Ingenieros Aeronáuticos Escuela Superior de Ingenieros Universidad de Sevilla	N DNI ____ 1erApellido ____ 2doApellido ____ Nombre ____	Curso 08/09 05/06/09 **Problema 2**

Valor total: 2.5 puntos.

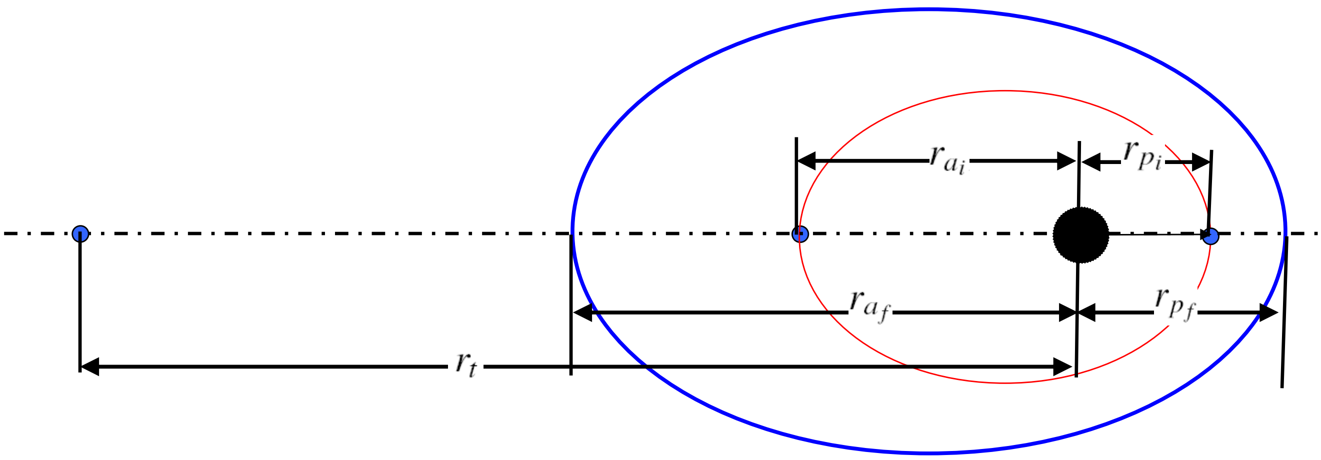
La agencia espacial Europea (ESA) tiene que modificar la órbita en la que se encuentra uno de sus satélites de investigación a causa de la colisión entre el satelite ruso Kosmos-2251 y el americano Iridium-33 que se produjo el pasado 10 de Febrero de 2009, y que ha puesto en peligro la integridad del satélite de la ESA. Dicho satélite se encuentra en una órbita elíptica, cuyo perigeo es de 790 km de altitud. Se decide reconfigurar el tipo de misión del satélite, y por ello se decide trasladar dicho satélite a una orbita elíptica con diferentes características (ver figura anexa). Se pretende determinar cual es la manera más eficiente de realizar dicha transferencia, ya que la cantidad de combustible de la que dispone la nave es limitada, por lo que se pide al becario de la ESI cursando 1º de Ingeniería Aeronáutica que han tenido trabajando todo el verano en la NASA, que determine la siguiente información:

