Ingenieros Aeronáuticos	DNI __________	Curso 08/09
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido __________ 2doApellido __________	05/06/09
Universidad de Sevilla	Nombre __________	**Problema 1**

Valor total: 2.5 puntos.

Se desean evaluar la posibilidad de lanzar un avión no tripulado (UAV) desde una catapulta. El UAV tiene las siguientes características:

- Polar parabólica de coefientes constantes: $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ ($C_{D_0} = 0{,}03$, $k = 0{,}073$)
- Superficie alar: $S = 0{,}9\text{m}^2$
- Masa total de la aeronave: $m = 20\,\text{kg}$
- Coeficiente de sustentación máximo: $C_{L_{max}} = 1{,}2$
- Empuje máximo del motor: $T_{max} = 100\,\text{N}$

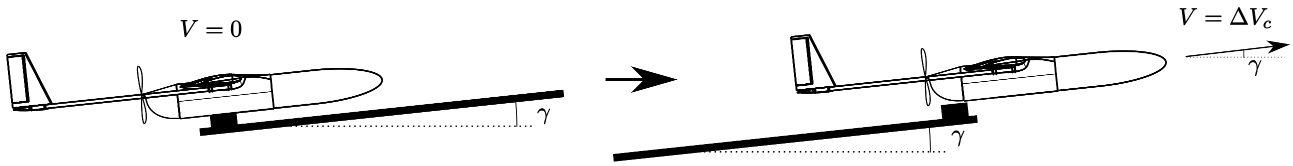

Figura 1: Esquema del lanzamiento

En primer lugar, se va a analizar el caso de un lanzamiento con ángulo de trayectoria nulo ($\gamma = 0$). Se pide:

1. Calcular el incremento de velocidad (ΔV_c) **mínimo** que tiene que generar la catapulta para que a la salida de la misma, la aeronave mantenga un vuelo nivelado a velocidad constante.
2. ¿Qué empuje tiene que suministrar el motor en las condiciones del apartado anterior?
3. Si la catapulta se orienta con un viento en contra de $V_{wind} = 5\,\text{m/s}$, calcular el incremento de velocidad mínimo de la catapulta para que el avión mantenga esta condición de vuelo.

A continuación se va a analizar el caso de un lanzamiento con un ángulo de trayectoria $\gamma = 20°$. Se considera que la aeronave mantiene un vuelo de ascenso con velocidad y ángulo de ascenso constante.

4 Plantear las ecuaciones del movimiento del avión (ascenso con velocidad constante y ángulo de ascenso $\gamma = 20°$).

5 Calcular el coeficiente de sustentación y el empuje necesario para que, a la salida de la catapulta, el avión mantenga un vuelo con ángulo de subida constante ($\gamma = 20°$) y velocidad constante (igual a la calculada en el primer apartado).

6 Calcular con qué velocidad debería salir el avión de la catapulta para mantener un vuelo de subida uniforme con ángulo ($\gamma = 20°$), si el motor se pone a toda potencia.

NOTAS:

- Todo el análisis se hace a nivel del mar, donde la densidad es $\rho = 1{,}225\,\mathrm{kg/m^3}$.
- En el análisis del ascenso, no es aceptable suponer que γ es pequeño.

SOLUCIÓN

1 Incremento de velocidad mínimo que tiene que suministrar la catapulta.

El incremento de velocidad mínimo que tendrá que proporcioar la catapulta tiene que ser igual a la velocidad mínima de vuelo del avión, esto es, la velocidad de entrada en pérdida. Por tanto:

$$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \;\Rightarrow\; W = \frac{1}{2}\rho V_{stall}^2 S C_{L_{max}}$$

$$\Delta V_{min} = V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{max}}}} = 17{,}2220\,\mathrm{m/s}$$

2 Empuje necesario para volar en crucero a la mínima velocidad posible.

Para mantener un crucero uniforme en el momento de la salida del avión de la catapulta, el empuje deberá ser el necesario para vencer la resistencia:

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V_{stall}^2 S\left(C_{D_0} + kC_{L_{max}}^2\right) = 22{,}0921\,\mathrm{N}$$

3 Incremento de velocidad necesario si se tiene un viento en contra de $V_{wind} = 5\,\mathrm{m/s}$

Hay que tener en cuenta que la velocidad que interviene en las fuerzas aerodinámicas es la **velocidad aerodinámica** (V), la cual puede relacionarse con la velocidad respecto a tierra (V_g) y la velocidad del viento (V_{wind}) mediante:

$$V = V_g - V_{wind}$$

La mínima velocidad aerodinámica a la que puede volar una aeronave es la velocidad de entrada en pérdida (calculada en el primer apartado), siendo esta independiente de la velocidad del viento.

En este apartado se pide el mínimo incremento de velocidad que tiene que proporcionar la catapulta, o lo que es lo mismo, la mínima velocidad respecto a tierra que necesita la aeronave para poder volar:

$$V_{g_{min}} = V_{min} + V_{wind} = V_{stall} + V_{wind}$$

Como en este caso se tiene un viento en contra de $5\,\mathrm{m/s}$, la velocidad del viento será: $V_{wind} = -5\,\mathrm{m/s}$, por lo que la velocidad que tendrá que proporcionar la catapulta es:

$$\Delta V_{min} = V_{stall} + V_{wind} = 17{,}2220 - 5 = 12{,}2220\,\mathrm{m/s}$$

4 Ecuaciones del movimiento del avión durante un ascenso uniforme.

A continuación se van a plantear las ecuaciones del momimiento del avión durante un vuelo de ascenso con velocidad constante y ángulo de ascenso constante. En la figura 2 se puede ver un esquema de las fuerzas que actúan sobre el avión.

