador y la eclíptica coincidieran. HSM se define como HSA pero calculada con el Sol medio en vez del real. Su relación es la ecuación del tiempo. No coinciden porque la órbita real del Sol (en realidad, de la Tierra) no es circular (su velocidad no es constante) y no es ecuatorial (está en la eclíptica). La HL se define como la HSM en Greenwich ajustada por el huso horario y el posible cambio de horario de verano (en su propia definición está su relación con HSM). HSA depende de la longitud (ya que al variarla varía la ascensión recta) y del día del año (dado el movimiento irregular del Sol). HSM depende sólo de la longitud por la misma razón que antes pero de nada más (puesto que el movimiento del Sol medio es totalmente regular). HL depende de la latitud y de la longitud (puesto que los husos horarios pueden ser distintos incluso en lugares con la misma longitud y diferente latitud, por ejemplo en Portugal y en Galicia), y también del día del año (debido al cambio de horario de verano, excepto en aquellas zonas de la Tierra donde dicho cambio no se efectúe).

   (b) Trabajamos con $\tan\gamma$ en vez de con γ, ya que la tangente es monótona, por lo que el máximo valor de γ también será el máximo valor de la tangente. Derivando para ver que θ maximiza el valor, obtenemos

$$\frac{d}{d\theta}(\tan\gamma) = \frac{e\cos\theta(1+e\cos\theta) - e\,\mathrm{sen}\,\theta(1-e\cos\theta)}{(1+e\cos\theta)^2}$$

   y operando

$$\frac{d}{d\theta}(\tan\gamma) = \frac{e\cos\theta + e^2}{(1+e\cos\theta)^2} = e\frac{\cos\theta + e}{(1+e\cos\theta)^2}$$

   obteniendo que la derivada se hace cero cuando $\theta = \arccos(-e)$. Habrá otra solución que será $\theta = 360^{\text{o}} - \arccos(-e)$ que nos daría el mínimo. En la fórmula de $\tan\gamma$, para hallar ahora el valor, sustituimos $e = -\cos\theta$. Obtenemos

$$\tan\gamma = \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

   y puesto que la tangente es el seno partido por el coseno, no es difícil ver que esto equivale a decir $\mathrm{sen}\,\gamma = e$, es decir, $\gamma_{max} = \mathrm{arc\,sen}(e)$ y se da cuando $\theta = \arccos(-e)$. El mínimo se daría en $\theta = 360^{\text{o}} - \arccos(-e)$ y sería $\gamma_{min} = -\,\mathrm{arc\,sen}(e)$.

2. (**2.5 puntos**) La información útil de la figura es $i = 120^{\text{o}}$, cruce de N a S, $\Delta\lambda = 30^{\text{o}}$ (luego $a = 8044{,}315$ km) y además sabemos $e = 0$ (observación: no puede ser directa y supersíncrona porque, o sería mixta si estuviera próxima a la geosíncrona, o si estuviera aún más elevada sería casi recta). Obtenemos en el punto inicial $u = 204{,}33^{\text{o}}$ y $\lambda_u = 167{,}26^{\text{o}}$ (obsérvense las soluciones escogidas por el sentido del cruce y el tipo de órbita). Propagando hacia atrás, obtenemos $u = 114{,}08$ y $\lambda_u = 228{,}21^{\text{o}}$, por lo que directamente la latitud es $\phi = 52{,}24^{\text{o}}$N, y trabajando en diferencias para la longitud, $\lambda = 218{,}46^{\text{o}}$, o expresándolo mejor, 141,53ºO. Obsérvese que este es un punto sobre la traza, lo que permite verificar gráficamente (al menos de forma aproximada) la solución.

3. (**2.5 puntos**) Obtenemos $r = 4$ UD, $v = 1/4$ UV, de donde $a = 16/7$ UD (2.2857 UD) y la órbita es elíptica. Es evidente que estamos en perigeo o apogeo. Si estuviéramos en perigeo, de la ecuación $r_p = a(1-e)$ obtendríamos $e = -3/4$ lo que no es posible. Luego estamos en apogeo, por lo que $\theta = 180^{\text{o}}$ y de la ecuación $r_a = a(1+e)$ obtenemos $e = 3/4$. La órbita es claramente ecuatorial y es fácil ver que es directa (mirando por ejemplo el signo de $\vec{h}$). Luego $i = 0^{\text{o}}$. Finalmente $\bar{\omega}$ (el ángulo entre el primer punto de Aries y el perigeo) es claramente 180º ya que el apogeo está en la dirección del primer punto de Aries. Para concluir el problema hay que propagar la órbita 10 unidades de tiempo, sabiendo que comenzamos en el apogeo. El periodo es $T = 21{,}713$ UT, luego en realidad hay que propagar $10 + T/2$ unidades de tiempo para comenzar la propagación desde el perigeo. Usando leyes horarias, obtenemos $M = 6{,}035$ rad, $E = 5{,}513$ rad, y finalmente $\theta = 266^{\text{o}}$ en la época. Estrictamente hablando, el satélite se estrellará con la Tierra pronto, ya que el perigeo se encuentra por debajo de la superficie terrestre. En cualquier caso, si calculamos la altitud en T_1 está aún por encima de 100 kilómetros, por lo que aún no se ha producido la reentrada.

4. (**1.5 puntos**) De los datos del problema obtenemos $h_{SAT} = 554{,}24$ km, $h_{min} = 5^{\text{o}}$, por lo que el radio del círculo de visibilidad sería $\Phi = 18{,}57^{\text{o}}$. Si ubicamos la antena en un punto de coordenadas ϕ y λ, si su latitud ϕ es suficientemente elevada, el círculo de visibilidad contendrá el polo norte y una fracción adicional "al otro lado", llegando hasta una latitud igual a $90 - (\Phi - (90 - \phi)) = 180 - \phi - \Phi$. Puesto que el punto de máxima latitud de la traza tendrá como latitud $\phi_{max} = 180 - i$ (por ser retrógrado), para que este punto este siempre contenido en la circunferencia de visibilidad, se tiene que cumplir $\phi_{max} > 180 - \phi - \Phi$, es decir, $\phi > i - \Phi = 78{,}43^{\text{o}}$. Luego si la antena se encuentra a una latitud mayor de 78,43ºN (o menor de 78,43ºS), sin importar el valor del resto de los elementos orbitales del satélite, siempre tendrá un periodo de visibilidad en todas las revoluciones del satélite.

Ingenieros Aeronáuticos	N$^{\text{o}}$DNI ______	Curso 15/16
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ______	4/6/16
	2$^{\text{do}}$Apellido ______	
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total:8 puntos.

1. (**1 punto**) Responda **brevemente** a las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué son los RTG, en que tipo de misiones se usan, y cuáles son sus ventajas y desventajas? Nombre tres misiones que los hayan usado.

   b) Mencione tres misiones diferentes en las que se haya empleado la maniobra de rendezvous, escribiendo los nombres de los vehículos blanco y perseguidor en los tres casos (se consideran diferentes si tanto el blanco como el perseguidor son diferentes en los tres casos).

   c) Describa tres efectos perjudiciales del entorno espacial, y sus consecuencias en el diseño de los vehículos espaciales.

2. (**2,5 puntos**) Se observa un satélite sobrevolando un punto de la Tierra con coordenadas 30ºS, 30ºO, a una altitud de $863{,}9413$ km. El sobrevuelo sucede con el satélite cruzando de Norte a Sur. Se sabe además que su altitud de perigeo es 400 km, su altitud de apogeo 950 km. Además, se conoce que su apogeo está justo en ☋. Calcule las coordenadas sobrevoladas por el satélite 35 minutos después, rellenando el siguiente recuadro:

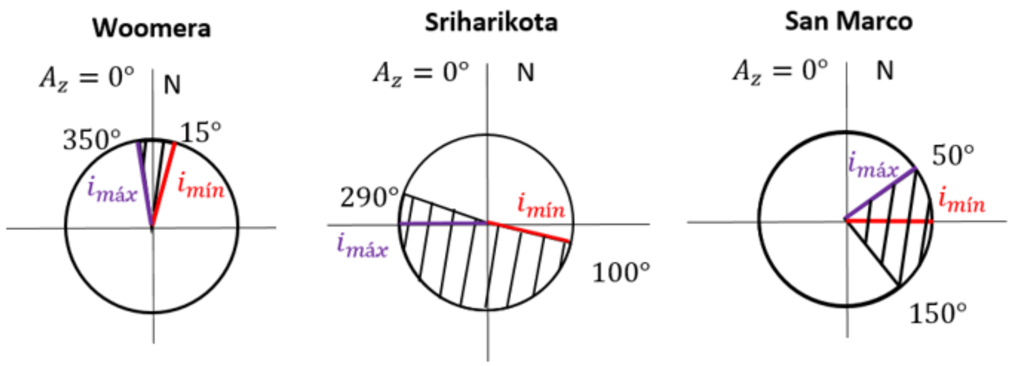
   Latitud=**2.7ºS** ,Longitud=**103.26ºE/179.19ºE**

   ¿Existe más de una solución a este problema que cumpla todas las condiciones del enunciado? En caso afirmativo razone su respuesta, explique exactamente cuantas posibles soluciones hay (rellenando el recuadro), y comente (cualitativamente) cuáles serían las diferencias con la solución escogida.

   Número total de soluciones= **2** **(una corresponde a una órbita directa $i = 45$º y otra a una retrógrada $i = 135$º)**

3. (**1,5 puntos**) ¿Cuáles son las inclinaciones máxima y mínima alcanzables desde las siguientes bases? Introdúzcalas en la tabla.

Base	Latitud	Longitud	Azimut Mínimo	Azimut Máximo	i mínima	i máxima
Woomera (Australia)	-30.95	136.5	350	15	**77.18**	**98.57**
Sriharikota (India)	13.7	80.25	100	290	**16.91**	**166.3**
San Marco (Italia)	-2.93	40.20	50	150	**2.93**	**60.04**



4. (**3 puntos**) Un cometa fue detectado a 35 AU del Sol, viajando en una órbita heliocéntrica que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con perihelio a 4,7 AU del Sol. El cometa, en la parte de su órbita **anterior** a llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2$ AU, $R_{♃} = 71492$ km),

pasando a una distancia (radio) de 10 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar (frena su velocidad). Halle la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y determine si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra o no. En caso de que pudiera llegar, calcule el tiempo que tardaría en cruzarse por primera vez con la órbita de la Tierra, desde que fue detectado. Se puede realizar la simplificación usual de considerar las órbitas de todos los planetas circulares y coplanarias con la eclíptica. Rellene el recuadro con las respuestas. Se pide también incluir el dibujo del triángulo de velocidades para la "maniobra".

Semieje mayor tras el encuentro (AU)=**3.099** ,Excentricidad tras el encuentro=**0.7567**

Llega a la órbita de la Tierra: **SI**/~~NO~~, Tiempo total en llegar al primer cruce (años)=**19.49**

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas 20 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	Nº DNI ____________	Curso 15/16
Escuela Superior de Ingenieros	1er Apellido ____________ 2do Apellido ____________	4/2/16
Universidad de Sevilla	Nombre ____________	**Cuestiones**

Valor total:8 puntos.

1. (**1 punto**) Responda brevemente a las siguientes preguntas:

   a) Describa los sistemas de potencia primarios más importantes y dar ejemplos de misiones en los que se usarían razonando por qué.

   b) Describa la configuración de los equilibrios del problema de los tres cuerpos circular restringido, incluyendo un pequeño esquema. ¿Dónde se encuentran, aproximadamente, dichos puntos, cuando uno de los cuerpos masivos tiene mucha mayor masa que el otro? En ese caso, ¿cuáles puntos son estables y cuáles no?

2. (**2 puntos**) Responda razonadamente a las siguientes preguntas sobre análisis y diseño de misiones espaciales:

   a) ¿Sería viable un satélite "Venus-estacionario", es decir, que permaneciera fijo sobre un punto de Venus? Argumente la viabilidad o no de dicho satélite, y en caso de que sea viable escriba los elementos orbitales que estarían fijos. Datos útiles: $\mu_♀ = 324858{,}8\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $R_♀ = 6051{,}8\,\mathrm{km}$, distancia media al Sol $L_♀ = 0{,}723327$ AU, y el periodo de rotación de Venus es 243,0187 días terrestres en sentido retrógrado.

   b) ¿Sería viable un satélite heliosíncrono de alta excentricidad? De forma que permanecería más tiempo sobre uno de los dos hemisferios que en el otro, de forma estable frente a las perturbaciones del J_2 y pasando a las mismas horas solares medias sobre las mismas latitudes. Para responder a la pregunta, recordar que la fórmula de la altitud de un satélite heliosíncrono dada en el formulario es sólo válida para órbitas circulares, por lo que el primer paso será encontrar una fórmula equivalente válida para órbitas con excentricidad. Suponiendo una excentricidad $e = 0{,}3$, ¿cuáles serían los otros elementos orbitales que estarían determinados?

3. (**3 puntos**) En la época del 4 de Febrero de 2016 a las 00:00 se sabe GST_0 =6 horas 30 minutos. La NASA desea diseñar la órbita de un satélite espía. La órbita será polar y circular, con una altitud aproximada de 950 kilómetros, de forma que su traza se repita cada diez días o menos (se sugiere usar el método de la fracción continua), y pase por Sevilla ($\lambda = 5^o 59' \mathrm{W}$, $\phi = 37^o 24' \mathrm{N}$) el 4 de Febrero de 2016 a las 08:00 UT. Encuentre razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época, despreciando perturbaciones orbitales. Finalmente, elija razonadamente una base de la NASA, azimut de lanzamiento, y hora de lanzamiento, suponiendo que el lanzamiento fuera el 3 de Febrero de 2016.

Base	Latitud	Longitud	Azimut Mínimo	Azimut Máximo	Zona horaria
Cabo Cañaveral	28.5	-80.55	37	112	UT-5
Vanderberg	34.6	-120.6	147	201	UT-8
Wallops	37.85	-75.47	30	125	UT-5

4. (**2 puntos**) Un cometa fue detectado a 25 AU del Sol, viajando en una órbita heliocéntrica que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con perihelio a 4,8 AU del Sol. El cometa, en la parte de su órbita **anterior** a llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_♃ = 126711995{,}4\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $L_♃ = 5{,}2$ AU, $R_♃ = 71492\,\mathrm{km}$), pasando a una distancia (radio) de 10 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar (frena su velocidad). Halle la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y determine si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra o no. En caso de que pudiera llegar, calcule el tiempo que tardaría en cruzarse por primera vez con la órbita de la Tierra, desde que fue detectado. Se puede realizar la simplificación usual de considerar las órbitas de todos los planetas circulares y coplanarias con la eclíptica.

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Solución:

1. (**1 punto**) Pregunta de teoría.

2. (**2 puntos**) Responda razonadamente a las siguientes preguntas sobre análisis y diseño de misiones espaciales:

   a) Usando los datos dados, se obtiene que el supuesto satélite "Venus-estacionario" tendría inclinación 180º (puesto que debe ser retrógrado como el propio Venus), excentricidad 0 y radio aproximadamente un millón y medio de km (0.01 AU). Por otro lado calculando el radio de la esfera de influencia de Venus, obtenemos $R_e = 616273$ km. Por tanto la órbita se saldría de la esfera de influencia de Venus y estaría dominada por la gravedad solar, por lo que no sería una órbita venusiana. En conclusión, no sería viable.

   b) Para estudiar un satélite heliosíncrono con excentricidad, igualamos $\dot{\Omega}$ a la velocidad angular de translación de la Tierra, aproximado por $\frac{2\pi}{365{,}25\cdot 86400}$, obteniendo

   $$-\frac{3}{2}n\frac{R_\oplus^2}{p^2}J_2\cos i = \frac{2\pi}{365,25\cdot 86400}$$

   y sustituyendo $p = a(1-e^2)$ y $n = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a^3}}$ obtenemos

   $$-\frac{1}{\sqrt{a^3}}\frac{1}{a^2(1-e^2)^2}\cos i = \frac{2}{3J_2R_\oplus^2\sqrt{\mu_\oplus}}\frac{2\pi}{365,25\cdot 86400}$$

   es decir

   $$\frac{\cos i}{a^{7/2}(1-e^2)^2} = -\frac{2}{3J_2R_\oplus^2\sqrt{\mu_\oplus}}\frac{2\pi}{365,25\cdot 86400}$$

   y multiplicando a ambos lados por $R_\oplus^{7/2}$ (para obtener una fórmula adimensional como la del formulario) obtenemos

   $$\frac{R_\oplus^{7/2}}{a^{7/2}(1-e^2)^2}\cos i = -0{,}0989$$

   que es el mismo número en el lado derecho que el que trae el formulario.

   El satélite pedido sería perfectamente viable, siempre que se pudiera encontrar una órbita heliosíncrona a la inclinación crítica retrógrada, $i = \arccos\left[-\sqrt{1/5}\right] = 116{,}6$º, y que el perigeo correspondiente a dicho satélite no fuera demasiado bajo (chocando directamente con la Tierra o causando la reentrada). Obtendríamos en la fórmula, usando la inclinación crítica

   $$\frac{R_\oplus^{7/2}}{a^{7/2}(1-e^2)^2} = 0{,}221$$

   En concreto para $e = 0{,}3$ obtendríamos $a = 10085$ km, con una altitud de perigeo $h_p = 681{,}5$ km. Luego sería posible. Está claro que habrá una excentricidad máxima en la cual el perigeo del satélite entraría en la atmósfera de la Tierra, pero sería mayor de 0,3. Por tanto es viable el combinar un diseño heliosíncrono con uno de alta excentricidad (Observación: este diseño ha sido propuesto en la práctica. Véase la órbita *ellipso borealis*).

3. (**3 puntos**) Del enunciado tenemos predeterminados $e = 0$ e $i = 90$º. Hay que calcular a, $u(T_0)$, Ω. Comencemos por usar el método de la fracción continua. Calculamos para $h = 950$ km, $T = 6243{,}1$ s, lo que es una fracción igual a $x = 0{,}072456$ del periodo sidéreo de la Tierra. Hay que aproximar dicha fracción lo mejor posible con un numerador que no supere 10. La primera aproximación con el método de la fracción continua sería $1/13$. La segunda aproximación sería $1/14$. La tercera aproximación sería $5/69$. La cuarta sería $136/1877$. Por tanto nos quedamos la tercera aproximación, obteniendo $T = 5/69T_\oplus = 6243{,}77$ s y $r = 7328{,}64$ km, es decir $h = 950{,}508$ km, lo que efectivamente aproxima muy bien 950 kilómetros de altitud, obteniéndose una traza que se repite cada 5 días sidéreos.

   Para calcular $u(T_0)$ y Ω usamos el paso de la información por Sevilla. Suponemos que se cruza al pasar el satélite de S a N. Llamando T_1 a la hora de paso, obtenemos $u(T_1) = 37{,}4$º, $\lambda_u(T_1) = 0$º. Por tanto $\Omega = 211{,}85$º y propagando $u(T_0) = 176{,}86$º. Finalmente, para el lanzamiento se escoge Vanderberg (la única capaz de lanzar directamente a una órbita polar), con Azimut 180º (dirección sur). Ver la figura adjunta que muestra los azimut e inclinaciones máximo y mínimo de cada base. La hora de lanzamiento calculada de la fórmula y teniendo en cuenta que hay que usar el GST$_0$ del día anterior y que al lanzar hacia el sur $\lambda_u = 180$º, es $3:39:11$ UT.

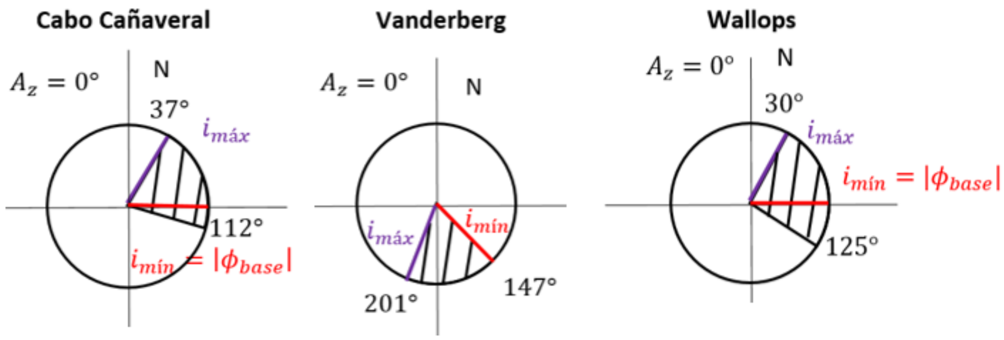


Figura 1: Figura del problema 3

4. (**2 puntos**) Este problema está resuelto de otros años. Algunos números relevantes: $p = 9{,}6$ AU, $\gamma_1^H = -16{,}17$º, $\beta = 132{,}03$º, $\delta = 103{,}59$º, $\gamma_2^H = -25{,}63$º, $\theta_0^H = -128$º (en el avistamiento), $\theta_1^H = -32{,}33$º. Los números que se obtienen son, en la órbita del cometa tras la maniobra, $a = 3{,}15$ AU, $e = 0{,}728$, $\theta_2^H = 190{,}79$º, $\theta_3^H = 311{,}09$º. Sí puede encontrarse con la Tierra ya que el perihelio de esta nueva órbita está por debajo de 1 AU y tardaría un total de 12.96 años desde que es avistado hasta llegar a la órbita terrestre (10.96 años desde que es avistado hasta llegar a Júpiter, y 2 años desde la órbita de Júpiter hasta la Tierra).

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI ____________	Curso 14/15
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ____________ 2^{do}Apellido ____________	14/1/16
Universidad de Sevilla	Nombre ____________	**2º Parcial**

Valor total:10 puntos.

1. (**2 puntos**) Responder brevemente a las siguientes preguntas:
   - Para un satélite en una órbita en torno a los 300 kilómetros, describir brevemente al menos tres efectos de su entorno que deben ser tenidos en cuenta en su diseño (no incluir entre ellos la resistencia atmosférica, que afecta a la órbita y no al vehículo en sí).
   - Describir usos, ventajas y desventajas de los RTG.
   - ¿Qué factores entran en el balance térmico de un vehículo espacial? Responder cualitativamente, no es necesario escribir fórmulas, pero describir para cada uno de los factores los principales parámetros que influyen.
   - Describir la configuración de los equilibrios del problema de los tres cuerpos circular restringido, incluyendo un pequeño esquema. ¿Dónde se encuentran, aproximadamente, dichos puntos, cuando uno de los cuerpos masivos tiene mucha mayor masa que el otro?
2. (**4 puntos**) Un satélite heliosíncrono se encuentra en una órbita circular de 500 kilómetros de altitud de tipo mediodía-medianoche (12:00-00:00). Responder razonadamente a las siguientes preguntas:
   - ¿A qué hora solar media pasa por la latitud 45^{o} cuando viaja **de Norte a Sur**?
   - Si el satélite estuviera en una órbita heliosíncrona NO circular ($e > 0$) pero con la misma inclinación del anterior apartado, ¿cambiaría su hora solar media de paso por la latitud 45^{o} cuando viaja **de Norte a Sur**? Razonar la respuesta.
   - Supongamos que la órbita del satélite se quiere modificar de forma que cambie la HSM de paso por el nodo ascendente a las 15:00. Proponer, una maniobra o transferencia que permita dicho cambio gastando el menor combustible posible (si fuera una transferencia, en un tiempo máximo de un día), describiéndola en detalle (coste total en términos de ΔV, duración si fuera una transferencia, cuándo/donde se deben realizar el o los impulsos).
3. (**4 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Urano (♅) partiendo de una órbita de aparcamiento a 150 kilómetros. Calcular el coste mínimo que tendría dicha misión y el tiempo que se tardaría en realizar dicha misión de mínimo coste. Para disminuir el coste y duración se decide realizar una maniobra asistida por gravedad en Júpiter (♃). Tras salir de la esfera de influencia de la Tierra, la órbita tiene un semieje mayor $a = 3,8$ AU y perihelio en la Tierra. ¿Cuál fue el ΔV que hubo que aplicar en la órbita de aparcamiento para adquirir dicha órbita heliocéntrica? En Júpiter se realiza una maniobra asistida por gravedad con una **altitud** de 10 radios jovianos.¿Alcanza finalmente la misión Urano? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, calcular una maniobra final para adquirir una órbita circular en Urano con una **altitud** de 15 radios de Urano. Si la sonda interplanetaria tiene una masa seca de 300 kilogramos, y emplea un combustible con $I_{\mathrm{SP}} = 200$ s, calcular el combustible total que sería necesario.

   Extra: No se pide, pero si se calcula el tiempo total de la transferencia interplanetaria y los ángulos de fase de Júpiter y Urano al comienzo de la misión, se dará hasta un punto extra, que NO podrá servir para aprobar el examen o la asignatura, pero si para aumentar la nota final en caso de aprobado.

Planeta	Símbolo	μ ($\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Urano	♅	5780158.5	25559	19.2709

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Ingeniería Aeroespacial Escuela Técnica Superior de Ingeniería Universidad de Sevilla	N^{o} DNI ________________ 1^{er}Apellido ________________ 2^{do}Apellido ________________ Nombre ________________	Curso 15/16 2/12/15 **Cuestiones**

Valor total:7 puntos

1. (**4 puntos**) Un satélite geosíncrono y ecuatorial tiene excentricidad $e = 0,15$, $\bar{\omega} = 180^{\text{o}}$, y para la época del 21 de Septiembre de 2015 a las 00:00 horas, $\theta = 45^{\text{o}}$. Además dicho día $\text{GST}_0 = 45^{\text{o}}$. Dibujar la traza del satélite con el mayor detalle posible, ubicando perigeo y apogeo. Sabiendo que el equinoccio de Otoño es el mismo 21 de Septiembre, deducir si el satélite podría estar eclipsado en algún momento a lo largo del día y en caso afirmativo calcular la duración del eclipse. Repetir el cálculo una semana después.

2. (**3 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Mercurio (☿). Para realizar un análisis preliminar de la misión, se supone que el lanzador deja la sonda en una órbita geocéntrica de aparcamiento a 200 km de altitud, contenida en el plano de la eclíptica, desde donde comienza la parte de la misión que se quiere diseñar. ¿Cuál sería el coste mínimo (en términos de ΔV) y duración de una transferencia directa? Puesto que una transferencia directa es muy costosa y lenta, se decide realizar una maniobra asistida por gravedad en Venus (♀). Para llegar a Venus, se aplica en la órbita de aparcamiento un impulso tangente de $\Delta V = 4{,}2\ \text{km/s}$, de forma que la velocidad de exceso de la hipérbola resultante se resta, en el sistema de referencia heliocéntrico, a la de la Tierra en relación al Sol (es decir salida tangente). ¿Es suficiente este ΔV para alcanzar Venus? En caso afirmativo y suponiendo que en Venus se realiza una maniobra asistida por gravedad con una aproximación a una distancia igual a 1.3 radios venusianos, ¿alcanza finalmente la misión Mercurio? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, calcular el tiempo total de vuelo de la misión y encontrar cuales deberían ser los ángulo de configuración (ángulos de fase) tanto de Venus como de Mercurio en el lanzamiento.

   Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Datos:

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Mercurio	☿	22032.1	2439.7	0.387098
Venus	♀	324858.8	6051.8	0.723327
Marte	♂	42828.3	3397	1.52372
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Saturno	♄	37939519.7	60268	9.58078
Urano	⛢	5780158.5	25559	19.2709
Neptuno	♆	6871307.8	24764	30.1927
Plutón	♇	1020.9	1195	39.3782

Solución

- La primera parte ya está resuelta en otros exámenes, nos concentramos en la segunda parte.

  En ambos casos (el propio equinoccio y una semana después) siempre habrá eclipse puesto que al cortar la circunferencia de eclipse con el Ecuador, y dado que el satélite da una vuelta cada día (en el sistema de referencia geocéntrico inercial, en cual podemos considerar el Sol prácticamente quieto), debe haber corte.

  La condición para que un satélite esté eclipsado consiste en que se encuentre dentro de la circunferencia de eclipse, que estudiamos en el sistema de referencia geocéntrico inercial. En dicho sistema de referencia, tenemos que $\delta_{sat} = 0^{\text{o}}$ (por ser ecuatorial) y $\text{AR}_{sat} = \bar{\omega} + \theta$ (al ser ecuatorial y excéntrico). Por otro lado el centro de la circunferencia de eclipse es $\delta_O = 0^{\text{o}}$ y $\text{AR}_O = 0^{\text{o}}$ al ser antipodal a la posición del Sol en el equinoccio de Otoño. Por tanto obtenemos directamente que la distancia del satélite al centro de la circunferencia es $\cos\alpha = \cos(\bar{\omega} + \theta)$. La forma más cómoda de expresar esto es como $\alpha = |180^{\text{o}} - \theta|$ para evitar problemas cuando θ sumado a 180º es superior a 360º.

  Por otro lado el radio de la circunferencia de visibilidad viene dado por $\operatorname{sen}\Gamma = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = \frac{R_\oplus}{a(1-e^2)}(1 + e\cos\theta)$.

  Cuando $\alpha = \Gamma$ se corta la órbita del satélite con la circunferencia de eclipse. Buscando la primera solución, vemos que
  $$\operatorname{sen} 180^{\text{o}} - \theta = \operatorname{sen}\theta$$
  obtenemos
  $$\operatorname{sen}\theta = \frac{R_\oplus}{a(1-e^2)}(1 + e\cos\theta)$$
  y similarmente el otro punto de corte vendrá dado por
  $$-\operatorname{sen}\theta = \frac{R_\oplus}{a(1-e^2)}(1 + e\cos\theta)$$
  Esta ecuación se puede resolver elevando ambos lados al cuadrado y reduciéndola a una ecuación cuadrática en $\cos\theta$, o con los métodos del formulario. La duración del eclipse vendrá dada por el tiempo que tarda el eclipse en circular entre las dos soluciones

  Una semana después la diferencia es que δ_O y AR_O ya no son cero, por lo que la distancia se calcula ahora de $\cos\alpha = \cos\delta_O \cos(180^{\text{o}} + \theta - \text{AR}_O)$.

  Por tanto como en el corte $\alpha = \Gamma$ sumamos las dos ecuaciones a resolver simultáneamente al cuadrado obteniendo:
  $$1 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos^2\delta_O \cos^2(180^{\text{o}} + \theta - \text{AR}_O) + \frac{R_\oplus^2}{a^2(1-e^2)^2}(1 + e\cos\theta)^2$$
  . La ecuación se debe resolver numéricamente.

  Las soluciones que encontramos son, en el día del equinoccio,

- Virtualmente idéntico a un problema planteado en exámenes anteriores.

Mecánica Orbital/Astronáutica (TÁCHESE LO QUE NO PROCEDA) **Duración**: 1 hora 45 minutos

Ingeniería Aeroespacial / Ingeniería Aeronáutica	N$^{\text{o}}$DNI ______________	Curso 15/16
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ______________ 2$^{\text{do}}$Apellido ______________	25/11/15
Universidad de Sevilla	Nombre ______________	**Cuestiones**

Valor total 7 puntos. Instrucciones:

MECÁNICA ORBITAL:hacer los problemas 1, 2 y 3.
ASTRONÁUTICA: hacer los prob. 1 y 4, y ELEGIR uno entre 2 y 3 (si se entregan los dos puntuará el peor hecho).

Datos para todos los problemas (en los que sean necesarios). Época: 25 de Noviembre de 2015 a las 00:00:00 UT. $\mathrm{GST}_0 = 12\ \mathrm{h}\ 30\ \mathrm{m}$ dicho día.

1. (**2 puntos**) (a) Definir el mes lunar. ¿Cuál es su duración comparado con el periodo sidéreo de la Luna (igual, mayor, menor) y por qué? A partir de los datos del formulario, calcular tanto el periodo sidéreo de la Luna como el mes lunar.

   (b) Definir brevemente (conceptual o geométricamente) los siguientes conceptos: ángulo de trayectoria, anomalía excéntrica, ecuación del tiempo, función de elevación, ancho de huella, línea de ápsides, propagador, periodo dracónico, día juliano, ecuaciones planetarias.

2. (**2.5 puntos**) De la traza de la figura (se muestra una revolución), que se recorre en el sentido marcado por las flechas, se sabe que el nodo descendente se recorre, el 25 de Noviembre de 2015, a las 23:23:53 UT. Además dicho nodo sucede a una longitud igual a 71.93ºO, a una altitud igual a 19817 kilómetros. Encontrar el valor (aproximado a la precisión de la figura) de todos los elementos orbitales. Como pista, la traza es simétrica con respecto a la línea discontinua (inclinada 45º) que se muestra adicionalmente en la figura.
   Nota: si no se puede encontrar algún elemento orbital, suponerlo (razonablemente) para poder avanzar.

3. (**2.5 puntos**) Se tiene un satélite en una órbita circular de inclinación i y altitud h. Se tiene una estación exactamente situada en el polo Norte, llamada POLAR, desde la cual es posible observar cualquier objeto en el cielo que tenga una elevación mínima ϵ. Responder a las siguientes preguntas:

   a) Encontrar una condición simple que garantice que el satélite se puede observar desde POLAR (es decir si no se cumple dicha condición, el satélite no es nunca observable). ¿Depende dicha condición de los valores concretos del resto de los elementos orbitales que no se dan en el enunciado? ¿Por qué?

   b) Suponiendo que se verifica *a*), ¿durante qué fracción de su periodo el satélite sería visible desde POLAR?

   c) Diseñar los elementos orbitales de un satélite circular cuya traza se repita todos los días, de altitud entre 800 y 900 kilómetros, con inclinación $i = 97^\circ$, y que pase por Quebec ($\phi = 46{,}8167^\circ$N, $\lambda = 71{,}2167^\circ$O) el 25/11/15 a las 03:00 UT cuando circula de Sur a Norte.

   d) Si $\epsilon = 15^\circ$, ¿Cuándo empezaría y acabaría el primer tramo del 25/11/15 en el cual el satélite del apartado *c*) sería visible desde POLAR? ¿Exactamente, cuánto tiempo en total sería visible el 25/11/15 desde POLAR?