1. Calcular los impulsos (ΔV_1 y ΔV_2) necesarios para efectuar una transferencia de Hohmann desde el periapsis de la órbita elíptica inicial (r_{p_i}), al apoapsis de la órbita elíptica final (r_{a_f}).
2. Calcular los impulsos (ΔV_1 y ΔV_2) necesarios para efectuar una transferencia de Hohmann desde el apoapsis de la órbita elíptica inicial (r_{a_i}), al periapsis de la órbita elíptica final (r_{p_f}).
3. Calcular los impulsos necesarios (ΔV_1,ΔV_2 y ΔV_3) para efectuar una transferencia bielíptica tomando como punto inicial de la órbita de transferencia el periapsis de la elipse inicial (r_{p_i}), y punto final de la transferencia bielíptica el periapsis de la orbita final (r_{p_f}), siendo r_t el apoapsis de las dos órbitas de transferencia elípticas.
4. Determinar cual de las tres maniobras de transferencia es la óptima, y cual es la carga de combustible que le quedará al satélite para dicha transferencia si al iniciar la maniobra el satélite pesa 500 kg, de los cuales 50 kg son de combustible si el $I_{sp_1} = 100\, m/seg$.
5. Calcular el tiempo que se tarda en cada una de las maniobras de transferencia teniendo en cuenta que en todas ellas el satélite parte del perigeo de la órbita elíptica interior (r_{p_i}).

Datos: radio de la Tierra, R_T =6378 km; parámetro de gravitación de la Tierra, $\mu = 3.986\times 10^5 km^3/s^2$.

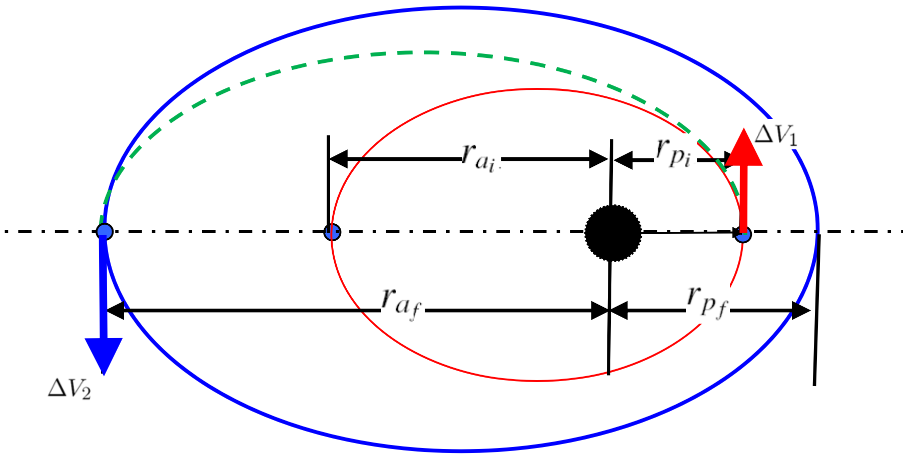
Datos de las órbitas: distancia al perigeo de la órbita inicial $r_{p_i} = 7168$ km, distancia al perigeo de la órbita final $r_{p_f} = 11378$ km, distancia al apogeo de la órbita inicial $r_{a_i} = 16378$ km, distancia al apogeo de la órbita inicial $r_{a_f} = 46378$ km, $r_t = 463780$km .

Nota: las relaciones entre los parámetros geométricos de la órbita (p y e) y los físicos (h y E) son: $e = \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}$, $p = a\left(1-e^2\right) = \frac{b^2}{a}$, $p = \frac{h^2}{\mu}$. Asumir que el sentido positivo de todas las orbitas es en el sentido contrario a las agujas del reloj. **Dibujo aclaratorio de las maniobras en la siguiente página**.



1. Apartado 1

Para calcular los impulsos (ΔV_1 y ΔV_2) necesarios para efectuar una transferencia de Hohmann desde el periapsis de la órbita elíptica inicial (r_{p_i}), al apoapsis de la órbita elíptica final (r_{a_f}), es necesario calcular las velocidades características en cada uno de los puntos donde se realizan las transferencias (ver imagen aclaratoria de la maniobra):



