Parte I

Problemas Aeronaves

Problema 1

Se considera una avioneta con tren fijo en vuelo simétrico, sin balance, en un plano vertical, con la atmósfera en calma, a un nivel de vuelo dado y en configuración de crucero (flaps sin deflectar). Se supone que la polar es parabólica de coeficientes constantes y que el empuje suministrado por el motor no depende de la velocidad de vuelo. Se pide:

1. Calcular la eficiencia aerodinámica máxima, E_{max}, y el coeficiente de sustentación óptimo,$C_{L_{opt}}$.
2. Calcular la velocidad (o velocidades) y el coeficiente de sustentación correspondiente en vuelo horizontal, rectilíneo y uniforme.
3. Calcular el ángulo mínimo de planeo y la velocidad de vuelo correspondiente si se produce una parada del motor.

Datos: masa, $m = 950$ kg; superficie alar, $S = 14{,}7\ m^2$; coeficiente de sustentación máximo (sin deflectar flaps), $C_{L_{max}} = 1{,}3$; coeficientes de la polar (en configuración de crucero), $C_{D_0} = 0{,}03$, $k = 0{,}073$; empuje suministrado (al nivel de vuelo), $T_M = 1200$ N; densidad del aire, $\rho = 1{,}1\ kg/m^3$.

SOLUCIÓN

1 Cálculo de E_{max} y $C_{L_{opt}}$

La eficiencia aerodinámica máxima E_{max} viene dada por el valor máximo de $\left.\frac{C_L}{C_D}\right|_{max}$. La relación aerodinámica a la que se produce la eficiencia máxima se puede obtener : Eq

$$\begin{aligned} E_{max} = \left.\frac{C_L}{C_D}\right|_{max} \quad &\rightarrow \quad \frac{d\frac{C_L}{C_D}}{dC_L} = \frac{C_{D_0} + kC_L^2 - C_L\left(2kC_L\right)}{\left(C_{D_0} + kC_L^2\right)^2} = 0 \\ &\rightarrow \quad C_{D_0} + kC_L^2 - 2kC_L^2 = 0 \\ &\rightarrow \quad C_{D_0} = kC_L^2 = C_{D_i} \end{aligned}$$

Lo que indica que para poder volar con E_{max} es necesario que el coeficiente de resistencia parásita, C_{D_0} sea igual a la resistencia inducida, C_{D_i}. A partir de la definición de la resistencia inducida se puede obtener la definición del $C_{L_{opt}}$

$$C_{D_i} \quad = kC_L^2 \rightarrow C_{L_{opt}} = \sqrt{\frac{C_{D_i}}{k}} \quad = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}$$

por lo que la relación de la eficiencia máxima se puede escribir como:

$$E_{max} \quad = \left.\frac{C_L}{C_D}\right|_{max} = \frac{\sqrt{\frac{C_{D_i}}{k}}}{C_{D_0}+C_{D_i}} \quad = \frac{\sqrt{\frac{C_{D_i}}{k}}}{2C_{D_0}} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}}$$

y para los datos de avión descritos para este problema:

$$\begin{aligned} C_{L_{opt}} &= \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}} = \sqrt{\frac{0{,}03}{0{,}073}} = 0{,}64 \\ E_{max} &= \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{0{,}073 \times 0{,}03}} = 10{,}68 \end{aligned}$$

2 Cálculo de la velocidad (o velocidades) y del coeficiente de sustentación correspondiente en vuelo horizontal, rectilíneo y uniforme.

Para el cálculo de la velocidad (o velocidades) y el coeficiente de sustentación correspondiente en vuelo horizontal, rectilíneo y uniforme partimos de las ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned} \frac{W}{g}\frac{dh^2}{dt^2} &= -W + L\cos\gamma + T\sin\left(\gamma+\alpha-\alpha_T\right) - D\sin\gamma \\ \frac{W}{g}\frac{dx^2}{dt^2} &= T\cos\left(\gamma+\alpha-\alpha_T\right) - L\sin\gamma - D\cos\gamma \end{aligned} \tag{1}$$

las cuales se simplifican para el vuelo en crucero, situación conocida como vuelo rectilíneo horizontal simétrico y estacionario, donde las aceleraciones horizontales y verticales son nulas con lo que las ecuaciones 1 se reducen a

$$\begin{aligned} 0 &= L\cos\gamma + T\sin\gamma + \alpha - \alpha_T - D\sin\gamma \\ 0 &= T\cos\gamma + \alpha - \alpha_T - L\sin\gamma - D\cos\gamma \end{aligned}$$

el ángulo de ataque, α, y el que forma el eje del motor con la dirección de la cuerda del ala, α_T, son generalmente pequeños. Si el avión está en lo que se conoce como vuelo en crucero, lo que implica volar a altura constante, eso implica que $\gamma = 0$, por lo que las ecuaciones 2–2 se reducen a

$$L = W \tag{2}$$

$$D = T \tag{3}$$

Es decir, en vuelos de crucero a velocidad constante (o casi constante) la sustentación aerodinámica es igual al peso del avión, y la resistencia aerodinámica igual al empuje del motor o motores del avión, donde la sustentación y la resistencia vienen dados por la relación

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = W \tag{4}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + C_{D_i}\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2\right) = T \tag{5}$$

de la primera ecuación podemos obtener una relación para substituir $C_L$en la segunda ecuación tal que

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \\ T &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \end{aligned}$$

la cual da una ecuación cuártica para resolver la velocidad que satisface la condición de vuelo simétrico vertical tal que

$$V^4 - \frac{2T}{\rho S C_{D_0}}^2 + \frac{kW^2}{\left(\frac{\rho S}{2}\right)^2 C_{D_0}} = 0$$

para poder obtener las raíces de la ecuación elegimos

$$\begin{aligned} a &= \frac{2T}{\rho S C_{D_0}} \\ b &= \frac{kW^2}{\left(\frac{\rho S}{2}\right)^2 C_{D_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{V} &= V^2 \\ \hat{V}^2 &- a\hat{V} + b = 0\end{aligned}$$

de donde se resuelve para las velocidades

$$\hat{V} = \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4b}}{2}$$

recordando que $\hat{V} = V^2 \rightarrow V = \sqrt{\hat{V}}$, por lo que

$$\begin{aligned}\hat{V} &= \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4b}}{2} \rightarrow V = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4b}}{2}} \\ V &= \pm \frac{\sqrt{\rho S C_{D_0}\left[T \pm \sqrt{T^2 - 4C_{D_0}kW^2}\right]}}{\rho S C_{D_0}} = \pm\frac{\left[T \pm \sqrt{T^2 - 4C_{D_0}kW^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\rho S C_{D_0}}\end{aligned}$$

las dos soluciones asociadas al signo negativo no son válidas por lo que solo se consideran las dos soluciones asociadas a

$$V = \frac{\left[T \pm \sqrt{T^2 - 4C_{D_0}kW^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\rho S C_{D_0}}$$

la cual se puede reescribir como

$$V = \left\{\frac{\frac{T}{W}\frac{W}{S}}{\rho C_{D_0}}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kC_{D_0}}{\left(\frac{T}{W}\right)^2}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

para los datos del problema resulta que las velocidades son:

$$\begin{aligned}\frac{W}{S} &= \frac{m \cdot g}{S} = \frac{950\ kg \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}}{14{,}7\ m^2} = 633{,}98\ \frac{N}{m^2} \\ \frac{T}{W} &= \frac{1200\ N}{950\ kg \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}} = 0{,}128 \\ V &= \left\{\frac{\frac{T}{W}\frac{W}{S}}{\rho C_{D_0}}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kC_{D_0}}{\left(\frac{T}{W}\right)^2}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \begin{array}{l} V_1 = 61{,}8\ m/s \\ V_2 = 26{,}7\ m/s \end{array}\end{aligned}$$

es necesario determinar si las dos velocidades son viables para volar, y para ello hay que utilizar el dato del coeficiente de sustentación máximo, $C_{L_{max}}$. No hay que confundir el $C_{L_{max}}$ con el $C_{L_{opt}}$. El primero es un indicativo de cual es la velocidad mínima a la que puede volar el avión., mientras que el segundo es el asociado al coeficiente de sustentación para mínimo empuje (máxima eficiencia aerodinámica). Para calcular la velocidad mínima de vuelo se utiliza la expresión de la sustentación, y se utiliza para calcular la velocidad mínima a la que se puede soportar el peso (W) del avión

$$L = W \quad = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow V_{min} = V_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{max}}}} = 28{,}5\ m/s$$

donde se ve que la velocidad más pequeñas de las dos calculadas no es viable ya que es inferior a la velocidad mínima, por lo que solo $V_1 = 61{,}8\ m/s$ es válida.

3 Cálculo del ángulo mínimo de planeo y de la velocidad de vuelo correspondiente, si se

produce una parada del motor.

El cálculo del ángulo mínimo de planeo y la velocidad de vuelo correspondiente si se produce una parada del motor corresponde a las ecuaciones de subida y descenso que vienen dadas por

$$\begin{array}{rl} L = & W\cos\gamma \\ T = & D + W\sin\gamma \end{array} \quad \rightarrow \quad T = 0 \rightarrow \quad \begin{array}{rl} L = & W\cos\gamma \\ D = & -W\sin\gamma \end{array}$$

por conveniencia asumimos que para descenso, gamma es positivo por debajo del plano horizontal por lo que tenemos

$$\begin{aligned} L &= W\cos\gamma \\ D &= W\sin\gamma \end{aligned}$$

para obtener el ángulo de planeo dividimos ambas expresión

$$\begin{aligned} \frac{D}{L} &= \frac{C_D}{C_L} = \tan\gamma \\ \gamma &= \arccos\frac{C_D}{C_L} \end{aligned}$$

de donde se deduce que para volar con mínimo ángulo de ataque se tiene que volar con máxima eficiencia aerodinámica, es decir

$$\gamma = \arccos\frac{C_D}{C_L} = \arccos\frac{1}{E_{max}}$$

pero para ángulos pequeños ($\gamma \ll 1$ en radianes) podemos asumir que $\tan\gamma \approx \gamma$ por lo que

$$\gamma = \frac{1}{E_{max}} = \frac{1}{10{,}68} = 0{,}0936\ rads\ = 5{,}36^{\circ}$$

La velocidad de vuelo correspondiente al vuelo en planeo con mínimo ángulo se corresponde con la velocidad de vuelo óptima con $C_{L_{opt}}$

$$V_{\gamma_{min}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{opt}}}} = 40{,}63\ m/s$$

Problema 2

Se considera un avión de peso W, superficie alar S y polar parabólica. Cuando está volando a una altura $H = 10000m$ se le paran todos los motores y tiene que bajar planeando. Hay un aeropuerto situado a 150 km y el piloto intenta llegar a él descendiendo con el mínimo ángulo posible. Despreciando la variación de la densidad del aire ρ con la altura (por simplicidad, ya que no es una hipótesis muy realista), y la del peso W con el consumo de combustible, se pide:

1. Determinar el mínimo ángulo de descenso.
2. Analizar si el avión podrá alcanzar el citado aeropuerto.
3. Calcular la velocidad de vuelo del avión durante el planeo.

Datos: peso $W = 660000N$; superficie alar $S = 120m^2$; coeficientes de la polar $C_{D_0} = 0{,}018$, $k = 0{,}04$; densidad del aire $\rho = 1{,}2kg/m^3$.

SOLUCIÓN

1 Determinar el mínimo ángulo de descenso.

El cálculo del ángulo mínimo de descenso si se produce una parada del motor corresponde a las ecuaciones de subida y descenso que vienen dadas por

$$\begin{aligned} L &= W\cos\gamma \\ D &= W\sin\gamma \end{aligned}$$

para obtener el ángulo de planeo dividimos ambas expresión

$$\begin{aligned} \frac{D}{L} &= \frac{C_D}{C_L} = \tan\gamma \\ \gamma &= \arccos\frac{C_D}{C_L} \end{aligned}$$

de donde se deduce que para volar con mínimo ángulo de ataque se tiene que volar con máxima eficiencia aerodinámica, es decir

$$\gamma = \arccos\frac{C_D}{C_L} = \arccos\frac{1}{E_{max}}$$

pero para ángulos pequeños ($\gamma \ll 1$ en radianes) podemos asumir que $\tan\gamma \approx \gamma$ por lo que

$$\gamma = \frac{1}{E_{max}}$$

donde la eficiencia aerodinámica máxima viene dada por máxima E_{max} viene dada por el valor máximo de $\left.\frac{C_L}{C_D}\right|_{max}$. La relación aerodinámica a la que se produce la eficiencia máxima se puede obtener :

$$\begin{aligned} E_{max} = \left.\frac{C_L}{C_D}\right|_{max} \quad &\rightarrow \quad \frac{d\left(\frac{C_L}{C_D}\right)}{dC_L} = \frac{C_{D_0} + kC_L^2 - C_L\left(2kC_L\right)}{\left(C_{D_0} + kC_L^2\right)^2} = 0 \\ &\rightarrow \quad C_{D_0} + kC_L^2 - 2kC_L^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad C_{D_0} = kC_L^2 = C_{D_i}$$

Lo que indica que para poder volar con E_{max} es necesario que el coeficiente de resistencia parasitaria, C_{D_0}sea igual a la resistencia inducida, C_{D_i}. A partir de la definición de la resistencia inducida se puede obtener la definición del $C_{L_{opt}}$

$$C_{D_i} \quad = kC_L^2 \rightarrow C_{L_{opt}} = \sqrt{\frac{C_{D_i}}{k}} \quad = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}$$

por lo que la relación de la eficiencia máxima se puede escribir como:

$$E_{max} \quad = \left.\frac{C_L}{C_D}\right|_{max} = \frac{\sqrt{\frac{C_{D_i}}{k}}}{C_{D_0}+C_{D_i}} \quad = \frac{\sqrt{\frac{C_{D_i}}{k}}}{2C_{D_0}} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}}$$

por lo que

$$\gamma \quad = \quad \frac{1}{E_{max}} = 2\sqrt{kC_{D_0}} = 0{,}05366 \; rads \quad = 3{,}07^\circ$$