   Se pueden despreciar perturbaciones. Por otro lado, se recuerda que, para una altitud h determinada y una cierta estación se puede definir un "círculo de visibilidad" centrado en la propia estación, de forma que si las coordenadas de un satélite de altitud h se encuentran dentro del círculo, dicho satélite es visible desde la estación. La fórmula del radio angular Φ de dicho círculo de visibilidad es $\Phi = \arccos\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h_{\mathrm{SAT}}}\cos\epsilon\right) - \epsilon$.
   Observación: El apartado *c*) se puede responder independientemente del resto del problema.

4. (**2,5 puntos**) Un cometa fue detectado a 15 AU del Sol, viajando en una órbita heliocéntrica que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con el elemento orbital $p = 8$ AU. El cometa, **antes** de llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2$ AU, $R_{♃} = 71492$ km), pasando a una distancia (radio) de 9 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar (frena su velocidad). Hallar la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y calcular si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra o no. En caso de que pudiera llegar calcular el tiempo que tardaría en cruzarse por primera vez con la órbita de la Tierra, desde que fue detectado.

Solución:

1. Cuestión de teoría.

2. Por inspección de la figura, obtenemos $i = 60^o$ (no puede ser 120 grados ya que la traza es mixta), al ser cerrada en una revolución $a = a_{GEO} = 42164$ km, $\omega = 180^o$ (el perigeo en el nodo ascendente, debido a las simetrías presentes debe estar en ☊ o en ☋, pero puesto que la traza es directa, es decir, $\dot{\lambda} > 0$, en ☋, ahí debe estar el perigeo). De la altitud del nodo ascendente y puesto que a es conocida obtenemos que la excentridad es $e = 0{,}3787$. Finalmente nos dan longitud y tiempo de paso por el perigeo. Del tiempo de paso por el perigeo y propagando por leyes horarias hasta la época sacamos $\theta(t_0) = 19{,}1482^o$. De la longitud obtenemos, de la ecuación de la longitud y sabiendo $\lambda_u = 180^o$ en el nodo descendente, que $\Omega = 287{,}5^o$.

3. Se responden los distintos apartados:

   a) La condición de observabilidad sería que la distancia desde las coordenadas sobrevoladas por el satélite a la estación POLAR fuera menor que el radio Φ calculado con la fórmula $\Phi(h, \epsilon) = \arccos\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h_{\mathrm{SAT}}}\cos\epsilon\right) - \epsilon$. Al usar la fórmula de la distancia ortodrómica entre un punto de la Tierra dado por las coordenadas ϕ, λ y el polo norte, encontramos que $\cos\alpha = \operatorname{sen}\phi$, es decir la distancia angular α viene dada simplemente como $\alpha = 90 - \phi$ (esto se puede ver por lógica ya que las distancias al polo norte siempre se calculan sobre meridianos que son círculos máximos). Por tanto la condición sería $\alpha \leq \Phi$ y sustituyendo valores llegamos a la fórmula pedida:
   $$\phi \geq 90 - \Phi(h, \epsilon)$$
   ¿Se puede alcanzar esta latitud para un satélite dado? Dependiendo si la orbita es directa o retrógrada, la máxima ϕ es o bien i o bien $180^o - i$. Por tanto la condición se podría expresar como dos desigualdades:
   $$i \geq 90 - \Phi(h, \epsilon), \qquad i \leq 90 + \Phi(h, \epsilon)$$
   es decir, expresado como una condición simple
   $$i \in [90 - \Phi(h, \epsilon), 90 + \Phi(h, \epsilon)]$$
   La condición no depende de otros elementos orbitales porque, al estar POLAR justo en el polo norte, rotar el plano orbital (que sería el efecto de modificar Ω o u) no modifica la geometría y la condición sigue siendo la misma.

   b) En base al apartado a), la traza entraría y saldría en el círculo de visibilidad justo cuando $\alpha = \Phi(h, \epsilon)$, es decir, cuando $\phi = 90 - \Phi(h, \epsilon)$. La entrada sería circulando de S a N y la salida de N a S, y se podría calcular el valor de u en ambos casos a partir de la primera solución (que da la calculadora)
   $$u^* = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sin\phi}{\sin i}\right) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\cos\Phi(h, \epsilon)}{\sin i}\right)$$
   Entonces u^* sería el valor de u en el cual "entra" en el círculo de visibilidad y $180 - u^*$ el valor en el cual "sale". Por tanto el tiempo total sería, siendo $n = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{(R_\oplus + h)^3}}$ y trabajando en radianes, el siguiente:
   $$T_{visib} = \frac{\pi - 2u^*}{n} = \frac{\pi - 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\cos[\Phi(h,\epsilon)]}{\sin i}\right)}{n}$$
   y para calcular la fracción hay que dividir por el periodo, obteniendo
   $$f_{visib} = \frac{T_{visib}}{T} = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\cos[\Phi(h,\epsilon)]}{\sin i}\right)}{\pi}$$

   c) Los elementos orbitales se calculan como en otros problemas, obteniendo: $e = 0$, $h = 880{,}5438$ km, $u = 135{,}5516^o$ (en la época), $\Omega = 168{,}924^o$ ($i = 97^o$ del enunciado) y como valores auxiliares $k = 14$ (número de revoluciones por cada día), y en Quebec $u = 47{,}2771^o$, $\lambda_u = 352{,}4825^o$.

   d) A partir de h y ϵ obtenemos $\Phi = 16{,}924^o$. La inclinación está en las condiciones del apartado a) para que exista visibilidad. Calculamos el ϕ del satélite al empezar el día (justo la época, conocemos u) obteniendo $\phi = 44{,}0310^o$, luego aún no es visible. Será visible, según b) en $u = u^* = 74{,}5528^o$ y dejará de serlo en $u = 180^o - u^* = 105{,}4472$, que corresponde a los instantes $t_1 = 5111{,}7$ s y $t_2 = 5639{,}9$ s, es decir, entre las 1:25:12 UT y las 1:34:00 UT. Obtenemos la fracción del tiempo que el satélite sería visible del apartado c) como $f_{visib} = 0{,}0858$. Por tanto una primera estimación del tiempo sería el número de vueltas que el satélite da a la Tierra en un día multiplicada por el periodo y por la fracción de visibilidad. Obteniendo $14 f_{visib} T = 7394{,}4$ s=2,05 horas. Esta estimación resulta exacta puesto que al repetirse la traza empieza y termina en la misma situación, habiendo entrado (y salido) 14 veces de la circunferencia de visibilidad (en realidad la traza se repite cada día sidéreo pero en los 4 minutos de diferencia entre un día sidéreo y las 24 horas no cambian la situación).

4. Cuestión virtualmente idéntica a otras antiguas.

Ingeniería Aeronáutica	N$^{\text{o}}$DNI ______	Curso 14/15
Escuela Técnica Superior de Ingeniería	1$^{\text{er}}$Apellido ______	10/7/15
	2$^{\text{do}}$Apellido ______	
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total:7 puntos

1. (**1,25 puntos**) Responder a las siguientes preguntas:
   a) Definir (conceptualmente, no con una fórmula) la Hora Solar Aparente.
   b) Definir (conceptualmente, no con una fórmula) el Sol medio y la Hora Solar Media, y explicar su utilidad.
   c) ¿Cuál es la relación entre la Hora Solar Media y la Aparente?
   d) Definir día solar medio y día sidéreo. ¿Por qué no tienen la misma duración?
   e) Usando las definiciones, y a partir de la duración del día sidéreo y tomando 1 año=$365{,}25 \cdot 86400$ segundos, demostrar razonadamente que un día solar medio tiene (con precisión de centésimas de segundo) 24 horas.

2. (**3 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Mercurio (☿). Para realizar un análisis preliminar de la misión, se supone que el lanzador deja la sonda en una órbita geocéntrica de aparcamiento a 200 km de altitud, contenida en el plano de la eclíptica, desde donde comienza la parte de la misión que se quiere diseñar. ¿Cuál sería el coste mínimo (en términos de ΔV) y duración (para dicho coste mínimo) de una transferencia directa? Puesto que una transferencia directa es costosa, se decide realizar una maniobra asistida por gravedad en Venus (♀). Para llegar a Venus, se aplica en la órbita de aparcamiento un impulso tangente de $\Delta V = 4\ \mathrm{km/s}$, de forma que la velocidad de exceso de la hipérbola resultante se resta, en el sistema de referencia heliocéntrico, a la de la Tierra en relación al Sol (es decir salida tangente). ¿Es suficiente este ΔV para alcanzar Venus? En caso afirmativo y suponiendo que en Venus se realiza una maniobra asistida por gravedad con una aproximación a una distancia (radio) igual a 1.2 radios venusianos, ¿alcanza finalmente la misión Mercurio? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, calcular el tiempo total de vuelo de la misión y encontrar cuales deberían ser los ángulo de configuración (ángulos de fase) tanto de Venus como de Mercurio en el lanzamiento.

   Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Datos:

Planeta	Símbolo	μ ($\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Mercurio	☿	22032.1	2439.7	0.387098
Venus	♀	324858.8	6051.8	0.723327

3. (**2,75 puntos**) El día 7 de Junio de 2015 se tiene $\mathrm{GST}_0 = 45^{\text{o}}$. Se desea diseñar una órbita circular tal que pase todos los días por Sevilla ($\phi = 37,23^{\text{o}} N, \lambda = 5,58^{\text{o}} O$), cruzando de Norte a Sur, y lo haga justo a las 18:00 Hora Solar Media (HSM), teniendo la menor altitud posible, pero superior a 500 kilómetros para evitar las perturbaciones atmosféricas en la medida de lo posible.
   a) Determinar los elementos orbitales del satélite, en la época del 7 de Junio de 2015 a las 00:00 UT.
   b) Calcular, para el 7 de Junio y en torno al cruce por Sevilla, la longitud, latitud, hora UT de cruce y HSM de cruce de: el nodo ascendente (anterior a pasar por Sevilla), el nodo descendente (posterior a pasar por Sevilla), punto de latitud máxima (anterior a pasar por Sevilla), punto de latitud mínima (posterior a pasar por Sevilla), **rellenando la siguiente tabla**:

Punto	Latitud (º)	Longitud (º)	UT (hh:mm:ss)	HSM (hh:mm:ss)
☊				
ϕ_{max}				
☋				
ϕ_{min}				

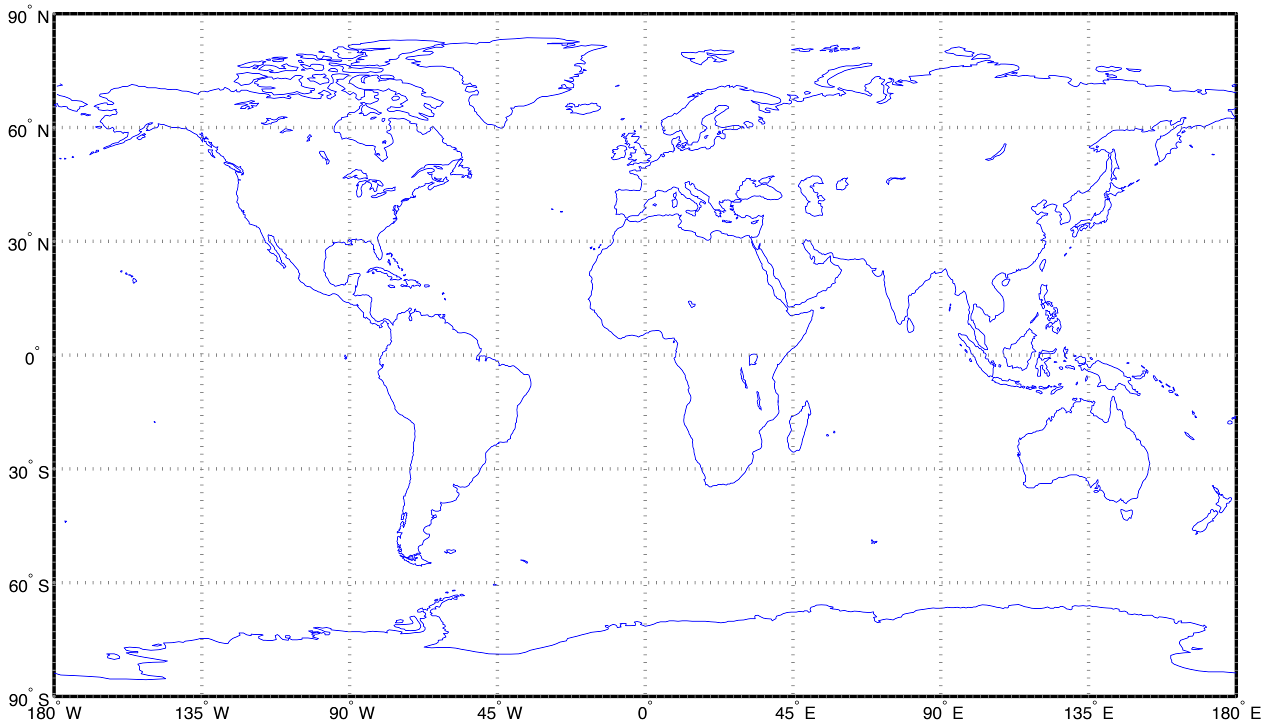
   ¿Cuáles de estos valores serían distintos el día 10 de Junio?

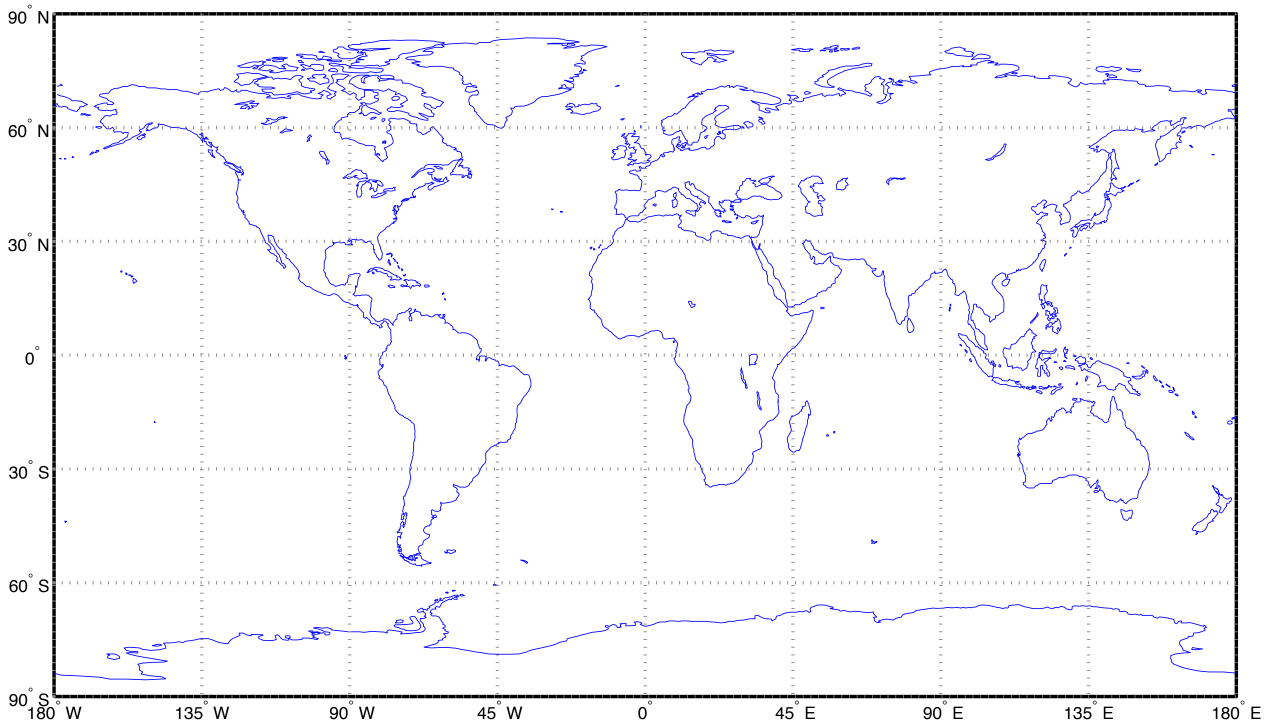
(continúa en la siguiente página)

c) En base al apartado anterior, dibujar aproximadamente la traza del satélite para una revolución el 7 de Junio de 2015 que contenga Sevilla, desde el nodo ascendente (anterior a Sevilla) hasta el nodo ascendente (posterior a Sevilla), marcando con una flecha el sentido del movimiento. **Se proveen más abajo dos mapas para dibujar la traza.**

d) Puesto que el satélite sobrevuela Sevilla a las 18:00 HSM, está claro el satélite tendrá a Sevilla dentro de su cobertura geográfica algo antes de las 18:00 HSM, y dejará de tenerla algo después. Calcular de forma aproximada este intervalo temporal en el cual Sevilla está contenida en la cobertura geográfica del satélite.

Realizar en los cálculos las hipótesis/aproximaciones que se crean necesarias, justificándolas adecuadamente.





Solución

1. Cuestión teórica.

2. Para encontrar la transferencia de menor coste empleamos una de tipo Hohmann, encontrando $a_H = \frac{L_\oplus + L_{☿}}{2} =$ 0,6935 AU, $T_H = 1{,}8145$ UT $= 105{,}48$ días, $V_\infty = 0{,}2529$ UV $= 7{,}5329$ km/s, $\Delta V = 5{,}5549$ km/s.

   Estudiemos ahora el caso con maniobra asistida por gravedad en Venus. En primer lugar puesto que en la órbita de aparcamiento se da un impulso de 4 km/s, se tiene que $V_\infty = 4{,}2047$ km/s $= 0{,}1412$ UV. Luego V_0^H (la velocidad de salida de la Tierra) es $V_0^H = V_\oplus - V_\infty = 0{,}8588$ UV, de donde obtenemos $a_1 = 0{,}7921$ AU, $e_1 = 0{,}2624$ (ya que la tierra es el afelio de la trayectoria al ser la salida tangente y hacia el interior del Sistema Solar). Por tanto $V_1^H = 1{,}2258$ UV, $\theta_1^H = 274{,}3095^o$, $\gamma_1^H = -14{,}392^o$, y para posteriores apartados calculamos el tiempo de vuelo como $\Delta T_1 = 1{,}5199$ UT $= 88{,}3542$ días (el tiempo entre el afelio y θ_1^H) y el ángulo de fase como $\psi_{♀} = 312{,}75^o$.

   En cuanto a la maniobra asistida por gravedad, encontramos $V_1^{♀}\angle\beta = V_1^H\angle\gamma_1^H - V_{♀}\angle 0^o = 0{,}3049\angle{-87{,}83^o}$ km/s, $\Delta V = 6{,}3872$ km/s, $\delta = 41{,}1787^o$, como la sonda es deflectada hacia el interior del sistema solar tomamos $V_2^{♀}\angle\beta - \delta$, para obtener el ·ngulo de trayectoria m·s negativo, luego $V_2^H\angle\gamma_2^H = V_2^{♀}\angle\beta - \delta + V_{♃}\angle 0^o =$ $1{,}012\angle{-13{,}54^o}$ UV. El triángulo se incluye en la siguiente figura:

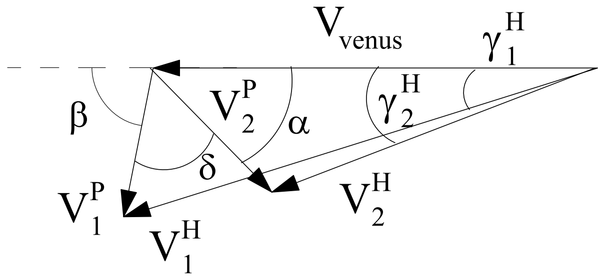


Figura 1: Triángulo del problema 2.

   Luego la órbita a la salida tiene como elementos $a_2 = 0{,}5744$ AU, $e_2 = 0{,}344$, luego el radio de perihelio $r_p =$ $0{,}3768 < L_{☿}$, luego se alcanza Mercurio. Para encontrar los tiempos hallamos $\theta_2^H = 209{,}3521^o$, $\theta_3^H = 333{,}7023^o$, luego $\Delta T_2 = 0{,}8638$ UT $= 50{,}2127$ días (el tiempo entre θ_2^H y θ_3^H), el tiempo total de vuelo es $t_v = 138{,}5669$ días, y el ángulo de fase como $\psi_{☿} = 11{,}6^o$.

3. *a*) En primer lugar calculamos los elementos orbitales. Para empezar $e = 0$, también sabemos que $a \geq R_\oplus + 500$ y que $T = \frac{T_\oplus}{k}$ con k entero. Si $a = R_\oplus + 500$, obtenemos $T = 5677$ s y $k = 15{,}1778$, por tanto tenemos que disminuir k para hacer más grande el periodo (y a). Fijamos $k = 15$ obteniendo $a = 6932{,}4$ km, luego $h = 554{,}24$ km cumpliendo el requisito. Como se quiere pasar siempre a la misma HSM elegimos una órbita heliosíncrona, luego $i = 97{,}6077^o$. Finalmente en el paso por Sevilla calculamos $u = 142{,}3824^o$, $\lambda_u = 185{,}8251^o$, la hora de paso $t_1 = 66139$ s $= 18:22:19{,}2$ de donde sacamos $\Omega = 129{,}9297^o$ y $u(t_0) = 317{,}3603^o$.

   b) En segundo lugar rellenamos la tabla partiendo del nodo ascendente previo a Sevilla, teniendo en cuenta $u_{☊} = 0^o$, luego $t_{☊} = 63867$ s $= 17:44:27{,}3$ y $HSM_{☊} = HSM_0 = HSM(t_1) - \frac{\lambda_u(t_1)}{15} = 5{,}6117 =$ $5:36:42$. λ se puede calcular bien usando la ecuación de la traza bien usando la relación entre UT y HSM (puede haber pequeñas diferencias según se usen o no perturbaciones), obteniendo $\lambda_{☊} = 178{,}0871^o$. El resto de los puntos se pueden calcular relativos al nodo ascendente, teniendo en cuenta que el tiempo entre puntos tal como están ordenados en la tabla es un cuarto del periodo (23 minutos y 56 segundos), es decir, 1/60 del periodo de la Tierra, y λ_u disminuye 90^o (al ser la órbita retrógrada), y usando la ecuación de la traza en su forma relativa, $\lambda(t_2) = \lambda(t_1) + \lambda_u(t_2) - \lambda_u(t_1) - \omega_\oplus(t_2 - t_1)$, se ve que cada punto en la tabla disminuye el valor de λ en 96^o.

Punto	u(^{o})	λ_u(^{o})	Latitud (^{o})	Longitud (^{o})	UT (hh:mm:ss)	HSM (hh:mm:ss)
☊	0	0	0	178.09 E	17:44:27.3	5:36:42
ϕ_{max}	90	270	82.39 N	82.09 E	18:08:23.3	23:36:42
☋	180	180	0	13.91 O	18:32:19.3	17:36:42
ϕ_{min}	270	90	82.39 S	109.91 O	18:56:15.3	11:36:42

   Debido a que la traza se repite y es heliosíncrona todos los valores serán a priori iguales el 10 de Junio, aunque para ello tendríamos que haber calculado a teniendo en cuenta la perturbación secular del J2 y haber calculado los valores de la tabla anterior usando dicha perturbación, por lo que en la práctica serán ligeramente diferentes. También lo serían en presencia de otras perturbaciones (como por ejemplo la resistencia atmosférica u otros armónicos gravitatorios).

c) Se dibuja la traza de forma exacta, pero es suficiente con aproximar de forma correcta el movimiento, que es retrógrado. Obsérvese que la traza termina en otro nodo ascendente a $\Delta\lambda = -\frac{360^{\circ}}{15} = -24^{\circ}$ del primero (el retraso nodal).

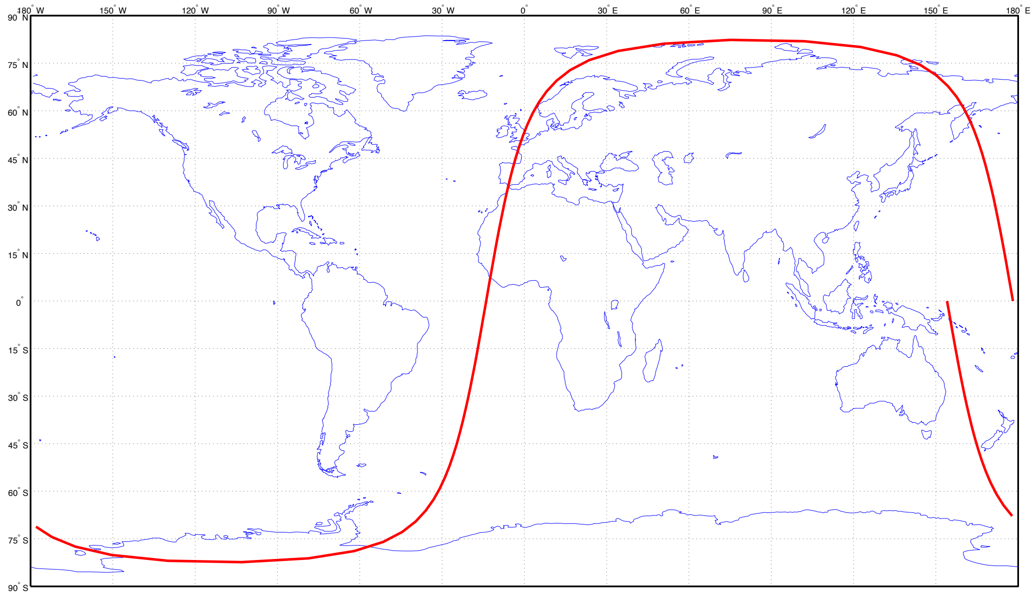


Figura 2: Apartado c) del problema 3.

d) La circunferencia de cobertura geográfica tiene como radio $\Gamma = \arccos \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus}+h} = 23{,}0665^{\circ}$, radio que se mantiene constante al ser la órbita circular. Por tanto Sevilla estará dentro de la circunferencia de cobertura siempre que su distancia ortodrómica a la proyección del satélite sobre la tierra sea menor Γ. Si despreciamos la rotación de la Tierra, cortando la Tierra por el plano de la órbita y puesto que esta es circular, observamos que Sevilla estará cubierta durante un ángulo 2Γ de la órbita. Al ser la velocidad angular del satélite uniforme e igual a n, se tiene que el tiempo de cobertura será $T_{cob} = \frac{2\Gamma}{n} = 736{,}1130$ s $= 12{,}27$ minutos. Con mayor precisión, el satélite cubrirá a Sevilla entre los instantes $18:00 - \frac{\Gamma}{n} = 17:53:52$ HSM y $18:00 + \frac{\Gamma}{n} = 18:06:08$ HSM, siendo el tiempo total de cobertura 12,27 minutos. Puesto que la Tierra no gira mucho en este tiempo, la hipótesis de despreciar la rotación de la Tierra es buena y el resultado es fiable.

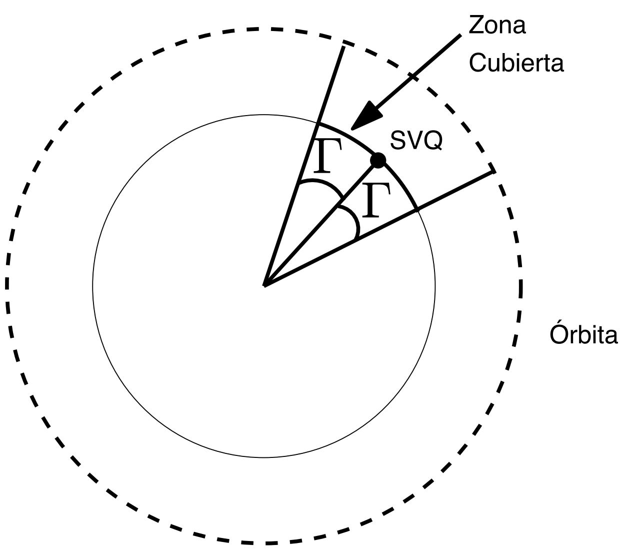


Figura 3: Apartado d) del problema 3.

Grado en Ingeniería Aeroespacial Escuela Técnica Superior de Ingeniería Universidad de Sevilla	NDNI ______ 1^{er}Apellido ______ 2^{do}Apellido ______ Nombre ______	Curso 14/15 27/1/15 **Cuestiones**

Valor total:8 puntos

1. (**2 puntos**) Se tiene un satélite cuya traza (que se repite todas las revoluciones) es una línea contenida en el Ecuador, de forma que el punto de mayor longitud al que llega es $\lambda = 30$ºE, y el de menor $\lambda = 30$ºO (ver dibujo por detrás). Se sabe que en un cierto día D se tiene que: $\mathrm{GST}_0 = 0$º, el satélite se encuentra en la posición central ($\lambda = 0$º) y viajando hacia el Oeste a las 15:00 UT, y la altitud del satélite en la posición de mínima longitud ($\lambda = 30$ºO) es $h = 35056$ km. Se pide:
   - Hallar los elementos orbitales del satélite el día D a las 00:00 horas.
   - Marcar el perigeo y apogeo de la órbita sobre la traza del dibujo para el día D; calcular a qué hora UT pasa el satélite por cada uno de ellos el día D. (Se puede responder sin resolver el apartado anterior)

2. (**2,5 puntos**) Un cometa viaja en una órbita que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con el elemento orbital $p = 10$ AU. El cometa, **antes** de llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2$ AU, $R_{♃} = 71492$ km), pasando a una distancia de 12 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar. Hallar la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y calcular si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra o no. En caso de que pudiera llegar, calcular el tiempo que tardaría en cruzarse por primera vez con la órbita de la Tierra.

3. (**3,5 puntos**) La agencia espacial japonesa "JAXA" (Japan Aeroespace Exploration Agency) desea lanzar una constelación de satélites para diversos servicios de telecomunicaciones en Asia. La órbita que se va a utilizar es una órbita tipo "**Tundra**", es decir, una órbita **geosíncrona** de **alta excentricidad**. Para evitar en lo posible el cinturón externo de Van Allen, como requisito adicional se impone que el radio de perigeo tiene que ser igual o mayor a 5 radios terrestres. Por otro lado se desea maximizar el tiempo que el satélite permanece en el hemisferio Norte, y lograr que dicha propiedad se mantenga, en la medida de lo posible, a pesar de las perturbaciones del J_2. Finalmente, se desea que el punto de la órbita más alejado de la Tierra se produzca el día 27 de Enero a las 20:00 hora local de Japón (UT +9), al sobrevolar una longitud geográfica igual a $140°$E.
   - Diseñar los elementos orbitales en la época del 27 de Enero a las 00:00 UT sabiendo que en dicho instante $\mathrm{GST}_0 = 0°$.
   - Dadas las siguientes bases de lanzamiento japonesas, elegir razonadamente una base, un azimut de lanzamiento, y una hora (UT) de lanzamiento para el día 27 de Enero (en caso de que ambas bases sean viables, elegir Kagoshima).

Base	Latitud	Longitud	Azimut Mínimo	Azimut Máximo
Tanegashima	$30°\,24'$ N	$130°\,58'$ E	-15°	90°
Uchinoura (Kagoshima)	$31°\,15'$ N	$131°\,04'$ E	20°	150°

   - Partiendo de los datos de lanzamiento anteriores y supuesto que transcurridos 20 minutos el vehículo lanzador deje el satélite en una órbita circular de aparcamiento a 200 kilómetros de altitud, con el plano orbital (Ω, i) el obtenido del lanzamiento, y el valor de u que se quiera (habrá que elegirlo expresamente), diseñar detalladamente la maniobra o maniobras necesarias (óptimas a ser posible) para transferir al satélite a su órbita final lo antes posible, indicando el ΔV total necesario y el instante en el que se llega a la órbita final.
   - Si en el apartado anterior u no se pudiera elegir sino que viniera dado, ¿cómo cambiaría la resolución del problema? (plantearlo pero no resolverlo).

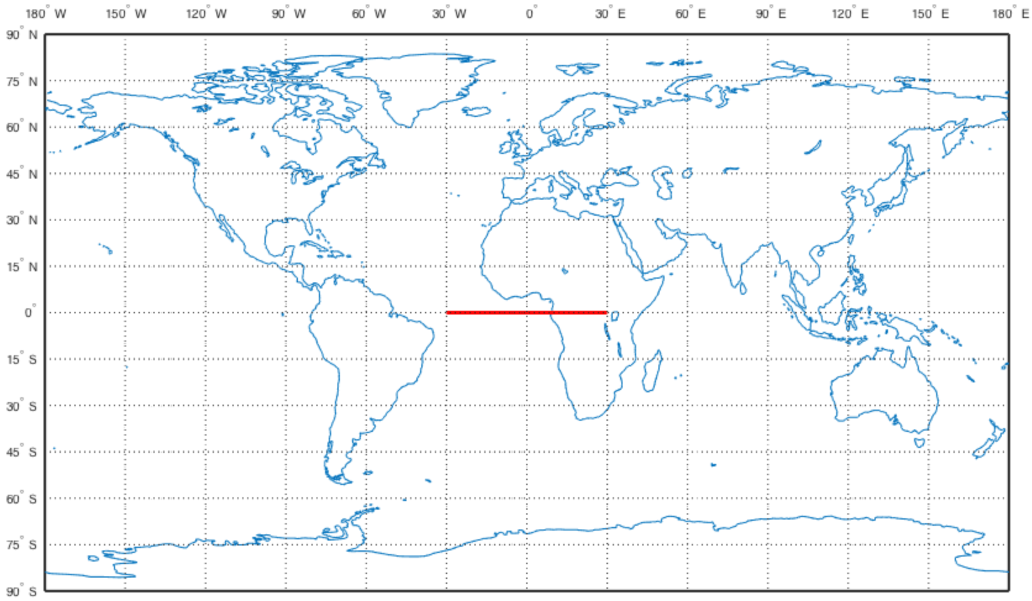


Figura 1: Traza del problema 1 (se repite en todas las revoluciones).