La velocidad que tiene el satélite en el perigeo de la órbita elíptica interior cuya distancia focal es igual al r_{p_i}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_1 = \frac{1}{2}(r_{p_i} + r_{a_i})$, y viene dada por la ecuación que define la velocidad en cualquier punto de una órbita elíptica:

$$V_A = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\mu\left(\frac{2a - r}{ra}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu\left(r_i + r_f - r\right)}{r\left(r_i + r_f\right)}}$$

donde a es el semieje mayor de la elipse, por lo que en el periapsis de la órbita elíptica interior, donde para $r \rightarrow r_{p_i}$ tenemos que la velocidad es:

$$V_{A-H_{1,i}} = \left.\sqrt{\mu\left(\frac{2a_1 - r}{ra_1}\right)}\right|_{r=r_{p_i}} = \left.\sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_i} + r_{a_i} - r\right)}{r\left(r_{p_i} + r_{a_i}\right)}}\right|_{r=r_{p_i}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{a_i}}{r_{p_i}\left(r_{p_i} + r_{a_i}\right)}} = 8.7954\ km/s$$

La velocidad que tiene que adquirir el satélite para incorporarse en el perigeo de la órbita elíptica de transferencia a la órbita exterior, cuya distancia focal es igual al r_{p_i}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_{T_1} = \frac{1}{2}(r_{p_i} + r_{a_f})$, viene dada por:

$$V_{A-H_{1,f}} = \left.\sqrt{\mu\left(\frac{2a_{T_1} - r}{ra_{T_1}}\right)}\right|_{r=r_{p_i}} = \left.\sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_i} + r_{a_f} - r\right)}{r\left(r_{p_i} + r_{a_f}\right)}}\right|_{r=r_{p_i}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{a_f}}{r_{p_i}\left(r_{p_i} + r_{a_f}\right)}} = 9.8147\ km/s$$

por lo que se observa que el primer impulso (ΔV_1) para efectuar una transferencia de Hohmann desde el periapsis de la órbita elíptica inicial (r_{p_i}), al apoapsis de la órbita elíptica final (r_{a_f}) viene dado por

$$\Delta V_{1-H_1} = V_{A-H_{1,f}} - V_{A-H_{1,i}} = 9.8147 - 8.7954 = 1.0192\ km/s$$

Es necesario calcular el impulso necesario para completar la transferencia de Hohmann. Para ello hay que calcular la velocidad a la que llega el satélite cuando la órbita elíptica es tangente a la órbita elíptica exterior, lo que ocurre en el apoapsis de ambas órbitas, y viene dada por

$$V_{B-H_{1,i}} = \left.\sqrt{\mu\left(\frac{2a_{T_1} - r}{ra_{T_1}}\right)}\right|_{r=r_{a_f}} = \left.\sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_i} + r_{a_f} - r\right)}{r\left(r_{p_i} + r_{a_f}\right)}}\right|_{r=r_{a_f}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{p_i}}{r_{a_f}\left(r_{p_i} + r_{a_f}\right)}} = 1.5169\ km/s$$

La velocidad que tiene que adquirir el satélite para incorporarse de la órbita elíptica de transferencia, al apogeo de la órbita elíptica exterior, cuya distancia focal es igual al r_{p_f}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_2 = \frac{1}{2}(r_{p_f} + r_{a_f})$ viene dada por:

$$V_{B-H_{1,f}} = \left.\sqrt{\mu\left(\frac{2a_2 - r}{ra_2}\right)}\right|_{r=r_{a_f}} = \left.\sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_f} + r_{a_f} - r\right)}{r\left(r_{p_f} + r_{a_f}\right)}}\right|_{r=r_{a_f}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{p_f}}{r_{a_f}\left(r_{p_f} + r_{a_f}\right)}} = 1.8401\ km/s$$

por lo que se observa que el el segundo impulso (ΔV_2) para efectuar una transferencia de Hohmann de la órbita elíptica inicial (r_{p_i}), al apoapsis de la órbita elíptica final (r_{a_f}) viene dado por

