Aeronaves y Vehículos Espaciales **Duración**: 50 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI	______________	Curso 07/08
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido	______________	04/09/08
	2^{do}Apellido	______________	
Universidad de Sevilla	Nombre	______________	**Problema II**

Valor total: 2.5 puntos.

La agencia espacial NASA ha colocado una base permanente en la Luna. Necesitan urgentemente el lanzamiento de un vehículo espacial para aprovisionar dicha base debido a un accidente, y para ello tienen que planear una compleja misión de abastecimiento. Necesitan emplear el módulo ATV (Automated Transfer Vehicle) Julio Verne que la Agencia Espacial Europea (ESA) tiene aparcado en la estacion Espacial Internacional (ISS). La ISS está aparcada en una órbita circular a 380 km de altitud sobre la superficie de la tierra. Las piezas de abastecimiento que tiene que transportar el módulo ATV han de ser transportadas por una nave soyuz a la ISS. Asumiendo que la luna orbita alrededor de la tierra con una órbita elíptica de muy baja ecentricidad con un radio en el periapsis (r_{pL}) de 356400 km, y un radio en el apoapsis (r_{aL}) de 406700 km. Se pide al becario de la ESI que han tenido trabajando todo el verano en la NASA, que determine la siguiente información:

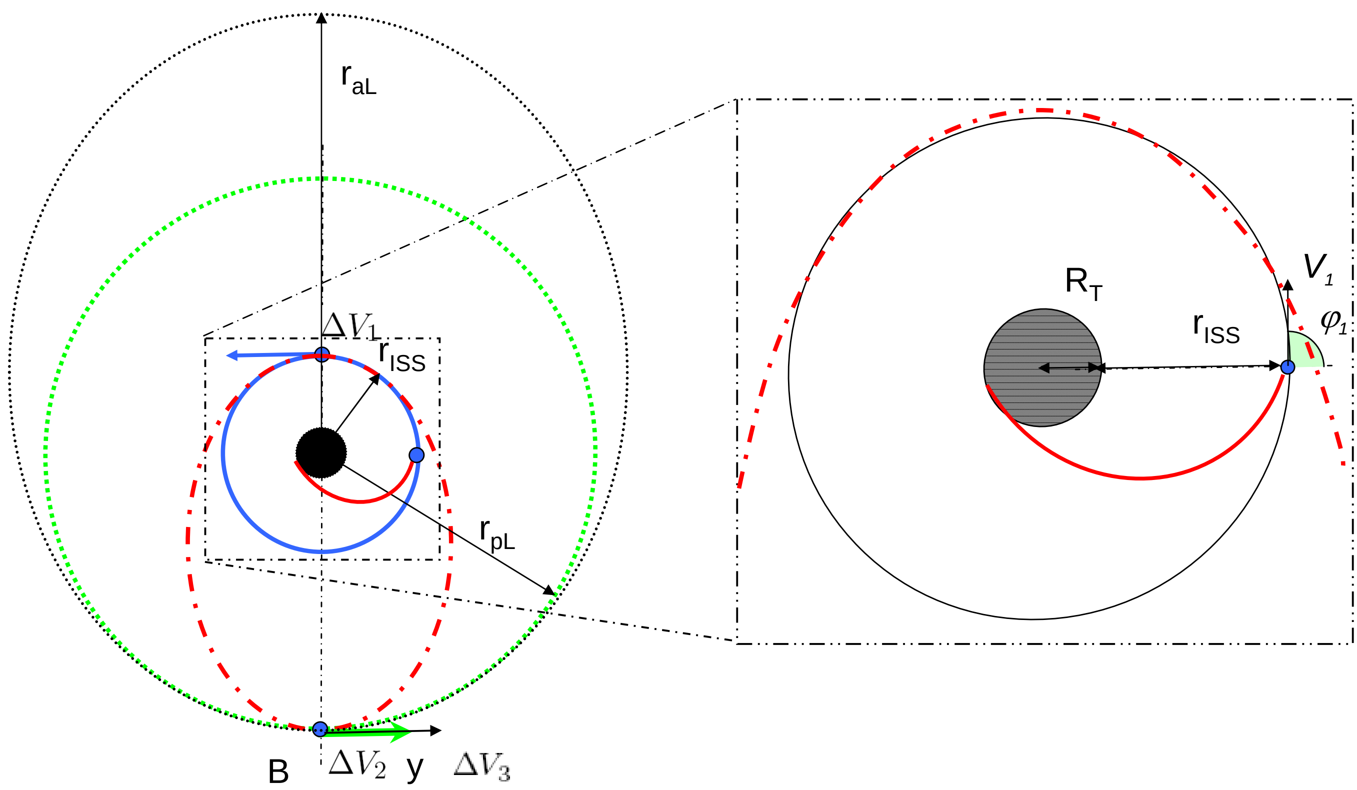
1. La velocidad a la que tiene que ser inyectado el módulo Soyuz (V_1) si se sabe que su orientación ha de ser de un ángulo de $\psi_1 = 90°$ para así poder inyectarse en una órbita circular, a la misma altura que la ISS (r_{ISS}). Utilizar para ello las relaciones de la suma de las Energía Cinética y Potencial, y la relación de la Energía total en función de la excentricidad de la órbita de la ISS. Ver ampliación de la figura descriptiva al final del enunciado.