Solución:

1. Para resolver el primer problema, en primer lugar ha de tratarse de una órbita ecuatorial ($i = 0$º) y geosíncrona ($a = a_{GEO} = 42164$ km, hallada de igualar el periodo del satélite al periodo sidéreo de la Tierra). Por simetría perigeo y apogeo deben hallarse en el centro de la traza (longitud 0º). Cuando se pasa por el apogeo el satélite circula hacia el Oeste y cuando pasa por el perigeo hacia el Este (ya que la velocidad angular instantánea del satélite es respectivamente menor y mayor que la de la Tierra). Por tanto sabemos que el paso por el apogeo es a las 15:00:00 UT. El paso por el perigeo será un semiperiodo antes, es decir, a las 3:01:58 UT. No hay más pasos durante el día D. Con esto contestamos al segundo apartado. Para concluir el primer apartado nos faltan tres elementos orbitales: $\bar{\omega}$ (ya que es una órbita ecuatorial), θ en la época, y e). Para calcular ω, observamos que si pintamos sobre el Ecuador la posición del satélite, el perigeo, el primer punto de Aries y el meridiano de Greenwich, llegamos a la ecuación: $\bar{\omega} + \theta = \mathrm{GST}_0 + \omega_\oplus t + \lambda$. Aplicándola en el paso por el apogeo a las 15:00, obtenemos $\bar{\omega} + 180 = 0 + \omega_\oplus \times 15 \times 3600 + 0$. De donde $\bar{\omega} = 45{,}62$º. Para calcular e observamos que en el punto de mínima longitud se deben cumplir dos ecuaciones: una por la altura (ya que nos la dan), otra porque la traza se "da la vuelta" (es decir $\dot{\lambda} = 0$, de donde se llega a $\dot{u} = n = \omega_\oplus$). Las dos ecuaciones son:

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = R_\oplus + h, \qquad \frac{(1+e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} = 1$$

   Combinando las dos ecuaciones para eliminar $1 + e\cos\theta$ llegamos a:

$$\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2)^{3/4}} = R_\oplus + h$$

   de donde despejamos e: $e = \sqrt{1 - \frac{(R_\oplus+h)^4}{a^4}} = 0{,}2597$. Para concluir el problema, sabemos que $\theta = 0$º en UT=3:01:58 UT y hay que propagarlo hacia atrás hasta 00:00:00 UT. Se encuentra, resolviendo las leyes horarias, que $\theta(t_0) = 287{,}96$º.

2. El problema está resuelto en el boletín de problemas con unos números ligeramente distintos, algunos valores intermedios son $v_1^H = 0{,}6$ UV, $v_\infty = 6{,}23$ km/s, $\beta = 144{,}11$º, $\delta = 104{,}764$º, obteniendo la cónica heliocéntrica a la salida $V_2^H = 0{,}3068$ UV, $\gamma_2^H = -25{,}5909$º, $a = 3{,}4456$ AU, $e = 0{,}5377$, y puesto que el radio de perihelio es $r_p = 1{,}5928$ AU no puede llegar a la Tierra.

3. En primer lugar para maximizar el tiempo en el hemisferio Norte se utiliza una órbita lo más excéntrica posible con el apogeo en el hemisferio norte ($\omega = 270$). Puesto que debe ser geosíncrona ($a = a_{GEO} = 42164$ km), fijamos el perigeo lo más pequeño posible ($r_p = 5R_\oplus$) obteniendo $e = 0{,}2437$. Para que la posición del apogeo no se vea afectada por las perturbaciones del J2, tomamos la inclinación crítica que hace $\dot{\omega} = 0$, es decir $i = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63{,}44$º. Sabemos que el punto más alejado de la Tierra (apogeo), que es también el de máxima longitud ($u = \lambda_u = 90$º) se produce a $t_1 = 11:00$ UT y a una longitud de 140ºE. Aplicando la ecuación de la traza $\Omega + \lambda_u = \mathrm{GST}_0 + \omega_\oplus t + \lambda$, despejamos $\Omega = 215{,}45$º. En ese mismo instante $\theta = 180$ (apogeo). Propagando hasta $t_0 = 00:00$ UT obtenemos $\theta(t_0) = 24{,}38$º, con lo que ya tenemos todos los elementos orbitales. Para

resolver el lanzamiento, observamos que cualquiera de las dos bases es apropiada. Por lo que elegimos Kagoshima con Az=31,54º y $t_L = 24425$ s=06:47:05 calculados de las fórmulas de lanzamiento.

Por tanto para el tercer apartado partimos de una órbita circular con $i = 63{,}44$º, $a_P = h + R_\oplus = 6578{,}14$ km, $\Omega = 215{,}45$º, y el valor de u en $t_P = t_L + 20$ minutos=07:07:05 que nos interese. En primer lugar observamos que se trata de una maniobra de Hohmann entre una órbita circular (la de aparcamiento) y una elíptica (la Tundra). La regla de optimalidad dice que hay que usar el mayor de los apogeos, que es obviamente el de la órbita elíptica, $r_a = a(1 + e) = 52483$ km. Por tanto el semieje mayor de la transferencia de Hohmann es $a_H = \frac{a_P + r_a}{2} = 29508$ km. Obtenemos con las fórmulas habituales $\Delta V_1 = 2{,}5927$ km/s y $\Delta V_2 = 1{,}0960$ km/s, con lo que en total $\Delta V_T = 3{,}6887$ km/s. El tiempo de transferencia será $T_H = 25222$ s. Ahora bien puesto que se tiene que llegar al apogeo de la órbita Tundra, que es su punto de máxima latitud, puesto que la transferencia recorre un arco de 180º, habrá que partir del punto de mínima latitud ($u = 270$º). Además como habrá que llegar en el momento exacto (t_1=11:00 UT), habrá que partir en $t_1 - T_H$. Desafortunadamente si se hace la cuenta, es anterior a la hora de lanzamiento. Por lo que habrá que esperar un periodo. Llamemos $t_2 = t_1 + T_\oplus$ (ya que el periodo de la Tundra es el de la Tierra), por lo que habrá que comenzar la maniobra en $t_M = t_1 + T_\oplus - T_H = 1$día $+14142$s=3:55:42 del día siguiente. Además para que $u(t_M) = 270$º en la órbita de aparcamiento, propagando hasta t_P (20 minutos después del lanzamiento), obtenemos que $u(t_P) = 230{,}54$º.

En caso de que $u(t_P) \neq 230{,}54$º, se puede proceder de varias maneras y habría que estudiar la más eficiente. Por ejemplo se podría buscar el paso de la órbita de aparcamiento por $u = 270$º en el instante más cercano a t_M, y luego realizar un phasing en la órbita resultante (que tendría un valor de θ incorrecto); obsérvese que un phasing en una órbita excéntrica es ligeramente más complejo que lo visto en clase, pero esencialmente usa el mismo principio. Otra opción sería realizar la transferencia en un punto cercano pero no necesariamente en $u = 270$º, de forma que la órbita final no tendría $\omega = 270$º (pero sería próximo), luego se corregiría con una maniobra de cambio de la línea de ápsides correctamente sincronizada. Otra opción sería realizar la maniobra en $u = 270$º pero en vez de llegar a una órbita Tundra, llegar a una con el mismo apogeo pero el perigeo algo más bajo, de forma que tras dar varias revoluciones se sincronice el paso por el apogeo con el instante deseado y en ese momento se realiza una maniobra de cambio de perigeo para fijar el perigeo a su valor real. Cualquiera de estas opciones es potencialmente válida.

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

<table>
<tr><td>Ingenieros Aeronáuticos</td><td>N^oDNI ______</td><td>Curso 14/15</td></tr>
<tr><td>Escuela Superior de Ingenieros</td><td>1^{er}Apellido ______
2^{do}Apellido ______</td><td>16/1/15</td></tr>
<tr><td>Universidad de Sevilla</td><td>Nombre ______</td><td>2º Parcial</td></tr>
</table>

Valor total:10 puntos +0.5 puntos extra.

1. (**1 punto**) Definir brevemente, en el contexto de los vehículos espaciales:
   - Embrittlement.
   - RTG.
   - Single-event upset.
   - Outgassing.
   - Albedo.
   - Órbita Halo.
   - Emitividad semiesférica.
   - Louver.
   - Rendezvous.
   - Puntos de Lagrange.

2. (**1.5 puntos**) Dados, como datos de entrada para una maniobra asistida por gravedad, v_1^H, γ_1^H, r_p, los datos del planeta y el sentido de la maniobra, ¿Cómo se modifica la maniobra (y los triángulos asociados) si en el periapsis de la hipérbola de sobrevuelo se realiza un impulso tangente adicional ΔV_p que aumenta la velocidad del vehículo en dicho punto? Pista: considerar como cambia la hipérbola de la maniobra a raíz del impulso.

3. (**4 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Urano (♅); para disminuir el coste y duración se decide realizar una maniobra asistida por gravedad en Júpiter (♃). Tras salir de la esfera de influencia de la Tierra, la órbita tiene un semieje mayor $a = 3,5$ AU y perihelio en la Tierra. En Júpiter se realiza una maniobra asistida por gravedad con una **altitud** de 9 radios jovianos. Además, para aumentar el efecto de la maniobra asistida por gravedad, se realiza una maniobra adicional tangente en el perijovio con $\Delta V_p = 0,2$ km/s. ¿Alcanza finalmente la misión Urano? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, calcular el tiempo total de vuelo de la misión y encontrar cuales deberían ser los ángulo de configuración (ángulos de fase) tanto de Júpiter como de Urano en el lanzamiento.

   Nota: Si no se ha podido resolver el problema 2, realizar la maniobra asistida por gravedad de forma "tradicional", sin impulso extra.

   Datos:

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Urano	♅	5780158.5	25559	19.2709

4. (**4 puntos**) La Agência Espacial Brasileira (AEB) desea poner en órbita un satélite para Argentina con las siguientes características:

   a) La órbita será circular y heliosíncrona del tipo amanecer/atardecer (6:00/18:00).

   b) El satélite debe pasar **una vez al día** exactamente sobre Buenos Aires (latitud $34°36'12''S$, longitud $58°22'54''$W), cruzando **de Norte a Sur**.

   c) La órbita no debe superar la altitud de 600 kilómetros ni descender de los 500 kilómetros.

   Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época del 16 de Enero de 2015 a las 00:00 UT sabiendo que dicho día $\mathrm{GST}_0 = 110°$.

   ¿A qué hora solar media pasará por Buenos Aires 30 días después?

   Supongamos que transcurrido un tiempo se quiere modificar la órbita a una del tipo 7:30/19:30. Describir la maniobra o maniobras que serían necesarias, con el mayor detalle posible (tipo de maniobra, ΔV, cuándo/dónde habría que hacerla). ¿Seguiría pasando dicha órbita por Buenos Aires o habría que hacer más maniobras? (responder a esta pregunta cualitativamente, en caso afirmativo describir el procedimiento sin realizar cálculos).

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-Realizar las hipótesis y simplificaciones que se consideren oportunas, explicándolas en detalle.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas, pero el resultado final debe expresarse en unidades físicas.

Solución

1. Cuestión de teoría pura.

2. La clave es darse cuenta que V_1^P y V_2^P diferirán en módulo, y además hay que recalcular δ. En primer lugar, calculamos como siempre $V_1^P = \sqrt{V_P^2 + (V_1^H)^2 - 2V_P V_1^H \cos\gamma_1^H}$. Llamando con el subíndice 1 a la hipérbola previa a la maniobra, se tiene que $v_{\infty 1} = V_1^P$. Si no hubiera maniobra, sabemos que podemos calcular δ_1 (el giro debido a la primera hipérbola) igualando las expresiones

$$\Delta V = \frac{2v_{\infty 1}}{1 + r_p \frac{v_{\infty 1}^2}{\mu_P}} = 2v_\infty \operatorname{sen}\delta_1/2$$

luego

$$\operatorname{sen}\delta_1/2 = \frac{1}{1 + r_p \frac{v_{\infty 1}^2}{\mu_P}}$$

No obstante, al aplicar un impulso en periapsis, la hipérbola se modifica. Llamemos v_p a la velocidad en periapsis. Entonces:

$$v_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu_P}{r_p} - \frac{\mu_P}{a_1}} = \sqrt{\frac{2\mu_P}{r_p} + v_{\infty 1}^2}$$

Igualmente, para la hipérbola resultante:

$$v_{p2} = \sqrt{\frac{2\mu_P}{r_p} - \frac{\mu_P}{a_2}} = \sqrt{\frac{2\mu_P}{r_p} + v_{\infty 2}^2}$$

Por tanto, como $v_{p2} = v_{p1} + \Delta V$ (al ser el impulso tangente):

$$\sqrt{\frac{2\mu_P}{r_p} + v_{\infty 2}^2} = \sqrt{\frac{2\mu_P}{r_p} + v_{\infty 1}^2} + \Delta V$$

Y operando:

$$v_{\infty 2}^2 = \left(\sqrt{\frac{2\mu_P}{r_p} + v_{\infty 1}^2} + \Delta V\right)^2 - \frac{2\mu_P}{r_p} = v_{\infty 1}^2 + \Delta V^2 + 2\Delta V\sqrt{\frac{2\mu_P}{r_p} + v_{\infty 1}^2}$$

Teniendo $v_{\infty 2}$ podemos calcular δ_2:

$$\operatorname{sen}\delta_2/2 = \frac{1}{1 + r_p \frac{v_{\infty 2}^2}{\mu_P}}$$

El giro total de la velocidad será $\delta = \frac{\delta_1+\delta_2}{2}$, ya que desde la asíntota de llegada hasta periapsis, en la hipérbola 1, el giro total de la velocidad es $\delta_1/2$, y desde periapsis a la asíntota de salida, en la hipérbola 2, el giro total de la velocidad es $\delta_2/2$ (ver la figura 2 en la siguiente página). También se puede calcular en base a los θ_∞, observando que $\delta = \theta_{\infty 2} + \theta_{\infty 1} - 180^{\circ}$. La otra modificación en el triángulo es que ahora $V_2^P = v_{\infty 2}$. Todo lo demás es análogo. Se dibuja un triángulo de ejemplo en la figura 1.

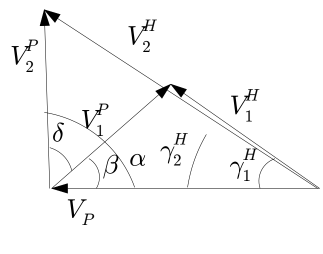


Figura 1: Triángulo ejemplo para el problema 2

3. Resolvemos el problema 3 en primer lugar sin considerar el impulso en periapsis (como habría hecho un alumno que no hubiera podido resolver el problema 2). A continuación aplicamos los resultados del problema 2 para ver como varía la solución. Emplearemos el método de fasores (con triángulos la solución es análoga).

   En primer lugar conocemos el semieje mayor del primer segmento heliocéntrico, y como sabemos que el perihelio está en la Tierra, $L_\oplus = a_1(1 - e_1)$, de donde $e_1 = 0{,}7143$. Los datos en el corte de este segmento con la órbita de

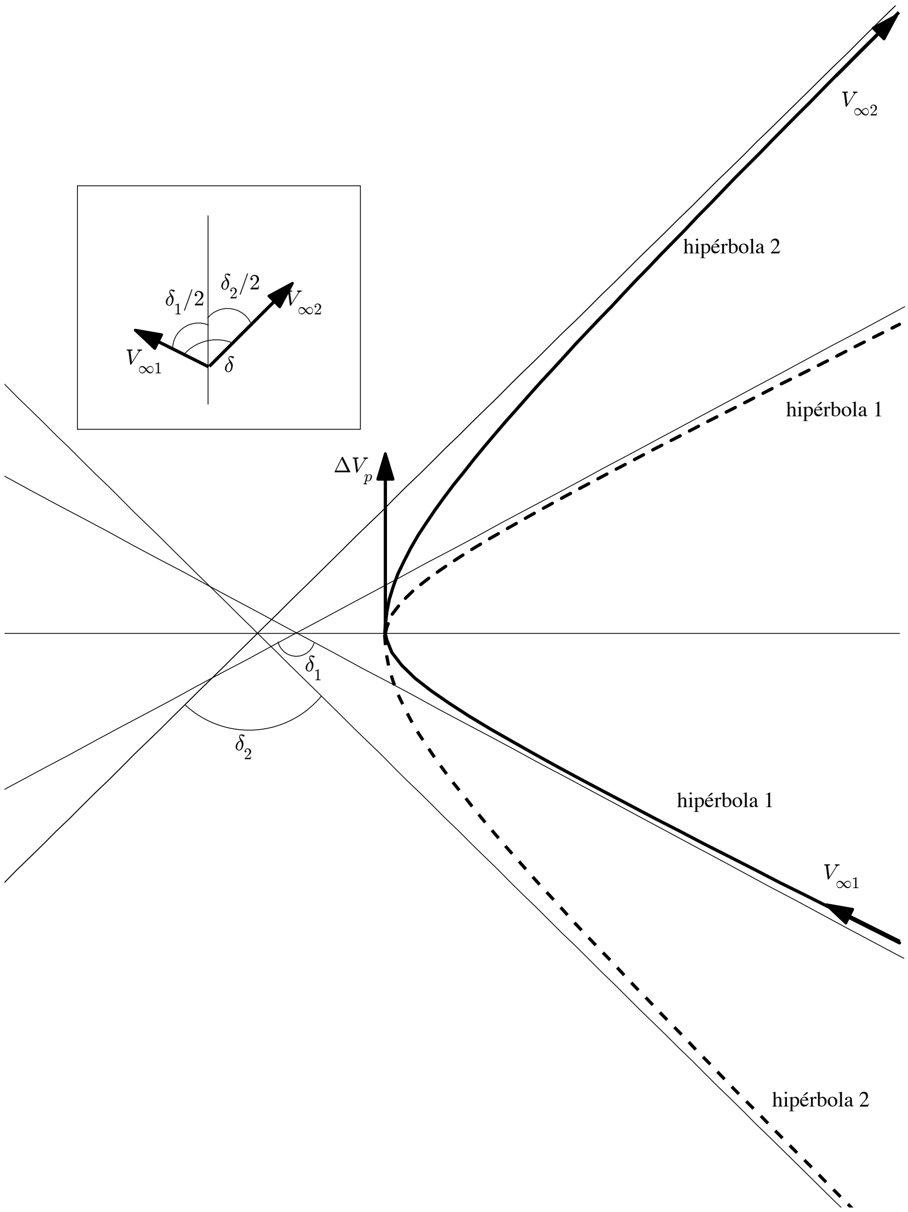


Figura 2: Maniobra asistida por gravedad con impulso en periapsis.

Júpiter (tomando el primer posible encuentro) son: $\theta_1^H = 159{,}8434^o$, $V_1^H = 0{,}3141$ UV, $\gamma_1^H = 36{,}76^o$. Además de las leyes horarias el tiempo hasta el encuentro es $T_1 = 11{,}77$ UT. Calculamos ahora $V_1^{\jupiter} = V_1^H - V_{\jupiter} = 0{,}3141\underline{/36{,}76^o} - 0{,}4384\underline{/0^o} = 0{,}265\underline{/134{,}81^o}$. Obsérvese que hasta este punto los números son los mismo con y sin impulso en periapsis.

Si no hay impulso en periapsis, entonces de la maniobra asistida por gravedad obtenemos $\delta = 95{,}45^o$. Como se trata de una misión a planetas exteriores, elegimos $V_2^{\jupiter} = 0{,}265\underline{/39{,}36^o}$. De donde $V_2^H = V_2^{\jupiter} + V_{\jupiter} = 0{,}6649\underline{/14{,}64}$. Calculando los elementos de la cónica heliocéntrica a partir de la velocidad y el ángulo de trayectoria obtenemos $a_2 = -17{,}34$ AU, $e_2 = 1{,}2830$. Obviamente llega a Urano, al tratarse de una hipérbola. Obtenemos que los puntos de salida (Júpiter) y llegada (Urano) son $\theta_2^H = 26^o$ y $\theta_3^H = 109{,}04^o$, respectivamente. De las leyes horarias de la hipérbola, $T(\theta_2^H) = 3{,}3967$ UT y $T(\theta_3^H) = 42{,}9$ UT, luego el tiempo de vuelo de este segmento será $T_2 = T(\theta_3^H) - T(\theta_2^H) = 39{,}5037$ UT. Por tanto el tiempo total de vuelo de la misión es $T = T_1 + T_2 = 2980{,}7$ dias $= 8{,}16$ años. Los ángulos de fase son, por tanto, $\psi_{\jupiter} = \theta_1^H - n_{\jupiter} T_1 = 103{,}0263^o$ y $\psi_{\uranus} = \theta_1^H + \theta_3^H - \theta_2^H - n_{\uranus} T = 208{,}1576^o$.

Si hay impulso en periapsis, entonces aplicando los resultados del problema 2, tenemos $\delta_1 = 95{,}45^o$, $v_{\infty 2} = 8{,}3169$ km/s, $\delta_2 = 92^o$, luego $\delta = 93{,}72^o$. Por lo que $V_2^{\jupiter} = 0{,}2792\underline{/41{,}09^o}$. De donde $V_2^H = V_2^{\jupiter} + V_{\jupiter} = 0{,}6743\underline{/15{,}7936}$. Calculando los elementos de la cónica heliocéntrica a partir de la velocidad y el ángulo de trayectoria obtenemos $a_2 = -14{,}22$ AU, $e_2 = 1{,}3421$. Obviamente llega a Urano, al tratarse de una hipérbola. Obtenemos que los puntos de salida (Júpiter) y llegada (Urano) son $\theta_2^H = 27{,}49^o$ y $\theta_3^H = 107{,}72^o$, respectivamente. De las leyes horarias de la hipérbola, $T(\theta_2^H) = 3{,}5217$ UT y $T(\theta_3^H) = 41{,}4646$ UT, luego el tiempo de vuelo de este segmento será $T_2 = T(\theta_3^H) - T(\theta_2^H) = 37{,}94$ UT. Por tanto el tiempo total de vuelo de la misión es

$T = T_1 + T_2 = 2889{,}9$ dias $= 7{,}9122$ años (se ahorran unos tres meses respecto a no dar el impulso en periapsis). Los ángulos de fase son, por tanto, $\psi_{\jupiter} = \theta_1^H - n_{\jupiter} T_1 = 103{,}0263^{\circ}$ y $\psi_{\uranus} = \theta_1^H + \theta_3^H - \theta_2^H - n_{\uranus} T = 206{,}4013^{\circ}$.

4. Con los requisitos del problema obtenemos que, con $h = 600$ km, el periodo sería 14.85 veces el de la Tierra. Con $h = 500$ km, el periodo sería 15.1778 veces el de la Tierra. Como el periodo debe ser una fracción exacta del de la Tierra, tomamos $T = \frac{T_\oplus}{15} = 1{,}5956$ h de forma que $r = 6932{,}4$ km y $h = 554{,}24$ km, cumpliendo los requisitos. Puesto que se trata de una órbita circular y heliosíncrona directamente obtenemos $i = 97{,}6^{\circ}$. Calculando ahora las condiciones en el cruce con Buenos Aires, obtenemos $u(t) = 214{,}96^{\circ}$, $\lambda_u(t) = 174{,}71^{\circ}$, donde t es la hora de paso. Por tanto pasa por Buenos Aires a la hora solar media $HSM = HSM_0 + \frac{\lambda_u}{15} = 17{,}6475 = 17:38:51$ (esta hora solar media no cambia 30 días después, al ser una órbita heliosíncrona), y como $HSM = UT + \frac{\lambda}{15}$, obtenemos la hora de paso $t = 21{,}5396$ h $= 77543$ s. De donde usando la ecuación $\Omega + \lambda_u = \mathrm{GST}_0 + \omega_\oplus t + \lambda$ obtenemos $\Omega(t) = 200{,}88$. Para propagar hasta la época al tratarse de un único día ignoramos las perturbaciones, por lo que $\Omega = 200{,}88^{\circ}$, y $u(0) = u(t) - nt = 35{,}27^{\circ}$.

   Transcurrido un periodo de tiempo, se quiere cambiar la órbita a una del tipo 7:30/19:30 con el resto de requisitos iguales. Para ello en primer lugar habrá que cambiar Ω. Observando que $HSM_0 = 12 + \frac{\Omega - AR_{SM}}{15}$, tendremos $6 = 12 + \frac{\Omega_i - AR_{SM}}{15}$ y $7{,}5 = 12 + \frac{\Omega_f - AR_{SM}}{15}$. Por tanto calculamos $\Omega_f - \Omega_i = 1{,}5 \times 15 = 22{,}5^{\circ}$. Obsérvese que no es posible calcular los valores en sí de las Ω porque no sabemos exactamente cuanto tiempo ha transcurrido (y presumiblemente Ω habría cambiado por ser una órbita heliosíncrona sometida a perturbaciones). No obstante la maniobra de cambio de plano no requiere conocer los valores concretos de Ω, sólo la diferencia. Usando las fórmulas de la maniobra de cambio de plano obtenemos $\varphi = 22{,}3^{\circ}$, luego $\Delta V = 2\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r}} \operatorname{sen} \varphi/2 = 2{,}9326$ km/s. Además la maniobra habrá que realizarla en la latitud $\phi = 82{,}245^{\circ}$. La órbita resultante con gran probabilidad no tendrá el valor de u adecuado para pasar por Buenos Aires en el instante correcto, por lo que habrá que hacer un phasing para ajustar el valor de u. La forma de calcular dicho phasing sería calcular, con la nueva Ω, en que instante de tiempo se circula por la longitud de Buenos Aires (no coincidirá con el valor de t calculado anteriormente), y propagar u hasta dicho instante. Habrá que hacer un phasing para modificar ese valor calculado de u hasta $u(t)$ anteriormente obtenido.

Grado en Ingeniería Aeroespacial Escuela Técnica Superior de Ingeniería Universidad de Sevilla	N$^{\text{o}}$DNI ________________ 1$^{\text{er}}$Apellido ________________ 2$^{\text{do}}$Apellido ________________ Nombre ________________	Curso 14/15 14/11/14 **Cuestiones**

Valor total:7 puntos + 0.5 puntos extra

Nota: En ninguno de los problemas es necesario considerar perturbaciones.

1. (**2 puntos**) Se sabe que en la época 14/11/14 a las 00:00 UT (denotada como T_0), un cuerpo orbitando la Tierra tiene como posición y velocidad las siguientes, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:
$$\vec{r} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ UV}.$$
Escribir los elementos orbitales en el instante $T_1 = T_0 + 10$ UT, expresados también en unidades canónicas.

2. (**1.5 puntos**) Responder a las siguientes preguntas para una órbita de excentricidad $0 < e < 1$.
   a) Definir gráficamente la anomalía verdadera E.
   b) Obtener razonadamente, a partir de dicha figura, fórmulas para $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, en función de E y e.
   c) Usando el apartado (b), obtener una fórmula para $\tan\gamma$ en función de E y e.
   d) Usando el apartado (c), ¿para qué E se dará el máximo valor de γ y cuál será dicho valor de γ en función de e? ¿A qué θ corresponde este E? Repetir con el mínimo valor de γ.

   Nota: Hay que realizar la deducción matemática de las fórmulas y explicar todos los pasos.

3. (**2 puntos**) Se tiene una órbita circular no ecuatorial que verifica $T = \frac{T_\oplus}{k}$, con $k \geq 1$ un número entero.
   a) ¿Qué propiedad tiene la traza de la órbita en virtud de la fórmula que verifica su periodo, si se dibujaran k o más revoluciones consecutivas? Dibujar esquemáticamente algunos ejemplos para valores pequeños de k.
   b) Puesto que durante un día sidéreo ($T_\oplus$) el satélite da k vueltas, en particular a lo largo de un día sidéreo el satélite cruzará k veces el nodo ascendente (☊) y k veces el nodo descendente (☋). Sea λ_0(☊) la longitud del primero de los cruces por ☊. ¿Cuál será la longitud λ_0(☋) del primer cruce por ☋, supuesto posterior al cruce por ☊?
   c) Encontrar una fórmula para la longitud del resto de los cruces durante el mismo día sidéreo por ☊, λ_i(☊), y por ☋, λ_i(☋), de forma que el subíndice i denote el i-ésimo cruce, con $i = 1, 2, \ldots, k-1$.
   d) Durante un día sidéreo, pasado el primer cruce por ☊, ¿puede volver a haber otro cruce por ☊ o ☋ en la misma longitud λ_0(☊)? (Es decir, si el satélite vuelve a pasar por ese punto en el mismo día sidéreo). Encontrar un condición para k que permita responder a esta pregunta afirmativa o negativamente, y en caso que la respuesta sea afirmativa, encontrar el tiempo Δt que transcurre hasta que el satélite vuelve a cruzar un nodo en la longitud λ_0(☊),

   Nota: La figura al reverso puede ayudar a entender la definición de los λ_i.

4. (**2 puntos**) El día 14/11/14 a las 12:00 se observa un satélite sobrevolando un punto de la Tierra con coordenadas 40^oS, 60^oO a una altitud de 942.16 kilómetros. El sobrevuelo sucede con el satélite cruzando de Norte a Sur. Transcurrida una hora, estudiar la cobertura geográfica del satélite y determinar cuáles de las siguientes ciudades están cubiertas:
   - Moscú (Rusia): $\phi = 55{,}75^{\text{o}}N$, $\lambda = 37{,}62^{\text{o}}E$.
   - Bombay (India): $\phi = 18{,}97^{\text{o}}N$, $\lambda = 72{,}83^{\text{o}}E$.
   - Baikonur (Kazajistán): $\phi = 45{,}62^{\text{o}}N$, $\lambda = 63{,}32^{\text{o}}E$.
   - Islamabad (Pakistán): $\phi = 33{,}72^{\text{o}}N$, $\lambda = 73{,}07^{\text{o}}E$.

   Como datos adicionales se sabe que la traza del satélite circula siempre hacia el Oeste, y que el punto de máxima latitud que sobrevuela el satélite a lo largo de su órbita es $\phi = 50^{\text{o}}$N. Además se verifica $\omega = 45^{\text{o}}$ y $e = 0{,}0464$.

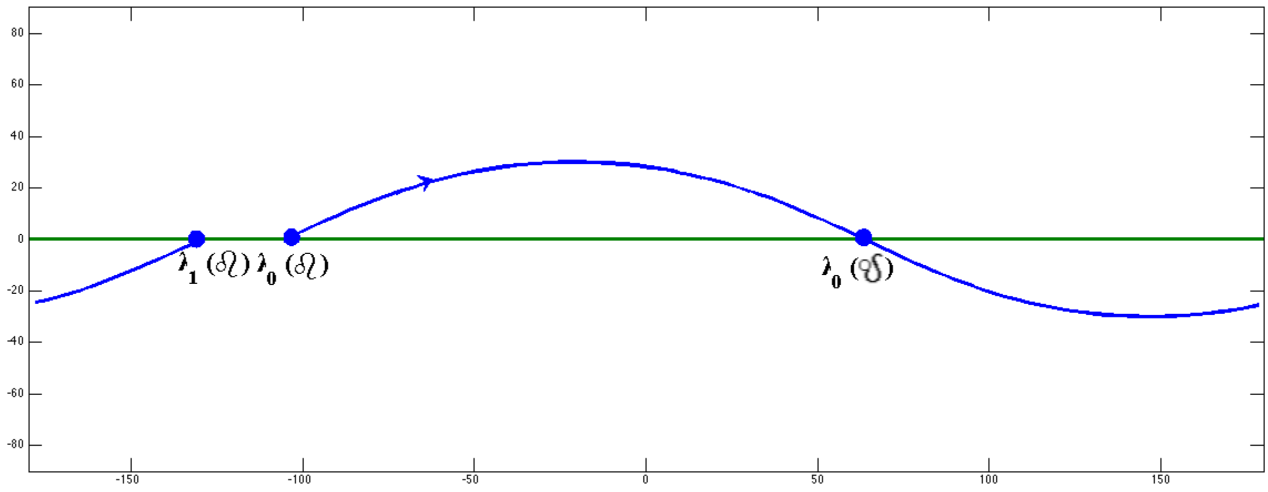


Figura 1: Figura de referencia para el Problema 3 con una traza de ejemplo. Se muestra una revolución (el problema considera k revoluciones).