2 Analizar si el avión podrá alcanzar el citado aeropuerto.

Para analizar si el avión será capaz de alcanzar el aeropuerto que se encuentra a 150 km basta con analizar trigonométricamente el problema teniendo en cuenta el ángulo de planeo mínimo calculado en el apartado anterior tal como se indica en la figura 1

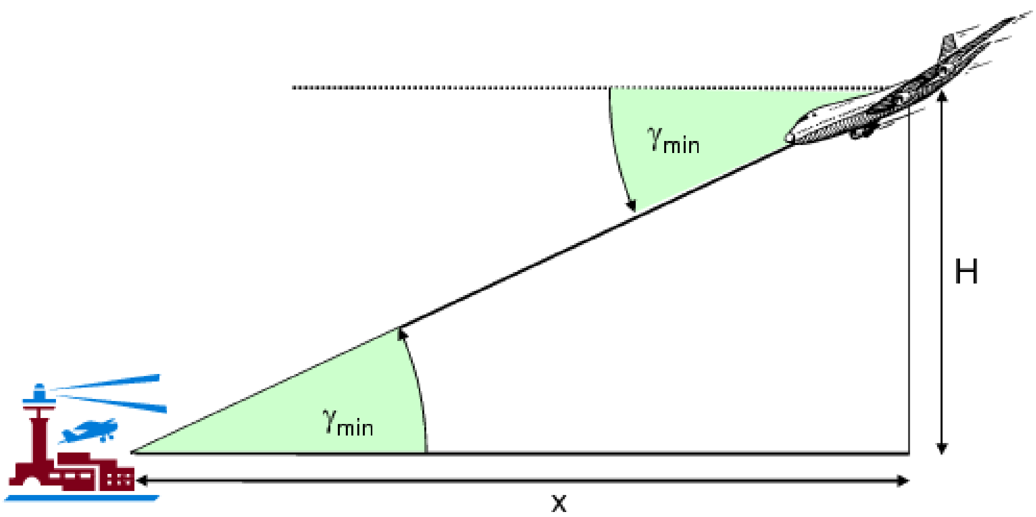


Figura 1: Maniobra de acercamiento sin motor.

$$x \quad = \quad \frac{H}{\tan \gamma_{min}} = \frac{10 \; km}{0{,}05366} = 186{,}4 \; km$$

por lo que el avión será capaz de recorrer $186{,}4km$, y como el aeropuerto está a $150km$ si que llegará.

3 Calcular la velocidad de vuelo del avión durante el planeo.

Para calcular la velocidad de vuelo del avión durante el planeo utilizamos

$$
\begin{aligned}
L &= L\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_{opt}} \rightarrow L = W\cos\gamma_{min} \\
V &= \sqrt{\frac{2W\cos\gamma_{min}}{\rho V^2 S C_{L_{opt}}}} = 116{,}8 \ m/s
\end{aligned}
$$

Problema 3

Se considera una avioneta acrobática efectuando un "looping" (vuelo simétrico, sin balance, con el centro de masas describiendo una circunferencia de radio R en un plano vertical, con velocidad constante V), con la atmósfera en calma, a un nivel de vuelo dado. Se supone que la polar es parabólica de coeficientes constantes y que las variaciones de densidad durante el "looping" son despreciables. Se pide:

1. Calcular el factor de carga, n, y el coeficiente de sustentación, C_L, en un punto genérico del "looping".
2. Determinar el factor de carga máximo y el punto de la trayectoria en el que se produce.
3. Si sólo existiesen limitaciones aerodinámicas, calcular la velocidad mínima V_{min} a la que es posible realizar el "looping" de radio R.
4. Hacer aplicación numérica al caso definido por los datos siguientes:

Datos: masa, $m = 950$ kg; superficie alar, $S = 14{,}7\ m^2$; coeficiente de sustentación máximo (sin deflectar flaps), $C_{L_{max}} = 1{,}3$; coeficientes de la polar (en configuración de crucero), $C_{D_0} = 0{,}03$, $k = 0{,}073$; densidad del aire, $\rho = 1{,}1\ kg/m^3$; velocidad de vuelo $V = 70 m/s$; radio del "looping", $R = 166{,}5 m$. Figura 2 representa una avioneta acrobática efectuando un "looping"

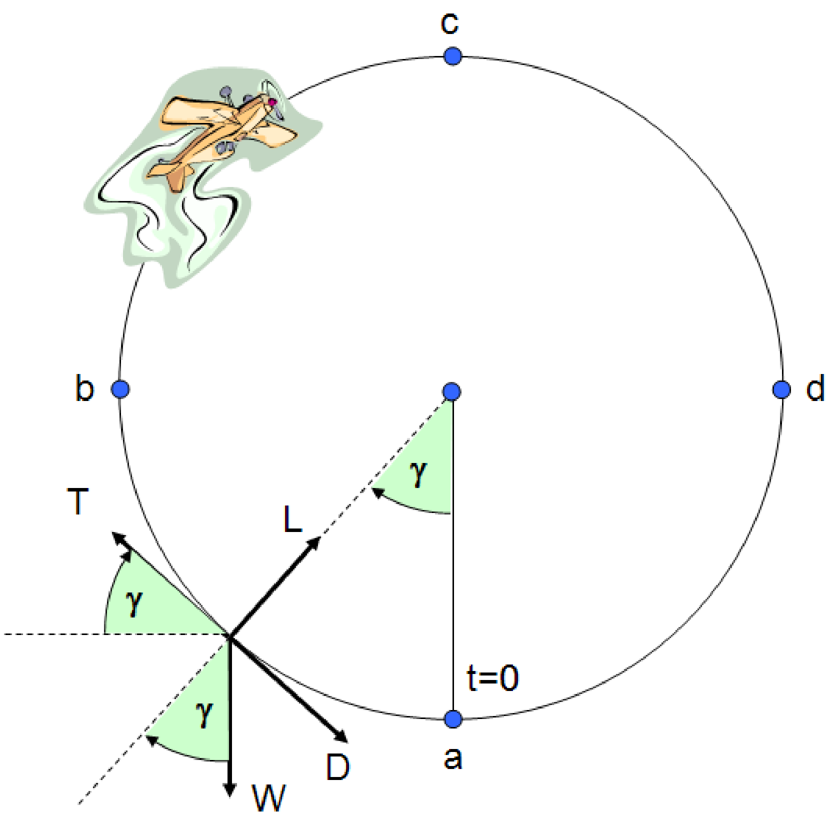


Figura 2: Avioneta acrobática efectuando un "looping".

SOLUCIÓN

1 Calcular el factor de carga, n, y el coeficiente de sustentación, C_L, en un punto genérico del "looping".

Para el análisis del problema es necesario el emplear las ecuaciones del viraje circular uniforme que son las asociadas a realizar un "looping" (vuelo simétrico, sin balance, con el centro de masas describiendo una circunferencia de radio R en un plano vertical, con velocidad constante V) vienen dadas por

$$\begin{aligned} T - D - W \sin\gamma &= 0 \\ L - W \cos\gamma &= \frac{W}{g}\frac{V^2}{R} \end{aligned}$$

para un viraje uniforme con el centro de masas describiendo una circunferencia de radio R implica que la velocidad angular es constante, $\omega = \dot{\gamma} = cte$ donde la velocidad angular viene dada por $\omega = \frac{V}{R}$. El factor de carga viene dado por el ratio entre la sustentación y la resistencia, por lo que si seleccionamos la segunda de las ecuaciones

$$L \quad = W \cos\gamma + \quad \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}$$

y la dividimos por W nos resulta en

$$\frac{L}{W} \quad = n = \cos\gamma + \quad \frac{V^2}{Rg}$$

empleando la definición

$$\gamma \quad = \quad \frac{V}{R}t$$

tenemos que podemos representar el factor de carga en un punto genérico del "looping" como

$$n \quad = \quad \cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{V^2}{Rg}$$

Para poder expresar el coeficiente de sustentación $C_L$en un punto genérico del "looping" se emplea la definición de sustentación tal que

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad \rightarrow n = \tfrac{L}{W} = \cos\left(\tfrac{V}{R}t\right) + \tfrac{V^2}{Rg} \rightarrow \quad \frac{\rho V^2 S C_L}{2W} = \cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{V^2}{Rg}$$
$$C_L = \tfrac{2W}{\rho V^2 S}\cos\left(\tfrac{V}{R}t\right) + \tfrac{2W}{\rho R g S}$$

con lo que tenemos las relaciones del factor de carga, n, y el coeficiente de sustentación, C_L, en un punto genérico del "looping"

2 Determinar el factor de carga máximo y el punto de la trayectoria en el que se produce.

Para determinar el factor de carga máximo y el punto de la trayectoria en el que se produce analizamos la relación que nos define el factor de carga en función del ángulo γ en cada uno de los 4 puntos definidos en la figura 2

$$n \quad = \quad \cos\gamma + \frac{V^2}{Rg}$$

se observa que dado que la velocidad V y el radio de giro R son constantes, el valor máximo del factor de carga se dará cuando el término $\cos\gamma$ sea máximo

- en el punto $a \rightarrow \cos\gamma = \cos(0) = 1$
- en el punto $b \rightarrow \cos\gamma = \cos(90°) = 0$
- en el punto $c \rightarrow \cos\gamma = \cos(180°) = -1$
- en el punto $d \rightarrow \cos\gamma = \cos(270°) = 0$

por lo que el factor de carga máximo se encuentra en la parte inferior del "looping" (a), y su valor máximo es

$$n_{max} = 1 + \frac{V^2}{Rg}$$

3 Si sólo existiesen limitaciones aerodinámicas, calcular la velocidad mínima V_{min} a la que es posible realizar el "looping" de radio R.

Para calcular la velocidad mínima V_{min} a la que es posible realizar el "looping" de radio R, teniendo en cuenta que sólo existiesen limitaciones aerodinámicas, es decir no hay limitaciones estructurales del avión, es necesario determinar el $C_{L_{max}}$ del avión partiendo de la formula genérica del coeficiente de sustentación obtenida en el primer apartado

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{2W}{\rho RgS} = \frac{2W}{\rho V^2 S}\cos(\gamma) + \frac{2W}{\rho RgS}$$

donde se puede observar que el valor máximo de sustentación ocurre al igual que para el factor de carga, en el punto inferior del "looping", para el que $\gamma = 0$ y $t = 0$, por lo que

$$C_{L_{max}} = \frac{2W}{\rho V^2 S} + \frac{2W}{\rho RgS}$$

de donde se puede obtener una relación para la V_{min}

$$V_{min}^2 = \frac{1}{\frac{\rho S C_{L_{max}}}{2W} - \frac{1}{gR}}$$

la cual determina la velocidad de entrada en perdida para un factor de carga máximo

4 Aplicación numérica.

Para hacer una aplicación numérica al caso definido por los datos siguientes se utilizan las ecuaciones resultantes de las diferentes secciones previas

$$n = \cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{V^2}{Rg}$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{2W}{\rho RgS}$$

Problema 4

Se pretende estimar la distancia recorrida en el suelo, y el tiempo empleado, en la maniobra de despegue de un avión, con la atmósfera en calma, para lo que se consideran las siguientes hipótesis simplificativas:

- la fase de rodadura se realiza con todas las ruedas en el suelo,
- la línea de acción del empuje es horizontal y pasa por el centro de masas del avión,
- el empuje suministrado por los motores no depende de la velocidad.

Se pide:

1. Indicar esquemáticamente en la figura las fuerzas y momentos que actúan sobre el avión.
2. Plantear las ecuaciones del movimiento.
3. Calcular la velocidad de rotación del avión V_R
4. Despreciando las fuerzas de rozamiento y la resistencia aerodinámica, plantear la ecuación que permite calcular la velocidad del avión V(t).
5. Obtener, a partir de la ecuación anterior, la distancia recorrida en el suelo y el tiempo empleado en función de la velocidad.
6. Aplicar el apartado anterior al caso de un avión Boeing 747, de masa $M = 3 \times 10^5 kg$, de empuje máximo $T = 6 \times 10^5 N$ y con velocidad de despegue $V_{LOF} = 100 m/s$.

Dato: aceleración de la gravedad, $g = 10 m/s^2$.

FiguraI representa un avión en fase de rodadura.

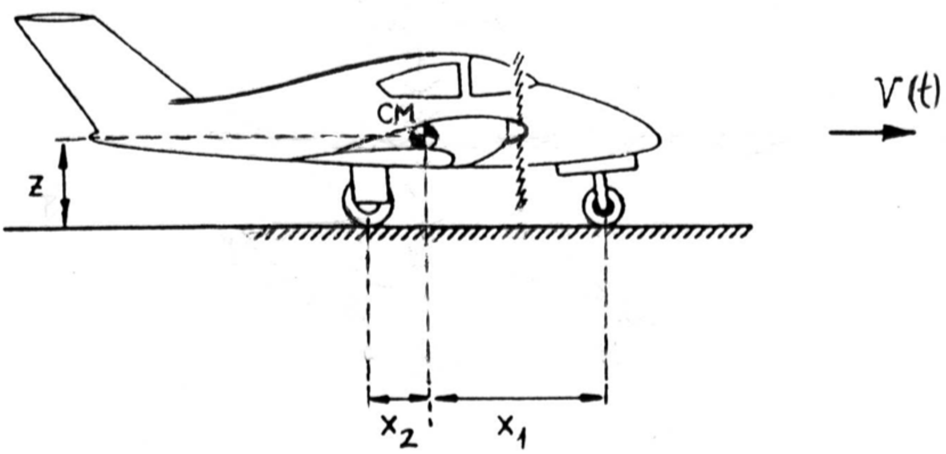


Figura 3: Avión en despegue.