2. Determinar los impulsos (ΔV_1 y ΔV_2), y la cantidad de combustible que necesita el ATV Julio Verne para poder realizar el cambio de órbita desde la circular en la que se encuentra aparcado (380 km de altura), a una órbita circular coincidente con el periapsis de la orbita de la Luna (r_{pL} = 356400 km). Ver figura descriptiva al final del enunciado. La masa del ATV con todas las provisiones es de 20000 kg, y su $I_{sp} = 282$s.

3. Una vez establecido el ATV en una órbita circular coincidente con el periapsis de la órbita lunar (r_p = 356400 km), determinar el impulso final (ΔV_3) necesario para trasladar el módulo ATV desde la órbita coincidente con el periapsis de la órbita lunar a una órbita elíptica con las mismas característica que la órbita lunar. Se asume que los ingenieros de la NASA se encargarán de coordinar dicha maniobra para que coincida con una maniobra de aluzinaje, por lo que los becarios de la ESI no tienen que preocuparse por los riesgos de colisión tan solo del impulso necesario para el cambio de órbita.

Datos: radio de la Tierra, R_T =6378 km; parámetro de gravitación de la Tierra, $\mu = 3{,}986 \times 10^5 km^3/s^2$.

Nota: las relaciones entre los parámetros geométricos de la órbita (p y e) y los físicos (h y E) son: $e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$, $p = a\left(1 - e^2\right) = \frac{b^2}{a}$, $p = \frac{h^2}{\mu}$. Asumir que el sentido positivo de todas las orbitas es en el sentido contrario a las agujas del reloj. **Dibujo aclaratorio de las maniobras en la siguiente página**.



1. Apartado 1

La velocidad a la que tiene que ser inyectado el módulo Soyuz (V_1) si se sabe que su orientación ha de ser de un ángulo de $\psi_1 = 90^\circ$ viene dada por h donde h es el módulo del momento cinético por unidad de masa respecto del origen de coordenadas, el cual se puede definir en forma vectorial como:

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{V}$$

donde $\vec{r}$ es el radio vector que va del cuerpo M al cuerpo m, y $\vec{V}$ es el vector velocidad del satélite, o cuerpo m, cuyo módulo entre ambos vectores viene dado por

$$h = rV_1 \sin \varphi_1$$

donde φ_1 es el ángulo formado por el vector velocidad $\vec{V}_1$ y el radio vector $\vec{r}$, por lo que tenemos cual es el momento cinético por unidad de masa para una órbita específica. Dado que no tenemos el momento cinético de la órbita del módulo Soyuz, lo que hacemos es utilizar las relaciones de la suma de las Energía Cinética y Potencial, y la relación de la Energía total en función de la excentricidad:

$$E = \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{\mu}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(e^2 - 1)$$

Igualando las Energías y substituyendo la relación del modulo del momento cinético resulta en una relación para obtener la velocidad de inyección V_1

$$\frac{1}{2}V_1^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(e^2-1)$$

$$\frac{1}{2}V_1^2 - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{(rV_1\sin\varphi_1)^2}(e^2-1) = 0$$

resolviendo V_1:

$$V_{1=} \pm \frac{\sqrt{r\sin\psi_1(\sin\psi_1 \pm \sqrt{\sin^2\psi_1 + e^2 - 1})\mu}}{r\sin\psi_1}$$

donde se puede apreciar que depende de la excentricidad. Como se quiere insertar en una órbital circular, la excentricidad es $e = 0$ por lo que la ecuación se reduce a:

$$V_{1=} \pm \frac{\sqrt{r\sin\psi_1(\sin\psi_1 \pm \sqrt{\sin^2\psi_1 - 1})\mu}}{r\sin\psi_1}$$

y dado que el ángulo de inyección es $\psi_1 = 90^\circ \to \sin\psi_1 = 1$ por lo que la ecuacióin se reduce a

$$V_{1=} \pm \frac{\sqrt{r\mu}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

lo que se corresponde con la ecuación de la velocidad necesaria para mantener una órbita circular de radio r_{ISS} que viene dado por $r_{ISS} = 380 + 6378 = 6758$ km. After subtituting we obtain that:

$$V_{1=} \pm \frac{\sqrt{r\mu}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{ISS}}} = \sqrt{\frac{3.986\times 10^5 km^3/s^2}{6758km}} = 7.6799 km/s$$

