Ingenieros Aeronáuticos	DNI ______	Curso 07/08
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido ______ 2^{do}Apellido ______	04/09/08
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Problema 1**

Valor total: 2.5 puntos.

Se dispone de un avión con las siguientes características:

- Polar parabólica de coefientes constantes: $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ ($C_{D_0} = 0{,}019$, $k = 0{,}07$)
- Superficie alar: $S = 380\text{m}^2$,
- Peso estructural más carga de pago: $W_S = 120 \cdot 10^4\,\text{N}$
- Máxima carga de combustible: $W_{F_{max}} = 60 \cdot 10^4\,\text{N}$

Una compañía aérea está evaluando la posibilidad de utilizar esta aeronave para cubrir una de sus rutas comerciales, por lo que necesita saber qué alcance tiene y qué carga de combustible tiene que incluir en el avión.

En el análisis del vuelo, se considerará que en todo momento **la altitud y el coeficiente de sustentación permanecen constantes**. Además, el consumo instantáneo de combustible del avión puede calcularse de la siguiente forma:

$$c[\text{N/s}] = c_e T$$

donde c_e es el consumo específico, que puede considerarse constante y con valor $c_e = 9{,}01 \cdot 10^{-5}[1/\text{s}]$; y T es el empuje suministrado por los motores.

Se pide:

1. Considerando que todo el vuelo se puede aproximar por un único tramo de crucero, plantear las ecuaciones de fuerzas, la ecuación cinemática y la ley de variación de masa del avión.
2. Obtener la ecuación que permite calcular el alcance del avión en función de la carga de combustible inicial, del coeficiente de sustentación y de la altitud de vuelo.
3. Si todo el vuelo transcurre a $10000\,\text{m}$ de altitud ($\rho = 0{,}4135\,\text{kg/m}^3$), ¿cuál es el máximo alcance que se puede obtener?
4. Si se desea volar a $10000\,\text{m}$ de altitud y con $C_L = C_{L_{opt}}$, ¿qué carga de combustible hay que incluir en la aeronave para llegar a un aeropuerto situado a $8000\,\text{km}$ de distancia?

SOLUCIÓN

1 Ecuaciones del movimiento:

- Ecuaciones de fuerzas:

De forma general, las ecuaciones de fuerzas en un vuelo de crucero a altura constante son:

$$\begin{aligned} T - D &= \frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \\ L &= W \end{aligned} \tag{1}$$

Puesto que puede asumirse que tanto la velocidad como la masa varían muy lentamente con el tiempo, las ecuaciones 1 pueden simplificarse en:

$$T = D \tag{2}$$

$$L = W \tag{3}$$

La ecuación cinemática proporciona la variación de la posición en función de la velocidad, esto es:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V \tag{4}$$

Por último, la ley de variación de la masa será:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -c = -c_e T \tag{5}$$

2 Ecuación para calcular el alcance:

Se va a obtener la expresión que permite calcular el alcance de la aeronave en función de la carga de combustible inicial, del coeficiente de sustentación y de la altitud de vuelo.

Si en la ecuación 4 se hace un cambio de variable, tomando el peso como variable independiente:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}W}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = V \tag{6}$$

introduciendo la ecuación 5:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}W} = -\frac{V}{c_e T} \tag{7}$$

teniendo en cuenta las ecuaciónes 2 y 3, junto con la definición de la eficiencia aerodinámica:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}W} = -\frac{VE}{c_e W} \tag{8}$$

por lo que el alcance podría calcularse domo:

$$x_A = -\int_{W_i}^{W_f} \frac{V}{c_e} E \frac{dW}{W} \tag{9}$$

Hay que tener en cuenta que la velocidad de vuelo depende del peso de la aeronave a través de la ecuación 3:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \tag{10}$$

Con esto, la expresión que permite calcular el alcance queda:

$$x_A = -\frac{E}{c_e}\sqrt{\frac{2}{\rho S C_L}} \int_{W_i}^{W_f} \frac{dW}{\sqrt{W}} \tag{11}$$

$$x_A = \frac{E}{c_e}\sqrt{\frac{2}{\rho S C_L}} 2\left(\sqrt{W_i} - \sqrt{W_f}\right) \tag{12}$$

Finalmente, introduciendo el peso fijo W_S y el peso de combustible inicial W_F, la expresión requerida es:

$$x_A = \frac{2\sqrt{2}}{c_e}\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\sqrt{\frac{W_S}{\rho S}}\left(\sqrt{1+\frac{W_F}{W_S}} - 1\right) \tag{13}$$

3 Máximo alcance para un vuelo a 1000m de altitud.

Teniendo en cuenta la expresión 13, puede verse que el alcance de un avión depende de:

- Carga de combustible inicial (W_F).
- Altura de vuelo, cuya dependencia se aprecia a través de ρ
- Coeficiente de sustentación (C_L)

los demás parámetros que aparecen en la expresión 13 (S, W_S, c_E y $C_D = C_D(C_L)$) no pueden ser alterados.

Puesto que en el enunciado se fija la altitud de vuelo, habrá que buscar qué valores de W_F y C_L maximizan el alcance para el avión dado a la altitud considerada.

Resulta obvio que cuanto mayor sea la carga de combustible, mayor será el alcance (ver ecuación 13), por lo que habrá que usar la máxima carga de combustible que puede transportar el avión:

$$W_F^* = W_{F_{max}} = 60 \cdot 10^4\text{N}$$

Respecto al coeficiente de sustentación, el valor que maximiza el alcance es el mismo que maximiza $C_L^{1/2}/C_D$, cuyo valor es:

$$C_L^* = \frac{C_{L_{opt}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{3k}}$$

Introduciendo valores numéricos, el máximo alcance que se puede obtener a esa altitud es:

$$x_{A_{max}} = 13348\text{km}$$

4 Carga de combustible para volar a $8000\,\text{km}$ con $C_L = C_{L_{opt}}$

Hay que despejar W_F de la ecuación 13

$$W_F = W_S\left[\left(\frac{x_A c_e C_D}{2\sqrt{2}C_L^{1/2}}\sqrt{\frac{\rho S}{W_S}} + 1\right)^2 - 1\right] \tag{14}$$

Introduciendo valores numéricos queda:

$$W_F = 3{,}9674 \cdot 10^5\text{N}$$