SOLUCIÓN

1 Esquema fuerzas y momentos que actúan sobre el avión.

La figura 5 representan las fuerzas y momentos que actúan sobre el avión, donde hay que destacar que μ_r es el coeficiente de rozamiento de las ruedas con el suelo.

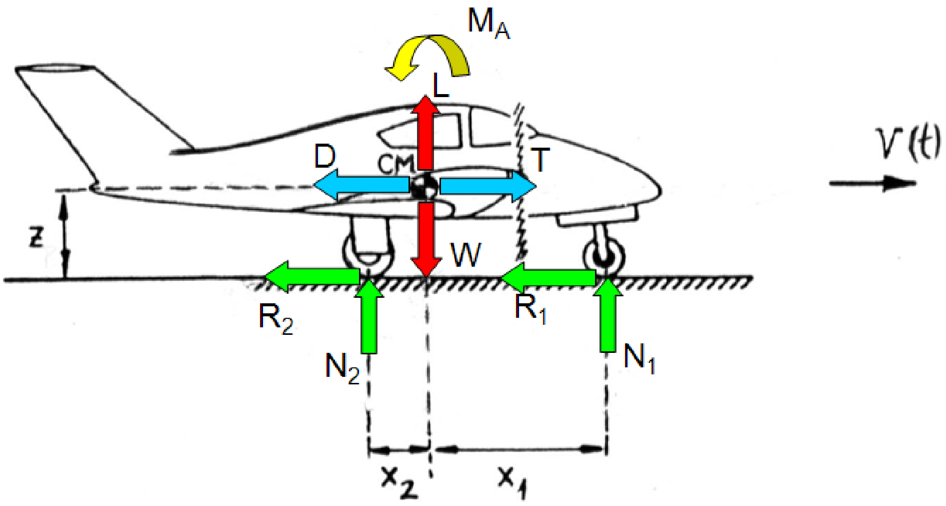


Figura 4: Esquema de fuerzas.

donde $M_A$es el momento aerodinámico generado por el ala del avión.

2 Ecuaciones del movimiento.

Las ecuaciones del movimiento vienen dadas por

$$\begin{aligned}\sum F_{x_v} &\rightarrow \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D - \mu_r\left(N_1 + N_2\right)\\ \sum F_{y_v} &\rightarrow L - W + \left(N_1 + N_2\right) = 0\\ \sum F_{z_v} &\rightarrow M_A + N_1 x_1 - N_2 x_2 - \mu_r\left(N_1 + N_2\right) z_p = 0\end{aligned}$$

de la segunda ecuación podemos observar que

$$N_1 + N_2 = -\left(L - W\right)$$

esta relación la podemos emplear en la primera ecuación para convertirla en

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D + \mu_r\left(L - W\right)$$

utilizando las relaciones para la sustentación y la resistencia tenemos que

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - \mu_r W - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_D - \mu_r C_L\right)$$

utilizando el modelo de polar parabólica $C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = C_{D_0} + kC_L^2$, y asumiendo que durante esta fase de despegue el ángulo de ataque $\alpha = \theta = cte$, que el $C_L = cte$ y que el $C_D = cte$ por lo que la ecuación de la dinámica viene dada por

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - \mu_r W - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2 - \mu_r C_L\right)$$

3 Velocidad de rotación.

Para calcular la velocidad de rotación, V_R, es necesario el identificar que la rotación del avión se produce justo en el instante en el que las fuerzas normales en el tren de aterrizaje del morro del avión dejan de actuar, es decir $N_1 = 0$. Por velocidad de rotación se considera la velocidad a la que el avión es capaz de pivotar sobre el tren de aterrizaje posterior debido a las fuerzas aerodinámicas generadas por el avión en su fase de despegue. A partir de las ecuaciones generales del movimiento previamente derivadas, aplicamos $N_1 = 0$ resultando en:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x_v} &\rightarrow \quad \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D - \mu_r N_2 \\
\sum F_{y_v} &\rightarrow \quad L - W + N_2 = 0 \\
\sum F_{z_v} &\rightarrow \quad M_A - N_2 x_2 - \mu_r z_p N_2 = 0
\end{aligned}$$

por lo que empleando las dos últimas ecuaciones tenemos que

$$N_2 \quad = \quad W - L \rightarrow M_A + (L - W)(x_2 + \mu_r z_p) = 0$$

donde el momento aerodinámico y la sustentación vienen dados por

$$\begin{aligned}
M_A &= \frac{1}{2}\rho V^2 S c C_{M_y} \\
L &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L
\end{aligned}$$

por lo que la ecuación de los momentos puede reescribirse como

$$\tfrac{1}{2}\rho V^2 S c C_{M_y} + \left(\tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_L - W\right)(x_2 + \mu_r z_p)$$

si sumimos que $C_{M_y}(\theta, \delta_e) = cte$, es decir que tanto el ángulo de ataque (recordar que $\alpha = \theta$en configuración de despegue justo antes a la rotación), y que el timón de profundidad (δ_e) se mantiene constante durante la maniobra de despegue, entonces podemos obtener una relación para la velocidad de rotación V_R

$$V_R^2 \quad = \quad \frac{W(x_2 + \mu_r z_p)}{\tfrac{1}{2}\rho S\left(c C_{M_y} + C_L(x_2 + \mu_r z_p)\right)}$$

4 Despreciando las fuerzas de rozamiento y la resistencia aerodinámica, plantear la ecuación que permite calcular la velocidad del avión V(t).

Despreciando las fuerzas de rozamiento y la resistencia aerodinámica, las ecuaciones del movimiento derivadas en la sección previa se reducen a

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D - \mu_r(N_1 + N_2) \quad \rightarrow T \gg D + \mu_r(N_1 + N_2) \rightarrow \quad \frac{dV}{dt} \approx T\frac{g}{W} \quad = cte$$

lo que implica que el avión se mueve aceleración constante, movimiento uniformemente acelerado, y esta es la ecuación diferencial que permite calcular la velocidad del avión en todo momento de la maniobra

5 Distancia recorrida en el suelo y tiempo empleado en función de la velocidad.

Para obtener, a partir de la ecuación anterior, la distancia recorrida en el suelo y el tiempo empleado en función de la velocidad partimos de la ecuación diferencial y la manipulamos para obtener la distancia recorrida y el tiempo empleado

$$dV = T\frac{g}{W}\ dt \ \rightarrow \int dV = \int T\frac{g}{W}dt \ \rightarrow V = \frac{T}{W}g\ t$$

por lo que obtenemos la relación del tiempo empleado como

$$t = \frac{W}{T}\frac{1}{g}\ V$$

para obtener la relación de la distancia recorrida empleamos la relación

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{T}{W}g\ t = \frac{T}{M}\ t$$

por lo que en forma integral tenemos

$$dx = \frac{T}{M}\ tdt \ \rightarrow \int dx = \int \frac{T}{M}\ tdt \ \rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{T}{M}\ t^2$$

6 Aplicación numérica.

Para aplicar el apartado anterior al caso de un avión Boeing 747, de masa $M = 3\times 10^5 kg$, de empuje máximo $T = 6 \times 10^5 N$ y con velocidad de despegue $V_{LOF} = 100 m/s$, utilizamos las ecuaciones previamente obtenidas

$$\begin{aligned} t &= \frac{W}{T}\frac{1}{g}\ V = \frac{M}{T}\ V = \frac{3\times 10^5\ kg}{6\times 10^5\ N}100\ m/s = 50\ s \\ x &= \frac{1}{2}\frac{T}{M}\ t^2 = \frac{1}{2}\frac{6\times 10^5\ N}{3\times 10^5\ kg}\ 50^2 = 2500\ m \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación de la distancia recorrida en el suelo y el tiempo empleado en función de la velocidad sin despreciando las fuerzas de rozamiento y la resistencia aerodinámica, podemos utilizar las ecuaciones derivadas en el primer apartado:

$$\begin{aligned} \sum F_{x_v} &\rightarrow \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D - \mu_r\left(N_1 + N_2\right) \\ \sum F_{y_v} &\rightarrow L - W + \left(N_1 + N_2\right) = 0 \\ \sum F_{z_v} &\rightarrow M_A + N_1 x_1 - N_2 x_2 - \mu_r\left(N_1 + N_2\right) z_p = 0 \end{aligned}$$

de la segunda ecuación podemos observar que

$$N_1 + N_2 = -\left(L - W\right)$$

esta relación la podemos emplear en la primera ecuación para convertirla en

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D + \mu_r\left(L - W\right)$$

utilizando las relaciones para la sustentación y la resistencia tenemos que

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - \mu_r W - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_D - \mu_r C_L\right)$$

utilizando el modelo de polar parabólica $C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = C_{D_0} + kC_L^2$, y asumiendo que durante esta fase de despegue el ángulo de ataque $\alpha = \theta = cte$, que el $C_L = cte$ y que el $C_D = cte$ por lo que la ecuación de la dinámica viene dada por

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - \mu_r W - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2 - \mu_r C_L\right)$$

para simplificar el análisis seleccionamos

$$a = \frac{T}{W} - \mu_r$$
$$b = \frac{\rho S}{2W}\left(C_D - \mu_r C_L\right)$$

por lo que la ecuación diferencial se convierte en

$$a - bV^2 = \frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$$

expandiendo tenemos que

$$dt = \frac{1}{g}\frac{dV}{a - bV^2} \rightarrow \int dt = \int_0^{V_{LOF}} \frac{1}{g}\frac{dV}{a - bV^2}$$

donde se obtiene después de operar que

$$t = \frac{1}{2g\sqrt{ab}} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{b}{a}}V_{LOF}}{1 - \sqrt{\frac{b}{a}}V_{LOF}}$$

y utilizamos

$$V = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow dx = V dt \rightarrow \quad dt = \frac{1}{g}\frac{dV}{a - bV^2}$$

donde

$$dx = \frac{V dV}{g\left(a - bV^2\right)}$$

Problema 5

Examen de Aeronaves y Vehículos Espaciales (15/06/2007)
Duración: 1 hora

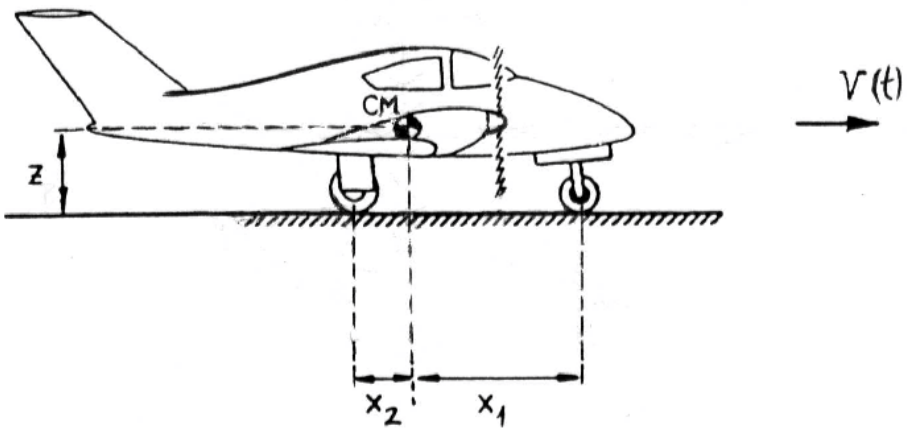
Se pretende estimar la distancia recorrida en el suelo, y el tiempo empleado, en la maniobra de despegue de un avión, con la atmósfera en calma, para lo que se consideran las siguientes hipótesis simplificativas:

- la fase de rodadura se realiza con todas las ruedas en el suelo,
- la línea de acción del empuje tiene una inclinación con respecto a la horizontal de un ángulo α_T y pasa por el centro de masas del avión,
- la línea de la resistencia es horizontal y pasa por el centro de masas del avión,
- la línea de acción de la sustentación es perpendicular a la de la resistencia y pasa también por el centro de masas del avión,
- el empuje suministrado por los motores no depende de la velocidad,
- el perfil del ala del avión tiene un ángulo de ataque distinto de cero, por lo que genera un par de cabeceo que se asume constante durante el despegue.

Se pide:

1. Indicar esquemáticamente en la figura las fuerzas y momentos que actúan sobre el avión.
2. Plantear las ecuaciones del movimiento.
3. Calcular la velocidad de rotación del avión V_R
4. Despreciando las fuerzas de rozamiento y la resistencia aerodinámica, plantear la ecuación que permite calcular la velocidad del avión V (t).
5. Obtener, a partir de la ecuación anterior, la distancia recorrida en el suelo y el tiempo empleado en función de la velocidad.
6. Calcular la distancia mínima que tiene que tener la pista para que un avión Boeing 747 despegue teniendo en cuenta que una vez que las ruedas del avión se separan del suelo, todavía tienen que quedar 500 metros de pista.

Datos: aceleración de la gravedad $g = 10m/s^2$; masa $M = 3 \times 10^5 kg$; empuje máximo $T = 6 \times 10^5 N$; superficie alar $S = 510\ m^2$; coeficientes de la polar y densidad del aire $\rho = 1{,}2 kg/m^3$, $C_{L_{max}} = 1,7$, $\alpha_T = 10°$.


V(t)
CM
z
x2
x1

SOLUCIÓN

1 Esquema fuerzas y momentos que actúan sobre el avión.

La figura 5 representan las fuerzas y momentos que actúan sobre el avión, donde hay que destacar que μ_r es el coeficiente de rozamiento de las ruedas con el suelo.