Solución:

1. Para resolver el primer problema, calculemos en primer lugar la energía específica. Como $r = 2$ y $v = 1$, resulta $\epsilon = 0$, por lo que la órbita es parabólica. Tenemos que usar p y obtenemos ya $e = 1$. También podemos calcular fácilmente $\vec{h} = 2\vec{i}$, por lo que la órbita es polar ($i = 90^{\circ}$) y por otro lado como $p = \frac{h^2}{\mu}$ obtenemos $p = 4$ UD. Calculando el vector del nodo ascendente, $\vec{n} = \vec{j}$, luego $\Omega = 90^{\circ}$. Ahora podemos proceder de dos maneras, geométricamente, observamos que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Por tanto nos encontramos en perigeo y $\theta = 0^{\circ}$, $\omega = 45^{\circ}$ (ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{n}$). Procediendo analíticamente, calculamos $\vec{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[0\ 1\ 1\right]^T$, luego claramente $\theta = 0^{\circ}$ y $\omega = 45^{\circ}$. Hay que propagar θ, como partimos desde el perigeo se pueden aplicar directamente las leyes horarias. Para $\Delta T = 10$ UT, calculamos $B = 3{,}75$, y resolviendo la ecuación de Barker encontramos $\theta = 111{,}21^{\circ}$

2. Los apartados (a) y (b) son de teoría. Usando $\cos\theta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$ y $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-e^2}\frac{\operatorname{sen} E}{1-e\cos E}$, y sustituyendo en la fórmula de $\tan\gamma$:

$$\tan\gamma = \frac{e\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta} = \frac{e\sqrt{1-e^2}\frac{\operatorname{sen}E}{1-e\cos E}}{1+e\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}} = \frac{e\sqrt{1-e^2}\operatorname{sen}E}{1-e\cos E+e(\cos E-e)} = \frac{e\operatorname{sen}E}{\sqrt{1-e^2}}$$

   Está claro que la expresión será máxima cuando $E = 90^{\circ}$. Esto implica $\cos\theta = -e$ y $\tan\gamma = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$, despejando e:

$$e^2 = \frac{\tan^2\gamma}{1+\tan^2\gamma} = \operatorname{sen}^2\gamma$$

   por lo que $\operatorname{sen}\gamma = e$. El mínimo se dará cuando $E = 270^{\circ}$ (luego θ será la otra solución de $\cos\theta = -e$) y entonces $\operatorname{sen}\gamma = -e$.

3. (a) La fórmula implica que la traza se repite cuando el satélite ha dado k revoluciones. Se han visto ejemplos en prácticas y en clase, ver los ejemplos en la Figura 2.

   (b) Usando la ecuación que verifica λ para el nodo ascendente y descendente, y restando, obtenemos:

$$\lambda_u(☋) - \lambda_u(☊) = \omega_{\oplus}(t_{☋} - t_{☊}) + \lambda_0(☋) - \lambda_0(☊)$$

   Teniendo en cuenta $\lambda_u(☋) = \pi$, $\lambda_u(☊) = 0^{\circ}$, y al ser la órbita circular, $t_{☋} - t_{☊} = \frac{T}{2} = \frac{T_{\oplus}}{2k}$, obtenemos:

$$\pi = \omega_{\oplus}\frac{T_{\oplus}}{2k} + \lambda_0(☋) - \lambda_0(☊)$$

   Despejando $\lambda_0(☋)$ y teniendo en cuenta $\omega_{\oplus}T_{\oplus} = 2\pi$:

$$\lambda_0(☋) = \lambda_0(☊) + \pi - \frac{\pi}{k}$$

   Para el apartado (c) tenemos en cuenta que el retraso nodal es $\Delta\lambda = -\frac{2\pi}{k}$, y cada paso por el nodo ascendente o descendente supondrá un retraso nodal respecto al nodo anterior. Por tanto, es fácil deducir:

$$\begin{aligned}
\lambda_i(☊) &= \lambda_0(☊) - 2\pi\frac{i}{k}, \\
\lambda_i(☋) &= \lambda_0(☋) - 2\pi\frac{i}{k} = \lambda_0(☊) + \pi - \frac{\pi}{k} - 2\pi\frac{i}{k} = \lambda_0(☊) + \pi - \pi\frac{2i+1}{k}.
\end{aligned}$$

   (d) De la primera fórmula es evidente que $\lambda_i(☊) \neq \lambda_0(☊)$ si $i \neq 0$. En la segunda fórmula, para que $\lambda_i(☋) \neq \lambda_0(☊)$, se debe verificar:

$$\pi - \pi\frac{2i+1}{k} = 0 \to 2i+1 = k \to i = \frac{k-1}{2}$$

   Puesto que tanto k como i son enteros, para que la anterior ecuación se pueda verificar k debe ser impar: esa es la condición para que un cruce por el Ecuador se repita dos veces en un día sidéreo (una vez por el nodo ascendente y otra por el descendente). Obsérvese en la figura 2, como los casos $k = 1, 3, 5, 7, 9$ tienen cruces dobles en el Ecuador, mientras que los casos $k = 2, 4, 6, 8$ no los tienen, verificándose por tanto la regla que acabaos de deducir.

   Respecto a el tiempo que tarda en cruzar por segunda vez, por un lado será media órbita $T/2$ (del primer nodo ascendente al primer nodo descendente) y luego i órbitas completas hasta llegar al i-ésimo nodo descendente, luego:

$$\Delta T = \frac{T}{2} + iT = \frac{T}{2} + \frac{k-1}{2}T = \frac{k}{2}T.$$

   Sustituyendo ahora el valor de T en función de $T_{\oplus}$:

$$\Delta T = \frac{T_{\oplus}}{2}.$$

   Observar que ninguna de las deducciones realizadas depende de la inclinación de la órbita (siempre que no sea ecuatorial). Incluso en el caso polar se verificarían las conclusiones a las que se ha llegado en este problema.

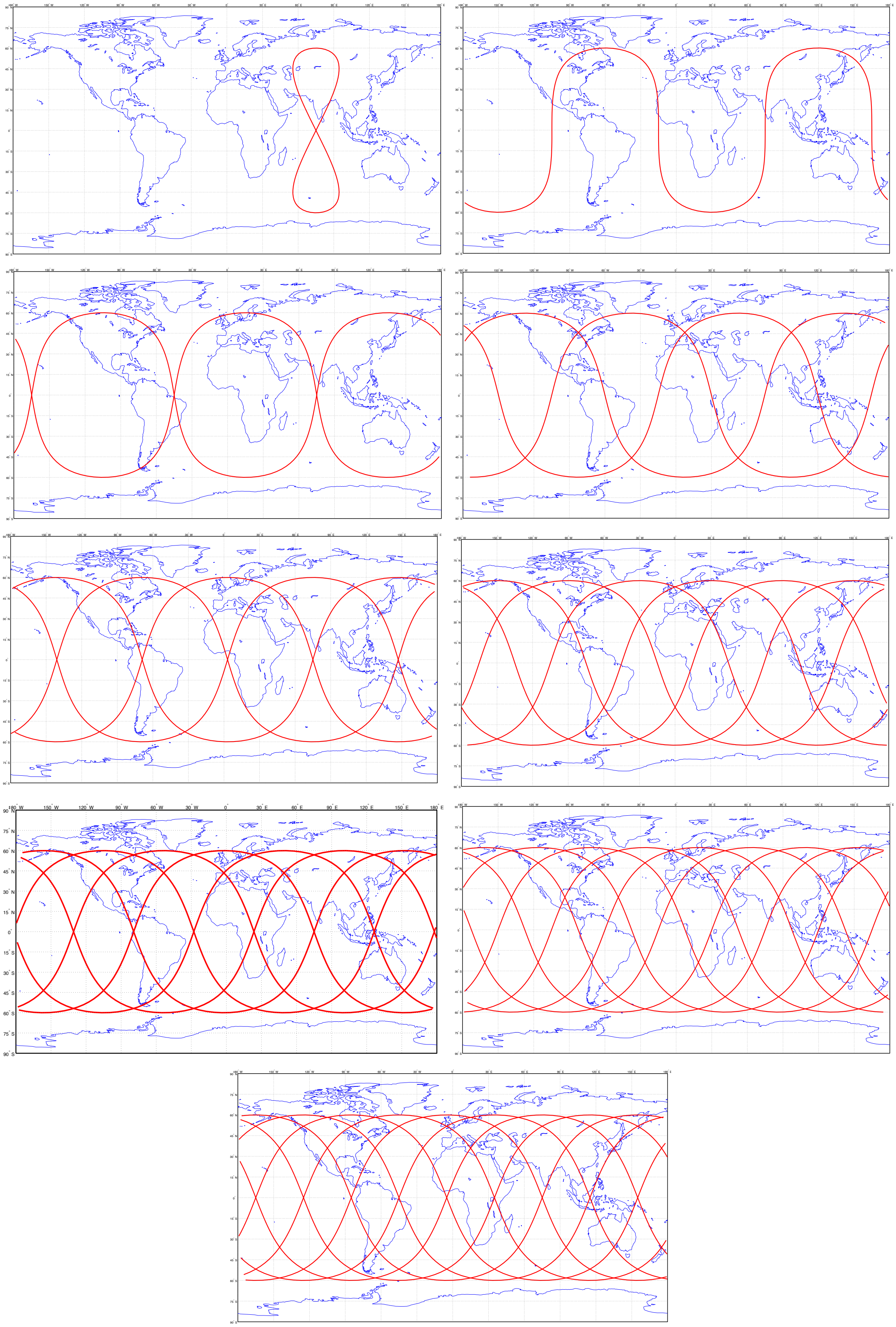


Figura 2: Trazas de ejemplo para el Problema 3, con $i = 60^{\text{o}}$, $k = 1, \ldots, 9$ (de izquierda a derecha y de arriba a abajo).

4. Llamemos T_0 a la época y T_1 a una hora después; necesitamos propagar la posición del satélite para calcular las coberturas. De los datos, se obtiene que $i = 130^{\text{o}}$ (al circular la traza siempre al Oeste y ser una órbita baja debe ser una órbita retrógrada, como se puede comprobar fácilmente usando la fórmula de $\dot{\lambda}$). Con las coordenadas en el primer punto, obtenemos del triángulo que $u = 237{,}0452^{\text{o}}$ (hay que coger la segunda solución al ir de Norte a Sur).

Igualmente $\lambda_u = 135{,}2441^{\text{o}}$ (el cuadrante opuesto a u al ser una órbita retrógrada). Por tanto $\theta = u - \omega = 192{,}0452$. De la ecuación de la cónica, $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, puesto que conocemos e, θ, y $r = h + R_\oplus$, despejamos a, obteniendo $a = 7003{,}1$ km. Ahora tenemos que propagar $\theta(T_0)$ hasta $\theta(T_1)$. Para ello, con las leyes horarias obtenemos $E(T_0) = 3{,}3617$ rad, $M(T_0) = 3{,}3719$ rad, luego el tiempo transcurrido desde el perigeo hasta $\theta(T_0)$ es de $\Delta T_0 = \frac{M(T_0)}{n} = 3130$ s, donde $n = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a^3}} = 1{,}0773 \cdot 10^{-3}$ rad/s. Por tanto el tiempo transcurrido desde el perigeo hasta $\theta(T_1)$ es $\Delta T_1 = \Delta T_0 + 3600 = 6730$ s. Como es superior a un periodo, restando un periodo obtenemos $\Delta T_1 = 897{,}5354$. De donde $M(T_1) = 0{,}9669$ rad, y numéricamente obtenemos $E(T_1) = 1{,}0061$ rad, y finalmente $\theta(T_1) = 59{,}9207^{\text{o}}$. Luego $u(T_1) = \theta(T_1) + \omega = 104{,}9207^{\text{o}}$, y finalmente del triángulo $\phi(T_1) = 47{,}7498^{\text{o}}$N.

Para calcular la longitud usamos la ecuación de la longitud en diferencias, obteniendo:

$$\lambda(T_1) = \lambda(T_0) + \lambda_u(T_1) - \lambda_u(T_0) - \omega_\oplus(T_1 - T_0).$$

Calculamos $\lambda_u(T_1)$ del triángulo obteniendo $\lambda_u(T_1) = 247{,}4836^{\text{o}}$ (hay que coger la segunda solución del coseno porque la órbita es retrógrada y por tanto λ_u está en el cuadrante contrario a u). Sustituyendo en la ecuación llegamos a $\lambda(T_1) = 37{,}1984^{\text{o}}$.

Conocido el centro de la circunferencia de cobertura, calculamos el radio. Para ello vemos que $r(T_1) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta(T_1)} = 6829{,}2$ km. Por tanto $\Gamma = \arccos\left(\frac{R_\oplus}{r}\right) = 20{,}941^{\text{o}}$.

Calculemos ahora las distancias a las diferentes ciudades:

- Moscú (Rusia): $\alpha = 8^{\text{o}} < \Gamma$. Sí está cubierta.
- Bombay (India): $\alpha = 40{,}76^{\text{o}} > \Gamma$. No está cubierta. Se podía haber deducido directamente ya que $\phi_{BOMB} < \phi(T_1) - \Gamma$.
- Baikonur (Kazajistán): $\alpha = 17{,}959^{\text{o}} < \Gamma$. Sí está cubierta
- Islamabad (Pakistán): $\alpha = 30{,}22^{\text{o}} > \Gamma$. No está cubierta

Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Ingenieros Aeronáuticos	N$^{\text{o}}$DNI ______	Curso 13/14
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ______ 2$^{\text{do}}$Apellido ______	4/2/14
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total:8 puntos.

Datos para todos los problemas (en los que sea necesario). Época: 4/2/2014 a las 00:00. $\text{GST}_0 = 20^{\text{o}}$ dicho día.

1. (**3 puntos**) La NASA desea lanzar una misión interplanetaria a Neptuno (♆). Para realizar un análisis preliminar de la misión, se supone que el lanzador deja la sonda en una órbita geocéntrica de aparcamiento a 200 km de altitud, contenida en el plano de la eclíptica, desde donde comienza la parte de la misión que se quiere diseñar. Puesto que una transferencia directa es muy costosa y lenta, se decide realizar una maniobra asistida por gravedad en Júpiter (♃). Para llegar a Júpiter, se aplica en la órbita de aparcamiento un impulso tangente de $\Delta V = 6{,}4$ km/s, de forma que la velocidad de exceso de la hipérbola resultante se sume, en el sistema de referencia heliocéntrico, a la de la Tierra en relación al Sol. ¿Es suficiente este ΔV para alcanzar Júpiter? En caso afirmativo y suponiendo que en Júpiter se realiza una maniobra asistida por gravedad con una aproximación a 8 radios jovianos, ¿alcanza finalmente la misión Neptuno? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, calcular el tiempo total de vuelo de la misión y encontrar cuales deberían ser los ángulo de configuración (ángulos de fase) tanto de Júpiter como de Neptuno en el lanzamiento.

   Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Los datos se pueden extraer de la siguiente tabla:

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Mercurio	☿	22032.1	2439.7	0.387098
Venus	♀	324858.8	6051.8	0.723327
Marte	♂	42828.3	3397	1.52372
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Saturno	♄	37939519.7	60268	9.58078
Urano	⛢	5780158.5	25559	19.2709
Neptuno	♆	6871307.8	24764	30.1927
Plutón	♇	1020.9	1195	39.3782

2. (**2.5 puntos**) Consideremos un satélite geosíncrono del que además se sabe que en la época $i = 0^{\text{o}}$, $\bar{\omega} = 15^{\text{o}}$, $\theta = 45^{\text{o}}$, $e = 0{,}15$. Dibujar su traza con la mayor precisión posible, marcando además en la traza la ubicación del perigeo y del apogeo.

3. (**2.5 puntos**) La NASA desea poner en órbita un satélite cartográfico que obtendrá fotos de Texas.

   Los requisitos son los siguientes:

   a) El satélite debe pasar **cada 5 o menos días** exactamente sobre Dallas (latitud 32,77°N, longitud 96,8°W), cruzando de Sur a Norte, y siempre lo hará a la misma hora solar media.
   b) En particular debe pasar por Dallas el 4 de Febrero de 2014.
   c) La órbita será circular y del tipo mediodía—medianoche (12:00—00:00).
   d) El satélite tendrá una altitud entre 370 y 400 kilómetros.

   ¿Qué tipo de órbita se va a emplear? ¿Cada cuántas revoluciones del satélite se repite la traza? Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época.

   ¿Cuál es la hora solar media cuando el satélite pasa por Dallas el 4 de Febrero de 2014?

   Pasados tres meses, ¿cuál es la hora solar media a su paso por Dallas?

   En la resolución del problema se debe tener en cuenta (cuando sea razonable hacerlo) la perturbación media del J2 (otras perturbaciones se pueden ignorar). El propagador medio J2 para una órbita circular viene dado por:

$$a = a_0,\ e = e_0,\ i = i_0,\ \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0),\ u = u_0 + (\dot{\omega} + \dot{M})(t - t_0),$$

   donde los valores de $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ y $\dot{M}$ vienen en el formulario.

Solución:

1. Calculando $V_{park} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_{park}}} = 7{,}78$ km/s, tenemos, llamando a la hipérbola de salida h2, $V_{park}^{h2} = V_{park} + 6{,}4\ \mathrm{km/s} = 14{,}18\ \mathrm{km/s}$. Calculemos a de la ecuación de las fuerzas vivas, obteniendo $a = -4982{,}3$ km, por lo que $V_{\infty}^{h2} = 8{,}945\ \mathrm{km/s} = 0{,}3003$ UV. Por tanto, llamando a la elipse heliocéntrica hasta Júpiter E1, $V_{E1}(L_{\oplus}) = 1{,}3003$ UV. De nuevo usando la ecuación de las fuerzas vivas llegamos a que $a_{E1} = 3{,}2341$ AU. Puesto que la Tierra es el perihelio de la órbita, $L_{\oplus} = a_{E1}(1-e_{E1})$, de donde $e_{E1} = 0{,}6908$. Dado que $r_{A_{E1}} = a_{E1}(1+e_{E1}) > L_{\jupiter}$, es viable llegar a Júpiter. A la llegada de Júpiter, obtenemos de la ecuación de la cónica $\theta_1^H = 167{,}75^o$, de la ecuación de las fuerzas vivas $V_1^H = 0{,}2742\ \mathrm{UV} = 8{,}166\ \mathrm{km/s}$ y de la ecuación del ángulo de trayectoria, $\gamma_1^H = 24{,}29^o$. Para encontrar el tiempo de vuelo hasta Júpiter, que luego nos será útil, hallamos de θ_1^H que $E_1^H = 2{,}65$ rad, luego $M_1^H = 2{,}32$ rad, hallando $T_1 = 13{,}51\ \mathrm{UT} = 785{,}56\ \mathrm{dias} = 2{,}15$ años.

   Para la maniobra asistida por gravedad necesitamos $V_{\jupiter} = 13{,}06$ km/s. Se tiene que $V_1^{\jupiter} = v_{\infty}$, siendo $V_1^{\jupiter}\angle\beta = V_1^H\angle\gamma_1^H - V_{\jupiter}\angle 0^o = 0{,}2196\angle 149{,}1^o$ km/s. De las fórmulas de la maniobra asistida por gravedad, $\Delta v = 10{,}54$ km/s y $\delta = 107{,}32^o$. Para obtener un ·ngulo de trayectoria positivo tomamos $V_2^{\jupiter}\angle\beta-\delta$, por tanto $V_2^H\angle\gamma_2^H = V_2^{\jupiter}\angle\beta-\delta + V_{\jupiter}\angle 0^o = 0{,}6196\angle 13{,}66^o$ UV.

   Para ver si se alcanza Neptuno calculemos en primer lugar a' y e' de la nueva órbita heliocéntrica tras la maniobra asistida por gravedad. Usando la ecuación de las fuerzas vivas con V_2^H, obtenemos $a' = 2705{,}4$ AU y usando la expresión $h = L_{\jupiter} V_2^H \cos\gamma_2^H = \sqrt{a'(1-e'^2)\mu_{\odot}}$, obtenemos $e = 0{,}9982$. Evidentemente $a'(1+e') > L_{\neptune}$ luego la sonda alcanza Neptuno.

   Para obtener el tiempo de vuelo del segmento Júpiter-Neptuno necesitamos calcular la anomalía verdadera a la salida de la maniobra asistida por gravedad, θ_2^H, y a la llegada a Neptuno, θ_3^H. Usando la ecuación de la nueva cónica obtenemos $\theta_2^H = 27{,}35^o$ y $\theta_3^H = 132{,}54^o$. Para el tiempo de vuelo calculamos $E_2^H = 0{,}0147$ rad y $E_3^H = 0{,}1369$ rad, luego $M_2^H = 2{,}72 \cdot 10^{-5}$ rad y $M_3^H = 6{,}75 \cdot 10^{-4}$ rad y $T_2 = \frac{M_3^H - M_2^H}{n'} = 91{,}23\ \mathrm{UT} = 5303\ \mathrm{dias} = 14{,}5$ años, por tanto el tiempo de vuelo total será $T_V = T_1 + T_2 = 16{,}7$ años.

   Para calcular el ángulo de configuración de Neptuno, tenemos en cuenta que el ángulo barrido por la sonda será $\theta_1^H + (\theta_3^H - \theta_2^H)$, y por tanto $\psi = \theta_1^H + (\theta_3^H - \theta_2^H) - n_{\neptune} T_v = 236{,}76^o$. Asimismo, el ángulo de configuración de Júpiter debe ser $\psi_{\jupiter} + n_{\jupiter} T_1 = \theta_1^H$, luego $\psi_{\jupiter} = 102{,}51^o$.

2. Sabemos que la forma de la traza será un segmento sobre el Ecuador, de forma que los extremos del segmento corresponden a los puntos donde la traza cambia de retrógrada a directa ($\dot{\lambda} = 0$) y el centro del segmento corresponde tanto a apogeo como perigeo. Calculando donde $\dot{\lambda} = 0$, y usando los datos del enunciado, obtenemos $\theta = \pm 96{,}48^o$. Para ir desde $\theta = 45^o$ (el valor en la época) hasta $\theta = 96{,}48^o$ se tarda (con leyes horarias) $t = 10844$ s. Por tanto, usando la ecuación para la traza de una órbita ecuatorial, $\bar{\omega} + \theta = \mathrm{GST}_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda$, calculamos $\lambda = 46^o$ para el primero de los extremos. Realizando el mismo cálculo para ir desde $\theta = 45^o$ hasta $\theta = -96{,}48^o = 263{,}52^o$, obtenemos $\lambda = 11{,}54^o$. Por tanto la traza es un segmento que cubre el intervalo $[11{,}54^o, 46^o]$, con perigeo y apogeo en $\lambda = 28{,}77^o$ (el punto medio).

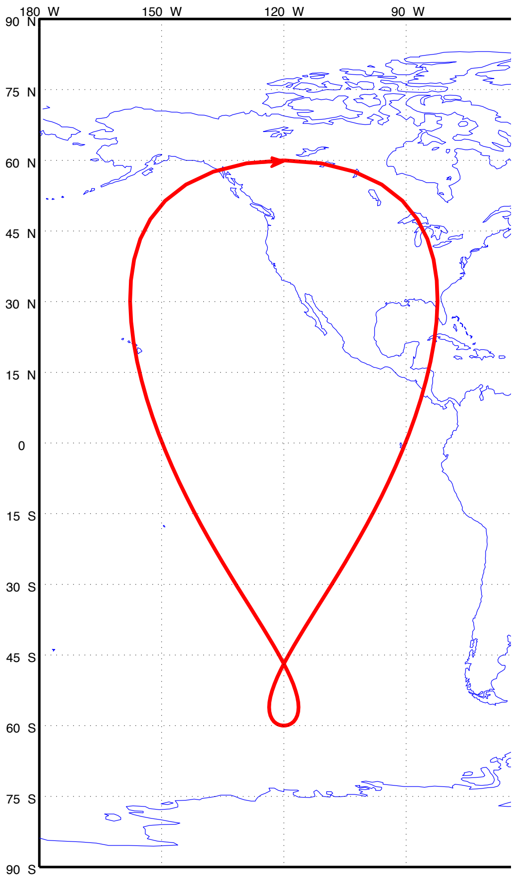
3. El problema es idéntico al del primer parcialito del curso 13/14 de Astronáutica. Los resultados numéricos son $T = \frac{5}{78} T_{\oplus}$, $a = 6753{,}5$ km, $e = 0$, $i = 96{,}94^o$. Sabiendo $\mathrm{HSM}_0 = 12$, se calcula $\lambda_u = 355{,}5067^o$ en Dallas y por tanto $\mathrm{HSM} = 11{,}7\ \mathrm{h} = 11:42:1{,}6$ en Dallas (esta hora solar media no se modifica al ser el satélite heliosíncrono y por tanto es la misma pasados tres meses). De donde el tiempo de paso por Dallas el 4 de Febrero es $t = 65378\ \mathrm{s} = 18:09:37{,}6$. En Dallas calculamos $u(t) = 33{,}0426^o$, propagando hasta la época $u(T_0) = 91{,}86^o$ (si se usa el propagador J2 sale $u(T_0) = 97{,}67^o$). Igualmente usando la ecuación de la traza $\Omega + \lambda_u = \mathrm{GST}_0 + \omega_{\oplus} t + \lambda$, obtenemos $\Omega(t) = 200{,}75^o$, si se usara el propagador J2 sale $\Omega(T_0) = 200^o$.

Astronáutica y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas 30 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI ______	Curso 13/14
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido ______ 2doApellido ______	27/1/14
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total:8 puntos.

Datos para todos los problemas (en los que sea necesario). Época: 27 de Enero de 2014 a las 00:00. $\mathrm{GST}_0 = 20^o$ dicho día.



1. (**1.5 puntos**) Determinar los elementos orbitales del satélite del cual se muestra la traza para una revolución, sabiendo que el punto de mayor latitud de la figura se sobrevoló el día 27 de Enero de 2014 a las 06:00, circulando en dirección Este, y esto sucedió justo cuatro horas después de cruzar el nodo ascendente y cuatro horas antes de cruzar el nodo descendente.

   Pista: Tratar de obtener la excentricidad usando la ecuación de Kepler, relacionando el tiempo con la anomalía media, deduciendo los valores de anomalía excéntrica que corresponden a uno de los nodos, y resolviendo numéricamente la ecuación resultante. Puede ser útil recordar la siguiente relación: $\cos\theta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$.

2. (**1.5 puntos**) Definir brevemente los siguientes conceptos:

   a) "Frozen orbit".
   b) Días Julianos.
   c) Periodo dracónico.
   d) Función de visibilidad.
   e) Periodo sinódico.

3. (**2 puntos**) Para una misión lunar, ¿Cuáles son los elementos a y e de la órbita selenocéntrica si el punto de llegada de la órbita geocéntrica a la esfera de influencia lunar tiene como datos $v = 1{,}2$ km/s, $\gamma = 45^o$, $\lambda = 5^o$? ¿Se trata de una órbita de impacto/alunizaje? Si es una órbita de impacto, ¿cuánto tardaría en hacerlo desde la entrada a la esfera de influencia lunar? En caso contrario, ¿cuánto tardaría en escapar de la esfera de influencia lunar?

4. (**3 puntos**) La agencia espacial rusa "Roskosmos" (РОСКОСМОС) recibe un encargo del gobierno de Nigeria para poner en órbita un satélite geoestacionario en la longitud $15^o E$. El lanzamiento se efectúa el 27 de Enero (UT). Elegir una base de lanzamiento entre las abajo señaladas, y para dicha base, azimut de lanzamiento.

Base	Latitud (^{o})	Longitud (^{o})	Azimut Mínimo (^{o})	Azimut Máximo (^{o})	Zona horaria
Baikonur (Tyuratam)	45.6	63.4	-20	90	UT+6
Plesetsk	62.8	40.6	-30	90	UT+3

Tras el lanzamiento se alcanza una órbita circular de aparcamiento a altitud 150 kilómetros, tal que se tiene que $\Omega = 62^o$ y que $u = 145^o$ 30 minutos después del lanzamiento (la inclinación es la obtenida del lanzamiento). Diseñar TODAS las maniobras necesarias para alcanzar la órbita deseada, empleando el menor combustible posible y tardando como máximo 1 día y medio a partir del lanzamiento, y calcular el combustible empleado suponiendo una masa seca de 500 kilogramos y un combustible con impulso específico 200 segundos. Indicar a qué hora UT se deberá realizar el propio lanzamiento, y cada maniobra, así como a la hora final a la que se llega a la órbita deseada.

Deducir finalmente si la cobertura geográfica del satélite (ya en su posición nominal) incluye a la propia base de lanzamiento en todo instante de tiempo.

Soluciones numéricas de los problemas:

1. Elementos orbitales: $a = a_{GEO} = 42164$ km (por ser una traza cerrada en una única revolución), $i = 60^{\text{o}}$, $\omega = 90^{\text{o}}$ (el perigeo está en el punto más alto), $\Omega = -99{,}75^{\text{o}}$ (de la fórmula de la traza), $e = 0{,}2634$ obtenido numéricamente de la ecuación $M = E - \cos E \operatorname{sen} E$ con $M = 1{,}05$ rad (correspondiente a 4 horas y para $\theta = 90^{\text{o}}$ se tiene $e = \cos E$), $E = 1{,}3042$ rad. $\theta(T_0) = 240{,}88^{\text{o}}$ (respuesta intermedia $\theta(T_1) = 0^{\text{o}}$, donde $T_1 = 06 : 00$ UT). Otra respuesta válida es $M(T_0) = -90{,}25^{\text{o}} = -1{,}5751$ rad (no requiere el cálculo numérico previo de e mientras que θ sí).

2. Cuestión de teoría.

3. Ánalogo a problemas del boletín del tema 4. Valores intermedios: $r_L = 318520$ km, $\beta = 1{,}0376^{\text{o}}$, $\delta = 5{,}5104^{\text{o}}$, $V_L^2 = 0{,}8472$ km/s. Valores de la cónica selenocéntrica: $a = -8606$ km, $e = 1{,}2989$, $r_p = 2572{,}3$ km luego no impacta. $\theta_0 = -134{,}5158^{\text{o}}$. Obtenemos $H(\theta = -134{,}5158^{\text{o}}) = 2{,}5882$, $N(H) = 6{,}004$, $\Delta T = 68465$ s y el tiempo de sobrevuelo es 136930 s $= 38{,}036$ horas.

4. Muy similar al examen del 14/12/12. Lanzamiento desde Baikonur con azimut 90º, luego $i_{PARK} = 45{,}6^{\text{o}}$. $t_{LANZ} = 16419$ s $= 4 : 33 : 39$. Por tanto los datos de la órbita de aparcamiento están dados 30 minutos despúes de este tiempo, es decir, en el instante $t_{PARK} = 5 : 03 : 39 = 18219$ s.

   Se realizará un Hohmann con cambio de plano en el segundo impulso, debe comenzar en alguno de los nodos de la órbita de aparcamiento. Los resultados de la transferencia son $a_H = 24346$ km, $\Delta V_1 = 2{,}4692$ km/s, $\Delta V_2 = 2{,}2668$ km/s, $T_H = 18903$ s.

   Para llegar justo a $\lambda = 15^{\text{o}}$, sería necesario comenzar en $\lambda^* = -86{,}0226^{\text{o}}$. El primer nodo (descendente) sucede en $t_1 = 18729$ s con una latitud de $\lambda = 143{,}75^{\text{o}}$. El siguiente nodo (ascendente) tiene $t = 21354$ s, $\lambda = -47{,}22^{\text{o}}$. El siguiente nodo descendente tiene $t = 23979$ s, $\lambda = 121{,}8157^{\text{o}}$. El siguiente nodo (ascendente) tiene $t = 26603$ s, $\lambda = -69{,}15^{\text{o}}$. El siguiente nodo descendente tiene $t = 29228$, $\lambda = 99{,}88^{\text{o}}$. El siguiente nodo (ascendente) tiene $t = 31852$ s; $\lambda = -91{,}082^{\text{o}}$. Elegimos este (han pasado dos órbitas y media desde el primer nodo ascendente), luego $t_2 = 31852$ s. Se realiza entonces la transferencia de Hohmann llegando en $t_3 = 50755$ s y a $\lambda = 9{,}94^{\text{o}}$.

   Se concluye con un phasing hacia $\lambda = 15^{\text{o}}$, puesto que se está en retraso, $T_{ph} = 84953$ s, $a_{ph} = 41768$ km, $\Delta V_{ph} = 0{,}0292$ km/s y $T_{final} = 135710$ s $= 13 : 41 : 48$ UT del día 28 de Enero, menos de un día y medio después del lanzamiento (para más detalle justo 1,38 días).

   La masa de combustible que se requiere desde la órbita de aparcamiento es $m_p = 5187$ kg.

   Para calcular la cobertura, vemos que $\Gamma = 81{,}3^{\text{o}}$. Calculando la distancia ortodrómica entre $(0^{\text{o}}, 15^{\text{o}})$ y las coordenadas de Baikonur obtenemos $\alpha = 62{,}32^{\text{o}}$ luego sí estará cubierta, al ser el satélite geoestacionario la cobertura con respecto a Tierra no cambia en el tiempo (en ausencia de perturbaciones).

Ingenieros Aeronáuticos	N^oDNI ______	Curso 13/14
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ______ 2^{do}Apellido ______	17/1/14
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**2º Parcial**

1. (**3 puntos**) Responder a las siguientes cuestiones de forma concisa:

   a) Describir la configuración geométrica y la estabilidad de los equilibrios del problema de los tres cuerpos circular restringido (puntos de Lagrange). ¿Cuál es la situación aproximada de los puntos cuando uno de los cuerpos es mucho más masivo que otro? ¿Cuál es la utilidad práctica de dichos puntos? Dar ejemplos de misiones reales (al menos dos) que usen o hayan usado dichos puntos.

   b) Describir brevemente las fuentes primarias del sistema de potencia de un satélite que se utilizan en la actualidad (convencionales). Para cada una de ellas, explicar sus ventajas, inconvenientes, y el tipo de misión para el que serían adecuadas.

   c) Responder a las siguientes tres preguntas:

      1) Enunciar la regla del eje mayor.
      2) ¿Qué es un CMG y cuál es su principio de funcionamiento?
      3) ¿Qué es un mecanismo yo-yo y para qué se usa?