Puesto que no existen aceleraciones, las fuerzas horizontales y verticales deberán estar equilibradas:

$$T = D + W\sin(\gamma) \tag{1}$$

$$L = W\cos(\gamma) \tag{2}$$

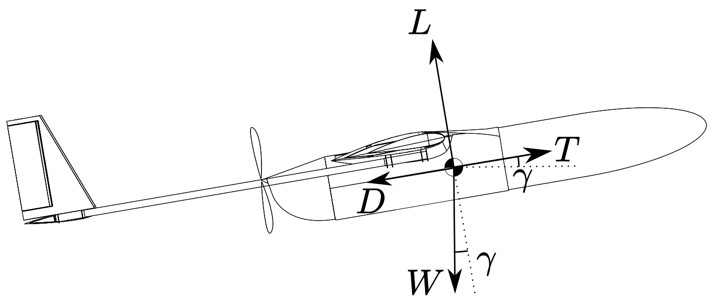

Figura 2: Esquema de las fuerzas que actúan sobre la aeronave durante el vuelo de ascenso.

5 Cálculo del coeficiente de sustentación y del empuje necesario para mantener un vuelo con $V = 17{,}2220\,\mathrm{m/s}$ y $\gamma = 20°$

Conocido el ángulo de subida y la velocidad de vuelo, se puede determinar el coeficiente de sustentación mediante la ecuación (2):

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = W\cos(\gamma) \;\Rightarrow\; C_L = \frac{2W\cos(\gamma)}{\rho V^2 S} = \frac{2\cdot 20\cdot 9{,}8\cos(20°)}{1{,}225\cdot 17{,}2220^2\cdot\cdot 0{,}9} = 1{,}1276$$

Nótese que el coefiente de sustentación obtenido es menor que el coeficiente de sustentación máximo ($C_{L_{max}}$).

Una vez conocido el coefiente de sustentación, a partir de la ecuación 1 se puede obtener el empuje necesario:

$$\begin{aligned}
T = D + W\sin(\gamma) &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2\right) + W\sin(\gamma)\\
&= \frac{1}{2}1{,}225\cdot 17{,}2220^2\cdot 0{,}9\cdot\left(0{,}03 + 0{,}073\cdot 1{,}1276^2\right) + 20\cdot 9{,}8\cdot\sin(20°)\\
&= 87{,}1860\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

6 Cálculo de la velocidad para que la aeronave mantenga un ascenso uniforme con $\gamma = 20°$ y el motor a toda potencia.

Si se conoce el empuje ($T = T_{max} = 100\,\mathrm{N}$) y el ángulo de subida ($\gamma = 20°$), las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: la velocidad de vuelo (V) y el coeficiente de sustentación necesario (C_L).

Puesto que lo que se pide es determinar la velocidad de vuelo, despejamos el coefiente de sustentación de la ecuación (2) y lo introducimos en (1), quedando:

$$\begin{aligned}
T = D + W\sin(\gamma) &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2\right) + W\sin(\gamma)\\
&= \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + k\left(\frac{2W\cos(\gamma)}{\rho V^2 S}\right)^2\right) + W\sin(\gamma)\\
&= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + \frac{2k\left(W\cos(\gamma)\right)^2}{\rho V^2 S} + W\sin(\gamma)
\end{aligned}$$

Operando, podemos transformar la ecuación anterior en una ecuación bicuadrática en la velocidad:

$$\frac{1}{2}\rho^2 S^2 C_{D_0} V^4 + \left(W\sin(\gamma) - T_{max}\right)\rho S V^2 + 2k\left(W\cos(\gamma)\right)^2 = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo:

$$V^2 = \frac{-\left(W\sin(\gamma) - T_{max}\right)\rho S \pm \sqrt{\left(W\sin(\gamma) - T_{max}\right)^2 \rho^2 S^2 - 4\frac{1}{2}\rho^2 S^2 C_{D_0} 2k \left(W\cos(\gamma)\right)^2}}{\rho^2 S^2 C_{D_0}}$$

de donde se obtiene:

$$V_1 = 12{,}1582\,\mathrm{m/s} \;\; V_2 = 42{,}9107\,\mathrm{m/s}$$

Por último, queda por comprobar si ambas velocidades son físicamente posibles, esto es, hay que verifica si la velocidad menor está por encima de la velocidad de entrada en pérdida.

Para ello, hay que calcular el coeficiente de sustentación asociado a esta velocidad y comprobar que sea inferior al coeficiente de sustentación máximo del avión.

$$C_{L_{V_1}} = \frac{2W\cos(\gamma)}{\rho V_1^2 S} = 2{,}2625$$

Puesto que $C_{L_{V_1}} > C_{L_{max}}$, la velocidad V_1 no es posible, de modo que la única solución al problema es:

$$V_2 = 42{,}9107\,\mathrm{m/s}$$