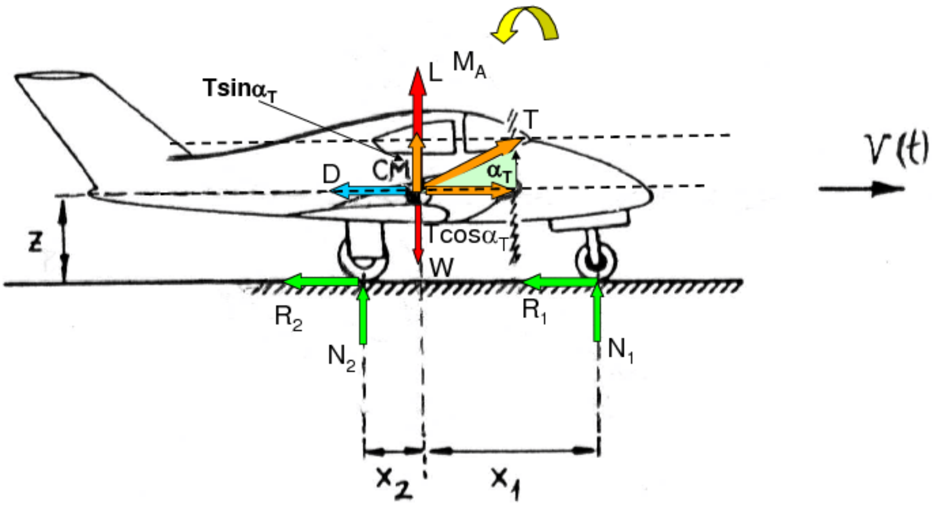


Figura 5: Fuerzas y momentos que actúan sobre el avión en la maniobra de despegue.

donde $M_A$es el momento aerodinámico generado por el ala del avión.

2 Ecuaciones del movimiento.

Las ecuaciones del movimiento vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\sum F_{x_v} &\rightarrow \quad \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T\cos\alpha_T - D - \mu_r\left(N_1 + N_2\right) \\
\sum F_{y_v} &\rightarrow \quad L + T\sin\alpha_T - W + \left(N_1 + N_2\right) = 0 \\
\sum F_{z_v} &\rightarrow \quad M_A + N_1 x_1 - N_2 x_2 - \mu_r\left(N_1 + N_2\right) z_p = 0
\end{aligned}$$

de la segunda ecuación podemos observar que

$$N_1 + N_2 = -L - T\sin\alpha_T + W$$

esta relación la podemos emplear en la primera ecuación para convertirla en

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T\cos\alpha_T - D + \mu_r\left(L - W + T\sin\alpha_T\right)$$

utilizando las relaciones para la sustentación y la resistencia tenemos que

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T(\cos\alpha_T - \mu_r\sin\alpha_T) - \mu_r W - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_D - \mu_r C_L\right)$$

utilizando el modelo de polar parabólica $C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = C_{D_0} + kC_L^2$, y asumiendo que durante esta fase de despegue el ángulo de ataque $\alpha = \theta = cte$, que el $C_L = cte$ y que el $C_D = cte$ por lo que la ecuación de la dinámica viene dada por

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T(\cos\alpha_T - \mu_r\sin\alpha_T) - \mu_r W - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2 - \mu_r C_L\right)$$

3 Calcular la velocidad de rotación del avión V_R

Para calcular la velocidad de rotación, V_R, es necesario el identificar que la rotación del avión se produce justo en el instante en el que las fuerzas normales en el tren de aterrizaje del morro del avión dejan de actuar, es decir $N_1 = 0$. Por velocidad de rotación se considera la velocidad a la que el avión es capaz de pivotar sobre el tren de aterrizaje posterior debido a las fuerzas aerodinámicas generadas por el avión en su fase de despegue. A partir de las ecuaciones generales del movimiento previamente derivadas, aplicamos $N_1 = 0$ resultando en:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x_v} &\rightarrow \quad \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T\cos\alpha_T - D - \mu_r N_2 \\
\sum F_{y_v} &\rightarrow \quad L + T\sin\alpha_T - W + N_2 = 0 \\
\sum F_{z_v} &\rightarrow \quad M_A - N_2 x_2 - \mu_r z_p N_2 = 0
\end{aligned}$$

por lo que empleando las dos últimas ecuaciones tenemos que

$$N_2 = W - L - T\sin\alpha_T \rightarrow M_A + (L + T\sin\alpha_T - W)(x_2 + \mu_r z_p) = 0$$

donde el momento aerodinámico y la sustentación vienen dados por

$$\begin{aligned}
M_A &= \frac{1}{2}\rho V^2 S c C_{M_y} \\
L &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L
\end{aligned}$$

por lo que la ecuación de los momentos puede reescribirse como

$$\tfrac{1}{2}\rho V^2 S c C_{M_y} + \left(\tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_L + T\sin\alpha_T - W\right)(x_2 + \mu_r z_p)$$

si asumimos que $C_{M_y}(\theta, \delta_e) = cte$, es decir que tanto el ángulo de ataque (recordar que $\alpha = \theta$en configuración de despegue justo antes a la rotación), y que el timón de profundidad (δ_e) se mantiene constante durante la maniobra de despegue, entonces podemos obtener una relación para la velocidad de rotación V_R

$$V_R^2 = \frac{(W - T\sin\alpha_T)(x_2 + \mu_r z_p)}{\frac{1}{2}\rho S\left(c C_{M_y} + C_L (x_2 + \mu_r z_p)\right)}$$

4 Despreciando las fuerzas de rozamiento y la resistencia aerodinámica, plantear la ecuación que permite calcular la velocidad del avión V (t).

Despreciando las fuerzas de rozamiento y la resistencia aerodinámica, las ecuaciones del movimiento derivadas en la sección previa se reducen a

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T\cos\alpha_T - D - \mu_r (N_1 + N_2)$$

$$\text{Si} \quad T\cos\alpha_T \gg D + \mu_r (N_1 + N_2) \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dt} \approx T\cos\alpha_T \frac{g}{W} = cte$$

lo que implica que el avión se mueve aceleración constante, movimiento uniformemente acelerado, y esta es la ecuación diferencial que permite calcular la velocidad del avión en todo momento de la maniobra

5 Obtener, a partir de la ecuación anterior, la distancia recorrida en el suelo y el tiempo empleado en función de la velocidad.

Para obtener, a partir de la ecuación anterior, la distancia recorrida en el suelo y el tiempo empleado en función de la velocidad partimos de la ecuación diferencial y la manipulamos para obtener la distancia recorrida y el tiempo empleado

$$dV = T\cos\alpha_T \frac{g}{W}\ dt \quad \rightarrow \int dV = \int T\cos\alpha_T \frac{g}{W} dt \quad \rightarrow V = \frac{T\cos\alpha_T}{W} g\ t$$

por lo que obtenemos la relación del tiempo empleado como

$$t = \frac{W}{T\cos\alpha_T}\frac{1}{g}\ V$$

para obtener la relación de la distancia recorrida empleamos la relación

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{T\cos\alpha_T}{W} g\ t = \frac{T\cos\alpha_T}{M}\ t$$

por lo que en forma integral tenemos

$$dx = \frac{T\cos\alpha_T}{M}\ tdt \quad \rightarrow \int dx = \int \frac{T\cos\alpha_T}{M}\ tdt \quad \rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{T\cos\alpha_T}{M}\ t^2$$

6 Calcular la distancia mínima que tiene que tener la pista para que un avión Boeing 747 despegue teniendo en cuenta que una vez que las ruedas del avión se separan del suelo, todavía tienen que quedar 500 metros de pista.

Para obtener la distancia mínima se parte de la relación de la primera ecuación

$$\sum F_{y_v} \quad \rightarrow \quad L + T\sin\alpha_T - W + (N_1 + N_2) = 0$$

de donde para el despegue las fuerzas normales N_1y N_2son cero por lo que

$$L = W - T\sin\alpha_T$$

de donde se puede extraer la relación de cual es la velocidad mínima utilizando el $C_{L_{max}}$y la propia definición de la sustentación

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow V_{min} = \sqrt{\frac{2(W - T\sin\alpha_T)}{\rho S C_{L_{max}}}} = 74{,}61\ m/s$$

Esta es la velocidad mínima justo en el instante de despegue, por lo que el tiempo que tarda en llegar a esa velocidad es

$$t = \frac{W}{T\cos\alpha_T}\frac{1}{g}\ V = \frac{M}{T\cos\alpha_T}\ V = \frac{3\times 10^5\ kg}{6\times 10^5\ N\cdot\cos 10^\circ} 74{,}61\ m/s = 37{,}88\ s$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{T\cos\alpha_T}{M}\ t^2 = \frac{1}{2}\frac{6\times 10^5\ N\cdot\cos 10^\circ}{3\times 10^5\ kg}\ 18{,}94 = 1413{,}15\ m$$

esta es la distancia que el avión recorre hasta llegar a la velocidad mínima de despegue, si le añadimos los 500 metros que tiene que haber nos resulta que la distancia mínima de la pista son 1913,15 m

Problema 6

Examen de Aeronaves y Vehículos Espaciales (19/06/2008)
Duración: 1 hora

Se dispone de un avión trimotor *McDonnell Douglas DC-10* con las siguientes características:

- Polar parabólica de coeficientes constantes: $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ ($C_{D_0} = 0{,}02$, $k = 0{,}07$)
- Superficie alar: $S = 367{,}7\text{m}^2$
- Masa total de la aeronave: $m = 190 \cdot 10^3\,\text{kg}$
- Coeficiente de sustentación máximo: $C_{L_{max}} = 1{,}3$
- Planta motora: Tres turbofanes GE CF6-6D. Cada motor se caracteriza por:
  - Empuje: $T = T_0 \frac{\rho}{\rho_{sl}}$, con $T_0 \in [0, 170900]$ N

La aeronave se encuentra realizando un vuelo de crucero a 10000 m de altura, a velocidad constante, cuando se produce un fallo de uno de los tres motores de los que dispone la aeronave, quedando totalmente inoperativo:

1 ¿Es posible mantener un crucero a velocidad constante, a la misma altitud de vuelo? En caso afirmativo, calcular la velocidad máxima a la que se puede volar.

2 Calcular a qué altitud deberá descender el avión (como mínimo) para poder realizar un vuelo de crucero a una velocidad de 700 km/h

Estando el avión volando a la altitud calculada en el apartado anterior, fallan los dos motores restantes, por lo que el piloto decide realizar un planeo a velocidad constante.

3 Plantear las ecuaciones que permiten calcular el ángulo de planeo.

4 El aeropuerto más cercano se encuentra a 130 km de distancia. Comprobar si es posible aterrizar. Suponer que la densidad del aire permanece constante, y es la correspondiente a la altitud de vuelo calculada en el apartado anterior.

NOTAS:

- Por razones de seguridad, la velocidad mínima de vuelo tiene que ser, al menos, un 10 % superior a la velocidad de entrada en pérdida: $V \geq 1{,}1V_{stall}$
- Se considera la masa constante.
- Atmósfera Estándar Internacional:
  - $\rho_{sl} = 1{,}225\,\text{kg/m}^3$
  - $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$
  - $T_{sl} = 288{,}16\,\text{K}$
  - $R_g = 287\,\text{J/(kg K)}$
  - $\alpha = 6{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{K/m}$
  - $h(\rho) = \frac{T_{sl}}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{sl}}\right)^{\frac{R_g\alpha}{g - R_g\alpha}}\right)$

SOLUCIÓN

1 Comprobación de la viabilidad de mantener un crucero a una altitud de 10000 m

Para contestar a esta pregunta, hay que plantear las ecuaciones del vuelo de crucero horizontal a velocidad constante:

$$L = W \tag{6}$$

$$T_{total} = D \tag{7}$$

Existen dos procedimientos para dar respuesta a la pregunta que se plantea. Se recomienda el primero de ellos por ser mucho más directo y cargado de sentido físico.

La forma más rápida y directa para dar solución a este apartado es mediante el siguiente razonamiento:

> "El avión podrá mantener un crucero nivelado a 10000 m y a velocidad constante sí y sólo sí el empuje máximo disponible a esa altitud es mayor o igual que la resistencia mínima posible"

El empuje máximo disponible vendrá dado por:

$$T_{max} = 2T_{0_{max}} \frac{\rho}{\rho_{sl}} \tag{8}$$

donde se conocen todos los parámetros, excepto la densidad a 10000 m. No obstante, ésta se puede determinar a partir de la expresión que se da en el enunciado:

$$h = \frac{T_{sl}}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{sl}}\right)^{\frac{R_g\alpha}{g-R_g\alpha}}\right) \Rightarrow \rho = \rho_{sl}\left(1 - \frac{\alpha h}{T_{sl}}\right)^{\frac{g}{R_g\alpha}-1} \tag{9}$$

Con esta ecuación se puede encontrar que:

$$\rho\,(h = 10000\text{m}) = 0{,}4130\,\text{kg/m}^3 \tag{10}$$

De este modo, el empuje máximo disponible a 10000 m será:

$$T_{max} = 115235\,\text{N} \tag{11}$$

Se trata ahora de calcular la resistencia mínima posible. Así, a partir de las ecuaciones 6 y 7, junto con la definición de la eficiencia aerodinámica, se puede establecer que:

$$E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \Rightarrow D = \frac{W}{E} \Rightarrow D_{min} = \left(\frac{W}{E}\right)_{min}$$

Puesto que el peso de la aeronave es constante:

$$\left(\frac{W}{E}\right)_{min} \Rightarrow E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = 13{,}3631$$

Por tanto, se puede concluir que la resistencia mínima posible es:

$$D_{min} = \frac{W}{E_{max}} = 139339\,\mathrm{N} \tag{12}$$

Puesto que la resistencia mínima es mayor que el empuje máximo disponible, se puede concluir que **no se puede mantener un crucero 10000 m y a velocidad constante con un motor inoperativo**.