2. (**7 puntos**) La NASA quiere lanzar una sonda interestelar para analizar el exterior del Sistema Solar. Para ello se plantean tres posibilidades, partiendo de una orbita de aparcamiento a 150 kilómetros:

   a) Una trayectoria que escape del Sistema Solar directamente desde la órbita de la Tierra.

   b) Realizar una transferencia "tipo Hohmann" hasta Júpiter (♃) y allí realizar una maniobra asistida por gravedad con un radio de perijovio lo suficientemente bajo como para que permita alcanzar el exterior del Sistema Solar (dicho radio se tendrá que calcular de forma que la velocidad resultante tras la maniobra asistida por gravedad justo permita el escape).

   c) Realizar un encuentro con Júpiter de forma que se realice con $\theta_1^H = 170^o$ y salida tangente de la Tierra. Calcular la cónica que cumple estas condiciones (pista: recordar $p = a(1-e^2) = a(1-e)(1+e)$). Calcular el radio de perijovio al que habría que hacer la maniobra asistida por gravedad de forma que justo se alcanzara el escape del Sistema Solar.

   Se pide calcular cuáles de las posibilidades son viables (para ser viables la maniobra asistida por gravedad ha de poder hacerse a una distancia de al menos 5 veces el radio de Júpiter ya que mayor proximidad superaría los límites de radiación permitidos), y para los escenarios que resulten viables, el costo en términos de ΔV a partir de la órbita de aparcamiento, el tiempo que se tardaría en escapar del Sistema Solar supuesto que uno escapa cuando alcance 90 AU (el límite de la heliosfera), y (en los casos en los que se emplea una maniobra asistida por gravedad) el ángulo de fase que debería tener Júpiter respecto a la Tierra en el lanzamiento.

   NOTA: Si no se puede encontrar el radio de perijovio para las posibilidades b y c, tomar como radio de perijovio 5 veces el radio de Júpiter y determinar si se escapa o no del Sistema Solar. Si no se puede hallar la cónica del apartado c tomar $a = 3{,}25$ AU.

Solución del problema: Para escapar del Sistema Solar sin que se disparen los costes, buscamos una trayectoria de escape parabólica. En el primer escenario será necesario que la velocidad heliocéntrica al salir de la Tierra sea justo la de escape, es decir, $\sqrt{2}V_\oplus$, y evidentemente siempre será viable. Por tanto, $v_\infty^\oplus = (\sqrt{2}-1)V_\oplus = 12{,}3372$ km/s y el impulso desde la órbita de aparcamiento sería $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + (v_\infty^\oplus)^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 8{,}7487$ km/s. La parábola resultante, puesto que tendría el perihelio en la Tierra, tendría $p = 2$ AU. Para calcular el tiempo que tarda en salir del Sistema Solar, tomamos $r = 90$ AU y calculamos $\theta = 167{,}9^{\text{o}}$. Usando leyes horarias de la parábola, obtenemos $T = 65{,}12$ años.

En el segundo escenario, calculamos en primer lugar $a = \frac{L_\oplus + L_♃}{2} = 3{,}1016$ AU. La llegada a Júpiter es tangente al ser tipo Hohmann. La velocidad al llegar será $V_1^H = 0{,}2489$ UV, y obtenemos $v_\infty = V_1^♃ = V_♃ - V_1^H = 0{,}1895$ UV $= 5{,}6432$ km/s. Como necesitamos que la velocidad a la salida sea la de escape, fijamos $V_2^H = \sqrt{2}V_♃ = 0{,}62$ UV. Calculamos el $\alpha = \delta$ que sería necesario como $\alpha = \arccos\left(\frac{V_♃^2 + v_\infty^2 - (V_2^H)^2}{2v_\infty V_♃}\right) = 160{,}1873^{\text{o}}$. Por otro lado como

$$\Delta V = 2v_\infty \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} = \frac{2v_\infty}{1 + r_p \frac{v_\infty^2}{\mu_♃}}$$

despejamos

$$r_p = \frac{\mu_♃}{v_\infty^2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}} - 1\right) = 60222 \text{ km}$$

que es incluso inferior al radio de Júpiter. Por tanto no hay ninguna maniobra viable para obtener la velocidad de escape en este escenario. Otra opción para verificar que el escenario no es viable sería tomar $r_p = 5R_♃$ (es decir el límite) y comprobar que la V_2^H resultante es tal que $V_2^H < \sqrt{2}V_♃$. Rehaciendo los calculos se obtiene $V_2^H = 0{,}5845$ UV que efectivamente es menor que $\sqrt{2}V_♃ = 0{,}62$ UV.

En el tercer escenario en primer lugar necesitamos calcular la cónica inicial. Los datos son que en el corte con Júpiter $\theta_1^H = 170^{\text{o}}$, es decir, $L_♃ = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_1^H}$ y que la tierra está en el perihelio (salida tangente), es decir, $L_\oplus = a(1-e)$. Combinando las dos ecuaciones obtenemos

$$L_♃ = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_1^H} = \frac{L_\oplus(1+e)}{1+e\cos\theta_1^H} \quad \rightarrow \quad e = \frac{L_♃ - L_\oplus}{L_\oplus - L_♃\cos\theta_1^H} = 0{,}6863$$

Despejando a obtenemos $a = 3{,}1881$ AU. Por otro lado, las condiciones a la llegada a Júpiter serían $V_1^H = 0{,}2659$ UV y $\gamma_1^H = 20{,}1905^{\text{o}}$. Luego $v_1^♃ = \sqrt{V_♃^2 + (v_1^H)^2 - 2v_1^H V_♃ \cos\gamma_1^H} = 0{,}2099$ UV $= 6{,}2513$ UV. Calculamos también $\beta = 25{,}92^{\text{o}}$. Igual que en el anterior escenario, como necesitamos que la velocidad a la salida sea la de escape, fijamos $V_2^H = \sqrt{2}V_♃ = 0{,}62$ UV. Calculamos el α que sería necesario como $\alpha = \arccos\left(\frac{V_♃^2 + v_\infty^2 - (V_2^H)^2}{2v_\infty V_♃}\right) = 143{,}57^{\text{o}}$. Por tanto $\delta = \alpha - \beta = 117{,}6515^{\text{o}}$. Como antes, obtenemos $r_p = 546940$ km $= 7{,}65R_♃$, luego se tratará de una maniobra válida. Para calcular el impulso inicial, a la salida de la Tierra $v_\infty^\oplus = V_0^H - V_\oplus = 0{,}2986$ UV $= 8{,}8934$ km/s, luego el impulso en la órbita de aparcamiento sería $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + (v_\infty^\oplus)^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 6{,}3709$ km/s.

Para concluir la fase de la maniobra, calculamos $\gamma_2^H = 11{,}5997^{\text{o}}$. Como para una parábola se cumple $\gamma = \frac{\theta}{2}$, tendremos que $\theta_2^H = 23{,}2^{\text{o}}$ y $p = L_♃(1+\cos\theta_2^H) = 9{,}9859$ AU. El corte con $r = 90$ AU será con $\theta_3^H = 152{,}7536^{\text{o}}$.

Para calcular los tiempos, en primer lugar calculamos el tiempo transcurrido hasta el encuentro con Júpiter. Entre $\theta_0^H = 0^{\text{o}}$ y $\theta_1^H = 170^{\text{o}}$ en la primera cónica del tercer escenario transcurre $T_{31} = \Delta T(170^{\text{o}}) = 14{,}0825$ UT. Entre θ_2^H y θ_3^H en la segunda cónica del tercer escenario, usando las leyes horarias de la parábola, transcurre $T_{32} = \Delta T(\theta_3^H) - \Delta T(\theta_2^H) = 431{,}286$ UT. Sumando ambas, obtenemos $T_3 = T_{31} + T_{32} = 445{,}3685$ UT $= 70{,}9$ años. Finalmente, el ángulo de fase de Júpiter para poder realizar la maniobra será $\psi = 170^{\text{o}} - n_♃ T_{31} = 102{,}0196^{\text{o}}$.

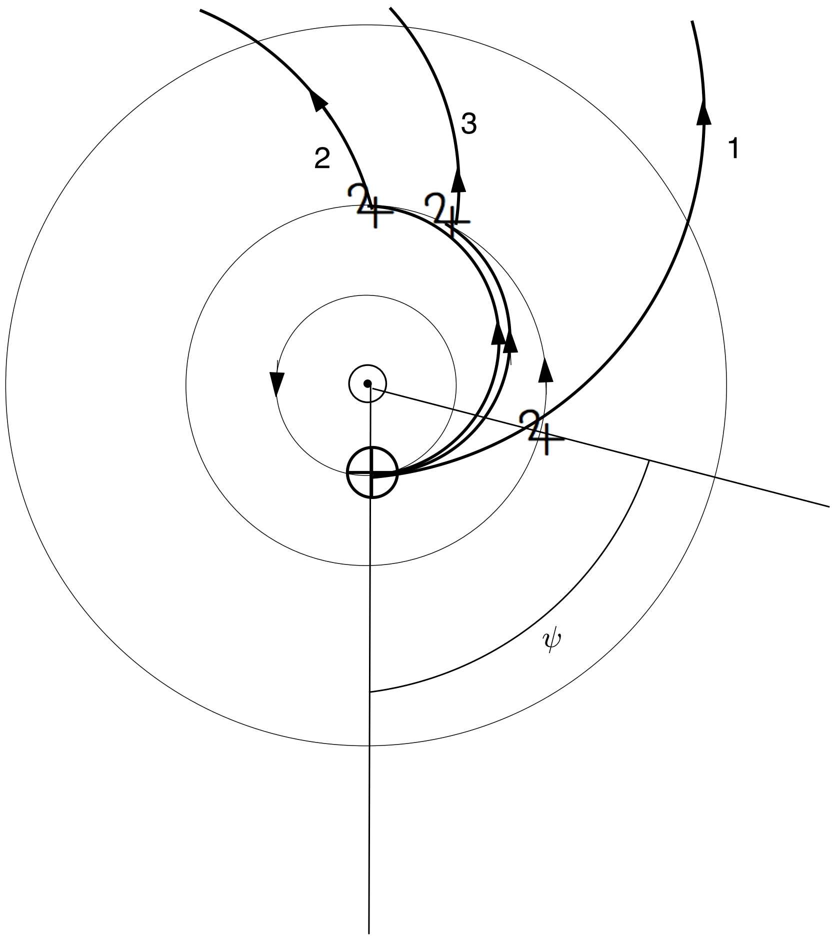


Figura 1: Trayectorias heliocéntricas de los diferentes escenarios (hipotéticas: en realidad el escenario 2 no consigue escapar) y definición del ángulo de fase ψ.

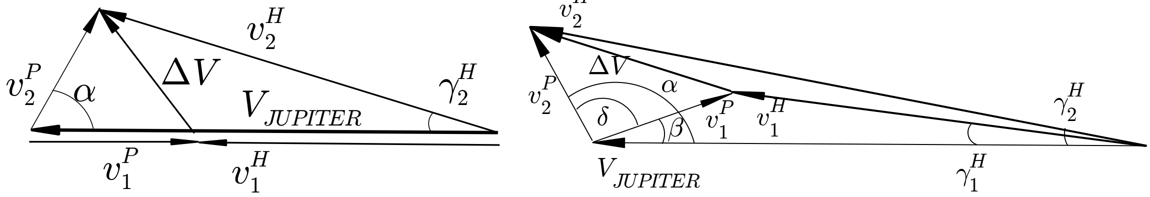


Figura 2: Triángulos de velocidades para los escenarios 2 y 3, respectivamente.

Astronáutica y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas 15 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	N^oDNI __________	Curso 11/12
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido __________ 2^{do}Apellido __________	17/1/14
Universidad de Sevilla	Nombre __________	**2º "Parcialito"**

Valor total:10 puntos.

La NASA decide diseñar una misión interplanetaria para visitar Neptuno (♆). Para ello se pide comparar tres posibles escenarios, todos los cuales tienen una salida tangente de la órbita de la Tierra:

1. Viaje directo a Neptuno mediante una trayectoria tipo Hohmann.
2. Viaje a Saturno (♄) mediante una trayectoria tipo Hohmann, se realiza una maniobra asistida por gravedad (a una altitud de 7 veces el radio de Saturno) y se continúa hacia Neptuno.
3. Viaje a Júpiter (♃) mediante una trayectoria que interseca la órbita de Júpiter con $\theta = 170^o$ (pista: recordar $p = a(1-e^2) = a(1+e)(1-e)$), se realiza una maniobra asistida por gravedad (a una altitud de 9 veces el radio de Júpiter), se continúa hasta Saturno, se realiza otra maniobra asistida por gravedad (a una altitud de 7 veces el radio de Saturno) y finalmente se continúa hacia Neptuno.

Nota: Si no se puede hallar la cónica inicial entre la Tierra y Júpiter del apartado c, tomar $a = 3{,}25$ AU.

En todos los escenarios se supondrá que los planetas por los que se pasa están en el sitio adecuado (el primer cruce de la sonda con la órbita de los planetas en torno al Sol).

Suponiendo que se parte de una órbita geocéntrica de aparcamiento a 150 kilómetros de altitud, calcular para los tres casos si el escenario es viable (es decir si se puede llegar a Neptuno por dicho procedimiento), el ΔV empleado, el tiempo total de vuelo y el ángulo de fase que debe tener Neptuno el día del lanzamiento. Calcular también para cada escenario el ΔV adicional que sería necesario para dejar la sonda interplanetaria en una órbita circular en torno a Neptuno con un radio igual a 10 veces el radio del planeta (denotado como ΔV_{circ}). Rellenar con los resultados la siguiente tabla:

Escenario	¿Viable o no viable?	ΔV (km/s)	T_{vuelo} (años)	ψ (^{o})	ΔV_{circ}(km/s)
1	SÍ	8.2481	30.8	113.17º	3.2107
2	NO				
3	SÍ	6.3709	13.53	270.93º	9.5422

Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Los datos se pueden extraer de la siguiente tabla:

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Mercurio	☿	22032.1	2439.7	0.387098
Venus	♀	324858.8	6051.8	0.723327
Marte	♂	42828.3	3397	1.52372
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Saturno	♄	37939519.7	60268	9.58078
Urano	♅	5780158.5	25559	19.2709
Neptuno	♆	6871307.8	24764	30.1927
Plutón	♇	1020.9	1195	39.3782

Instrucciones: Se debe entregar esta hoja con los resultados numéricos y adjuntar los cálculos realizados y todos los triángulos de velocidades que se hayan empleados.

Solución:

El primer escenario, al ser tipo Hohmann, es seguro viable. Se emplea una $a_1 = \frac{L_\oplus + L_\neptune}{2} = 15{,}5963$ AU. El tiempo hasta el encuentro será $T_1 = \pi\sqrt{\frac{a_1^3}{\mu_\odot}} = 193{,}5015$ UT $= 30{,}8$ años. El ángulo de fase será $\psi = 180^{\text{o}} - n_\neptune T_1 = 113{,}17^{\text{o}}$. Por otro lado a la salida de la Tierra $v_\infty^\oplus = V_0^H - V_\oplus = 0{,}3914$ UV $= 11{,}6565$ km/s donde V_0^H es la velocidad de la órbita de transferencia justo a la salida de la Tierra en el sistema de referencia heliocéntrico, luego el impulso en la órbita de aparcamiento sería $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + (v_\infty^\oplus)^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 8{,}2481$ km/s. De forma similar a la llegada a Neptuno, al ser tangente, $v_\infty^\neptune = V_\neptune - V_1^H = 0{,}1359$ UV $= 4{,}048$ km/s, luego el impulso para circularizar la órbita eligiendo $r_p = 10R_\neptune$ sería $\Delta V_{circ} = \sqrt{\frac{2\mu_\neptune}{r_p} + (v_\infty^\neptune)^2} - \sqrt{\frac{\mu_\neptune}{r_p}} = 3{,}2107$ km/s.

Para el segundo escenario se tiene una trayectoria tipo Hohmann hasta saturno. Luego $a_2 = \frac{L_\oplus + L_\saturn}{2} = 5{,}2904$ AU. Al ser llegada tangente en el encuentro $v_1^\saturn = v_\infty^\saturn = V_\saturn - V_1^H = 0{,}1826$ UV $= 5{,}4390$ km/s. Con los datos de la maniobra, $\Delta V = 7{,}9059$ km/s y $\delta = 93{,}233^{\text{o}}$. Para este triángulo $\alpha = \delta$, por lo que obtenemos $V_2^H = \sqrt{V_\saturn^2 + (v_\infty^\saturn)^2 - 2v_\infty^\saturn V_\saturn \cos\alpha} = 0{,}38$ UV, y del teorema del seno $\gamma_2^H = 28{,}6743^{\text{o}}$. Por lo que calculando la cónica correspondiente $a_{21} = 15{,}5341$ AU, $e_{21} = 0{,}5859$, cuyo radio de afelio es $r_a = 24{,}6358$ AU $< L_\neptune$, por lo que no puede llegar a Neptuno y por tanto el escenario no es viable.

Para el tercer escenario en primer lugar necesitamos calcular la cónica inicial. Los datos son que en el corte con Júpiter $\theta_1^H = 170^{\text{o}}$, es decir, $L_\jupiter = \frac{a_3(1-e_3^2)}{1+e_3\cos\theta_1^H}$ y que la tierra está en el perihelio (salida tangente), es decir, $L_\oplus = a_3(1-e_3)$. Combinando las dos ecuaciones obtenemos

$$L_\jupiter = \frac{a_3(1-e_3^2)}{1+e_3\cos\theta_1^H} = \frac{L_\oplus(1+e_3)}{1+e_3\cos\theta_1^H} \quad \to \quad e_3 = \frac{L_\jupiter - L_\oplus}{L_\oplus - L_\jupiter\cos\theta_1^H} = 0{,}6863$$

Despejando a_3 obtenemos $a_3 = 3{,}1881$ AU. Para calcular el impulso inicial, a la salida de la Tierra $v_\infty^\oplus = V_0^H - V_\oplus = 0{,}2986$ UV $= 8{,}8934$ km/s, luego el impulso en la órbita de aparcamiento sería $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + (v_\infty^\oplus)^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 6{,}3709$ km/s.

Por otro lado, las condiciones a la llegada a Júpiter serían $V_1^H = 0{,}2659$ UV y $\gamma_1^H = 20{,}1905^{\text{o}}$. Luego $v_1^\jupiter = \sqrt{V_\jupiter^2 + (v_1^H)^2 - 2v_1^H V_\jupiter \cos\gamma_1^H} = 0{,}2099$ UV $= 6{,}2513$ UV. Con los datos de la maniobra, $\Delta V = 10{,}2485$ km/s y $\delta = 110{,}02^{\text{o}}$. Calculando $\beta = 25{,}92^{\text{o}}$, obtenemos $\alpha = \beta + \delta = 135{,}95^{\text{o}}$. Por tanto $V_2^H = \sqrt{V_\jupiter^2 + (v_\infty^\jupiter)^2 - 2v_\infty^\jupiter V_\jupiter \cos\alpha} = 0{,}6071$ UV, y del teorema del seno $\gamma_2^H = 13{,}9142^{\text{o}}$. La cónica resultante tiene $a_{31} = 63{,}2$ AU y $e_{31} = 0{,}9226$, por lo que a la salida de Júpiter $\theta_2^H = 29{,}0219^{\text{o}}$.

No es necesario calcular el radio de afelio para ver si llega o no a Saturno ya que $a_{31} > L_\saturn$. Las condiciones a la llegada a Saturno serán $\theta_3^H = 91{,}1640^{\text{o}}$, $V_3^H = 0{,}4392$ UV y $\gamma_3^H = 43{,}2303^{\text{o}}$. Luego $v_3^\saturn = \sqrt{V_\saturn^2 + (v_3^H)^2 - 2v_3^H V_\saturn \cos\gamma_3^H} = 0{,}3009$ UV $= 8{,}9611$ km/s. Con los datos de la maniobra, $\Delta V = 8{,}8702$ km/s y $\delta = 59{,}3302^{\text{o}}$. Calculando $\beta = 89{,}4207^{\text{o}}$. Obtenemos $\alpha = \beta + \delta = 148{,}7509^{\text{o}}$. Por tanto $V_4^H = 0{,}6009$ UV, y del teorema del seno $\gamma_4^H = 15{,}0542^{\text{o}}$. La cónica resultante tiene $a_{32} = -6{,}5643$ AU y $e_{31} = 2{,}3893$, es decir, una hipérbola, y a la salida de Saturno obtenemos $\theta_4^H = 21{,}295^{\text{o}}$. Al ser una hipérbola, evidentemente llega a Neptuno, por lo que el escenario es viable.

Las condiciones a la llegada a Neptuno serán $\theta_5^H = 89{,}431^{\text{o}}$, $V_5^H = 0{,}4675$ UV y $\gamma_5^H = 66{,}8055^{\text{o}}$. A la llegada a Neptuno, obtenemos $v_\infty^\neptune = \sqrt{V_\neptune^2 + (v_5^H)^2 - 2v_5^H V_\neptune \cos\gamma_5^H} = 0{,}4297$ UV $= 12{,}7998$ km/s, luego el impulso para circularizar la órbita eligiendo $r_p = 10R_\neptune$ sería $\Delta V_{circ} = \sqrt{\frac{2\mu_\neptune}{r_p} + (v_\infty^\neptune)^2} - \sqrt{\frac{\mu_\neptune}{r_p}} = 9{,}5422$ km/s (es muy grande porque la trayectoria viene con mucha energía, por ellos sería muy difícil frenarla).

Para calcular los tiempos usemos las leyes horarias. Entre $\theta_0^H = 0^{\text{o}}$ y $\theta_1^H = 170^{\text{o}}$ en la primera cónica del tercer escenario transcurre $T_{31} = \Delta T(170^{\text{o}}) = 14{,}0825$ UT. Entre θ_2^H y θ_3^H en la segunda cónica del tercer escenario transcurre $T_{32} = \Delta T(\theta_3^H) - \Delta T(\theta_2^H) = 16{,}6278$ UT. Finalmente, usando las leyes horarias de la hipérbola, entre θ_4^H y θ_5^H en la segunda cónica del tercer escenario transcurre $T_{33} = \Delta T(\theta_5^H) - \Delta T(\theta_4^H) = 54{,}2661$ UT. Luego $T_3 = T_{31} + T_{32} + T_{33} = 84{,}9764$ UT $= 13{,}5247$ años. Para concluir, el ángulo de fase será $\psi = \theta_1^H + \theta_3^H - \theta_2^H + \theta_5^H - \theta_4^H - n_\neptune T_3 = 270{,}9308^{\text{o}}$

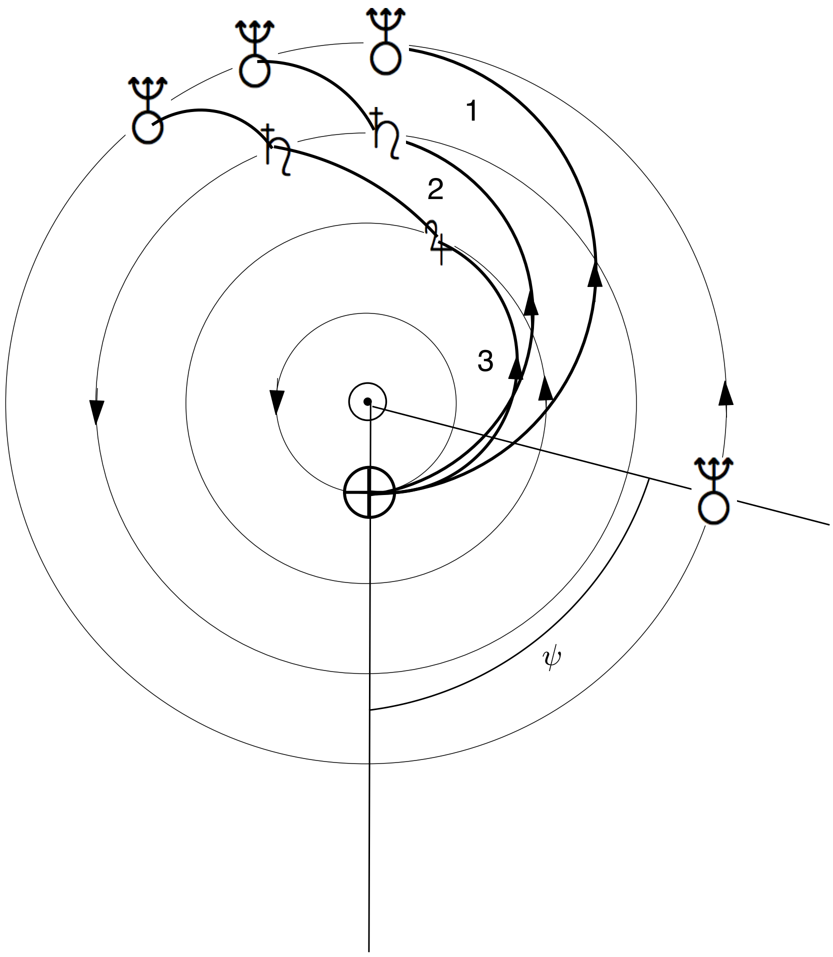


Figura 1: Trayectorias heliocéntricas de los diferentes escenarios (hipotéticas: en realidad el escenario 2 no alcanza Neptuno) y definición del ángulo de fase ψ.

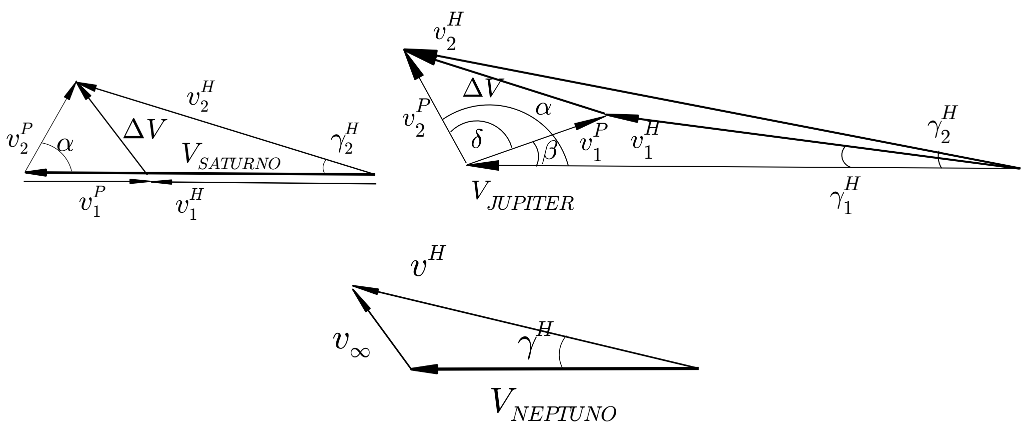


Figura 2: Triángulos de velocidades para los escenario 1 y 3. Arriba-izquierda: maniobra asistida por gravedad en Saturno para el escenario 1. Arriba-derecha: maniobra asistida por gravedad en Júpiter para el escenario 3 (la maniobra en Saturno es análoga aunque con diferentes ángulos). Abajo: llegada a Neptuno genérica para todos los escenarios (en el escenario 1 el triángulo colapsa a una línea puesto que $\gamma^H = 0^o$).

Astronáutica y Vehículos Espaciales **Duración**: 1 hora 45 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	N$^{\text{o}}$DNI ______	Curso 12/13
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ______ 2$^{\text{do}}$Apellido ______	9/7/13
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Valor total:7 puntos.

1. (**2 puntos**) Se observa un satélite sobrevolando un punto de la Tierra con coordenadas 30^oS, 60^oO, observándose además en dicho punto que su velocidad es $v = 7{,}67$ km/s, su altitud 500 km y su ángulo de trayectoria $\gamma = -2{,}75^{\text{o}}$. El sobrevuelo sucede con el satélite cruzando de Norte a Sur. Transcurrida 1 hora, ¿incluye la cobertura geográfica del satélite la ciudad de Singapur ($\phi = 1^{\text{o}}18'$N, $\lambda = 103^{\text{o}}51'$E)? Como datos adicionales se sabe que la traza del satélite circula siempre hacia el Este, y que el punto de mínima latitud que sobrevuela el satélite a lo largo de su órbita tiene como latitud $\phi = 60^{\text{o}}$S.

   Nota: Obsérvese que sólo se pide la respuesta (justificada) a la pregunta de si la cobertura incluye o no a Singapur. Se recomienda no perder tiempo con cálculos intermedios más allá de los imprescindibles. Una vez sea posible comprobar la cobertura no es necesario realizar más cálculos.

2. (**2.5 puntos**) Un cometa viaja en una órbita que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con el elemento orbital $p = 10$ AU. El cometa, **antes** de llegar a su perihelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\text{km}^3/\text{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2$ AU, $R_{♃} = 71492$ km), pasando a una **distancia** de 6 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar. Hallar la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y calcular si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra, y en caso afirmativo y suponiendo que la Tierra se encontrara en el lugar apropiado, cuánto tardaría el cometa en llegar desde el encuentro con Júpiter.

   Recordatorio: Para una parábola se cumple que $\gamma = \frac{\theta}{2}$. No obstante para poder aplicar esta fórmula correctamente es necesario escribir $\theta \in [-180^{\text{o}}, 180^{\text{o}}]$.

3. (**2.5 puntos**) Sea la época T_0 del día 28 de Junio a las 00:00. Se sabe que $\text{GST}(T_0) = 120^{\text{o}}$. Se considera un satélite geosíncrono ecuatorial (de órbita directa) con excentricidad $e = 0{,}05$ y del que se conoce que el punto más alejado hacia el Este que sobrevuela tiene como longitud $\lambda = 45^o$O (obviamente sobre el Ecuador). Además, sobrevoló dicho punto justo en la época. Encontrar justificadamente los elementos orbitales restantes del satélite y dibujar la traza del satélite con la mayor precisión posible. ¿Cuál será el punto más alejado hacia el Oeste que sobrevolará el satélite el día 28 de Junio y a qué hora lo hará?

   Nota: Recordar que para una órbita ecuatorial no todos los elementos orbitales están bien definidos, y que no se puede plantear el triángulo esférico habitual para la traza. Se recomienda deducir una ecuación para la longitud sobre la que se encuentra el satélite relacionando los ángulos (sobre el Ecuador) entre el primer punto de Aries, el meridiano de Greenwich, el perigeo del satélite, y la posición actual del satélite.

Observaciones:
-Se debe entregar esta hoja con los resultados numéricos, los diagramas o dibujos que se hayan hecho, y los cálculos realizados.
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-No es necesario considerar perturbaciones cuando se propaguen las órbitas.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas (que deberán ser definidas, expresando el resultado final en unidades físicas).

Solución:

1. Llamemos t_0 al instante en el que los datos vienen dados. En primer lugar a partir de la velocidad, altitud y ángulo de trayectoria en t_0 obtenemos los siguientes valores:

$$r = R_\oplus + h = 6878{,}14 \text{ km}, \quad \epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_\oplus}{r} = -28{,}53 \text{ km}^2/\text{s}^2, \quad h = rv\cos\gamma = 52695 \text{ km}^2/\text{s}.$$

A partir de dichos datos resolvemos los elementos orbitales a, e y $\theta(t_0)$:

$$a = -\frac{\mu_\oplus}{2\epsilon} = 6983{,}8 \text{ km}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu_\oplus a}} = 0{,}05, \quad \theta(t_0) = -\arccos\left(\frac{\frac{a(1-e^2)}{r} - 1}{e}\right) = -75{,}26^{\text{o}}.$$

Obsérvese que se ha escogido la solución negativa del arcocoseno debido a que el ángulo de trayectoria es negativo, lo que implica $\theta \in [180^{\text{o}}, 360^{\text{o}}]$.

Por otro lado del enunciado se obtiene $i = 60^{\text{o}}$ (ya que el punto de mínima latitud es 60ºS y además es directa al circular siempre hacia el Este).

Llamemos $t_1 = t_0 + 3600$. Necesitamos obtener la posición del satélite en dicho instante conocida su posición en t_0. En primer lugar, usando el triángulo esférico habitual, sabemos que $\operatorname{sen}\phi(t) = \operatorname{sen}u(t)\operatorname{sen}i$. Por lo que $u(t_0) = 215{,}27^{\text{o}}$ (es necesario coger la solución del arcoseno entre 90º y 270º ya que el sobrevuelo es de Norte a Sur). Para obtener la posición en t_1 tenemos que propagar, en primer lugar, θ, mediante las leyes horarias. Para ello en primer lugar tenemos que obtener que el tiempo desde el perigeo correspondiente a $\theta(t_0)$. Obtenemos $E(t_0) = 5{,}02$ rad, $M(t_0) = 5{,}07$ rad y como $n = 0{,}0011$ rad/s obtenemos $\Delta t(t_0) = 4683{,}1$ s. Sumando una hora $\Delta t(t_1) = 8283{,}1$ s, pero este valor es superior al periodo de la órbita $T = 5808{,}4$ s, por lo que restamos un periodo, llegando a $\Delta t(t_1) = 2474{,}8$ s. Por lo que $M(t_1) = 2{,}67$ rad. Resolviendo númericamente la ecuación de Kepler $E(t_1) = 2{,}7$ rad, y obtenemos $\theta(t_1) = 155{,}83^{\text{o}}$. De la ecuación de la cónica $r = 7301{,}3$ km. Eso quiere decir que el radio de la circunferencia esférica de cobertura geográfica será $\Gamma = 29{,}12^{\text{o}}$. Por otro lado, de las siguientes dos ecuaciones:

$$u(t_0) = \omega + \theta(t_0), \quad u(t_1) = \omega + \theta(t_1),$$

obtenemos, eliminando ω, $u(t_1) = u(t_0) + \theta(t_1) - \theta(t_0) = 86{,}36^{\text{o}}$ (también es posible encontrar ω, pero no lo piden en el enunciado). De donde $\phi(t_1) = \arcsin(\operatorname{sen}u(t)\operatorname{sen}i) = 59{,}8^{\text{o}}$N. Por tanto, sin hacer más cálculos, ya podemos concluir que la cobertura geográfica del satélite no puede incluir a Singapur (tenga la longitud que tenga el satélite), ya que $\phi(t_1) - \Gamma > \phi_{\text{SINGAPUR}}$.