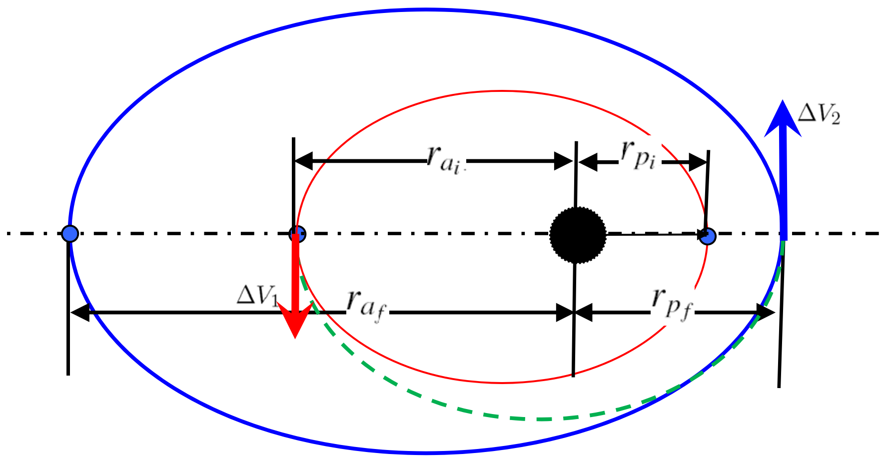
$$\Delta V_{2-H_1} = V_{B-H_{1,f}} - V_{B-H_{1,i}} = 1.8401 - 1.5169 = 0.3232\ km/s$$

Por lo que el impulso final total viene dado por la suma de los dos impulsos

$$\Delta V_{H_1} = \Delta V_{1-H_1} + \Delta V_{2-H_1} = 1.0192 + 0.3232 = 1.3425\ km/s$$

2. Apartado 2

Para calcular los impulsos (ΔV_1 y ΔV_2) necesarios para efectuar una transferencia de Hohmann desde el apoapsis de la órbita elíptica inicial (r_{a_i}), al periapsis de la órbita elíptica final (r_{p_f}), es necesario calcular las velocidades características en cada uno de los puntos donde se realizan las transferencias (ver imagen aclaratoria de la maniobra).



La velocidad que tiene el satélite en el apogeo de la órbita elíptica interior, cuya distancia focal es igual al r_{p_i}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_1 = \frac{1}{2}(r_{p_i} + r_{a_i})$ viene dada por::

$$V_{A-H_{2,i}} = \sqrt{\mu\left(\frac{2a_1 - r}{ra_1}\right)}\Bigg|_{r=r_{a_i}} = \sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_i} + r_{a_i} - r\right)}{r\left(r_{p_i} + r_{a_i}\right)}}\Bigg|_{r=r_{a_i}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{p_i}}{r_{a_i}\left(r_{p_i} + r_{a_i}\right)}} = 3.8494\ km/s$$

La velocidad que tiene que adquirir el satélite para incorporarse en el apogeo de la órbita elíptica de transferencia, al persiapsis de la órbita exterior, cuya distancia focal es igual al r_{p_f}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_{T_2} = \frac{1}{2}(r_{p_f} + r_{a_i})$ viene dada por:

$$V_{A-H_{2,f}} = \sqrt{\mu\left(\frac{2a_{T_2} - r}{ra_{T_2}}\right)}\Bigg|_{r=r_{a_i}} = \sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_f} + r_{a_i} - r\right)}{r\left(r_{p_f} + r_{a_i}\right)}}\Bigg|_{r=r_{a_i}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{p_f}}{r_{a_i}\left(r_{p_f} + r_{a_i}\right)}} = 4.4669\ km/s$$

por lo que se observa que el el primer impulso (ΔV_1) para efectuar una transferencia de Hohmann desde el apoapsis de la órbita elíptica inicial (r_{a_i}), al periapsis de la órbita elíptica final (r_{p_f}) viene dado por:

$$\Delta V_{1-H_2} = V_{A-H_{2,f}} - V_{A-H_{2,i}} = 4.4669 - 3.8494 = 0.6175\ km/s$$