La otra forma de proceder para dar respuesta a la pregunta que se plantea se basa en intentar encontrar una velocidad de vuelo físicamente posible que satisfaga las ecuaciones del crucero. A continuación se detalla el procedimiento.

Teniendo en cuenta que la polar del avión es conocida, de las ecuaciones 6 y 7 se puede deducir:

$$T_{total} = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{1}{2}\rho S V^2 k \left(\frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \tag{13}$$

La ecuación 13 representa el empuje que se necesita para mantener un crucero a velocidad constante (V) y a una altura determinada ($\rho = \rho(h)$), para un avión con masa y polar conocidas.

Teniendo en cuenta la situación que se plantea en este problema, la forma de comprobar si es posible mantener un crucero a 10000 m es encontrando una velocidad de vuelo que satisfaga la ecuación 13 y que sea físicamente posible (esto es, que sea real y mayor que $1{,}1V_{stall}$). Además, habrá que considerar que los motores proporcionando el máximo empuje posible, ya que si no se encuentra ninguna velocidad de vuelo factible con empuje máximo, será imposible encontrarla con un empuje inferior.

Introduciendo el modelo de empuje en la ecuación 13 y despejando la velocidad de vuelo, queda:

$$2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}} = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \tag{14}$$

$$2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S V^2 = \left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 V^4 C_{D_0} + kW^2 \tag{15}$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 C_{D_0} V^4 - 2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S V^2 + kW^2 = 0 \tag{16}$$

$$V^2 = \frac{2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S \pm \sqrt{\left(2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 C_{D_0} k W^2}}{2\left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 C_{D_0}} \tag{17}$$

Ya se conocen todos los datos para calcular V mediante la ecuación 17. Así, haciendo aplicación numérica, puede comprobarse que el radicando que aparece en esta ecuación es:

$$\left(2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 C_{D_0} k W^2 = -3{,}5378\cdot 10^{13} \tag{18}$$

Este resultado implica que no existe ninguna velocidad de vuelo posible (ya que el resultado de la expresión 17 sería una velocidad compleja). Por este motivo, se puede concluir que el avión no es capaz de mantener un vuelo de crucero a altitud y velocidad constantes con un motor inoperativo, de modo que el piloto se verá obligado a realizar un descenso.

2 Cálculo de la altura a la que se tendrá que descender (como mínimo) para poder realizar un vuelo de crucero a 700km/h

Puesto que se busca seguir un vuelo de crucero a altitud y velocidad constantes, la solución de este apartado se basa en la ecuación 13 obtenida anteriormente:

$$T_{total} = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho SV^2}$$

Teniendo en cuenta que para una velocidad de vuelo dada, el empuje requerido para mantener la altitud a esa velocidad crece con la altitud a la que se quiera volar. Así, para calcular la altitud máxima a la que se puede volar a la velocidad requerida, de nuevo es necesario seleccionar el máximo empuje disponible de los motores. Es importante no olvidar que el empuje máximo que puede entregar cada motor depende de la densidad, y por tanto de la altitud de vuelo.

$$2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}} = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho SV^2} \tag{19}$$

En esta ecuación, todo es conocido excepto la densidad, despejando, se obtiene:

$$\rho = \sqrt{\frac{kW^2}{\frac{T_{0_{max}}}{\rho_{sl}}SV^2 - \left(\frac{1}{2}SV^2\right)^2 C_{D_0}}} = 0{,}4994\,\mathrm{kg/m^3} \tag{20}$$

Una vez conocida la densidad requerida para volar a altura constante y con una velocidad de 700km/h, se puede usar la Atmósfera Estándar Internacional para calcular a qué altura corresponde el valor de densidad obtenido:

$$h = \frac{T_{sl}}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{sl}}\right)^{\frac{R_g\alpha}{g-R_g\alpha}}\right) \Rightarrow h(\rho = 0{,}4994) = 8432\mathrm{m} \tag{21}$$

3 Planteamiento de las ecuaciones que definen el ángulo de planeo

Teniendo en cuenta que se trata de un planeo a velocidad constante, las ecuaciones que definen esta condición de vuelo vienen dadas por el siguiente equilibrio de fuerzas:

$$L = W\cos\gamma_d \tag{22}$$

$$D = W\sin\gamma_d \tag{23}$$

Dividiendo 23 entre 22, se obtiene:

$$\tan\gamma_d = \frac{D}{L} = \frac{1}{E} \tag{24}$$

4 ¿Consigue aterrizar el avión en un aeropuerto situado a 130 km de distancia?

La distancia recorrida por el avión durante todo el planeo puede calcularse a partir del ángulo de planeo de la siguiente forma:

$$\tan\gamma_d = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan\gamma_d} \tag{25}$$

donde h es la altitud desde la que se inicia el planeo y x es la distancia horizontal recorrida.

Para saber si el avión llega o no al aeropuerto, hay que calcular la distancia horizontal máxima que puede recorrer. Para ello, hay que tener en cuenta que la distancia recorrida será máxima cuando el ángulo de planeo sea mínimo; y este a su vez será mínimo cuando se vuele con eficiencia aerodinámica máxima.

$$E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = 13{,}3631$$

$$\tan\gamma_{d_{min}} = \frac{1}{E_{max}} = 0{,}0748$$

$$x_{max} = \frac{h}{\tan\gamma_d} = 112680\text{m}$$

Puesto que el aeropuerto está situado a 130000m, puede concluirse que el avión no es capaz de llegar al aeropuerto.

Problema 7

Examen de Aeronaves y Vehículos Espaciales (05/07/2008)
Duración: 1 hora

Se dispone de un avión con las siguientes características:

- Polar parabólica de coeficientes constantes: $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ ($C_{D_0} = 0{,}019$, $k = 0{,}072$), superficie alar: $S = 380\text{m}^2$, masa total de la aeronave: $m = 170 \cdot 10^3\,\text{kg}$, coeficiente de sustentación máximo: $C_{L_{max}} = 1{,}3$

El empuje máximo que puede proporcionar la planta motora es: $T_{max} = 512700\,\text{N}$. Además,por razones de seguridad, el motor no se puede parar completamente durante el vuelo, de modo que existe un empuje mínimo (con los motores en régimen de ralentí): $T_{min} = 40000\,\text{N}$. El piloto puede seleccionar cualquier valor del empuje comprendido entre el máximo y el mínimo.

En el instante inicial, la aeronave se encuentra realizando un vuelo de crucero a 4000 m de altitud y a velocidad constante, volando con un coeficiente de sustentación $C_L = 0{,}6$, y estando situada a 200 km del aeropuerto en el que debe aterrizar.

Se desea que el descenso final al aeropuerto se realice con velocidad y ángulo de descenso constantes. Además, por razones económicas, **se exige que el motor esté en régimen de ralentí durante todo el tramo de descenso**.

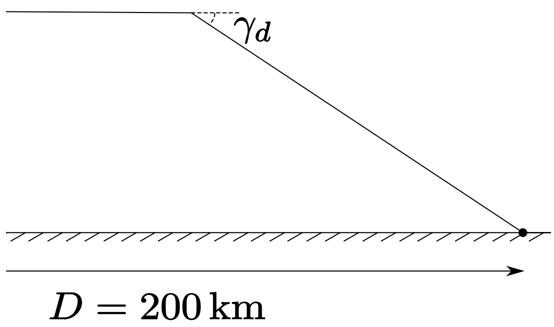


Figura 6: Esquema de la trayectoria seguida por la aeronave

Se pide:

1 Plantear las ecuaciones de fuerzas del tramo de crucero y de descenso.

2 Calcular a qué distancia del aeropuerto habrá que empezar el descenso para que este tramo sea lo más largo posible.

3 Calcular las velocidades de vuelo, tanto en crucero como en descenso.

El consumo instantáneo de combustible del avión puede calcularse de la siguiente forma:

$$c[\text{kg/s}] = c_e T$$

donde c_e es el consumo específico, que puede considerarse constante y con valor $c_e = 9{,}01 \cdot 10^{-6}[\text{kg/(N} \cdot \text{s)}]$; y T es el empuje suministrado por los motores.

4 Calcular la masa de combustible consumida durante todo el vuelo.

NOTAS:

- Por razones de seguridad, la velocidad mínima de vuelo tiene que ser, al menos, un 10 % superior a la velocidad de entrada en pérdida: $V \geq 1{,}1 V_{stall}$
- Se considera la masa constante.
- Se considera la densidad constante ($\rho = 1{,}225\,\mathrm{kg/m^3}$).
- Considerar la hipótesis de ángulo de descenso mucho menor que uno: $\gamma_d \ll 1$
- Suponer que el avión puede pasar de las condiciones de crucero (V_{cr}, $C_{L_{cr}}$ y T_{cr}) a las de descenso (V_{desc}, $C_{L_{desc}}$ y T_{desc}) de forma instantánea.

SOLUCIÓN

1 Ecuaciones de fuerzas:

Crucero:

$$\begin{aligned} T &= D \\ L &= W \end{aligned} \tag{26}$$

Descenso:

$$\begin{aligned} T &= D - W \sin\gamma_d \quad \simeq D - W\gamma_d \\ L &= \quad W \end{aligned} \tag{27}$$

2 Distancia a la que habrá que comenzar el descenso:

Puesto que en crucero se consume más combustible que durante el descenso, para ahorrar el máximo combustible posible, hay que iniciar el descenso lo antes posible. Para ello, será necesario encontrar el ángulo mínimo de descenso.

De las ecuaciones 27, se obtiene:

$$\gamma_d = \frac{D-T}{W} = \frac{D-T}{L} = \frac{1}{E} - \frac{T}{W} \tag{28}$$

Teniendo en cuenta que el empuje en descenso es constante ($T = T_{min}$) y que la masa de la aeronave también se puede considerar constante, el ángulo de descenso mínimo se obtendrá cuando se vuele a eficiencia aerodinámica máxima:

$$\gamma_{d_{min}} = \frac{1}{E_{max}} - \frac{T_{min}}{mg} = 2\sqrt{kC_{D_0}} - \frac{T_{min}}{mg} = 0{,}05\,\mathrm{rad} \tag{29}$$

Conociendo el ángulo de descenso mínimo (γ_d), junto con la altitud de vuelo, se puede calcular la distancia horizontal que se recorre durante el planeo (d), que justamente la distancia del aeropuerto a la que habrá que iniciar el descenso:

$$\tan\gamma_{d_{min}} = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\tan\gamma_{d_{min}}} = 79992\,\mathrm{m} \tag{30}$$

3 Cálculo de las velocidades de vuelo en crucero y descenso.

Crucero:

Puesto que en el enunciado se indica el coeficiente de sustentación de la aeronave durante el crucero, usando las ecuaciones 33 se puede obtener la velocidad de vuelo:

$$L = W = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \Rightarrow V_{crucero} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = 109{,}2237\,\mathrm{m/s} \tag{31}$$

Descenso:

Puesto que en el apartado anterior se ha obtenido que el descenso ha de realizarse a eficiencia aerodinámica máxima, el coeficiente de sustentación durante el descenso será por tanto el óptimo. Así, se puede calcular la velocidad de vuelo durante el descenso del mismo modo que en el caso anterior:

$$W \simeq L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_{opt}} \Rightarrow V_{descenso} = \sqrt{\frac{2W\cos\gamma_{d_{min}}}{\rho S C_{L_{opt}}}} = 117{,}9685\,\mathrm{m/s} \tag{32}$$

4 Masa de combustible gastada durante el vuelo:

El modelo de consumo de combustible que se proporciona en el enunciado es:

$$c[\mathrm{kg/s}] = c_e T$$

Teniendo en cuenta que c_e es constante en todo el vuelo, y que T permanece constante durante el crucero y durante el descenso, la masa de combustible consumida vendrá dada por:

$$m_{fuel} = c_e T_{crucero} t_{crucero} + c_e T_{descenso} t_{descenso}$$

donde $t_{crucero}$ y $t_{descenso}$ son los tiempos de vuelo en crucero y descenso respectivamente.

De este modo, para resolver este apartado, habrá que calcular los empujes necesarios en los dos segmentos, así como los tiempos de vuelo.

En cuanto al empuje en crucero, puesto que se conoce la velocidad y el coeficiente de sustentación:

$$T = D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D_0} + k C_L^2) = 124730\,\mathrm{N}$$

El empuje durante el descenso es igual al empuje mínimo que pueden suministrar los motores.

Por otra parte, el cálculo de los tiempos de vuelo resulta trivial, ya que la velocidad es constante en los dos segmentos. Sólo se necesita determinar la distancia recorrida.

$$d_{crucero} = D - d = 120007\,\mathrm{m} \Rightarrow t_{crucero} = \frac{d_{crucero}}{V_{crucero}} = 1098{,}7\,\mathrm{s}$$

$$d_{descenso} = \frac{h}{\sin\gamma_{min}} = 80092\,\mathrm{m} \Rightarrow t_{descenso} = \frac{d_{descenso}}{V_{descenso}} = 678{,}93\,\mathrm{s}$$

Con esto se puede determinar la masa de combustible consumida:

$$m_{crucero} = 1234{,}76\,\text{kg}$$

$$m_{descenso} = 244{,}69\,\text{kg}$$

$$m_{total} = 1479{,}44\,\text{kg}$$

Problema 8

Examen de Aeronaves y Vehículos Espaciales (04/09/2008)
Duración: 1 hora

Se dispone de un avión con las siguientes características:

- Polar parabólica de coeficientes constantes: $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ ($C_{D_0} = 0{,}019$, $k = 0{,}07$)
- Superficie alar: $S = 380\text{m}^2$,
- Peso estructural más carga de pago: $W_S = 120 \cdot 10^4\,\text{N}$
- Máxima carga de combustible: $W_{F_{max}} = 60 \cdot 10^4\,\text{N}$

Una compañía aérea está evaluando la posibilidad de utilizar esta aeronave para cubrir una de sus rutas comerciales, por lo que necesita saber qué alcance tiene y qué carga de combustible tiene que incluir en el avión.