2. Usando las ecuaciones correspondientes a una parábola, obtenemos que en el encuentro con Júpiter el cometa tiene $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_{♃}}} = 0{,}62$ UV, $\theta_1^H = -22{,}8^{\text{o}}$, y $\gamma_1^H = -11{,}4^{\text{o}}$. Como $V_{♃} = 0{,}4384$ UV, calculamos $V_1^{♃}\angle\beta$, $V_1^{♃}\angle\beta = V_1^H\angle\gamma_1^H - V_{♃}\angle 0^o = 0{,}209\angle{-35{,}89^o}$ km/s.

Para la "maniobra" asistida por gravedad, obtenemos $\Delta V = 11$ km/s, $\delta = 124{,}25^{\text{o}}$. Elegimos la maniobra que frena al cometa, $V_2^{♃}\angle\beta - \delta$. Por tanto, $V_2^H\angle\gamma_2^H = V_2^{♃}\angle\beta - \delta + V_{♃}\angle 0^o = 0{,}252\angle{-16{,}36^o}$ UV. De estos valores obtenemos la órbita tras la "maniobra": $a = 3{,}12$ UA, $e = 0{,}7016$. El perihelio de esta elipse es $r_p = a(1-e) = 0{,}93$ AU $< R_\oplus$, por lo que podría haber un encuentro con la Tierra. Para calcular el tiempo hasta el encuentro, calculamos a la salida de Júpiter $\theta_2^H = 187{,}31^{\text{o}}$ y en el encuentro con la Tierra, $\theta_3^H = 326{,}15^{\text{o}}$ (la otra solución también sería correcta). Resolviendo las leyes horarias, se obtiene $\Delta t_2 = 20{,}1$ UT y $\Delta t_3 = 34{,}13$ UT, por lo que $T = \Delta t_3 - \Delta t_2 = 14{,}04$ UT $= 2{,}23$ años.

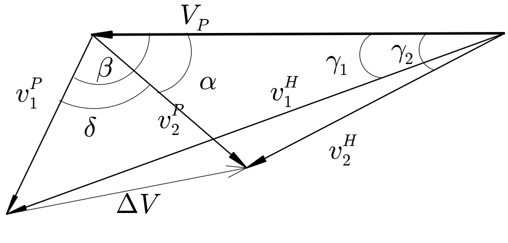


Figura 1: Triángulos del problema 2.

3. Llamemos $t_0 = 0$ a la época. Al ser un satélite ecuatorial y con excentricidad no nula, hay que usar el elemento orbital $\bar{\omega}$ que indica el ángulo entre Υ y el perigeo. Se tendrá la siguiente ecuación:

$$\bar{\omega} + \theta(t) = \text{GST}_0 + \omega_\oplus t + \lambda(t).$$

Por otro lado sabemos que la traza de un satélite geosíncrono con cierta excentricidad es una franja en el Ecuador. Sabemos por el enunciado que el punto más hacia el Este de dicha franja es 45ºO y tenemos que hallar el punto más hacia el Oeste para resolver el problema. Del formulario:

$$\dot{\lambda} = -\omega_{\oplus} + \dot{\theta} = \omega_{\oplus} \left(-1 + \frac{(1 + e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \right)$$

donde se ha usado $i = \phi = 0^{\mathrm{o}}$, y $n = \omega_{\oplus}$ al ser geosíncrono. En los puntos extremos $\dot{\lambda} = 0$. Por tanto

$$\theta = \arccos\left(\frac{(1-e^2)^{3/4} - 1}{e} \right) = \pm 92{,}15^{\mathrm{o}}.$$

De estas dos soluciones, una debe corresponder al punto más al Oeste y otra al punto más al Este. Para saber cuál es cuál, podemos tomar la segunda derivada (siguiendo el problema 17 del tema 2) y buscar el mínimo y el máximo:

$$\ddot{\lambda} = \ddot{\theta} = -2\dot{\theta}^2 \tan\gamma$$

donde se ve que para $\theta = 92{,}15^{\mathrm{o}}$ hay un máximo (ya que γ será positiva y por tanto $\ddot{\lambda} < 0$), o bien usar un razonamiento físico: entre -92.15º y +92.15º se pasa por el perigeo que es la zona más "rápida" de la órbita, por tanto en esa zona el movimiento será directo (hacia el Este), y por tanto el punto más al Este corresponde a $\theta_0 = 92{,}15^{\mathrm{o}}$ y el punto más al Este a $\theta_1 = -92{,}15^{\mathrm{o}}$. Para terminar de resolver el problema, en primer lugar sustituimos la primera solución en la ecuación que hemos planteado, sabiendo que $\theta(t_0) = \theta_0 = 92{,}15^{\mathrm{o}}$. Obtenemos

$$\bar{\omega} = \mathrm{GST}_0 + \lambda(t_0) - \theta(t_0) = -17{,}15^{\mathrm{o}}$$

Por otro lado, llamando t_1 al tiempo de paso por θ_1, calculamos usando leyes horarias que $E_0 = 1{,}56$ rad, $E_1 = 4{,}73$ rad, $M_0 = 1{,}51$ rad, $M_1 = 4{,}78$ rad y por tanto $\Delta t_0 = 20684$ s, $\Delta t_1 = 65480$ s, y finalmente $t_1 = \Delta t_1 - \Delta t_0 = 44796$ s (se pude calcular algo más rápido usando la simetría de la cónica respecto al apogeo), con lo que podemos ya decir que el punto más alejado al Oeste se alcanza en $t = 44796$ s $= 12:26:36$ UT. Por lo que

$$\lambda(t_1) = \bar{\omega} + \theta(t_1) - \mathrm{GST}_0 - \omega_{\oplus} t_1 = -56{,}46^{\mathrm{o}}$$

Por tanto la traza es una franja sobre el Ecuador entre las longitudes 45ºO y 56.46ºO. Recordemos que en clase se había resuelto un problema similar de forma teórica para e pequeño, llegando a la conclusión de que la franja tenía una anchura de $4e$ radianes. Comprobamos que $4e = 0{,}2$ rad $= 11{,}459^{\mathrm{o}}$, un resultado muy cercano al obtenido!

Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI ______	Curso 12/13
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ______ 2^{do}Apellido ______	18/1/13
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Segundo Parcial**

Valor total:10 puntos.

La NASA decide diseñar una misión interplanetaria para visitar Júpiter (♃). Para ello se pide comparar tres posibles escenarios:

1. Viaje directo a Júpiter mediante una trayectoria elíptica con perihelio en la Tierra y $e = 0{,}7$, de forma que la llegada a la órbita de Júpiter sucede después del perihelio y antes del afelio.
2. Viaje a Júpiter mediante una trayectoria parabólica (estando situado el perihelio de la parábola en la órbita de la Tierra).
3. Viaje a Venus (♀) mediante una trayectoria parabólica (estando situado el perihelio de la parábola en la órbita de Venus), se realiza una maniobra asistida por gravedad (a una altitud de 2 veces el radio de Venus) y se continúa hacia Júpiter. (Observación: La salida de la Tierra no es tangente).

Suponiendo que se parte de una órbita geocéntrica de aparcamiento a 150 kilómetros de altitud, calcular para los tres casos si el escenario es viable (es decir si se puede llegar a Júpiter por dicho procedimiento), el ΔV empleado a partir de la órbita de aparcamiento geocéntrica, el tiempo total de vuelo y el ángulo de fase que debe tener Júpiter el día del lanzamiento. Rellenar con los resultados la siguiente tabla:

Escenario	¿Viable o no viable?	ΔV (km/s)	T_{vuelo} (días)	ψ (^{o})
1	Sí	6.47	736.50	102.96
2	Sí	8.75	404.71	94.39
3	Sí	17.67	423.73	160.00

Si el día que se dé dicho ángulo la misión no se puede llevar a cabo, ¿cuánto tiempo habría que esperar para que se repitiera el ángulo de fase? $\boxed{\text{Tiempo de espera = 398.86 días}}$

Elegir el escenario más favorable en términos de tiempo que no supere un ΔV de $9\ \mathrm{km/s}$ desde la órbita de aparcamiento, y para dicho escenario calcular el ΔV adicional que sería necesario para dejar la sonda interplanetaria en una órbita circular en torno a Júpiter con un radio igual a 10 veces el radio del planeta.

$\boxed{\Delta V \text{ para circularizar =12.27 km/s}}$

Para simplificar cálculos, se hará uso de las hipótesis simplificativas usuales, es decir, las órbitas de los planetas se suponen coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares, de radio igual a su radio medio. Los datos se pueden extraer de la siguiente tabla:

Planeta	Símbolo	μ ($\mathrm{km^3/s^2}$)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Mercurio	☿	42828.3	2439.7	0.387098
Venus	♀	324858.8	6051.8	0.723327
Marte	♂	42828.3	3397	1.52372
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Saturno	♄	37939519.7	60268	9.58078
Urano	⛢	5780158.5	25559	19.2709
Neptuno	♆	6871307.8	24764	30.1927
Plutón	♇	1020.9	1195	39.3782

Instrucciones: Se debe entregar esta hoja con los resultados numéricos y adjuntar los cálculos realizados. Los resultados finales deben estar en las unidades indicadas en este hoja, pero los resultados intermedios pueden estar en cualesquiera unidades. Para las maniobras asistidas por gravedad (y, si fuera necesario, para las entradas/salidas en las esferas de influencias planetarias) se deberán entregar dibujos de los triángulos de velocidad empleados.

Valoración: Se valorará el planteamiento correcto y la corrección numérica (permitiéndose un cierto margen de error por redondeos). La resolución correcta del tercer escenario tiene doble valor que la de los otros dos.

Solución: Se describe la solución para cada escenario. Las figuras (triángulos y trayectorias heliocéntricas) se encuentran en la siguiente página.

1. En este caso la elipse heliocéntrica tiene como elementos $e = 0{,}7$ y el elemento a hay que obtenerlo sabiendo que $r_p = a(1-e) = 1$ AU. Por tanto $a = 3{,}33$ AU. El afelio de la órbita será $r_a = a(1+e) = 5{,}67$ AU luego es viable. La velocidad al salir de la esfera de influencia de la Tierra será $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_\oplus} - \frac{\mu_\odot}{a}} = 1{,}3038$ UV luego en el sistema de referencia geocéntrico $v_\infty = V_1^H - V_\oplus = 0{,}3039$ UV $= 9{,}0498$ km/s. Por tanto $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} - \frac{\mu_\oplus}{a_{hip}}} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 6{,}47$ km/s. Para calcular el tiempo de vuelo observamos que en el encuentro con Júpiter se tiene $L_♃ = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_2}$, luego $\theta_2 = 164{,}1195^{\text{o}}$. De las leyes horarias $E_2 = 2{,}5$ rad, $M_2 = 2{,}0818$ rad, y como $n = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a}} = 0{,}1643$ rad/UT, obtenemos $T = 12{,}67$ UT $= 736{,}4964$ dias. Finalmente para calcular el ángulo de fase observamos que $\psi + n_♃ T = \theta_2$, con $n = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{L_♃}} = 0{,}0843$ rad/UT de donde $\psi = 102{,}9611^{\text{o}}$.

2. El segundo escenario es análogo al primero exceptuando el hecho de que la órbita heliocéntrica es parabólica. Como el perihelio están en la Tierra y para parábolas $r_p = p/2$, obtenemos $p = 2$ AU. Obviamente la parábola cortará con la órbita de Júpiter luego es viable. La velocidad al salir de la esfera de influencia de la Tierra será $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_\oplus}} = \sqrt{2}$ UV luego en el sistema de referencia geocéntrico $v_\infty = V_1^H - V_\oplus = \sqrt{2} - 1$ UV $= 12{,}3372$ km/s. Por tanto $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 8{,}75$ km/s. Para calcular el tiempo de vuelo observamos que en el encuentro con Júpiter se tiene $L_♃ = \frac{p}{1+\cos\theta_2}$, luego $\theta_2 = 127{,}9976^{\text{o}}$. De las leyes horarias $B = 7{,}3841$ y obtenemos $T = 6{,}9618$ UT $= 404{,}7054$ dias. Finalmente para calcular el ángulo de fase, como antes, $\psi + n_♃ T = \theta_2$, luego $\psi = 94{,}3910^{\text{o}}$.

3. En el tercer escenario tenemos que encontrar en primer lugar las condiciones tanto de la llegada a Venus como de la salida de la Tierra. En primer lugar como $r_p = p/2$, obtenemos $p = 1{,}4467$ AU. El ángulo a la salida de la Tierra θ_1 se calcula de $L_\oplus = \frac{p}{1+\cos\theta_1}$, luego $\theta_1 = -63{,}4708^{\text{o}}$. Igualmente $V_1^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_\oplus}} = \sqrt{2}$ UV y el ángulo de trayectoria en parábolas es $\gamma_1 = \theta_1/2 = -31{,}7354^{\text{o}}$. Formando un triángulo a la salida de la Tierra obtenemos que $v_\infty = \sqrt{V_\oplus^2 + (V_1^H)^2 - 2V_\oplus V_1^H \cos\gamma_1} = 0{,}771$ UV $= 22{,}9644$ km/s. Por tanto $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{r_{park}} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{park}}} = 17{,}67$ km/s (lo cual es indudablemente excesivo y haría este escenario no viable por razones técnicas; en cualquier caso seguimos adelante en la resolución del problema). La duración de este tramo Tierra-Venus lo calculamos de las leyes horarias, obteniendo $B = 1{,}0406$ y por tanto $T_1 = 0{,}6067$ UT (posteriormente se le sumará el tramo Venus-Júpiter). Por otro lado obsérvese que la llegada a Venus es tangente (al estar en el perihelio), teniéndose que $V_2^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_♀}} = 1{,}6628$ UV. Por tanto $V_2^♀ = v_\infty = V_2^H - V_♀ = 0{,}487$ UV $= 14{,}5061$ km/s. Calculando la maniobra asistida por gravedad con las fórmulas del formulario obtenemos $\Delta V = 2{,}2737$ km/s y $\delta = 8{,}9897^{\text{o}}$. Realizando la maniobra de forma que la sonda interplanetaria se propulse hacia el exterior del Sistema Solar, tendríamos que $\alpha = 180 - \delta = 171{,}01^{\text{o}}$. Resolviendo el triángulo obtenemos por tanto $V_3^H = 1{,}6586$ UV y $\gamma_3^H = 2{,}6298^{\text{o}}$. Calculando la cónica resultante por los procedimiento usuales obtenemos $a = 71{,}0819$ AU, $e = 0{,}9898$, cuyo afelio evidentemente está por encima de la órbita de Júpiter, luego (en términos de llegar a la órbita de Júpiter) el escenario será "viable". Los cortes con las órbitas de Venus y Júpiter vienen dados respectivamente por $\theta_2 = 5{,}2867^{\text{o}}$ y $\theta_3 = 137{,}0037^{\text{o}}$, luego de leyes horarias obtenemos $\Delta T_2 = 0{,}0402$ UT y $\Delta T_3 = 6{,}7225$ UT, por lo que la duración de este segmento es $T_2 = \Delta T_3 - \Delta T_2 = 6{,}6824$ UT. Sumando ambas partes de la trayectoria, $T = T_1 + T_2 = 7{,}289$ UT $= 423{,}73$ dias. Finalmente el ángulo de fase verificará $\psi + n_♃ T = -\theta_1 + \theta_3 - \theta_2$ de donde $\psi = 160{,}0014^{\text{o}}$.

Finalmente y siguiendo las indicaciones del escenario, para circularizar se elige el escenario 2. Como $\theta_2 = 127{,}9976^{\text{o}}$ se tendrá que $\gamma_2 = 64^{\text{o}}$, además $V_2^H = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{L_♃}}$ y del triángulo de velocidades, $v_\infty = \sqrt{V_♃^2 + (V_2^H)^2 - 2V_♃ V_2^H \cos\gamma_2} = 0{,}5816$ UV $= 17{,}3227$ km/s. Elegimos que el perijovio de la hipérbola coincida con el de la órbita deseada (a 10 veces el radio de Júpiter) y por tanto el ΔV para circularizar será una frenada tangente con $\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_♃}{10R_♃} - \frac{\mu_♃}{a_{hip}}} - \sqrt{\frac{\mu_♃}{10R_♃}} = \sqrt{\frac{2\mu_♃}{10R_♃} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu_♃}{10R_♃}} = 12{,}27$ km/s.

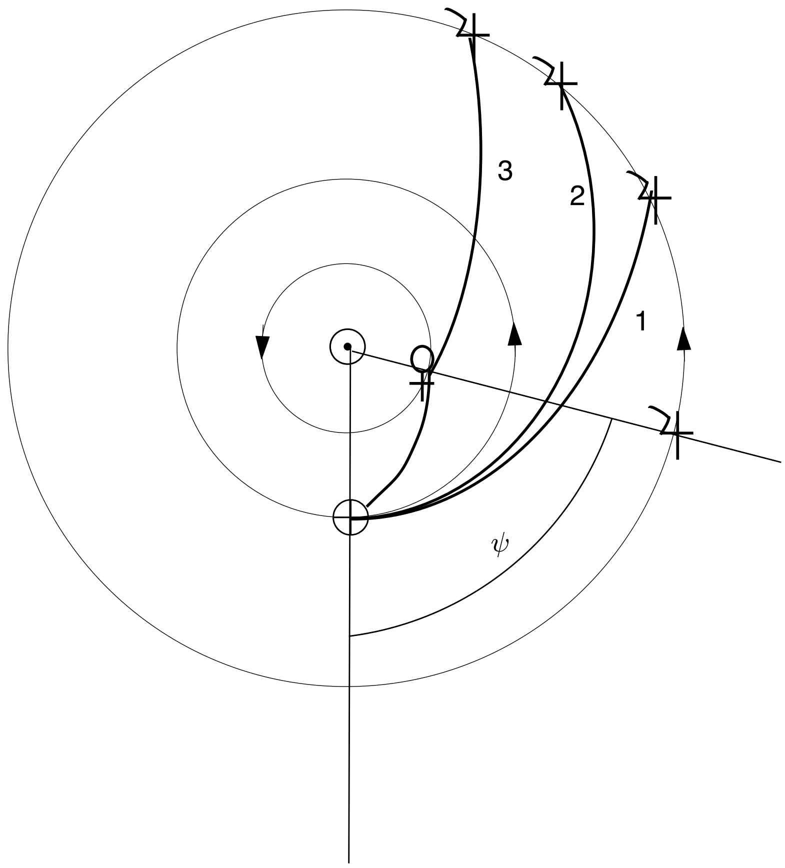


Figura 1: Trayectorias heliocéntricas de los diferentes escenarios y definición del ángulo de fase ψ.

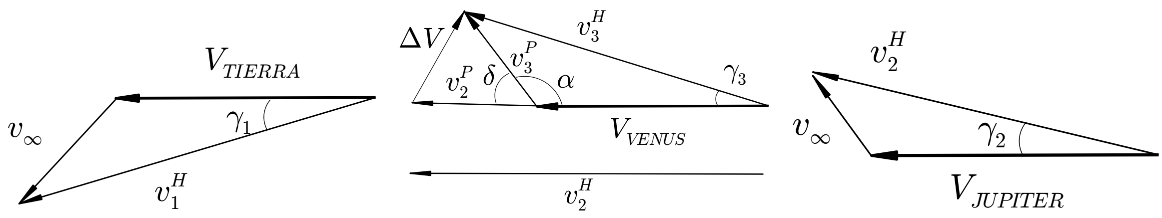


Figura 2: Triángulos de velocidades. Izquierda: salida de la Tierra en el escenario 3. Centro: maniobra asistida por gravedad del escenario 2 (se saca v_2^H del triángulo por claridad). Derecha: llegada a Júpiter.

Astronáutica y Vehículos Espaciales **Duración**: 1 hora 45 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI	____________	Curso 12/13
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido	____________	18/12/12
	2doApellido	____________	
Universidad de Sevilla	Nombre	____________	**Teoría**

Valor total:7 puntos.

1. (**2 puntos**) La Agência Espacial Brasileira (AEB) desea poner en órbita un satélite cartográfico que obtendrá fotos de Brasil.

   Se decide que el satélite debe pasar **al menos una vez cada 2 días** exactamente sobre Río de Janeiro (latitud $22°14'44''$S, longitud $43°42'01''$O), cruzando **de Norte a Sur**. Además se desea una órbita circular cuya altitud no debe ser ni inferior a 400 kilómetros ni superior a 500 kilómetros.

   Se quiere emplear una órbita heliosíncrona del tipo mediodía/medianoche. Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época del 18 de Diciembre de 2012 a las 00:00 sabiendo que dicho día $\mathrm{GST}_0 = 84{,}3^{o}$.

   Cuando se encuentre sobre Río de Janeiro, ¿se tendrá cobertura instrumental de la ciudad de Brasilia (latitud $15°47'56''$S, longitud $47°52'00''$O) con un instrumento con ángulo de visibilidad $\alpha = 75^{o}$?

2. (**3 puntos**) Como parte de una misión a Urano (⛢) una sonda realiza una maniobra asistida por gravedad en Saturno (♄) a una distancia igual a seis veces el radio de Saturno. Suponiendo las órbitas de los planetas coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares (de radio igual a su radio medio), se pide estudiar la maniobra sabiendo que la órbita heliocéntrica de la sonda, antes de su encuentro con Saturno (que sucede justo **antes** del afelio de la sonda), tiene como elementos $a = 5{,}8$ AU y $e = 0{,}7$. Encontrar los elementos de la órbita heliocéntrica tras el encuentro y determinar si se alcanza o no la órbita de Urano. En caso afirmativo, ¿cuánto se tardaría en alcanzar Urano desde Saturno?

   Datos:

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Saturno	♄	37939519.7	60268	9.58078
Urano	⛢	5780158.5	25559	19.2709

3. (**2 puntos**) Para la época del 15 de Diciembre de 2012 a las 00:00 UT se tiene que $\mathrm{GST}_0 = 144{,}33^{o}$. Calcular en dicha época y con la mayor exactitud posible los elementos orbitales de la órbita cuya traza (una revolución) se muestra en la figura 1 (ver detrás del enunciado), sabiendo que:

   - La órbita NO es circular, sin embargo es perfectamente simétrica respecto al meridiano $5{,}13^{o}E$.
   - La órbita no está afectada por perturbaciones.
   - En el hemisferio Norte la traza de la figura se recorre en dirección Este, mientras que en el hemisferio Sur se recorre en dirección Oeste.
   - El nodo descendente de la traza dibujada en la figura se alcanzó el 15 de Diciembre de 2012 a las 10:00 UT, en la longitud 70,26°E.

Observaciones:
-Se debe entregar esta hoja con los resultados numéricos (y el mapa relleno por detrás) y adjuntar los cálculos realizados.
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-No es necesario considerar perturbaciones cuando se propaguen las órbitas.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas (que deberán ser definidas, expresando el resultado final en unidades físicas).

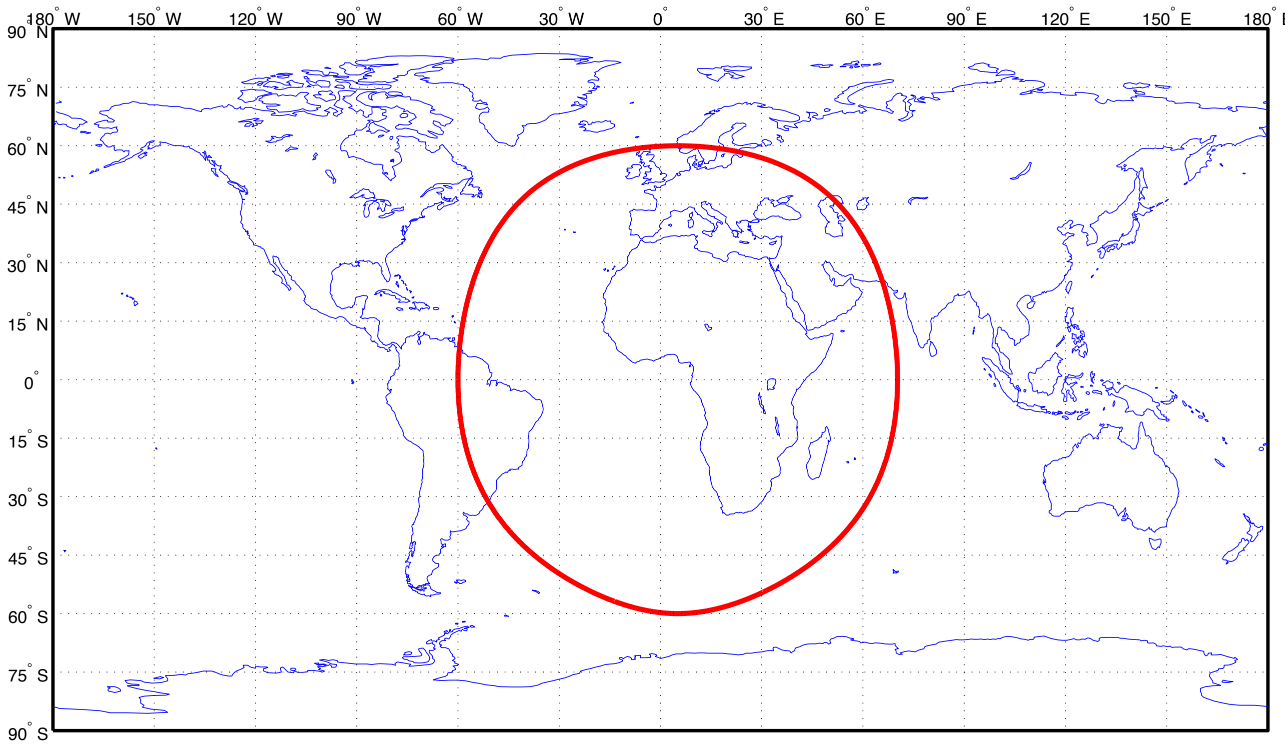


Figura 1: Figura del problema 3.

Solución:

1. Problema 1

2. En primer lugar calculamos los datos del encuentro con Saturno: $\theta_1^H = 170{,}94^o$, $\gamma_1^H = 19{,}66^o$, $V_1^H = 0{,}19\mathrm{UV}$. Por otro lado $V_{\text{♄}} = 0{,}3231$. Del triángulo de velocidades obtenemos $V_1^{\text{♄}}\underline{/\beta} = V_1^H \underline{/\gamma_1^H} - V_{\text{♄}}\underline{/0^o} = 0{,}1577\underline{/156{,}09^o}$ UV, luego $\Delta V = 7{,}75$ km/s y $\delta = 111{,}6^o$. Para obtener un ángulo de trayectoria positivo, ya que queremos que la sonda se deflecte hacia el exterior del Sistema Solar, $V_2^H\underline{/\gamma_2^H} = V_2^{\text{♄}}\underline{/\beta - \delta} + V_{\text{♄}}\underline{/0^o} = 0{,}4494\underline{/14{,}24^o}$ UV.

   De aquí los elementos orbitales tras el encuentro son $a = 143{,}38\mathrm{AU}$ y $e = 0{,}9373$. Evidentemente se alcanza la órbita de Urano. Para calcular el tiempo, observamos que justo tras el encuentro $\theta_2^H = 29{,}28^o$ y al llegar a Urano $\theta_3^H = 95{,}9^o$. Por lo que es un problema de tiempo de vuelo. Calculando los resultados, obtenemos $\Delta T(\theta_2^H) = 10{,}33\mathrm{UT}$ y $\Delta T(\theta_3^H) = 58{,}62\mathrm{UT}$, luego $T = \Delta T(\theta_3^H) - \Delta T(\theta_2^H) = 48{,}29\mathrm{UT} = 2807$días$=$ 7,69años.

3. En primer lugar, puesto que la traza de una única revolución ya es cerrada, la única posibilidad es que se trate de una órbita geosíncrona (órbitas más altas no podrían tener esta forma). Por tanto $T_{sat} = T_\oplus$ y de ahí obtenemos $a = 42164$ km/s. Por otro lado la órbita debe ser directa (al tener partes de la traza en las que se circula al Este). Por lo que $i = \phi_{max} = 60^o$. El hecho de que la traza sea simétrica respecto a un meridiano implica que tanto perigeo como apogeo están situados en dicho meridiano, que por otro lado es el de la latitud máxima y mínima. Puesto que en el hemisferio norte la traza circula hacia el Este, eso implica que el punto de mayor velocidad angular (perigeo) está justo en el hemisferio norte y en el punto de máxima latitud. Por lo que $\omega = 90^o$. Adicionalmente vemos que en los nodos ascendentes y descendentes la traza es perpendicular al Ecuador, luego en dichos puntos $\dot\lambda = 0$. Por ejemplo en el nodo descendente se tendrá $u = 180^o = \omega + \theta$ luego $\theta = 90^o$. En el Ecuador y para dicho valor de θ vemos que $\dot\lambda = -\omega_\oplus + \frac{\cos i}{\cos^2\phi}\dot u = \omega_\oplus\left(-1 + \dfrac{1}{2(1-e^2)^{3/2}}\right) = 0$, donde se han sustituido todos los valores pertinentes. Despejando la excentricidad obtenemos $e = 0{,}6083$. Faltan por calcular los elementos Ω y $\theta(t_0)$. Esto se hace a partir del punto de paso que nos dan (el nodo descendente); en el caso de u tenemos que propagar, llamando t_0 a la época y t_1 al instante de paso por el nodo descendente, tenemos que $u(t_1) = 180^o = \omega + \theta(t_1)$. Por tanto $\theta(t_1) = 90^o$. Esto quiere decir que $E(t_1) = 0{,}9169$ rad y por tanto $M(t_1) = 0{,}4341$ rad. De donde $M(t_0) = M(t_1) + n(t_0 - t_1) = 4{,}0921$ rad, donde n es la velocidad orbital angular media del satélite y $t_0 - t_1 = -10 \cdot 3600$ s. Resolviendo numéricamente la ecuación de Kepler $E(t_0) = 3{,}7463$ rad y finalmente $\theta(t_0) = 197{,}5^o$. Finalmente sabemos que $\lambda_u(t_1) = 180^o$ (por estar en el nodo descendente) luego $\Omega = GST_0 + \omega_\oplus t_1 + \lambda - \lambda_u = 185^o$.

Ingenieros Aeronáuticos	N$^{\text{o}}$DNI	______________	Curso 12/13
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido	______________	14/12/12
	2$^{\text{do}}$Apellido	______________	
Universidad de Sevilla	Nombre	______________	**Teoría**

Valor total:7 puntos.

1. (**4 puntos**) La agencia espacial rusa "Roskosmos" (РОСКОСМОС) quiere poner en órbita un satélite geoestacionario que se situará en la longitud 55^oE. El lanzamiento se efectúa el 14 de Diciembre (UT).

   a) (0.5 puntos) Elegir una base de lanzamiento entre las abajo señaladas, y para dicha base, azimut de lanzamiento.

   Cuadro 1: Bases de lanzamiento rusas

Base	Latitud (°)	Longitud (°)	Azimut Mínimo (°)	Azimut Máximo (°)	Zona horaria
Baikonur (Tyuratam)	45.6	63.4	-20	90	UT+6
Plesetsk	62.8	40.6	-30	90	UT+3

   b) (2.5 puntos)Tras el lanzamiento se alcanza una órbita circular de aparcamiento a altitud 150 kilómetros, tal que se tiene que $\Omega = 62^o$ y que $u = 145^o$ 30 minutos después del lanzamiento (la inclinación es la obtenida del lanzamiento). Sabiendo además que $GST_0 = 15^o$ el día de lanzamiento, diseñar TODAS las maniobras necesarias para alcanzar la órbita deseada, empleando el menor combustible posible y tardando como máximo 1 día y medio a partir del lanzamiento, y calcular el combustible empleado suponiendo una masa seca de 500 kilogramos y un combustible con impulso específico 200 segundos. Indicar a qué hora UT se deberá realizar el propio lanzamiento, y cada maniobra, así como a la hora final a la que se llega a la órbita deseada.

   c) (1 punto)¿Cuál es la función de elevación del satélite (en su órbita final) respecto a la base de lanzamiento? (No es necesario resolver el apartado b) para responder a esta pregunta).

2. (**1.5 puntos**) Un satélite heliosíncrono en una órbita circular de 600 kilómetros de altitud pasa por el Ecuador, cuando viaja de Norte a Sur, a las 19:00 hora solar media. ¿A qué hora solar media pasa por la latitud 45^oS cuando viaja **de Sur a Norte**? Realizar las simplificaciones que se crean necesarias, detallándolas y justificándolas.

3. (**1.5 puntos**) Para la época del 15 de Diciembre de 2012 a las 00:00 UT se tiene que $\text{GST}_0 = 339{,}59^o$. Calcular en dicha época y con la mayor exactitud posible los elementos orbitales de la órbita cuya traza (una revolución) se muestra en la figura 1 (ver detrás del enunciado), sabiendo que:

   - La órbita es circular.
   - La órbita no está afectada por perturbaciones.
   - La traza de la figura se recorre en dirección Oeste.
   - El nodo descendente de la traza dibujada en la figura se alcanzó el 15 de Diciembre de 2012 a las 10:00 UT, en la longitud 105^oE.