Es necesario calcular el impulso necesario para completar la transferencia de Hohmann. Para ello hay que calcular la velocidad a la que llega el satélite cuando la órbita elíptica de transferencia es tangente a la órbita elíptica exterior, lo que ocurre en el periapsis de ambas órbitas, y viene dada por

$$V_{B-H_{2,i}} = \sqrt{\mu\left(\frac{2a_{T_2} - r}{ra_{T_2}}\right)}\Bigg|_{r=r_{p_f}} = \sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_f} + r_{a_i} - r\right)}{r\left(r_{p_f} + r_{a_i}\right)}}\Bigg|_{r=r_{p_f}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{a_i}}{r_{p_f}\left(r_{p_f} + r_{a_i}\right)}} = 6.4298\ km/s$$

La velocidad que tiene que adquirir el satélite para incorporarse de la órbita elíptica de transferencia, al apogeo de la órbita elíptica exterior, cuya distancia focal es igual al r_{p_f}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_2 = \frac{1}{2}(r_{p_f} + r_{a_f})$ viene dada por:

$$V_{B-H_{2,f}} = \sqrt{\mu\left(\frac{2a_2 - r}{ra_2}\right)}\Bigg|_{r=r_{p_f}} = \sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_f}+r_{a_f}-r\right)}{r\left(r_{p_f}+r_{a_f}\right)}}\Bigg|_{r=r_{p_f}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{a_f}}{r_{p_f}\left(r_{p_f}+r_{a_f}\right)}} = 7.5008\ km/s$$

por lo que se observa que el el segundo impulso (ΔV_2) para efectuar una transferencia de Hohmann de la órbita elíptica inicial (r_{a_i}), al periapsis de la órbita elíptica final (r_{p_f}) viene dado por

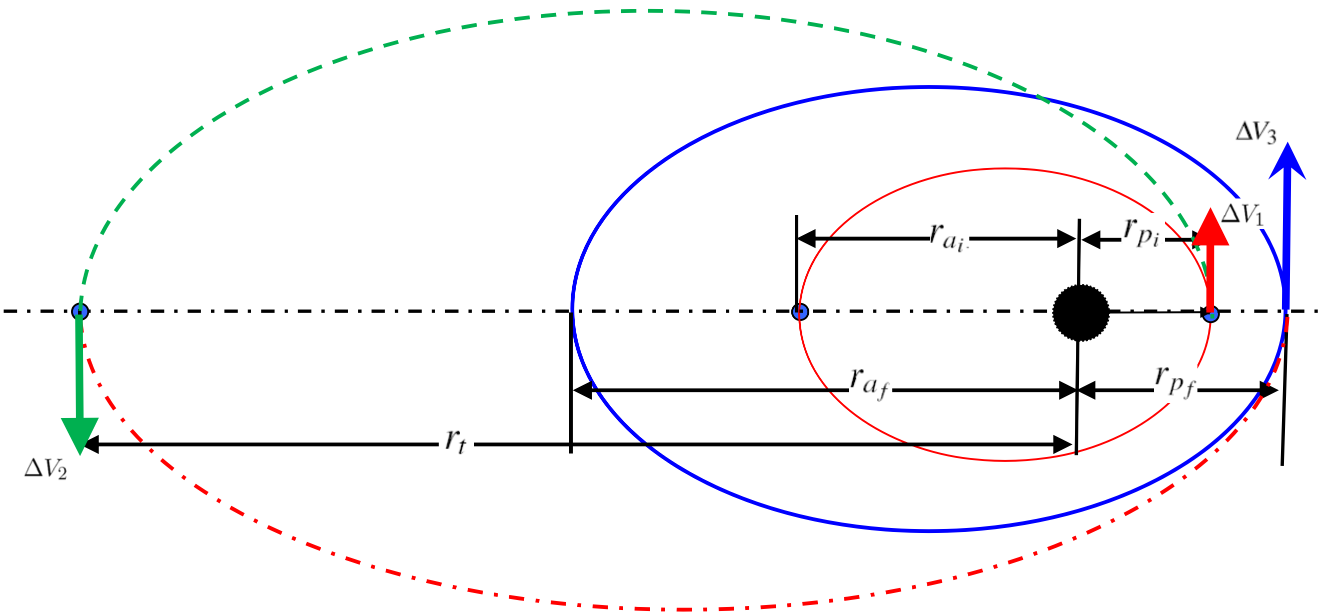
$$\Delta V_{2-H_2} = V_{-H_{2,f}} - V_{B-H_{2,i}} = 7.5008 - 6.4298 = 1.0709\ km/s$$