En el análisis del vuelo, se considerará que en todo momento **la altitud y el coeficiente de sustentación permanecen constantes**. Además, el consumo instantáneo de combustible del avión puede calcularse de la siguiente forma:

$$c[\text{N/s}] = c_e T$$

donde c_e es el consumo específico, que puede considerarse constante y con valor $c_e = 9{,}01 \cdot 10^{-5}[1/\text{s}]$; y T es el empuje suministrado por los motores.

Se pide:

1 Considerando que todo el vuelo se puede aproximar por un único tramo de crucero, plantear las ecuaciones de fuerzas, la ecuación cinemática y la ley de variación de masa del avión.

2 Obtener la ecuación que permite calcular el alcance del avión en función de la carga de combustible inicial, del coeficiente de sustentación y de la altitud de vuelo.

3 Si todo el vuelo transcurre a 10000 m de altitud ($\rho = 0{,}4135\,\text{kg/m}^3$), ¿cuál es el máximo alcance que se puede obtener?

4 Si se desea volar a 10000 m de altitud y con $C_L = C_{L_{opt}}$, ¿qué carga de combustible hay que incluir en la aeronave para llegar a un aeropuerto situado a 8000 km de distancia?

SOLUCIÓN

1 Ecuaciones del movimiento:

- Ecuaciones de fuerzas:

De forma general, las ecuaciones de fuerzas en un vuelo de crucero a altura constante son:

$$\begin{aligned} T - D &= \frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \\ L &= W \end{aligned} \tag{33}$$

Puesto que puede asumirse que tanto la velocidad como la masa varían muy lentamente con el tiempo, las ecuaciones 33 pueden simplificarse en:

$$T = D \tag{34}$$

$$L = W \tag{35}$$

La ecuación cinemática proporciona la variación de la posición en función de la velocidad, esto es:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V \tag{36}$$

Por último, la ley de variación de la masa será:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -c = -c_e T \tag{37}$$

2 Ecuación para calcular el alcance:

Se va a obtener la expresión que permite calcular el alcance de la aeronave en función de la carga de combustible inicial, del coeficiente de sustentación y de la altitud de vuelo.

Si en la ecuación 36 se hace un cambio de variable, tomando el peso como variable independiente:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}W}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = V \tag{38}$$

introduciendo la ecuación 37:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}W} = -\frac{V}{c_e T} \tag{39}$$

teniendo en cuenta las ecuaciones 52 y 35, junto con la definición de la eficiencia aerodinámica:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}W} = -\frac{VE}{c_e W} \tag{40}$$

por lo que el alcance podría calcularse domo:

$$x_A = -\int_{W_i}^{W_f} \frac{V}{c_e} E \frac{dW}{W} \tag{41}$$

Hay que tener en cuenta que la velocidad de vuelo depende del peso de la aeronave a través de la ecuación 35:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \tag{42}$$

Con esto, la expresión que permite calcular el alcance queda:

$$x_A = -\frac{E}{c_e}\sqrt{\frac{2}{\rho S C_L}}\int_{W_i}^{W_f}\frac{dW}{\sqrt{W}} \tag{43}$$

$$x_A = \frac{E}{c_e}\sqrt{\frac{2}{\rho S C_L}}2\left(\sqrt{W_i} - \sqrt{W_f}\right) \tag{44}$$

Finalmente, introduciendo el peso fijo W_S y el peso de combustible inicial W_F, la expresión requerida es:

$$x_A = \frac{2\sqrt{2}}{c_e}\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\sqrt{\frac{W_S}{\rho S}}\left(\sqrt{1 + \frac{W_F}{W_S}} - 1\right) \tag{45}$$

3 Máximo alcance para un vuelo a 1000m de altitud.

Teniendo en cuenta la expresión 45, puede verse que el alcance de un avión depende de:

- Carga de combustible inicial (W_F).
- Altura de vuelo, cuya dependencia se aprecia a través de ρ
- Coeficiente de sustentación (C_L)

los demás parámetros que aparecen en la expresión 45 (S, W_S, c_E y $C_D = C_D(C_L)$) no pueden ser alterados.

Puesto que en el enunciado se fija la altitud de vuelo, habrá que buscar qué valores de W_F y C_L maximizan el alcance para el avión dado a la altitud considerada.

Resulta obvio que cuanto mayor sea la carga de combustible, mayor será el alcance (ver ecuación 45), por lo que habrá que usar la máxima carga de combustible que puede transportar el avión:

$$W_F^* = W_{F_{max}} = 60 \cdot 10^4\text{N}$$

Respecto al coeficiente de sustentación, el valor que maximiza el alcance es el mismo que maximiza $C_L^{1/2}/C_D$, cuyo valor es:

$$C_L^* = \frac{C_{L_{opt}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{3k}}$$

Introduciendo valores numéricos, el máximo alcance que se puede obtener a esa altitud es:

$$x_{A_{max}} = 13348\text{km}$$

4 Carga de combustible para volar a 8000 km con $C_L = C_{L_{opt}}$

Hay que despejar W_F de la ecuación 45

$$W_F = W_S \left[\left(\frac{x_A c_e C_D}{2\sqrt{2} C_L^{1/2}} \sqrt{\frac{\rho S}{W_S}} + 1 \right)^2 - 1 \right] \tag{46}$$

Introduciendo valores numéricos queda:

$$W_F = 3{,}9674 \cdot 10^5 \mathrm{N}$$

Problema 9

Examen de Aeronaves y Vehículos Espaciales (05/06/2009)
Duración: 1 hora

Se desea evaluar la posibilidad de lanzar un avión no tripulado (UAV) desde una catapulta. El UAV tiene las siguientes características:

- Polar parabólica de coeficientes constantes: $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ ($C_{D_0} = 0{,}03$, $k = 0{,}073$)
- Superficie alar: $S = 0{,}9\text{m}^2$
- Masa total de la aeronave: $m = 20\,\text{kg}$
- Coeficiente de sustentación máximo: $C_{L_{max}} = 1{,}2$
- Empuje máximo del motor: $T_{max} = 100\,\text{N}$

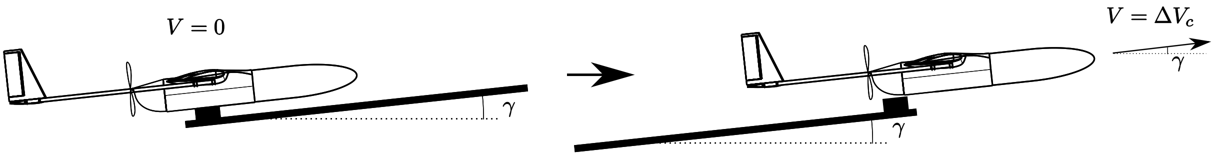


Figura 7: Esquema del lanzamiento

En primer lugar, se va a analizar el caso de un lanzamiento con ángulo de trayectoria nulo ($\gamma = 0$). Se pide:

1. Calcular el incremento de velocidad (ΔV_c) **mínimo** que tiene que generar la catapulta para que a la salida de la misma, la aeronave mantenga un vuelo nivelado a velocidad constante.
2. ¿Qué empuje tiene que suministrar el motor en las condiciones del apartado anterior?
3. Si la catapulta se orienta con un viento en contra de $V_{wind} = 5\,\text{m/s}$, calcular el incremento de velocidad mínimo de la catapulta para que el avión mantenga esta condición de vuelo.

A continuación se va a analizar el caso de un lanzamiento con un ángulo de trayectoria $\gamma = 20°$. Se considera que la aeronave mantiene un vuelo de ascenso con velocidad y ángulo de ascenso constante.

4 Plantear las ecuaciones del movimiento del avión (ascenso con velocidad constante y ángulo de ascenso $\gamma = 20°$).

5 Calcular el coeficiente de sustentación y el empuje necesario para que, a la salida de la catapulta, el avión mantenga un vuelo con ángulo de subida constante ($\gamma = 20°$) y velocidad constante (igual a la calculada en el primer apartado).

6 Calcular con qué velocidad debería salir el avión de la catapulta para mantener un vuelo de subida uniforme con ángulo ($\gamma = 20°$), si el motor se pone a toda potencia.

NOTAS:

- Todo el análisis se hace a nivel del mar, donde la densidad es $\rho = 1{,}225\,\text{kg/m}^3$.
- En el análisis del ascenso, no es aceptable suponer que γ es pequeño.

SOLUCIÓN

1 Incremento de velocidad mínimo que tiene que suministrar la catapulta.

El incremento de velocidad mínimo que tendrá que proporcionar la catapulta tiene que ser igual a la velocidad mínima de vuelo del avión, esto es, la velocidad de entrada en pérdida. Por tanto:

$$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \;\Rightarrow\; W = \frac{1}{2}\rho V_{stall}^2 S C_{L_{max}}$$

$$\Delta V_{min} = V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{max}}}} = 17{,}2220\,\mathrm{m/s}$$

2 Empuje necesario para volar en crucero a la mínima velocidad posible.

Para mantener un crucero uniforme en el momento de la salida del avión de la catapulta, el empuje deberá ser el necesario para vencer la resistencia:

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V_{stall}^2 S \left(C_{D_0} + k C_{L_{max}}^2\right) = 22{,}0921\,\mathrm{N}$$

3 Incremento de velocidad necesario si se tiene un viento en contra de $V_{wind} = 5\,\mathrm{m/s}$

Hay que tener en cuenta que la velocidad que interviene en las fuerzas aerodinámicas es la **velocidad aerodinámica** (V), la cual puede relacionarse con la velocidad respecto a tierra (V_g) y la velocidad del viento (V_{wind}) mediante:

$$V = V_g - V_{wind}$$

La mínima velocidad aerodinámica a la que puede volar una aeronave es la velocidad de entrada en pérdida (calculada en el primer apartado), siendo esta independiente de la velocidad del viento.

En este apartado se pide el mínimo incremento de velocidad que tiene que proporcionar la catapulta, o lo que es lo mismo, la mínima velocidad respecto a tierra que necesita la aeronave para poder volar:

$$V_{g_{min}} = V_{min} + V_{wind} = V_{stall} + V_{wind}$$

Como en este caso se tiene un viento en contra de 5 m/s, la velocidad del viento será: $V_{wind} = -5\,\mathrm{m/s}$, por lo que la velocidad que tendrá que proporcionar la catapulta es:

$$\Delta V_{min} = V_{stall} + V_{wind} = 17{,}2220 - 5 = 12{,}2220\,\mathrm{m/s}$$

4 Ecuaciones del movimiento del avión durante un ascenso uniforme.

A continuación se van a plantear las ecuaciones del movimiento del avión durante un vuelo de ascenso con velocidad constante y ángulo de ascenso constante. En la figura 8 se puede ver un esquema de las fuerzas que actúan sobre el avión.

Puesto que no existen aceleraciones, las fuerzas horizontales y verticales deberán estar equilibradas:

$$T = D + W\sin(\gamma) \tag{47}$$

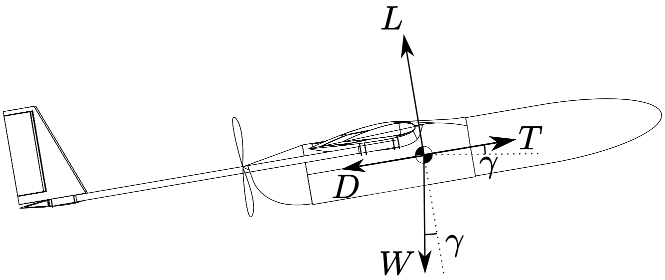


Figura 8: Esquema de las fuerzas que actúan sobre la aeronave durante el vuelo de ascenso.

$$L = W\cos(\gamma) \tag{48}$$

5 Cálculo del coeficiente de sustentación y del empuje necesario para mantener un vuelo con $V = 17{,}2220\,\mathrm{m/s}$ y $\gamma = 20°$

Conocido el ángulo de subida y la velocidad de vuelo, se puede determinar el coeficiente de sustentación mediante la ecuación (48):

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = W\cos(\gamma) \;\Rightarrow\; C_L = \frac{2W\cos(\gamma)}{\rho V^2 S} = \frac{2\cdot 20\cdot 9{,}8\cos(20°)}{1{,}225\cdot 17{,}2220^2\cdot \cdot 0{,}9} = 1{,}1276$$

Nótese que el coeficiente de sustentación obtenido es menor que el coeficiente de sustentación máximo ($C_{L_{max}}$).

Una vez conocido el coeficiente de sustentación, a partir de la ecuación 47 se puede obtener el empuje necesario:

$$\begin{aligned} T = D + W\sin(\gamma) &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2\right) + W\sin(\gamma) \\ &= \frac{1}{2}1{,}225\cdot 17{,}2220^2\cdot 0{,}9\cdot\left(0{,}03 + 0{,}073\cdot 1{,}1276^2\right) + 20\cdot 9{,}8\cdot\sin(20°) \\ &= 87{,}1860\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

6 Cálculo de la velocidad para que la aeronave mantenga un ascenso uniforme con $\gamma = 20°$ y el motor a toda potencia.

Si se conoce el empuje ($T = T_{max} = 100\,\mathrm{N}$) y el ángulo de subida ($\gamma = 20°$), las ecuaciones (47) y (48) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: la velocidad de vuelo (V) y el coeficiente de sustentación necesario (C_L).