Observaciones:
-Se debe entregar esta hoja con los resultados numéricos (y el mapa relleno por detrás) y adjuntar los cálculos realizados.
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-No es necesario considerar perturbaciones cuando se propaguen las órbitas.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas (que deberán ser definidas, expresando el resultado final en unidades físicas).

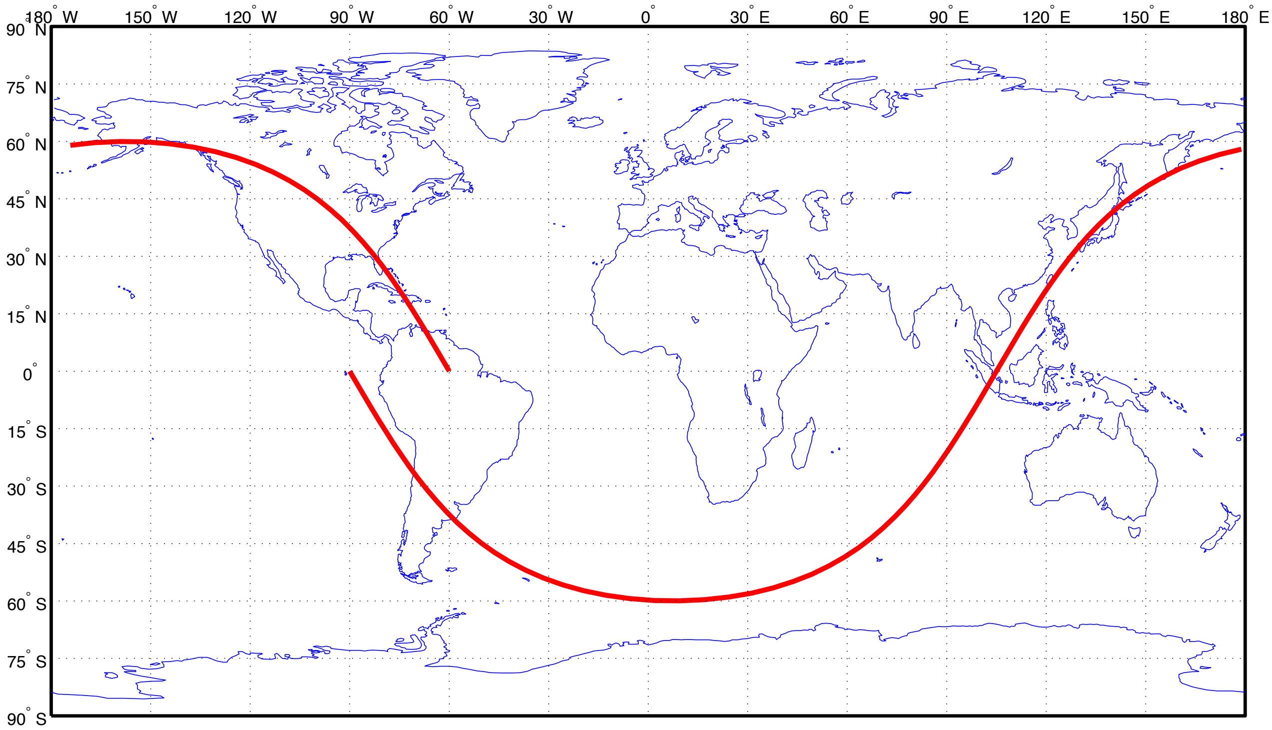


Figura 1: Figura del problema 3.

Solución

1. En primer lugar será necesario conocer los elementos de la órbita final; el semieje mayor del satélite, se obtiene igualando su periodo con el de la Tierra. Obtenemos $a = 42164$ km. También sabemos que en la órbita final $e = 0$ e $i = 0^o$, además tomando como época t_0 el día del lanzamiento a las 00:00 UT, se tiene que $\lambda_T = GST_0 + \lambda = 70^o$. A continuación se resuelven los distintos apartados.

   a) Para obtener la menor inclinación posible tomamos Baikonur con azimut 90 grados. Luego la inclinación de la órbita de aparcamiento será $45{,}6^o$.

   b) Para alcanzar la órbita final es necesario realizar tres cambios: pasar a la órbita geosíncrona, cambiar la inclinación a cero, y finalmente llegar a la longitud geográfica requerida. Tal como se vio en teoría, cuando hay que realizar una transferencia y un cambio de plano, lo óptimo es combinar ambas en una transferencia de Hohmann con cambio de plano, donde se puede realizar todo el cambio de plano en el segundo impulso. Siguiendo las fórmulas de teoría, para el primer impulso obtenemos $\Delta V_1 = 2{,}47$ km/s y para el segundo $\Delta V_2 = 2{,}27$ km/s, y la duración de la transferencia es $T_H = 18903$ s $= 5{,}25$ h. Esta transferencia hay que iniciarla en un paso por el Ecuador (por tanto en un nodo ascendente o descendente). Idealmente para llegar a la longitud 55^o deberíamos iniciar la maniobra en una longitud igual a $\lambda = 55 + 180 + T_H\omega_\oplus = 46{,}02^o$O; por tanto habrá que buscar un paso por el Ecuador cercano a este instante. Llamemos t_1 a la hora de lanzamiento, que calculándola con las fórmulas es $t_1 = 17616$ s $= 04:53:36$ UT. Llamemos t_2 al instante 30 minutos después, luego $t_2 = 05:23:36$ UT. Como $u(t_2) = 145^o$, podemos calcular el tiempo de paso por el nodo descendente ($u = 180^o$) como $t_3 = t_2 + \frac{180-145}{n} = 19926$ s. En el primer nodo descendente el valor de la longitud (usando $\lambda_u = 180^o$) será $\lambda_1 = \Omega + \lambda_u - GST_0 - \omega_\oplus t_3 = 143{,}74^o E$, lo que no es un valor cercano al que sería deseable. El primer nodo ascendente sucede en $t_4 = t_3 + T/2 = 06:15:51$ UT, y el valor de la longitud (usando $\lambda_u = 0^o$) será $\lambda_2 = \Omega + \lambda_u - GST_0 - \omega_\oplus t_4 = 47{,}22^o$ O; este valor es muy próximo al deseable y por tanto ahí se efectúa la maniobra de Hohmann con cambio de plano. El valor de la longitud en el destino será $\lambda = \lambda_2 - 180 - T_H\omega_\oplus = 53{,}8^o$E y se llega en $t_4 + T_H = 11:30:54$ UT, por lo que para hacer el ajuste final se hará un phasing (con una única revolución para cumplir los plazos). Obtenemos usando las fórmulas de teoría para el caso en adelanto, $T_{ph} = 85877$ s, $a_{ph} = 42070$ km, luego $\Delta V_{ph} = 2\left(\sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a}} - \sqrt{\frac{2\mu_\oplus}{a} - \frac{\mu_\oplus}{a_{ph}}}\right) = 0{,}0069$ km/s y se llega al destino en $t_4 + T_{ph} = 11:22:11$ UT el 15 de Diciembre. El ΔV total es $\Delta V_T = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_{ph} = 4{,}7428$ km/s, luego el combustible gastado finalmente es $m_f = 5108$ kg.

   c) La función de elevación es el valor de la elevación (desde la base) a lo largo del tiempo; puesto que tanto la base como el satélite están fijos en el sistema de referencia geográfico, esta función debe ser una constante. Para calcular esta constante, usamos la fórmula de la teoría:

$$h = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{r\cos\psi - R_\oplus}{\sqrt{r^2 - R_\oplus^2 - 2rR_\oplus\cos\psi}}\right),$$

donde ψ es el ángulo formado entre el vector estación y el vector satélite. Estos vectores son muy sencillos de escribir en el sistema de referencia geográfico (sobre todo el del sátelite al ser geoestacionario y mantenerse constante sobre una posición de la Tierra) y tomando su producto escalar obtenemos ψ:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_{sat} \\ \operatorname{sen}\lambda_{sat} \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{s} = \begin{bmatrix} \cos\lambda_{est}\cos\phi_{est} \\ \operatorname{sen}\lambda_{sat}\cos\phi_{est} \\ \operatorname{sen}\phi_{est} \end{bmatrix},\ \psi = \arccos\vec{r}\cdot\vec{s} = \arccos\left(\cos\phi_{est}\cos(\lambda_{sat} - \lambda_{est})\right).$$

Obtenemos por tanto en este caso $\psi = 46{,}2^{\text{o}}$ y $h = 36{,}85^{\text{o}}$, luego la función de visibilidad será una línea recta constante para todo tiempo de valor h.

2. En primer lugar, por ser heliosíncrono con $h = 600$ kilómetros, obtenemos de la fórmula que relaciona la inclinación de este tipo de satélites con su altitud que $i = 97{,}79^{\text{o}}$. Por otro lado puesto que su paso por el nodo descendente es a las 19 HSM, se tendrá que su paso por el nodo ascendente es a las 7 HSM. Recordemos la fórmula de la hora solar media: $HSM = \frac{\Omega+\lambda_u - AR_M}{15} + 12$, recordemos también que para un satélite heliosíncrono $\Omega - AR_M$ es constante. En el paso por el nodo ascendente $\lambda_u = 0$, luego deducimos $HSM = 7 + \frac{\lambda_u}{15}$. Por lo que sólo necesitamos λ_u en su paso por la latitud $\phi = -45^{\text{o}}$ yendo de S a N. Del triángulo obtenemos $u = -45{,}54^{\text{o}}$ (que es la solución correcta al ir de S a N). Por tanto $\lambda_u = 7{,}86^{\text{o}}$ (se coge la solución opuesta a donde está u al ser órbita retrógrada), y obtenemos $HSM = 7{,}4761\ \text{h} = 07:31:26$.

3. Para resolver el problema, observamos en primer lugar que la traza es siempre retrógrada (al ser recorrida siempre hacia el Oeste). Por tanto la órbita podría ser directa o retrógrada (a priori no hay forma inmediata de saberlo, aunque para que la órbita fuera directa y la traza totalmente retrógrada la órbita tendría que ser supersíncrona, lo que haría que su forma fuera menos "sinusoidal"). A falta de más información, suponemos que la órbita es retrógrada. Como la latitud máxima alcanzada es 60^{o}, y para una órbita retrógrada se tiene $\phi_{max} = 180 - i$, obtenemos $i = 120^{\text{o}}$. Al ser circular $e = 0$. El retraso nodal es, de la figura, $\Delta\lambda = -30^{\text{o}} = -\omega_\oplus T_{sat}$, por lo que obtenemos $T_{sat} = \frac{T_\oplus}{12} = 7180{,}3$ s, de donde llegamos a $a = 8044{,}3$ km. Faltan por calcular los elementos Ω e u (al ser circular ni θ ni ω están bien definidos). Esto se hace a partir del punto de paso que nos dan (el nodo descendente); en el caso de u tenemos que propagar, llamando t_0 a la época y t_1 al instante de paso por el nodo descendente, tenemos que $u(t_1) = 180^{\text{o}}$. Por tanto $u(t_0) = u(t_1) + n(t_0 - t_1)$, donde n es la velocidad orbital angular media del satélite y $t_0 - t_1 = -10 \cdot 3600$ s. Obtenemos $u(t_0) = 175{,}07^{\text{o}}$. Finalmente sabemos que $\lambda_u(t_1) = 180^{\text{o}}$ (por estar en el nodo descendente) luego $\Omega = GST_0 + \omega_\oplus t_1 + \lambda - \lambda_u = 55^{\text{o}}$.

Astronáutica y Vehículos Espaciales **Duración**: 1 hora y media

Ingenieros Aeronáuticos	N$^{\text{o}}$DNI ____________	Curso 11/12
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ____________ 2$^{\text{do}}$Apellido ____________	11/9/12
Universidad de Sevilla	Nombre ____________	**Teoría**

Valor total:7 puntos.

1. (**1 punto**) Definir el sistema de referencia perifocal. Encontrar las expresiones de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ en el sistema de referencia perifocal, en función de p, h, e y θ. Demostrar que para $e \neq 0$ el vector excentricidad siempre apunta en la dirección de periapsis.

2. (**1 punto**) Se sabe que en una cierta época, un cuerpo orbitando la Tierra tiene como posición y velocidad las siguientes, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UD}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{UV}.$$

   Se pide encontrar los elementos orbitales del cuerpo, en dicha época, expresados también en unidades canónicas.

3. (**2,5 puntos**) Un cometa viaja en una órbita que se puede suponer parabólica, en el plano de la eclíptica, con el elemento orbital $p = 9$ AU. El cometa, antes de llegar a su afelio, tiene un encuentro con Júpiter ($\mu_{♃} = 126711995{,}4\,\text{km}^3/\text{s}^2$, $L_{♃} = 5{,}2$ AU, $R_{♃} = 71492$ km), pasando a una distancia de 10 radios jovianos, que lo propulsa al interior del sistema solar. Hallar la órbita tras el encuentro (se puede modelar como una "maniobra" asistida por gravedad que "deflecta" la órbita en dirección al interior del sistema solar) y calcular si el cometa podría llegar hasta la órbita de la Tierra.

4. (**2,5 puntos**) La ESA desea poner en órbita un satélite cartográfico que obtendrá fotos de la provincia de Sevilla.

   Se decide que el satélite debe pasar **al menos una vez cada 2 días** exactamente sobre Sevilla (latitud 37,23ºN, longitud 5,58ºO), y lo debe hacer a las 12:00 hora solar media, cruzando **de Norte a Sur**. Además se desea una órbita circular cuya altitud no debe ser ni inferior a 300 kilómetros ni superior a 500 kilómetros.

   ¿Qué tipo de órbita se va a emplear? Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época del 11 de Septiembre de 2012 a las 00:00 sabiendo que dicho día $\text{GST}_0 = 347{,}9^{\circ}$.

   Sabiendo que el Equinoccio de Primavera fue el 20 de Marzo de 2012 a las 11:02 UT, ¿cuál es la hora solar aparente (real) cuando el satélite pasa por Sevilla el 11 de Septiembre de 2012?

   Pasados tres meses, ¿cuáles son las horas solares media y aparente (real) a su paso por Sevilla?

   En la resolución del problema se debe tener en cuenta (cuando sea razonable hacerlo) la perturbación media del J2 (otras perturbaciones se pueden ignorar). El propagador medio J2 para una órbita circular viene dado por:

$$\begin{aligned} a &= a_0,\ e = e_0,\ i = i_0, \\ \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0),\ u = u_0 + (\dot{\omega} + \dot{M})(t - t_0), \end{aligned}$$

   donde los valores de $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ y $\dot{M}$ vienen en el formulario.

Observaciones:
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas (que deberán ser definidas, expresando el resultado final en unidades físicas).

Ingenieros Aeronáuticos	N$^{\text{o}}$DNI	______	Curso 11/12
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido	______	21/1/12
	2$^{\text{do}}$Apellido	______	
Universidad de Sevilla	Nombre	______	**Teoría**

Valor total:7 puntos.

1. (**2 puntos**) Un satélite polar en órbita baja circular ($h = 554{,}24$ km) se encuentra en un cierto instante de tiempo sobre las coordenadas $\phi = 45^{\text{o}}$N, $\lambda = 3^{\text{o}}$O, circulando de Sur a Norte.

   a) Encontrar sus coordenadas transcurridos 43 minutos y 52.79 segundos. ϕ= , λ=

   b) Dibujar aproximadamente la traza del satélite (dibujar sólo una revolución, comenzando en el nodo ascendente y terminando en el siguiente nodo ascendente, que contenga al punto del enunciado). Dibujarlo sobre el mapa en la cara trasera del enunciado.

2. (**3 puntos**) Como parte de una misión a Neptuno (♆) una sonda realiza una maniobra asistida por gravedad en Júpiter (♃) a una distancia igual a diez veces el radio de Júpiter. Suponiendo las órbitas de los planetas coplanarias en el plano de la eclíptica y circulares (de radio igual a su radio medio), se pide estudiar la maniobra sabiendo que la órbita heliocéntrica de la sonda, antes de su encuentro con Júpiter (que sucede **antes** del perihelio de la sonda), tiene como elementos $a = 3{,}2$ AU y $e = 0{,}7$. Encontrar los elementos de la órbita heliocéntrica tras el encuentro y determinar si se alcanza o no la órbita de Neptuno.

Elementos:a= AU, e=	Se alcanza o no la órbita de Neptuno?

   Datos:

Planeta	Símbolo	μ (km^3/s^2)	Radio planetario (km)	Distancia media al Sol (AU)
Júpiter	♃	126711995.4	71492	5.2033
Neptuno	♆	6871307.8	24764	30.1927

3. (**2 puntos**) La constelación de radio por satélite SIRIUS consiste en una órbita Tundra (geosíncrona de alta excentricidad) situada fundamentalmente sobre el continente norteamericano. Diseñar la órbita de un satélite de este tipo, con los siguientes requisitos:

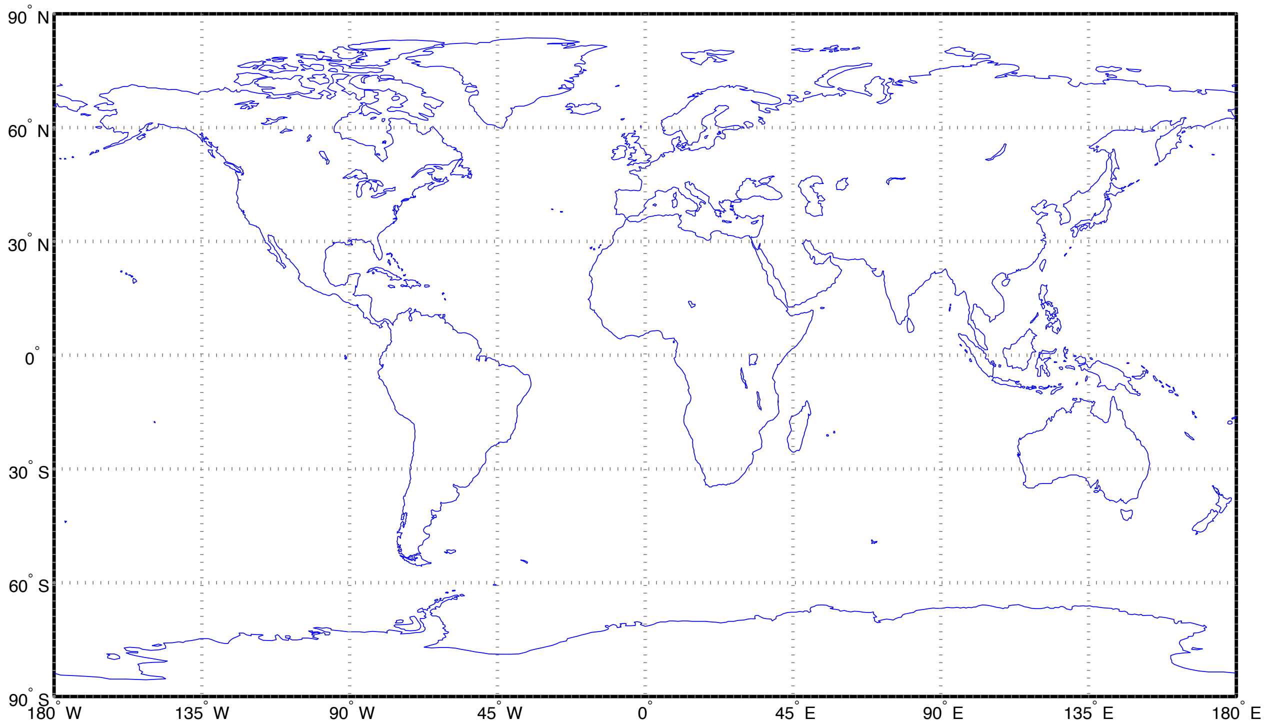
   - Para evitar en lo posible el cinturón externo de Van Allen, como requisito adicional se impone que el radio de perigeo tiene que ser igual o mayor a 5.2 radios terrestres.
   - Se desea maximizar el tiempo que el satélite permanece en el hemisferio Norte
   - La propiedad anterior se debe mantener, en la medida de lo posible, a pesar de las perturbaciones del J_2.
   - Se desea que el punto de la órbita más alejado de la Tierra se produzca el día 30 de Enero de 2012 a las 12:00 UT al sobrevolar una longitud geográfica igual a 100^{o}O.

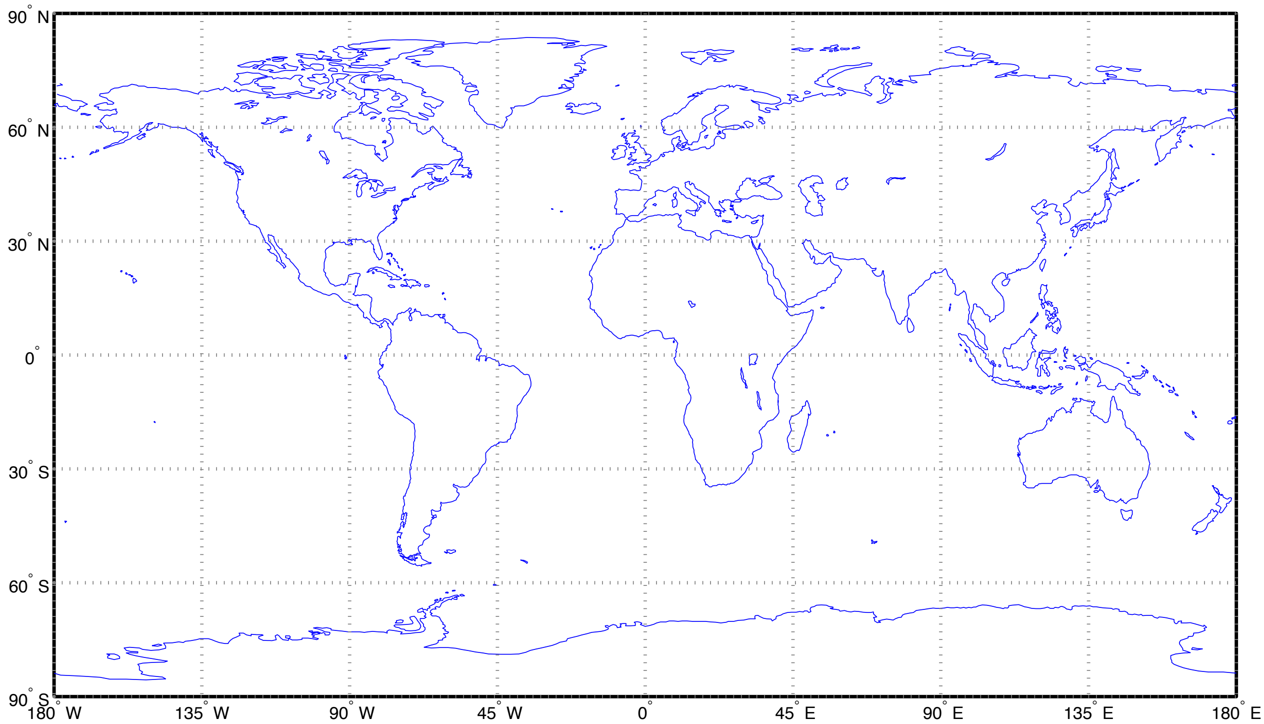
   Tomar como época el propio día 30 de Enero a las 12:00 UT, sabiendo que ese día y a esa hora, $\text{GST} = 30^{\text{o}}$.

   a) Calcular los elementos orbitales del satélite en la época.

   b) En cada revolución, ¿cuánto tiempo permanece el satélite en el hemisferio Norte? Tiempo= horas

Observaciones:
-Se debe entregar esta hoja con los resultados numéricos (y el mapa relleno por detrás) y adjuntar los cálculos realizados.
-Se pide, además del resultado numérico, adjuntar los razonamientos y fórmulas empleadas.
-No es necesario considerar perturbaciones cuando se propaguen las órbitas.
-Se pueden usar unidades físicas o canónicas (que deberán ser definidas, expresando el resultado final en unidades físicas).





Utilizar el mapa para dibujar la traza del problema 1, apartado b. Se incluyen dos mapas por si fuera necesario realizar correcciones o realizar un borrador. Indicar claramente cual de los dos mapas contiene la solución del problema.

Ingenieros Aeronáuticos	$\mathrm{N^o}$DNI ______	Curso 11/12
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ______ 2$^{\text{do}}$Apellido ______	16/12/11
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Teoría**

Valor total:7 puntos.

1. (**2 puntos**) Se sabe que en una cierta época T_0, un cuerpo orbitando la Tierra tiene como posición y velocidad las siguientes, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ UV}.$$

Se pide encontrar los elementos orbitales del cuerpo en el instante $T_1 = T_0 + 4$ UT, expresados también en unidades canónicas. Se pueden despreciar las perturbaciones orbitales.

2. (**2.5 puntos**) La agencia espacial rusa "Roskosmos" (РОСКОСМОС) quiere poner en órbita un satélite circular ecuatorial en órbita baja ($h = 800$ km), sin que importe el valor específico de λ_T.

Elegir una base de lanzamiento entre las abajo señaladas, y para dicha base, hora y azimut de lanzamiento, sabiendo que GST_0 el día de lanzamiento es 85^o.

Cuadro 1: Bases de lanzamiento rusas

Base	Latitud (°)	Longitud (°)	Azimut Mínimo (°)	Azimut Máximo (°)	Zona horaria
Baikonur (Tyuratam)	45.6	63.4	-20	90	UT+6
Plesetsk	62.8	40.6	-30	90	UT+3

Suponiendo que el lanzamiento es exitoso y se alcanza una órbita circular ya con la altitud final, diseñar la maniobra o maniobras necesarias para alcanzar la órbita deseada, empleando el menor combustible posible, y calcular el combustible empleado suponiendo una masa seca de 100 kilogramos y un combustible con impulso específico 200 segundos. Indicar cuando se deberá realizar la maniobra (no es necesario dar la hora exacta, sino el punto o puntos de la órbita donde se debe realizar).

Finalmente, dibujar la traza de la órbita final durante una revolución de la órbita (suponiendo un valor cualquiera para la longitud del punto inicial de la traza), marcando con una flecha el sentido del movimiento sobre la traza.

Se pueden despreciar las perturbaciones orbitales en la resolución de este problema.

3. (**2.5 puntos**) La ESA desea poner en órbita un satélite cartográfico que obtendrá fotos de la provincia de Sevilla.

Se decide que el satélite debe pasar **al menos una vez cada 3 días** exactamente sobre Sevilla (latitud $37{,}23^o$N, longitud $5{,}58^o$O), y lo debe hacer a las 15:00 hora solar media, cruzando **de Norte a Sur**. Además se desea una órbita circular cuya altitud no debe ser ni inferior a 600 kilómetros ni superior a 700 kilómetros.

¿Qué tipo de órbita se va a emplear? Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época del 16 de Diciembre de 2011 a las 00:00 sabiendo que dicho día $\mathrm{GST}_0 = 84{,}3^o$.

Sabiendo que el Equinoccio de Primavera fue el 20 de Marzo de 2011 a las 23:21 UT, ¿cuál es la hora solar aparente (real) cuando el satélite pasa por Sevilla el 16 de Diciembre de 2011?

Pasados tres meses, ¿cuáles son las horas solares media y aparente (real) a su paso por Sevilla?

En la resolución del problema se debe tener en cuenta (cuando sea razonable hacerlo) la perturbación media del J2 (otras perturbaciones se pueden ignorar). El propagador medio J2 para una órbita circular viene dado por:

$$\begin{aligned} a &= a_0,\ e = e_0,\ i = i_0, \\ \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0),\ u = u_0 + (\dot{\omega} + \dot{M})(t - t_0), \end{aligned}$$

donde los valores de $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ y $\dot{M}$ vienen en el formulario.

Solución a las cuestiones

1. En primer lugar a partir de los vectores obtenemos los siguientes valores de forma inmediata:

$$\begin{aligned}
r &= \|\vec{r}\| = 3 \text{ UD}, \qquad v = \|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{15}}{6} \text{ UV}, \qquad \vec{h} = \vec{r}\times\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{6}\\0\\\sqrt{6}\end{bmatrix} \text{ UD}\cdot\text{UV},\\
h &= \|\vec{h}\| = \sqrt{3}\text{ UD}\cdot\text{UV}, \qquad \vec{e} = \frac{\vec{v}\times\vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}, \qquad e = \|\vec{e}\| = 0{,}5\\
\vec{n} &= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times\vec{h} = \begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{6}}{2}\\0\end{bmatrix}, \qquad \epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{1}{8}\text{ UV}^2
\end{aligned}$$

Usando estos cálculos ya obtenemos $e = 0{,}5$ y despejando a de $\epsilon = -\frac{\mu}{2a}$ obtenemos $a = 4$ UD. La inclinación es el ángulo formado entre $\vec{h}$ y el vector en la dirección del eje z, $\vec{k}$, que es $i = \arccos\frac{\vec{h}\cdot\vec{k}}{h} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^{\circ}$. La anomalía verdadera es el ángulo formado entre $\vec{r}$ y $\vec{e}$, es decir $\theta = \arccos\frac{\vec{r}\cdot\vec{e}}{re} = \arccos 0 = 90^{\circ}$ (elegimos esta solución porque $\vec{r}\cdot\vec{v}$ es positivo, lo que significa que la anomalía verdadera se encuentra entre 0° y 180°). La ascensión recta del nodo ascendente es el ángulo que forma el vector $\vec{n}$ con la dirección x, se puede ver directamente que $\vec{n}$ va en la dirección y, por lo que $\Omega = 90^{\circ}$. Finalmente el argumento del perigeo es el ángulo entre $\vec{n}$ y $\vec{e}$, tenmos que $\omega = \arccos\frac{\vec{n}\cdot\vec{e}}{ne} = \arccos 0 = 270^{\circ}$ (elegimos esta solución porque la componente z de $\vec{e}$ es negativa, lo que significa que el perigeo se encuentra por debajo del Ecuador y ω debe ser mayor de 180°).

Para calcular los elementos cuatro horas después tenemos en cuenta que puesto que no hay perturbaciones, el único elemento orbital que cambiará será θ. Como $\theta(T_0)$ es 90°, calculamos primero el tiempo que ha transcurrido desde el perigeo en T_0. Encontramos $E(T_0) = 1,0472$ rad. Por tanto $M(T_0) = 0{,}6142$ rad y puesto que $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{1}{8}$ rad/UT, obtenemos $\Delta T_0 = M/n = 4{,}9135$ UT, que es el tiempo que en T_0 ha transcurrido desde perigeo. Por tanto en T_1 habrá transcurrido $\Delta T_1 = \Delta T_0 + 4 = 8{,}9135$ UT desde perigeo. Dado que el periodo es $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 16\pi$, el tiempo transcurrido es menor que el periodo y podemos proceder. Obtenemos $M(T_1) = n\Delta T_1 = 1{,}1142$ rad. Resolviendo la ecuación de Kepler numéricamente, tenemos $E^0 = M(T_1) = 1{,}1142$ rad. Iterando con el método de Newton, $E^1 = 1{,}6899$ rad, $E^1 = 1{,}6151$ rad y finalmente convergemos a $E(T_1) = E^3 = 1{,}6137$ rad, de donde $\theta(T_1) = 122{,}1076^{\circ}$ es el elemento orbital que faltaba en el instante T_1.

2. Puesto que λ_T no es importante, lo dejamos indeterminado. Puesto que la órbita es ecuatorial y circular ($e = 0$, $i = 0^{\circ}$), el único elemento orbital restante es $a = r = h + R_{\oplus} = 7178{,}14$ km.

Como base y puesto que el objetivo es una órbita circular, elegimos la de menor latitud que pueda lanzar hacia el Oeste que en este caso es Baikonur, y se lanza con azimut 90°, obteniendo una inclinación igual a la latitud, es decir, $i = 45{,}6^{\circ}$. La hora de lanzamiento es indiferente puesto que sólo influiría en el valor final de λ_T, que se ha considerado indiferente.

Para llegar a la órbita final habrá que realizar una maniobra de cambio de plano al Ecuador, que habrá que realizar en el nodo ascendente o descendente. Dada la magnitud del cambio de plano necesario, lo mejor sería realizar una maniobra de cambio de plano de tres impulsos con el impulso intermedio a la distancia óptima, que se obtiene de la fórmula

$$\frac{r_t}{r} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta i}{2}}{1 - 2\operatorname{sen}\frac{\Delta i}{2}} = 1{,}7225,$$

es decir el radio del impulso intermedio será $r_t = 12365$ km. El semieje mayor de la elipse de transferencia que nos lleva a dicho radio es $a_T = \frac{r_t + r}{2} = 9771{,}4$ km. Por tanto para ir a dicha elipse desde el radio inicial, es necesario un coste de aceleración $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r} - \frac{\mu_{\oplus}}{a_M}} - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r}} = 0{,}9307$ km/s, la maniobra de cambio de plano tendrá un coste $\Delta V_2 = 2\sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_t} - \frac{\mu_{\oplus}}{a_M}}\operatorname{sen}\frac{\Delta i}{2} = 3{,}7716$ km/s y finalmente para volver al radio inicial es necesario un coste de frenado $\Delta V_3 = \Delta V_1$. Por lo que el coste total será $\Delta V = 5{,}633$ km/s, lo que se traduce en una masa de combustible, empleando correctamente las fórmulas, de $m_p = 1671$ kg (un valor tan elevado está justificado por la necesidad de un cambio de plano tan considerable a una distancia corta de la Tierra, lo que implica altas velocidades).