Por lo que el impulso final total viene dado por la suma de los dos impulsos

$$\Delta V_{H_2} = \Delta V_{1-H_2} + \Delta V_{2-H_2} = 0.6175 + 1.0709 = 1.6884\ km/s$$

3. Apartado 3

Para calcular los impulsos necesarios (ΔV_1,ΔV_2 y ΔV_3) para efectuar una transferencia bielíptica tomando como punto inicial de la órbita de transferencia el periapsis de la elipse interior (r_{p_i}), y punto final de la transferencia bielíptica el periapsis de la orbita exteriorl (r_{p_f}), siendo r_t el apoapsis de las dos órbitas de transferencia elípticas es necesario determinar la órbitas de transferencias elípticas (vease figura descriptitva) y las velocidades características en cada uno de los puntos de transferencia:



La velocidad que tiene el satélite al principio de la tansferencia bielíptica, que se corresponde con el perigeo de la órbita elíptica interior, cuya distancia focal es igual al r_{p_i}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_1 = \frac{1}{2}(r_{p_i} + r_{a_i})$ viene dada por:

$$V_{A-be_i} = \sqrt{\mu\left(\frac{2a_1 - r}{ra_1}\right)}\Bigg|_{r=r_{p_i}} = \sqrt{\frac{2\mu\left(r_{p_i}+r_{a_i}-r\right)}{r\left(r_{p_i}+r_{a_i}\right)}}\Bigg|_{r=r_{p_i}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{a_i}}{r_{p_i}\left(r_{p_i}+r_{a_i}\right)}} = 8.7954\ km/s$$

La velocidad que tiene que adquirir el satélite para incorporarse en el perigeo de la órbita elíptica de transferencia, cuya distancia focal es igual al r_{p_i}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_{B_1} = \frac{1}{2}(r_{p_i} + r_t)$, viene dada por:

$$V_{A-be_f} = \sqrt{\mu \left(\frac{2a_{B_1} - r}{ra_{B_1}}\right)}\Bigg|_{r=r_{p_i}} = \sqrt{\frac{2\mu\,(r_{p_i} + r_t - r)}{r\,(r_{p_i} + r_t)}}\Bigg|_{r=r_{p_i}} = \sqrt{\frac{2\mu r_t}{r_{p_i}\,(r_{p_i} + r_t)}} = 10.4653\ km/s$$

por lo que se observa que el el primer impulso (ΔV_1) para efectuar la primera transferencia elíptica viene dado por:

$$\Delta V_{1-be} = V_{A-be_f} - V_{A-be_i} = 10.4653 - 8.7954 = 1.6699\ km/s$$

Es necesario calcular el impulso necesario para pasar de la primerar órbita elíptica de transferencia, a la segunda órbita de transferencia. Para ello hay que calcular la velocidad a la que llega el satélite en la primera órbita elíptica cuando $r \rightarrow r_t$ la cual viene dada:

$$V_{B-be_i} = \sqrt{\mu \left(\frac{2a_{B_1} - r}{ra_{B_1}}\right)}\Bigg|_{r=r_t} = \sqrt{\frac{2\mu\,(r_{p_i} + r_t - r)}{r\,(r_{p_i} + r_t)}}\Bigg|_{r=r_t} = \sqrt{\frac{2\mu r_{p_i}}{r_t\,(r_{p_i} + r_t)}} = 0.1617\ km/s$$