Puesto que lo que se pide es determinar la velocidad de vuelo, despejamos el coeficiente de sustentación de la ecuación (48) y lo introducimos en (47), quedando:

$$\begin{aligned} T = D + W\sin(\gamma) &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2\right) + W\sin(\gamma) \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + k\left(\frac{2W\cos(\gamma)}{\rho V^2 S}\right)^2\right) + W\sin(\gamma) \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + \frac{2k\left(W\cos(\gamma)\right)^2}{\rho V^2 S} + W\sin(\gamma) \end{aligned}$$

Operando, podemos transformar la ecuación anterior en una ecuación bicuadrática en la velocidad:

$$\frac{1}{2}\rho^2 S^2 C_{D_0} V^4 + \left(W\sin(\gamma) - T_{max}\right)\rho S V^2 + 2k\left(W\cos(\gamma)\right)^2 = 0 \tag{49}$$

Resolviendo:

$$V^2 = \frac{-\left(W\sin(\gamma) - T_{max}\right)\rho S \pm \sqrt{\left(W\sin(\gamma) - T_{max}\right)^2 \rho^2 S^2 - 4\frac{1}{2}\rho^2 S^2 C_{D_0} 2k\left(W\cos(\gamma)\right)^2}}{\rho^2 S^2 C_{D_0}}$$

de donde se obtiene:

$$V_1 = 12{,}1582\,\mathrm{m/s} \;\; V_2 = 42{,}9107\,\mathrm{m/s}$$

Por último, queda por comprobar si ambas velocidades son físicamente posibles, esto es, hay que verifica si la velocidad menor está por encima de la velocidad de entrada en pérdida.

Para ello, hay que calcular el coeficiente de sustentación asociado a esta velocidad y comprobar que sea inferior al coeficiente de sustentación máximo del avión.

$$C_{L_{V_1}} = \frac{2W\cos(\gamma)}{\rho V_1^2 S} = 2{,}2625$$

Puesto que $C_{L_{V_1}} > C_{L_{max}}$, la velocidad V_1 no es posible, de modo que la única solución al problema es:

$$V_2 = 42{,}9107\,\mathrm{m/s}$$

Problema 10

Examen de Aeronaves y Vehículos Espaciales (02/07/2009)
Duración: 50 minutos

Se quieren analizar las actuaciones en crucero y en ascenso de un avión con las siguientes características:

- Polar parabólica de coeficientes constantes: $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ ($C_{D_0} = 0{,}019$, $k = 0{,}072$), superficie alar: $S = 380\text{m}^2$, masa total de la aeronave: $m = 170 \cdot 10^3\,\text{kg}$, coeficiente de sustentación máximo: $C_{L_{max}} = 1{,}3$
- El empuje que pueden proporcionar los motores se puede modelar mediante la siguiente ecuación:

$$T = T_0 \frac{\rho}{\rho_{sl}}$$

  donde ρ es la densidad correspondiente a la altura de vuelo, ρ_{sl} es la densidad a nivel del mar ($\rho = 1{,}225\,\text{kg/m}^3$) y T_0 es un parámetro que depende de la posición de la palanca de gases que fije el piloto, de forma que sus valores pueden oscilar entre $T_{0,min} = 0$ (motor parado) y $T_{0,max} = 512700\,\text{N}$ (empuje máximo a nivel del mar).

Se pide:

1. Plantear las ecuaciones de un vuelo de crucero a altura y velocidad constante, y de un vuelo de ascenso a velocidad constante.
2. Si la aeronave se encuentra volando a una altura $h = 7000$ m ($\rho = 0{,}4898\,\text{kg/m}^3$), ¿a qué velocidad y con qué coeficiente de sustentación hay que volar para obtener un crucero con la mínima resistencia posible?
3. Calcular el empuje necesario en las condiciones de vuelo del apartado anterior.
4. Calcular la máxima altura a la que la aeronave puede volar en crucero **a la velocidad calculada en el apartado 2**.
5. Calcular el techo de vuelo absoluto (máxima altura a la que la aeronave puede mantener un vuelo de crucero con velocidad constante).
6. Si volando a $h = 7000$ m ($\rho = 0{,}4898\,\text{kg/m}^3$) se quiere iniciar un ascenso, ¿cuál es el máximo ángulo de subida que se puede conseguir? ¿qué velocidad ascensional se tendría en este caso?

NOTAS:

- El valor de T_0 no es fijo. Se puede seleccionar cualquier valor (dentro de sus límites) para conseguir las actuaciones deseadas.
- Para el vuelo de ascenso, considerar la hipótesis de ángulo de subida pequeño ($\gamma \ll 1$)
- Atmósfera Estándar Internacional:
  - $\rho_{sl} = 1{,}225\,\text{kg/m}^3$
  - $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$
  - $T_{sl} = 288{,}16\,\text{K}$
  - $R_g = 287\,\text{J/(kg K)}$

- $\alpha = 6{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K/m}$
- $h(\rho) = \frac{T_{sl}}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{sl}}\right)^{\frac{R_g\alpha}{g - R_g\alpha}}\right)$

SOLUCIÓN

1 Ecuaciones del movimiento

$$T = D \tag{50}$$
$$L = W \tag{51}$$

2 Velocidad y coeficiente de sustentación para volar con la mínima resistencia posible a $h = 7000$ m

Un vuelo de crucero con mínima resistencia se dará cuando la eficiencia aerodinámica es máxima. Así, teniendo en cuenta la definición de la eficiencia aerodinámica, y la ecuación 51

$$E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \;\Rightarrow\; D = \frac{W}{E} \;\Rightarrow\; D_{min} = \frac{W}{E_{max}}$$

Por tanto, el coeficiente de sustentación al que habrá que volar será aquel que maximice la eficiencia aerodinámica, es decir, el coeficiente de sustentación óptimo:

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D_0} + kC_L^2} \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}C_L} = 0 \;\Rightarrow\; C_{L_{opt}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}} = 0{,}5137$$

Conocido el coeficiente de sustentación, de la ecuación 51 se puede obtener la velocidad de vuelo:

$$W = L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \;\Rightarrow\; V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{opt}}}} = 186{,}6861\,\mathrm{m/s}$$

3 Empuje necesario para volar en las condiciones del apartado anterior

Conocido el coeficiente de sustentación y la velocidad de vuelo, a partir de la ecuación 50 se puede determinar el empuje:

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2\right) = 123{,}24 \cdot 10^3\mathrm{N}$$

Se puede comprobar, según el modelo de empuje proporcionado, que se dispone del motor suficiente para volar en estas condiciones. Así, el empuje máximo disponible a esta altitud de vuelo será:

$$T_{max} = T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}} = 204{,}98 \cdot 10^3\mathrm{N}$$

que es mayor que el que se necesita.

4 Máxima altura a la que la aeronave es capaz de seguir volando a la velocidad del apartado anterior.

Partiendo de la ecuación 50 y del modelo de empuje:

$$T = D \;\Rightarrow\; T_0 \frac{\rho}{\rho_{sl}} = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D_0} + kC_L^2\right) \tag{52}$$

donde el coeficiente de sustentación será el necesario para satisfacer la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales (51):

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

por lo que la ecuación 52 puede escribirse como:

$$T_0 \frac{\rho}{\rho_{sl}} = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + k\frac{2W^2}{\rho V^2 S} \tag{53}$$

despejando la densidad:

$$\rho = \sqrt{\frac{\frac{2kW^2}{V^2 S}}{\frac{T_0}{\rho_{sl}} - \frac{1}{2}V^2 S C_{D_0}}} \tag{54}$$

De la ecuación anterior se deduce que para obtener la mínima densidad posible (que es equivalente a la altura máxima), se necesita que T_0 sea lo mayor posible. Esto es, el motor tiene que estar a toda potencia, por lo que $T_0 = T_{0,max} = 512700\,\mathrm{N}$. Así, introduciendo valores numéricos, se obtiene que la densidad mínima posible a una velocidad de vuelo de $V = 186{,}6861\,\mathrm{m/s}$ es:

$$\rho_{min} = 0{,}3211\,\mathrm{m/s} \tag{55}$$

Usando la definición de la Atmósfera Estándar Internacional proporcionada, se puede encontrar la altura asociada a esta densidad:

$$h_{max} = 10585\mathrm{m} \tag{56}$$

5 Altura máxima a la que la aeronave puede mantener un vuelo de crucero a velocidad constante

En este apartado se está pidiendo el techo absoluto de la aeronave. Esto es, hay que encontrar la altura para la que la resistencia mínima posible es igual al empuje máximo disponible.

Así, según lo visto en el apartado 2:

$$T = D = \frac{W}{E} \;\Rightarrow\; D_{min} = \frac{W}{E_{max}} = 2\sqrt{kC_{D_0}}W$$

Puesto que el empuje disminuye con la altura, habrá que encontrar el valor de la densidad del aire que hace que el empuje máximo sea igual a la resistencia mínima:

$$T = T_0\frac{\rho}{\rho_{sl}} \;\Rightarrow\; T_0\frac{\rho_{min}}{\rho_{sl}} = D_{min} = 2\sqrt{kC_{D_0}}W \;\Rightarrow\; \rho_{min} = \frac{2\sqrt{kC_{D_0}}W\rho_{sl}}{T_0}$$

De nuevo, la mínima densidad (máxima altura) la obtendremos con el motor a máxima potencia ($T_0 = T_{0,max} = 512700\,\mathrm{N}$). Así el techo de vuelo viene dado por:

$$\rho_{min} = 0{,}2945\,\mathrm{kg/m^3} \quad h_{max} = 11351\,\mathrm{m}$$

Problema 11

Examen de Aeronaves y Vehículos Espaciales (25/06/2010)
Duración: 50 minutos

Se desea estudiar la maniobra de despegue de un Boeing 747, la cual se puede dividir en dos fases:

R1 Rodadura con todas las ruedas en el suelo. Durante esta fase, la aeronave tiene todas sus ruedas en contacto con el suelo. El empuje es constante y paralelo a la velocidad.

R2 Rodadura con el tren principal en el suelo. Se ha producido la rotación, y la aeronave mantiene durante esta fase un ángulo de cabeceo de 7° respecto a la horizontal. El empuje es constante (igual al de la fase anterior) y forma un ángulo $\theta = 7°$ con la horizontal (y por tanto con el vector velocidad).

El cambio de la fase R1 a R2 se produce de forma instantánea cuando el avión alcanza la velocidad de rotación V_R. Además, los coeficientes de sustentación, resistencia y momento de cabeceo, permanecen constantes en ambas fases (aunque con valores distintos en cada una de ellas).

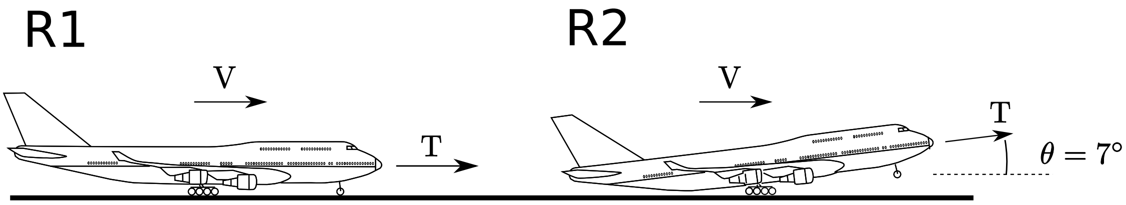


Figura 9: Esquema del despegue del B747

Se pide:

1. Plantear las ecuaciones del movimiento (ecuaciones de fuerzas y ecuación cinemática) en cada una de las fases del despegue.
2. Calcular la velocidad de rotación V_R
3. Calcular la velocidad de despegue V_{LOF}
4. Calcular el tiempo empleado y la distancia recorrida en la fase R1.
5. Calcular el tiempo empleado y la distancia recorrida en la fase R2.
6. Si se quisiera completar la fase R1 en una distancia de 1200 m, ¿qué empuje necesitaría el avión?

Datos:

- Densidad del aire: $\rho = 1{,}225\,\mathrm{kg/m^3}$
- Gravedad: $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$
- Peso de la aeronave: $W = 3660 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$
- Superficie alar: $S = 511\,\mathrm{m^2}$
- Cuerda media: $\bar{c} = 8{,}32\,\mathrm{m}$
- Empuje suministrado por los motores: $T = 1000 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$
- Coeficientes aerodinámicos durante la fase R1:

$$C_{L_{R1}} = 1{,}1 \quad C_{D_{R1}} = 0{,}14 \quad C_{m_{R1}} = 0{,}35$$

- Coeficientes aerodinámicos durante la fase R2:

$$C_{L_{R2}} = 1{,}4 \quad C_{D_{R2}} = 0{,}17$$

- Coeficiente de fricción de las ruedas: $\mu = 0{,}02$
- Situación del centro de gravedad en el B747:

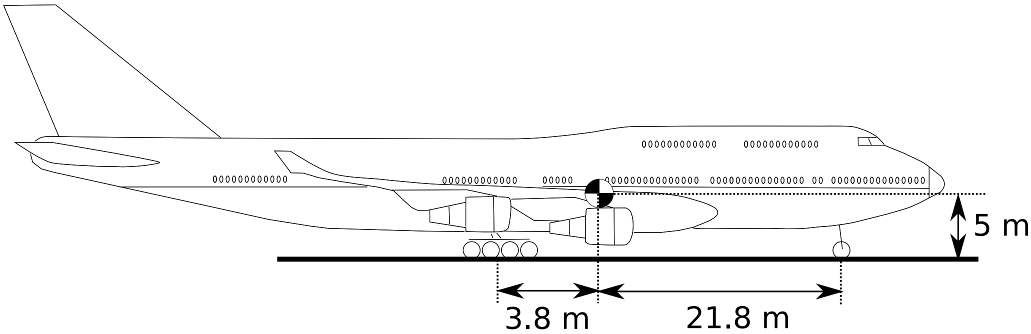


Figura 10: Situación del centro de gravedad del B747

NOTA:

- Se considera que el momento aerodinámico es positivo cuando la aeronave tiende a encabritar.