Finalmente, para dibujar la traza sólo es necesario encontrar el retraso nodal $\Delta T = -T_{sat}\omega_{\oplus} = -25{,}2875^{\circ}$. La traza descrita por una revolución es una línea recta en el Ecuador que comienza, digamos, en la longitud 0° y circula hacia el este, dando la vuelta a la Tierra y llegando hasta una longitud igual al retraso nodal, es decir, $25{,}2875^{\circ}$O.

3. Será necesaria una órbita heliosíncrona. Como es circular, el primer elemento orbital será $e = 0$. Por otro lado usando de que pase cada uno, dos o tres días por Sevilla, sabemos que el periodo del satélite tiene que cumplir

$T = \frac{k}{n} T_{\bigoplus}$, con k pudiendo valer 1, 2 o 3 y n un número entero. Despejamos $n = k\frac{T_{\oplus}}{T}$, para $a = 600$ se tiene $n_1 = \frac{T_{\oplus}}{T} = 14{,}85$ y para $a = 700$ se tiene $n_2 = \frac{T_{\oplus}}{T} = 14{,}54$. No hay ningún entero entre n_1 y n_2, ni tampoco entre $2n_1 = 29{,}71$ y $2n_2 = 29{,}08$. Sin embargo entre $3n_1 = 44{,}56$ y $3n_2 = 43{,}62$ encontramos $n = 44$ que se toma como solución. Por tanto la órbita se repetirá cada 3 días después de 44 revoluciones, y su periodo será $T = \frac{44}{3} T_{\bigoplus} = 5874{,}8\,\mathrm{s} = 97{,}9\,\mathrm{min}$ de donde obtenemos $a = 7037\,\mathrm{km}$, es decir $h = 658{,}88\,\mathrm{km}$ lo que cumple el requisito solicitado. De este valor se obtiene la inclinación necesaria para que el satélite sea heliosíncrono empleando la fórmula correspondiente, con lo que $i = 98{,}02^{\mathrm{o}}$. Finalmente usamos el último requisito que exige el paso por Sevilla a las 15 hora solar media, puesto que $UT = HSM - \frac{\lambda_{\mathrm{SVQ}}}{15} = 15{,}372 = 15 : 22 : 19$ UT, realmente nos están pidiendo que el satélite pase por Sevilla en el instante $t_1 = 15 : 22 : 19$ UT. Usando el triángulo esférico calculamos que en el paso por Sevilla, $u(t_1) = \arcsen \frac{\operatorname{sen} \phi_{\mathrm{SVQ}}}{\operatorname{sen} i} = 142{,}34^{\mathrm{o}}$ (hay que coger la segunda solución puesto que el satélite pasa de N a S) y $\lambda_u(t_1) = \arccos \frac{\cos u}{\cos \phi_{\mathrm{SVQ}}} = 186{,}15^{\mathrm{o}}$ (hay que coger la segunda solución al ser la órbita retrógrada). Obtenemos $\Omega(t_1) = \mathrm{GST}_0 + \omega_{\bigoplus} t_1 + \lambda_{\mathrm{SVQ}} - \lambda_u(t_1) = 123{,}79^{\mathrm{o}}$. Tenemos que escribir estos valores en t_0 para lo cual calculamos usando las fórmulas del formulario $\dot{\Omega} = 2 \cdot 10^{-7}$ rad/s y $\dot{u} = 0{,}0011$ rad/s. Obtenemos $\Omega(t_0) = 123{,}15^{\mathrm{o}}$, $u(t_0) = 355{,}41^{\mathrm{o}}$.

Para encontrar la hora solar real a las 15 HSM en Sevilla, simplificamos aproximando la órbita de la Tierra por una órbita circular. El día de t_0 han transcurrido 270 días desde el Equinoccio (se puede calcular “a mano” o usando los días julianos). Por tanto $u_{\odot} = \frac{360}{365{,}25} 270 = 266{,}12^{\mathrm{o}}$ y del triángulo obtenemos $\mathrm{AR}_{\odot} = 265{,}77^{\mathrm{o}}$. La hora solar aparente (real) es $HSA = \frac{\mathrm{LST} - \mathrm{AR}_{\odot}}{15} + 12$, donde $\mathrm{LST}(t_1) = \mathrm{GST}_0 + \omega_{\bigoplus} t_1 + \lambda_{\mathrm{SVQ}} = 309{,}93^{\mathrm{o}}$, por tanto $HS = 14{,}9441 = 14 : 56 : 39$ UT.

Tres meses (tomamos 90 días) más tarde, la HSM de paso por Sevilla sigue siendo la misma, por la propia definición de satélite heliosíncrono. Sin embargo es de esperar que la HSA haya cambiado. Obtenemos ahora $u_{\odot} = \frac{360}{365{,}25} 360 = 354{,}83^{\mathrm{o}}$ y del triángulo obtenemos también $\mathrm{AR}_{\odot} = 354{,}83^{\mathrm{o}}$. Por otro lado $\mathrm{LST}(t_1 + 90\ \mathrm{dias}) = \mathrm{LST}(t_1) + \omega_{\bigoplus} \cdot 90 \cdot 86400 = 38{,}67^{\mathrm{o}}$, de done $HSA = 14{,}9232 = 14 : 55 : 23$ UT.

Ingenieros Aeronáuticos	NDNI	______	Curso 13/14
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido	______	12/12/11
	2doApellido	______	
Universidad de Sevilla	Nombre	______	**Cuestiones**

Valor total:7 puntos + 0.5 puntos extra.

1. (**2 puntos**) Se sabe que en una cierta época T_0, un cuerpo orbitando la Tierra tiene como posición y velocidad las siguientes, expresadas en unidades canónicas en el sistema de referencia geocéntrico ecuatorial inercial:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ UD}, \qquad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ UV.}$$

En el instante $T_1 = T_0 + 10$ UT, el cuerpo recibe un impulso ΔV **en el mismo plano de la órbita** de magnitud $0{,}2$ UV que forma un ángulo $\psi = 30$ con la velocidad en dicho instante (medido en sentido antihorario, o lo que es lo mismo, hacia "el interior" de la cónica). Escribir los elementos orbitales en el instante T_1 tras la maniobra, expresados también en unidades canónicas. Se pueden despreciar las perturbaciones orbitales.

2. (**1.5 puntos**) Responder a las siguientes preguntas de forma breve y concisa:

   a) Definir anomalía media, excéntrica y verdadera. ¿Cuándo coinciden sus valores?

   b) ¿Qué es la ecuación del tiempo y para qué se usa?

   c) Explicar las principales perturbaciones que afectan a los satélites geoestacionarios y su efecto en la traza.

3. (**1.5 puntos**) Sea una órbita geocéntrica circular directa de inclinación i. ¿Para qué valores del radio orbital la traza será completamente directa? ¿Para qué valores del radio orbital la traza será completamente retrógrada? Finalmente, ¿cuándo la traza será mixta (parcialmente retrógrada, parcialmente directa)? (Recomendación: poner estos valores en relación al radio de una órbita geoestacionaria). Encontrar estos valores para una órbita de $i = 45$. En base a estos resultados, ¿qué radios nunca pueden resultar en trazas totalmente directas o totalmente retrógradas?

4. (**2.5 puntos**) Se desean diseñar los elementos orbitales de un satélite (en una época T_0 igual al 12 de Diciembre de 2013 a las 00:00) cuya misión tiene los siguientes requisitos:

   - El satélite debe pasar todos los días, al menos una vez, por el punto de coordenadas $\phi = 30N$, $\lambda = 0$, cruzando de Norte a Sur. En particular, el 12 de Diciembre debe pasar a las 12:00 UT.
   - La altitud del perigeo debe ser igual o superior a 300 kilómetros, pero al mismo tiempo el semieje mayor tiene que ser el menor posible (para que sea una órbita de la menor energía, es decir, costo, posible).
   - El satélite debe sobrevolar el hemisferio Norte el 90 % del tiempo.

   Se sabe que $\text{GST}_0 = 100$ el 12 de Diciembre de 2013. Se pueden despreciar las perturbaciones orbitales en la resolución del problema, pero se deberán elegir elementos orbitales que sean robustos en la medida de lo posible a las perturbaciones (en particular la fracción de tiempo sobre el hemisferio Norte).

   Pista: Tratar de obtener la excentricidad del tercer requisito usando la ecuación de Kepler, relacionando la fracción del tiempo con la anomalía media y deduciendo los valores de anomalía excéntrica que corresponden a los nodos, y resolviendo numéricamente la ecuación resultante. Puede ser útil recordar la siguiente relación: $\cos\theta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$.

   Observación: Si no se pueden encontrar los elementos orbitales para cumplir TODOS los requisitos (particularmente la excentricidad), para obtener una puntuación parcial en el problema se pueden suponer algunos de dichos elementos (por ejemplo excentricidad $e = 0{,}5$, que NO es la que cumple el tercer requisito); verificar a posteriori cuanto de cerca se está de cumplir los requisitos que no se han utilizado.

1. En primer lugar calculamos los elementos antes de la maniobra. Observamos que ambos vectores son perpendiculares ($\gamma = 0$, por lo que estaremos en perigeo o apogeo). Observamos también que los módulos de ambos vectores son $r = 3/2$ UD y $v = 1$ UV, por lo que $\epsilon = -\frac{1}{6}$ UD^2/UV^2, obteniendo que la órbita es elíptica y $a = 3$ UD. Obviamente estamos en perigeo ($r < a$) y $e = 0{,}5$, $\theta = 0$. Además necesariamente se está en el nodo ascendente, ya que la velocidad apunta "hacia arriba", y este apunta hacia la dirección x (primer punto de Aries). Por tanto $\Omega = 0$ y $\omega = 0$. Por la forma del vector velocidad es obvio que $i = 45$ (si no está claro se puede calcular $\vec{h} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y verificarlo).

   Como la maniobra es coplanaria está claro que $i = 45$ y $\Omega = 0$ no se modifican. Faltaría encontrar los restantes elementos orbitales. En primer lugar propagamos la órbita desde el perigeo 10 UT. Como $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ rad/UT, $M = \frac{10\sqrt{3}}{9}$ rad y resolviendo la ecuación de Kepler $E = 2{,}298$ rad y $\theta_i = 150{,}95$. En este punto calculamos $r = 4$ UD. También calculamos $v_i = 0{,}4087$ UV (de la ecuación de las fuerzas vivas) y $\gamma_i = 23{,}33$. Con ΔV, ψ y v_i y usando el triángulo obtenemos $v_f = \sqrt{v_i^2 + \Delta V^2 - 2\Delta V v_i \cos(180-\psi)} = 0{,}5904$ UV y $\varphi = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\operatorname{sen}(180-\psi)}{v_f}\Delta V\right) = 9{,}75$. Este punto también puede resolverse mediante fasores, como se indica al final del ejercicio. Luego $\gamma_f = \gamma_i - \varphi = 13{,}57$. Con r, v_f y γ_f obtenemos, con los procedimientos habituales, $a = 6{,}59$ UD, $e = 0{,}4487$, $\theta_f = 45{,}13$. Finalmente como $\theta_i + \omega_i = \theta_f + \omega_f$ obtenemos $\omega_f = \theta_i - \theta_f = 105{,}82$.

   Si optamos por resolver el triángulo mediante fasores el procedimiento sería el mostrado a continuación. Con ΔV, ψ y v_i y usando el triángulo de la figura 1, el cual se ha girado γ_i de forma que $\vec{v_i}$ sea horizontal, obtenemos $v_f \angle \varphi = \Delta V \angle \psi + v_i \angle 0° = 0{,}59044$ UV$\angle 9{,}751°$. Luego, deshaciendo el giro, $\gamma_f = \gamma_i - \varphi = 13{,}57$ y el resto de cálculos permanecen invariantes.

   Cabe destacar que el triángulo de la figura 1 tiene ese aspecto ya que, como se indica en el enunciado, el cuerpo recibe un impulso que va hacia .el interior”de la cónica, lo que conlleva que disminuye el ángulo de la trayectoria del cuerpo. Sin embargo, como se ha podido observar, la formulación empleada no ha cambiado, respetando en todo momento los signos de los ángulos.

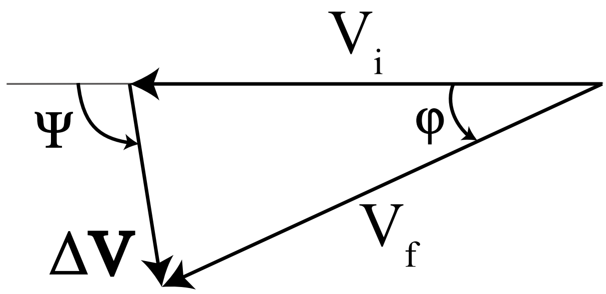


Figura 1: Triángulo asociado a la resolución por fasores.

2. Ver la solución en las transparencias de teoría.

3. Para resolver este problema, observamos que para una órbita circular $\dot{\lambda} = -\omega_\oplus + \frac{\cos i}{\cos^2 \phi} n$. En esta ecuación lo único que varía es ϕ. Es fácil deducir que el valor mínimo se da en el Ecuador $(\dot{\lambda})_{MIN} = -\omega_\oplus + n \cos i$ y el máximo en el punto más alto (y en el más bajo) de la traza:$(\dot{\lambda})_{MAX} = -\omega_\oplus + \frac{n}{\cos i}$.

   - La traza será completamente directa si el valor mínimo es positivo:

   $$-\omega_\oplus + n \cos i > 0 \rightarrow n > \frac{\omega_\oplus}{\cos i} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r^3}} > \frac{\omega_\oplus}{\cos i} \rightarrow r < \left(\frac{\mu_\oplus}{\omega_\oplus^2} \cos^2 i\right)^{1/3}$$

   Puesto que $\omega_\oplus = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{GEO}^3}}$, esto lo podemos escribir como

   $$r < r_{GEO} \cos^{2/3} i$$

- La traza será completamente retrógrada si el valor máximo es negativo, repitiendo la deduccción llegamos a

$$r > \frac{r_{GEO}}{\cos^{2/3} i}$$

- Las trazas mixtas se darán cuando

$$\frac{r}{r_{GEO}} \in \left[\cos^{2/3} i, \frac{1}{\cos^{2/3} i}\right]$$

En particular si $r > r_{GEO}$ la traza nunca puede ser completamente directa, independientemente de la inclinación. Igualmente si $r < r_{GEO}$ la traza nunca puede ser completamente retrógrada, independientemente de la inclinación (si $i < 90$).

Para $i = 45$ tendremos que si $r < 33466$ km la traza será completamente directa, si $r \in [33466, 53123]$ km la traza será mixta, y si $r > 53123$ km la traza será completamente retrógrada.

4. De los requisitos del problema obtenemos fácilmente $\omega = 270$ (para maximizar el tiempo en el hemisferio Norte) y $i = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right) = 63{,}44$ (la inclinación crítica que cancela el $\dot{\omega}$ secular causado por el J_2). Por otro lado nos dan un punto de paso a una cierta hora (llamemos a la hora t_1). Del triángulo esférico obtenemos $u(t_1) = 146{,}01$ y $\lambda_u(t_1) = 163{,}22$. De la ecuación de la traza obtenemos $\Omega = 117{,}27$. Usando ω tenemos $\theta(t_1) = 236{,}01$ pero no podemos propagarlo a la época t_0 porque no conocemos ni a ni e.

   Calculemos en primer lugar e del tercer requisito. Sabemos que el tiempo en el hemisferio Norte será el tiempo transcurrido entre $\theta = 90$ y $\theta = 270$. Por simetría este tiempo será $T - 2\Delta T(90)$. Como queremos que este tiempo sea un 90 % del periodo: $T - 2\Delta T(90) = 0{,}9T$, lo que implica $\Delta T(90) = 0{,}05T$. Sea E el valor de la anomalía excéntrica que corresponde a $\theta = 90$. De la ecuación $\cos\theta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$ observamos $\cos E = e$. Por otro lado sea M el valor de la anomalía media correspondiente a $\theta = 90$. Tenemos que $M = n0{,}05T = 0{,}1\pi$, puesto que $nT = 2\pi$ (trabajando en radianes). Finalmente, la ecuación de Kepler relaciona M, E y e: $M = E - e\operatorname{sen} E$, usando el valor encontrado de M y $e = \cos E$, encontramos una ecuación sólo en E que habría que resolver: $0{,}1\pi = E - \cos E \operatorname{sen} E$, y una vez encontrado el valor de E, $e = \cos E$. Resolviendo numéricamente (por ejemplo con el método de Newton o una calculadora programable), obtenemos $E = 0{,}8134$ rad y $e = 0{,}6870$.

   Finalmente, sabemos que $h_p > 300$ km, es decir, $a > \frac{R_\oplus + 300}{1-e} = 21339$ km. Queremos encontrar el valor más pequeño de a que verifique este límite pero que al mismo tiempo permita que la traza se repita todos los días. Llamando $a_1 = 21339$ km, una órbita elíptica con dicho semieje mayor tendría un periodo $T_1 = 31023$ s, y observamos que $\frac{T_\oplus}{T_1} = 2{,}78$. Fijando entonces $T = \frac{T_\oplus}{2} = 43082$ s, obtenemos $a = 26562$ km que permite verificar todos los requisitos. Para concluir el problema, propagamos $\theta(t_1)$ hacia atrás 12 horas. Como $12\cdot 3600 - T = 118$ s, sólo hay que retroceder 118 segundos. Obteniendo $\theta(t_0) = 235{,}05$ (apenas un grado de diferencia, lo que es lógico dado el escaso tiempo transcurrido).

Astronáutica y Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Ingenieros Aeronáuticos	NºDNI __________	Curso 13/14
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido __________ 2doApellido __________	10/12/11
Universidad de Sevilla	Nombre __________	**Cuestiones**

Valor total:7 puntos.

Datos para todos los problemas. Solsticio de Invierno de 2013: 21 de Diciembre a las 17:11 UT. Época: 10 de Diciembre a las 00:00. $\mathrm{GST}_0 = 5\ \mathrm{h}\ 14\ \mathrm{m}\ 31$ s el día 10 de Diciembre.

1. (**2.5 puntos**) El día 10 de Diciembre a las 12:00 se observa un satélite sobrevolando un punto de la Tierra con coordenadas 45^oS, 15^oO, observándose además en dicho punto que su velocidad es $v = 7{,}57$ km/s, su altitud 600 km y su ángulo de trayectoria $\gamma = -3^o$. El sobrevuelo sucede con el satélite cruzando de Norte a Sur. Transcurrida media hora, ¿está el satélite eclipsado? Como datos adicionales se sabe que la traza del satélite circula siempre hacia el Este, y que el punto de máxima latitud que sobrevuela el satélite a lo largo de su órbita es $\phi = 50^o$N.

   Se pueden despreciar tanto las perturbaciones orbitales como la excentricidad de la órbita de la Tierra en torno al Sol en la resolución de este problema .

2. (**2 puntos**) Dibujar de forma aproximada, durante una revolución, la traza de un satélite en órbita circular supersíncrona tal que su periodo es dos veces el periodo sidéreo de la Tierra, con inclinación $i = 30^o$, marcando exactamente (ϕ, λ) los puntos notables (nodo ascendente, punto de máxima latitud, nodo descendente, y punto de mínima latitud) y no olvidando marcar con una flecha el sentido en el que se recorre. Se sabe además que el satélite pasa por su nodo ascendente el día 10 de Diciembre a las 12:00, y que dicho pase se ubica justo en el meridiano de Greenwich. Recomendación: Encontrar donde se ubican los puntos notables, deducir si la traza es retrógrada o directa (o mixta) y aproximar finalmente el dibujo teniendo en cuenta que la excentricidad es cero.

   Si ese mismo día, cuando la órbita se encuentra en su punto de máxima latitud, se lleva a cabo una maniobra coplanaria con $\Delta V = 0{,}5$ km/s con $\psi = 180^o$ (es decir, tangente y de "frenada"), ¿cuáles son los elementos orbitales de la nueva órbita (expresados en la época)? (Esta parte del problema se puede resolver de forma independiente a la anterior, usando los datos del anterior párrafo).

   Se pueden despreciar las perturbaciones orbitales en la resolución de este problema.

3. (**2.5 puntos**) La NASA desea poner en órbita un satélite cartográfico que obtendrá fotos de la provincia de Sevilla.

   Los requisitos son los siguientes:

   a) El satélite debe pasar **cada 5 o menos días** exactamente sobre Sevilla (latitud 37,23ºN, longitud $5{,}58^o$O), cruzando de Sur a Norte, y siempre lo hará a la misma hora solar media.

   b) En particular debe pasar por Sevilla el 10 de Diciembre de 2013.

   c) La órbita será circular y del tipo atardecer—amanecer (18:00—06:00).

   d) El satélite tendrá una altitud entre 350 y 400 kilómetros.

   ¿Qué tipo de órbita se va a emplear? ¿Cada cuántas revoluciones del satélite se repite la traza? Calcular razonadamente los elementos orbitales del satélite en la época.

   ¿Cuál es la hora solar media y la aparente (real) cuando el satélite pasa por Sevilla el 10 de Diciembre de 2013?

   Pasados tres meses, ¿cuál es la hora solar media a su paso por Sevilla?

   En la resolución del problema se debe tener en cuenta (cuando sea razonable hacerlo) la perturbación media del J2 (otras perturbaciones se pueden ignorar). El propagador medio J2 para una órbita circular viene dado por:

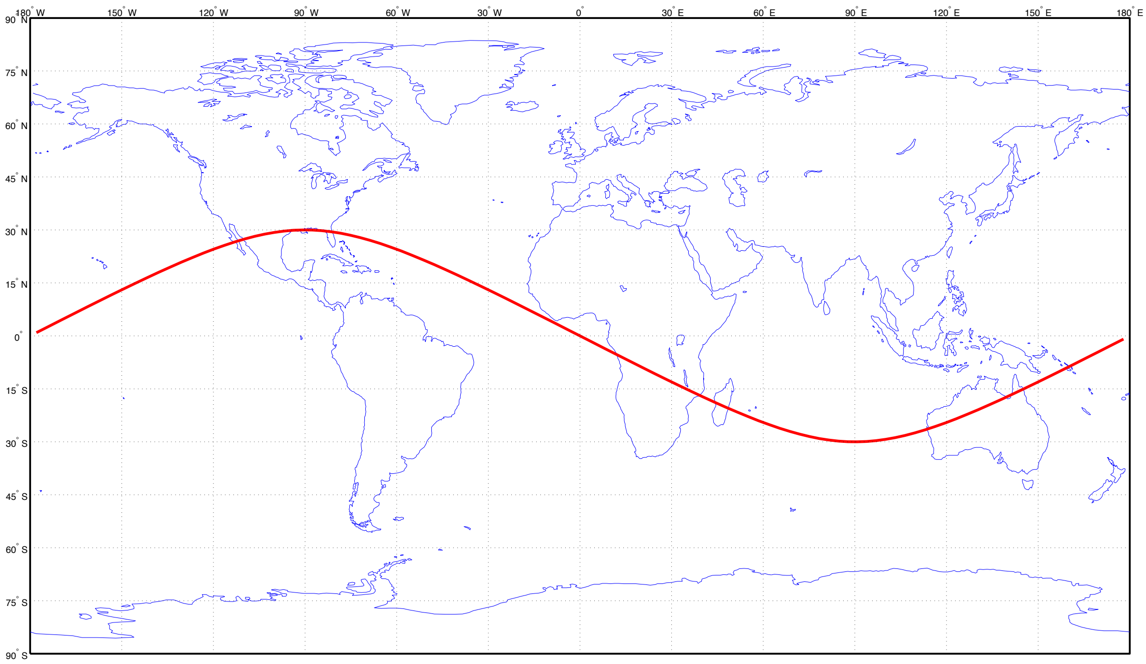
$$\begin{aligned} a &= a_0,\ e = e_0,\ i = i_0, \\ \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0),\ u = u_0 + (\dot{\omega} + \dot{M})(t - t_0), \end{aligned}$$

   donde los valores de $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ y $\dot{M}$ vienen en el formulario.

Solución

1. Llamemos t_1 al 10 de Diciembre a las 12:00 UT. En primer lugar, de velocidad, radio y ángulo de trayectoria calculamos a y e (usando respectivamente la energía específica $\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_\oplus}{r} = -28{,}47 \text{ km}^2 s^2$, momento cinético específico $h = rv\cos\gamma = 52752 \text{ km}^2/\text{s}$). Obtenemos $a = -\frac{\mu_\oplus}{2\epsilon} = 7000{,}6$ km y $e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu_\oplus a}} = 0{,}052$. Usando la ecuación de la cónica obtenemos $\theta(t_1) = 270{,}5^{\text{o}}$ (hay que coger la segunda solución porque el ángulo de trayectoria es negativo). Del enunciado obtenemos que $i = 50^{\text{o}}$. Usando el triángulo esférico obtenemos que $u(t_1) = 247{,}38^{\text{o}}$ (hay que coger la segunda solución al ser la pasada de Norte a Sur) y $\lambda_u(t_1) = 237{,}04^{\text{o}}$ (se elige la solución en el mismo cuadrante que u). Deducimos $\omega = 336{,}87^{\text{o}}$. Como tenemos $\lambda(t_1)$ y $\text{GST}_0 = 78{,}63^{\text{o}}$, obtenemos de la ecuación de la traza que $\Omega = 7{,}07^{\text{o}}$. Llamemos t_2 a t_1 más media hora. Hay que propagar θ. En primer lugar de $\theta(t_1)$ al perigeo, por leyes horarias, se tarda $\Delta T' = 1351{,}9$ s. Por tanto $\theta(t_2)$ será el ángulo recorrido desde el perigeo en $\Delta T = 30 \cdot 60 - 1351{,}9 = 448{,}13$ s. Obtenemos $\theta(t_2) = 30{,}63^{\text{o}}$. Luego $u(t_2) = 7{,}5^{\text{o}}$. Del triángulo esférico obtenemos $\phi(t_2) = \delta(t_2) = 5{,}74^{\text{o}}$. Calculamos también $\lambda_u(t_2) = 4{,}84^{\text{o}}$. Por tanto $\text{AR}(t_2) = \Omega + \lambda_u(t_2) = 11{,}9^{\text{o}}$. Teniendo la ascensión recta y declinación del satélite en el momento pedido, necesitamos el centro de la circunferencia de Eclipse. Para ello observamos que nos dan como dato el Solsticio de invierno, para el que sabemos que $u_\odot = 270^{\text{o}}$. Propagamos 11 días antes (en principio suponemos el Sol inmóvil en la esfera celeste a lo largo del día pero podríamos incluir si quisieramos las cinco horas), obteniendo $u_\odot(t_2) = 259{,}16^{\text{o}}$. Del triángulo esférico aplicado al Sol obtenemos $\delta_\odot = -23{,}06^{\text{o}}$ y $\text{AR}_\odot = 258{,}2^{\text{o}}$, de donde el centro de la circunferencia de eclipse será $\delta_\bullet = 23{,}06^{\text{o}}$ y $\text{AR}_\bullet = 78{,}2^{\text{o}}$. Necesitamos el radio de la circunferencia de eclipse. Usando el valor de $\theta(t_2)$, obtenemos $r(t_2) = 6680$ km y por tanto $\Gamma = 72{,}7^{\text{o}}$. Calculando la distancia ortodrómica, $\cos\alpha = \operatorname{sen}\delta(t_2)\operatorname{sen}\delta_\bullet + \cos\delta(t_2)\cos\delta_\bullet\cos(\text{AR}(t_2) - \text{AR}_\bullet)$, obteniendo $\alpha = 65{,}96^{\text{o}}$, luego SÍ está eclipsado.

2. Los datos del problema son $i = 30^{\text{o}}$, $T = 2T_\oplus$ y $\phi_{☊} = 0^{\text{o}}$, $\lambda_{☊} = 0^{\text{o}}$. También sabemos que $\phi_{MAX} = 30^{\text{o}}N$, $\phi_{☋} = 0^{\text{o}}$, $\phi_{MIN} = 30^{\text{o}}S$. Para calcular las longitudes en estos puntos usamos la diferencia de la ecuación de la traza entre el nodo ascendente y estos puntos, por lo que $\lambda = \lambda_{☊} + \lambda_u - \lambda_{u,☊} + \omega_\oplus(t_{☊} - t)$ (donde sabemos $\lambda_{u,☊} = 0^{\text{o}}$). Al ser la órbita circular, para llegar al punto de máxima latitud ($\lambda_{u,MAX} = 90^{\text{o}}$) habrá recorrido un cuarto de su periodo (luego $(t_{☊} - t_{MAX}) = -\frac{T}{4} = -\frac{T_\oplus}{2}$). Por tanto $\lambda_{MAX} = 90 - \frac{\omega_\oplus T_\oplus}{2} = -90^{\text{o}} = 90^{\text{o}}O$. Igualmente, en el nodo descendente ($\lambda_{u,☋} = 180^{\text{o}}$) habrá recorrido la mitad de su periodo (luego $(t_{☊} - t_{☋}) = \frac{T}{2} = T_\oplus$). Por tanto $\lambda_{☋} = 180 + \omega_\oplus T_\oplus = 180^{\text{o}}E$. Finalmente para llegar al punto de mínima latitud ($\lambda_{u,MIN} = 270^{\text{o}}$) habrá recorrido tres cuartos de su periodo (luego $(t_{☊} - t_{MIN}) = -\frac{3T}{4} = -\frac{3T_\oplus}{2}$). Por tanto $\lambda_{MIN} = 270 - 3\frac{\omega_\oplus T_\oplus}{2} = 90^{\text{o}}E$. Claramente el satélite es retrógrado en toda su traza (se puede comprobar fácilmente con la fórmula de $\dot{\lambda}$). Por tanto la traza se puede aproximar como una figura "sinusoidal" que va hacia el Oeste tocando los puntos hallados. La traza exacta es la siguiente figura:



La maniobra se identifica como una maniobra de disminución de perigeo (ya que se aplica como frenada tangente en una órbita circular). Por tanto el punto donde se realiza la maniobra (punto más alto de la traza) se convierte en el apogeo, por lo que $\omega = 270^{\text{o}}$. Como la maniobra es coplanaria, $i = 30^{\text{o}}$ y Ω lo podemos calcular de cualquier punto de la traza, en particular del nodo ascendente, obteniendo $\Omega = \text{GST}_0 + \omega_\oplus t = 259{,}12^{\text{o}}$. Para identificar los elementos orbitales restantes necesitamos el antiguo radio de la órbita (que se convierte en radio de perigeo), a partir del periodo calculamos $r_a = 66931$ km, la velocidad circular era $v = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_a}} = 2{,}44$ km/s, por tanto la velocidad final es $v_f = 1{,}94$ km/s. Usando velocidad final y radio calculamos la energía específica y de ahí $a = 48934$ km. Despejamos e de la fórmula del radio del apogeo obteniendo $e = 0{,}3678$. Finalmente para obtener θ en la época llamemos t_{MAX} al instante de tiempo en el que está en el punto de máxima latitud (cuando se hace la maniobra). Calculamos $t_2 = 12 \cdot 3600 + \frac{T_\oplus}{2} = 86282$ s. Sabemos que $\theta(t_2) = 180^o$. Propagando hacia atrás usando leyes horarias, obtenemos finalmente $\theta(t_0) = 218{,}6^o$

3. Se va a utilizar un satélite heliosíncrono para pasar siempre a la misma hora solar media con $e = 0$. En primer lugar calcularemos la altitud. Tenemos que encontrar $T_{sat} = \frac{m}{k} T_\oplus$ donde m y k son enteros con $m \leq 5$. De los límites que nos proponen (350 y 400 kilómetros), obtendríamos los periodos $T_1 = 5492{,}3$ s y $T_2 = 5553{,}6$ s. Dividiendo el periodo de la Tierra por estos números, obtendríamos que $\frac{k}{m} \in [15{,}51, 15{,}69]$. Existen dos soluciones, $\frac{k}{m} = 15 + \frac{2}{3} = \frac{47}{3}$ o $\frac{k}{m} = 15 + \frac{3}{5} = \frac{78}{5}$. Avanzaremos con la segunda solución, pero la otra es igualmente correcta y arroja unos números distintos. Con la segunda solución podemos decir que pasa cada cinco días (que son 78 revoluciones del satélite) y obtenemos $a = 6753{,}5$ km y por tanto $i = 96{,}94^o$ (usando la fórmula para satélites heliosíncronos). Puesto que la hora solar media en el nodo ascendente es las 18:00, llamando t_1 a la hora de paso por Sevilla, $\mathrm{HSM}(t_1) = 18 + \frac{\lambda_u(t_1)}{15}$. De las coordenadas de Sevilla y usando el triángulo obtenemos $u(t_1) = 37{,}55$ y $\lambda_u(t_1) = 354{,}69^o$. Por tanto, $\mathrm{HSM}(t_1) = 17{,}65 = 17:38:36{,}5$ de donde $t_1 = 18{,}044$ h $= 64959$ s $= 18:02:38{,}5$ UT. De la ecuación de la traza $\Omega(t_1) = 349{,}37^o$. Propagando a t_0 (la época) y usando las perturbaciones, $u(t_0) = 129{,}46^o$ y $\Omega(t_0) = 348{,}63^o$ (sin perturbaciones la solución sería aproximada pero bastante similar).

   Faltaría hallar la hora solar aparente el mismo día. Para ello usamos que en su paso por Sevilla, $LST = \Omega + \lambda_u(t_1) = 344{,}06^o$. Por otro lado del problema 1 sabemos que el día 10 de Diciembre $\mathrm{AR}_\odot = 258{,}2^o$. Por ellos $\mathrm{HSA} = 12 + \frac{LST - \mathrm{AR}_\odot}{15} = 17{,}72 = 17:43:26{,}5$, similar a la hora solar media, como cabía esperar.

   Finalmente, pasados tres meses la hora solar media sería la misma por las propiedades de la órbita heliosíncrona.