La velocidad que tiene que adquirir el satélite para incorporarse desde el apoapsis de la primera órbita elíptica de transferencia al apoapsis de la segunda órbita elíptica de transferencia, cuya distancia focal es igual al r_{p_f}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_{B_2} = \frac{1}{2}(r_{p_f} + r_t)$, viene dada por:

$$V_{B-be_f} = \sqrt{\mu \left(\frac{2a_{B_2} - r}{ra_{B_2}}\right)}\Bigg|_{r=r_t} = \sqrt{\frac{2\mu\,\left(r_{p_f} + r_t - r\right)}{r\,\left(r_{p_f} + r_t\right)}}\Bigg|_{r=r_t} = \sqrt{\frac{2\mu r_{p_f}}{r_t\,\left(r_{p_f} + r_t\right)}} = 0.2028\ km/s$$

por lo que se observa que el el segundo impulso (ΔV_2) para efectuar la segunda transferencia bielíptica viene dado por

$$\Delta V_{2-be} = V_{B-be_f} - V_{B-be_i} = 0.2028 - 0.1617 = 0.0411\ km/s$$

Para finalizar la transferencia bielíptica es necesari calcular el incremento de velocidad necesario para pasar de la segunda órbita elíptica de transferencia a la órbita elíptica exterior final, y para ello hay que calcular la velocidad a la que llega el satélite en la segunda órbita elíptica de transferencia cuando $r \rightarrow r_{p_i}$, la cual viene dada:

$$V_{C-be_i} = \sqrt{\mu \left(\frac{2a_{B_2} - r}{ra_{B_2}}\right)}\Bigg|_{r=r_{p_f}} = \sqrt{\frac{2\mu\,\left(r_{p_f} + r_t - r\right)}{r\,\left(r_{p_f} + r_t\right)}}\Bigg|_{r=r_{p_f}} = \sqrt{\frac{2\mu r_t}{r_{p_f}\,\left(r_{p_f} + r_t\right)}} = 8.2696\ km/s$$

La velocidad que tiene que adquirir el satélite para incorporarse desde el periapsis de la segunda órbita elíptica de transferencia, al periapsis de la órbita elíptica exterior, cuya distancia focal es igual al r_{p_f}, y cuyo semieje mayor es igual a $a_2 = \frac{1}{2}(r_{p_f} + r_{a_f})$ viene dada por:

$$V_{C-be_f} = \sqrt{\mu \left(\frac{2a_2 - r}{ra_2}\right)}\Bigg|_{r=r_{p_f}} = \sqrt{\frac{2\mu\,\left(r_{p_f} + r_{a_f} - r\right)}{r\,\left(r_{p_f} + r_{a_f}\right)}}\Bigg|_{r=r_{p_f}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{a_f}}{r_{p_f}\,\left(r_{p_f} + r_{a_f}\right)}} = 7.5008\ km/s$$

por lo que se observa que el el tercer y último impulso (ΔV_3) para efectuar la segunda transferencia bielíptica viene dado por

$$\Delta V_{3-be} = V_{C-be_f} - V_{C-be_i} = 7.5008 - 8.2696 = -0.7688\ km/s$$

Lo que implica que el último impulso es de desaceleración. El impulso final total viene dado por la suma de los impulsos

$$\Delta V_{be} = \Delta V_{1-be} + \Delta V_{2-be} + \Delta V_{3-be} = 1.6699\ + 0.0411 + |-0.7688| = 2.4799\ km/s$$