SOLUCIÓN

1 Ecuaciones del movimiento.

Durante la fase de despegue, sobre el avión actuarán fuerzas de sustentación y resistencia (debidas a la velocidad aerodinámica que adquiere el avión), fuerzas normales y de rozamiento con la pista, empuje y peso.

- Fase R1:

Se va a estudiar la fase del despegue que transcurre desde que el avión está parado en la cabecera de la pista, hasta que alcanza la velocidad de rotación (momento en el que el tren de morro pierde el contacto con el suelo).

El esquema de fuerzas durante esta fase puede verse en la figura 11.

Para escribir las ecuaciones de fuerzas, hay que tener en cuenta que la aeronave sigue un movimiento rectilíneo horizontal, por lo que no existen aceleraciones en el eje z. Sin embargo, no ocurrirá lo mismo en el eje x, ya que el avión está acelerando desde una velocidad inicial nula hasta la velocidad de rotación.

Las ecuaciones de fuerzas en estos ejes serán:

$$\text{Eje x}: \quad \frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = T - D - (F_{r_1} + F_{r_2}) = T - D - \mu(N_1 + N_2) \tag{57}$$

$$\text{Eje z}: \quad 0 = L + N_1 + N_2 - W \tag{58}$$

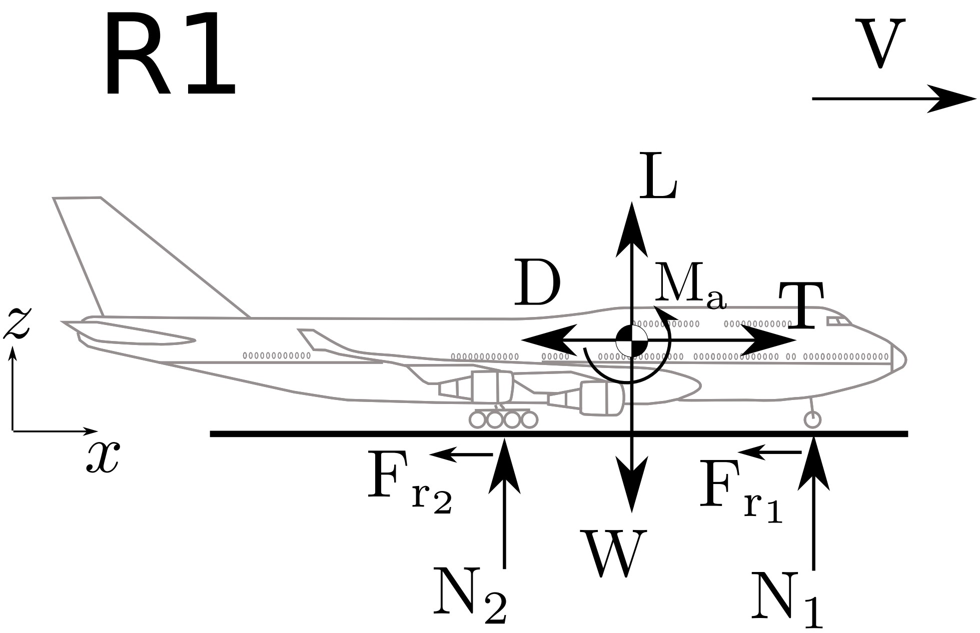


Figura 11: Esquema de fuerzas durante la fase R1

Por otra parte, la aeronave no está rotando, por lo que los momentos de cabeceo deberán equilibrarse. La ecuación de momentos respecto al centro de gravedad será:

$$M_a + N_1x_1 - N_2x_2 - h\mu(N_1 + N_2) = 0 \tag{59}$$

- Fase R2:

Esta fase se inicia justo después de la rotación del avión y concluye cuando se alcanza la velocidad de despegue. Como se comenta en el enunciado, se considera que durante toda esta fase el avión mantiene un movimiento horizontal, aunque con un ángulo de cabeceo de 7º.

El esquema de fuerzas durante esta fase puede verse en la figura 12.

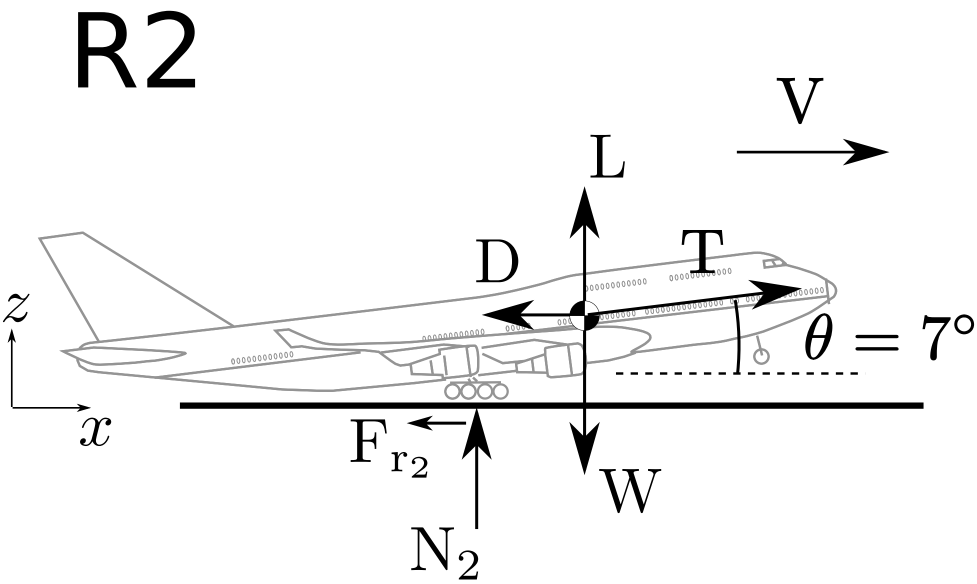


Figura 12: Esquema de fuerzas durante la fase R2

En este caso las fuerzas que actuarán sobre la aeronave serán las mismas. Sin embargo, el empuje del avión rotará solidariamente con éste, por lo que formará un determinado ángulo de 7º con la dirección del movimiento. Además, hay que tener el cuenta que el movimiento sigue siendo horizontal, por lo que tanto la sustentación como la resistencia llevarán la misma dirección que en R1 (por definición, la resistencia lleva la misma dirección que la velocidad y la sustentación será perpendicular a ésta).

Del mismo modo que en el caso anterior, no existirán aceleraciones según el eje z, pero sí según el eje x, por lo que las ecuaciones de fuerzas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \text{Eje x}: \quad \frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= T\cos\theta - D - F_{r_2} = T\cos\theta - D - \mu N_2 && (60)\\ \text{Eje z}: \quad 0 &= L + T\sin\theta + N_2 - W && (61) \end{aligned}$$

Del mismo modo, la ecuación de momentos quedaría:

$$M_a - N_2 x_2 - h\mu N_2 = 0 \tag{62}$$

Por último, la ecuación cinemática en ambos casos se puede escribir como:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V$$

2 Velocidad de rotación.

La rotación del avión se producirá en el momento en el que el tren de morro pierda el contacto con el suelo, esto es, cuando la fuerza normal N_1 se anule.

A partir de la ecuación de momentos (59), se va a buscar la velocidad que hace que $N_1 = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= M_a + N_1 x_1 - N_2 x_2 - h\mu(N_1 + N_2) = && (63)\\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c} C_{m_{R_1}} + N_1 x_1 - N_2 x_2 - h\mu(N_1 + N_2) && (64) \end{aligned}$$

Introduciendo (57) en la ecuación anterior:

$$0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c} C_{m_{R_1}} + N_1 x_1 - (W - L - N_1)x_2 - h\mu(W - L) \tag{65}$$

La velocidad de rotación V_R saldrá de la ecuación anterior, haciendo $N_1 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c} C_{m_{R_1}} - (x_2 + h\mu)(W - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_{R_1}}) \Rightarrow && (66)\\ V_R^2 &= \frac{(x_2 + h\mu)W}{\frac{1}{2}\rho S(\bar{c} C_{m_{R_1}} + (x_2 + h\mu) C_{L_{R_1}})} && (67)\\ V_R &= 79{,}58\mathrm{m/s} && (68) \end{aligned}$$

3 Velocidad de despegue.

El despegue se producirá en la fase R2, cuando el avión deje de estar en contacto con el suelo, por lo que la normal N_2 debe anularse.

A partir de la ecuación (61), si $N_2 = 0$, se obtiene:

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_{R_2}} = W - T\sin\theta \Rightarrow$$

$$V_{LOF} = \sqrt{\frac{2(W - T\sin\theta)}{\rho S C_{L_{R_2}}}} = 89{,}86\,\mathrm{m/s} \tag{69}$$

4 Tiempo y distancia empleados en la fase R1.

La ecuación (57) proporciona la variación de la velocidad con el tiempo, por lo que su integración permite conocer el tiempo transcurrido en función de la velocidad del avión, esto es:

$$\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = T - D - \mu(N_1 + N_2) \tag{70}$$

Para integrar esta ecuación, hay que tener en cuenta que tanto D depende de la velocidad, y que $N_1 + N_2$ viene dado por la ecuación (58).

$$\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_{R_1}} - \mu(W - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_{R_1}}) \Rightarrow \tag{71}$$

$$= T - \mu W - \frac{1}{2}\rho S(C_{D_{R_1}} - \mu C_{L_{R_1}})V^2 \tag{72}$$

Esta ecuación escribirse más simple de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = a - bV^2 \tag{73}$$

donde las constantes a y b vienen dadas por:

$$a = \frac{gT}{W} - \mu g \quad b = \frac{g}{2W}\rho S(C_{D_{R_1}} - \mu C_{L_{R_1}})$$

Para conocer el tiempo empleado en R1 hay que integrar la ecuación anterior, teniendo en cuenta que la maniobra comienza con velocidad nula ($V_0 = 0$) y termina cuando se alcanza la velocidad de rotación, calculada anteriormente.

$$t_{R1} = \int_{V_0}^{V_R} \frac{dV}{a - bV^2} = \int_{V_0}^{V_R} \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}V} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}V} \right) dV$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left(\ln\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}V_R}{\sqrt{a} - \sqrt{b}V_R} + \ln\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}V_0}{\sqrt{a} + \sqrt{b}V_0} \right) \tag{74}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}V_R}{\sqrt{a} - \sqrt{b}V_R} \tag{75}$$

Introduciendo los datos que se dan en el enunciado se obtiene:

$$t_{R1} = 35{,}26\,\mathrm{s}$$

Para calcular la distancia recorrida, se parte de la ecuación cinemática para buscar una relación entre la distancia y la velocidad del avión:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = V \Rightarrow \tag{76}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}V} = \frac{V}{a - bV^2} \tag{77}$$

nótese que se ha introducido la misma notación de la ecuación (73).

La distancia de despegue se obtiene integrando la ecuación anterior:

$$x_{R1} = \int_{V_0}^{V_R} \frac{V}{a - bV^2} dV = -\frac{1}{2b} \ln \frac{a - bV_R^2}{a - bV_0^2} = -\frac{1}{2b} \ln \frac{a - bV_R^2}{a} = 1470\,\mathrm{m} \tag{78}$$

5 Tiempo y distancia empleados en la fase R2.

Este apartado es esencialmente similar al anterior. No obstante, ahora las ecuaciones del movimiento son (60) y (61), por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = g\frac{T\cos\theta + \mu T \sin\theta}{W} - \mu g - \frac{g}{2W}\rho S(C_{D_{R_1}} - \mu C_{L_{R_1}})V^2 \tag{79}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = a' - bV^2 \tag{80}$$

siendo ahora:

$$a' = g\frac{T\cos\theta + \mu T\sin\theta}{W} - \mu g$$

Además, a la hora de establecer los límites de integración, habrá que tener en cuenta que la maniobra comienza con velocidad de rotación V_R y termina a la velocidad de despegue V_{LOF}.

Con todo eso, el tiempo y la distancia empleados en la fase R2 serán:

$$t_{R2} = \int_{V_R}^{V_{LOF}} \frac{dV}{a' - bV^2} = \frac{1}{2\sqrt{a'b}} \left(\ln \frac{\sqrt{a'} + \sqrt{b}V_{LOF}}{\sqrt{a'} - \sqrt{b}V_{LOF}} + \ln \frac{\sqrt{a'} - \sqrt{b}V_R}{\sqrt{a'} + \sqrt{b}V_R} \right) = 6{,}37\,\mathrm{s} \tag{81}$$

$$x_{R2} = \int_{V_R}^{V_{LOF}} \frac{V}{a' - bV^2} dV = -\frac{1}{2b} \ln \frac{a' - bV_{LOF}^2}{a' - bV_R^2} = 541{,}49\,\mathrm{m} \tag{82}$$

6 Empuje necesario para completar R1 en 1200 m.

La ecuación (78) proporciona una relación entre la distancia que recorre el avión durante la fase R1, y los valores a, b y V_R. Ahora bien, hay que tener en cuenta que ni b ni la velocidad de rotación dependen del empuje suministrado por los motores, sólo a depende de T.

De esta forma, se va a buscar el valor a^* que hace que el avión complete R1 en la distancia deseada, obteniendo posteriormente el empuje deseado.

$$-2b \cdot 1200 = \ln \frac{a^* - bV_R^2}{a^*} \Rightarrow \frac{a^* - bV_R^2}{a^*} = e^{-2b\cdot 1200} \Rightarrow a^* = \frac{bV_R^2}{1 - e^{-2b\cdot 1200}} \tag{83}$$

De este modo, el empuje necesario es:

$$T = \frac{W}{g}(a^* + \mu g) = 1126 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$$