2. Apartado 2

Para determinar los impulsos (ΔV_1 y ΔV_2), y la cantidad de combustible que necesita el ATV Julio Verne para poder realizar el cambio de órbita desde la circular en la que se encuentra aparcado (380 km de altura), a una órbita circular coincidente con el periapsis de la orbita de la Luna (r_{pL} = 356400 km). Primero hay que calcular los diferentes radios de las dos órbitas circulares que . La órbita inicial tiene un radio de:

$$r_{ISS} = R_T + 380 = 6758 km$$

mientras que la órbita circular final (coincidente con el periapsis de la órbita lunar) es:

$$r_f = r_{pL} = 356400\ km$$

La velocidad inicial del satélite en el punto inicial, el cual se corresponde con la velocidad de satelización (órbita circular) con radio igual al radio inicial (r_{ISS}) viene dada por

$$V_i = \sqrt{\frac{\mu}{r_{ISS}}} = 7.6799\ km/s$$

mientras que la velocidad necesaria para poder incorporarse a la órbita elíptica en el periapsis de dicha órbita de transferencia cuya distancia focal es igual al r_{ISS}, y cuyo semieje mayor es igual a $a = \frac{1}{2}(r_{ISS} + r_{pL})$ viene dada por la ecuación que define la velocidad en cualquier punto de una órbita elíptica:

$$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\mu\left(\frac{2\,(r_{ISS} + r_{pL}) - 2r}{r\,(r_{ISS} + r_{pL})}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}\frac{r_{ISS} + r_{pL} - r}{r_{ISS} + r_{pL}}}$$

por lo que en el periapsis de la órbita elíptica de transferencia la velocidad es

$$V_A = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{ISS}}\frac{r_{pL}}{r_{ISS} + r_{pL}}} = 10.7595\ km/s$$

por lo que se observa que el el primer impulso (ΔV_1) para pasar de la órbita circular en la que se encuentra la ISS a una órbita circular con radio final coincidente con el periapsis de la órbita lunar (r_{pL}), viene dado por

$$\Delta V_1 = V_A - V_i = 10.7595 - 7.6799 = 3.0796\ km/s$$

ahora es necesario calcular el impulso necesario para completar la transferencia de Hohmann. Para ello hay que calcular la velocidad a la que llega el satélite cuando la órbita elíptica es tangente a la órbita circular coincidente con el periapsis de la órbita lunar (r_{pL}), viene dada por

$$V_B = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{pL}}\frac{r_{pL}}{r_{ISS} + r_{pL}}} = 0.2040\ km/s$$

y la velocidad final del satélite en el punto B, el cual se corresponde con la velocidad de satelización (órbita circular) con radio igual al radio final ($r_f = r_{pL}$) viene dada por

$$V_f = \sqrt{\frac{\mu}{r_{pL}}} = 1.0575\ km/s$$

por lo que se observa que el el segundo impulso (ΔV_2) para pasar de la órbita elíptica de transferencia u a la órbita de satelización geostacionaria final, viene dado por

$$\Delta V_2 = V_f - V_B = 1.0575 - 0.2040 = 0.8535\ km/s$$

Por lo que el impulso final total viene dado por la suma de los dos impulsos

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 3.0796 + 0.8535 = 3.9331\ km/s$$

el cual será necesario para calcular la cantidad de combustible necesaria por la nave Soyuz para realizar la maniobra. El incremento de la velocidad generado por un motor cohete viene dado por:

$$\Delta V = I_{sp} ln \frac{m_1}{m_f}$$

donde I_{sp} es el impulso específico, y m_i y m_f son las masas inicial y final del vehículo respectivamente, de manera que la diferencia $m_i - m_f$ es la masa de propulsante utilizada en la maniobra, por lo que se puede rescribir para obtener cual es la masa en seco (sin combustible)

$$\Delta V = I_{sp} ln \frac{m_0}{m_2} \rightarrow m_s = m_2 = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp}}}$$

por lo que se puede observar que

$$I_{sp} = 282 seg \rightarrow m_s = m_i e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp1}}} = 19722.99 kg$$

por lo que se observa la cantidad de combustible (m_f) necesaria viene dada por la diferencia entre la masa inicial y la masa final:

$$m_f = m_0 - m_s = 20000 - 19794.29 = 277.009 kg$$

3. Apartado 3

Una vez establecido el ATV en una órbita circular coincidente con el periapsis de la órbita lunar (r_p = 356400 km), para determinar el impulso final (ΔV_3) necesario para trasladar el módulo ATV desde la órbita coincidente con el periapsis de la órbita lunar a una órbita elíptica con las mismas característica que la órbita lunar solo es necesario determinar la velocidad de la órbita lunar en el periapsis que viene dada por la relación anteriormente definida:

$$V_C = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{pL}} \frac{r_{aL}}{r_{pL} + r_{aL}}} = 1.0918 \ km/s$$

y recordando que la velocidad circula en la que se encuentra el ATV viene dada por la velocidad que se corresponde con la velocidad de satelización (órbita circular) con radio igual al radio final ($r_f = r_{pL}$) viene dada por

$$V_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_{pL}}} = 1.0575 \ km/s$$

por lo que se observa que el tercer impulso (ΔV_3) para pasar de la órbita circular a la órbita lunar viene dado por

$$\Delta V_3 = V_C - V_A = 1.0918 - 1.0575 = 0.0342 \ km/s$$