4. Apartado 4

Para calcular cual de las tres maniobras de transferencia es la óptima sólo hay que comparar los impulsos de cada una de las tres transferencias y se puede observar que :

$$\begin{aligned} \Delta V_{H_1} &= 1.3425\ km/s \\ \Delta V_{H_2} &= 1.6884\ km/s \\ \Delta V_{be} &= 2.4799\ km/s \end{aligned}$$

la órbita optima, por lo tanto la manera más eficiente de realizar la transferencia del satélite de la ESA corresponde a la maniobra de transferencia de Hohmann desde el periapsis de la órbita elíptica inicial (r_{p_i}), al apoapsis de la órbita elíptica final (r_{a_f}) es la transferencia de Hohmann desde el periapsis de la órbita elíptica inicial (r_{p_i}), al apoapsis de la órbita elíptica final (r_{a_f}). $\Delta V_{H_1} 1.3425\ km/s$. El combustible que le quedará al satélite despues de realizar dicha maniobra viene dado por: :

$$\Delta V = I_{sp} ln \frac{m_1}{m_f}$$

donde I_{sp} es el impulso específico, y m_i y m_f son las masas inicial y final del vehículo respectivamente, de manera que la diferencia $m_i - m_f$ es la masa de propulsante utilizada en la maniobra, por lo que se puede rescribir para obtener cual es la masa en seco (sin combustible)

$$\Delta V = I_{sp} ln \frac{m_0}{m_2} \rightarrow m_s = m_2 = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp}}}$$

por lo que se puede observar que

$$I_{sp} = 100\, m/seg \rightarrow m_s = m_i e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp1}}} = 493,33\, kg$$

por lo que se observa la cantidad de combustible (m_f) necesaria viene dada por la diferencia entre la masa inicial y la masa final:

$$m_f = m_0 - m_s = 500 - 493,33 = 6.667\, kg$$

por lo que el combustible que le queda viene dado por:

$$m_f = 50 - 6.667_s = 43,33\, kg$$

5. Apartado 5

Para calcular el tiempo que se tarda en cada una de las maniobras de transferencia, teniendo en cuenta que en todas ellas el satélite parte del perigeo de la órbita elíptica interior (r_{p_i}), viene dado por el tiempo en el que el satélite está en la órbita elíptica, el cual es la mitad del tiempo del periodo de dicha órbita elíptica. El periodo de una órbita cerrada viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Para la primera transferencia de Hohmann el tiempo de transferencia viene dado por el tiempo empleado desde el periapsis de la órbita intertior, al apoapsis de la órbita exterior que viene dado por la mitad del periodo de la órbita de transferencia de la órbita con semieje mayor $a_{T_1} = \frac{1}{2}(r_{p_i} + r_{a_f})$

$$t_{H_1} = \frac{T_1}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_{T_1}^3}{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\left(r_{p_i} + r_{a_f}\right)\right)^3}{\mu}} = 21798.5\ s \approx 6.055\ h$$

Para la segunda transferencia de Hohmann el tiempo de transferencia viene dado por el tiempo empleado en la transferencia de el apoapsis de la órbita intertior, al periapsis de la órbita exterior que viene dado por la mitad del periodo de la órbita de transferencia de la órbita con semieje mayor $a_{T_2} = \frac{1}{2}(r_{p_f} + r_{a_i})$, más el tiempo empleado por el satélite para moverse desde el periapsis de la órbita interior, hasta el apoapsis de la misma orbita para llegar al punto donde se inicia la maniobra de transferencia:

$$\begin{aligned} t_{H_2} &= \frac{T_{e-int}}{2} + \frac{T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_1^3}{\mu}} + \pi\sqrt{\frac{a_{T_2}^3}{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\left(r_{p_i} + r_{a_i}\right)\right)^3}{\mu}} + \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\left(r_{p_f} + r_{a_i}\right)\right)^3}{\mu}} \\ &= 6356,4\,s + 8135,2\,s = 14491.6\,s \approx 4.025\,h \end{aligned}$$

Para la transferencia bielíptica, el tiempo de transferencia viene dado por el tiempo empleado en las dos transferencias elípticas cuyo semiejes mayores vienen dados por $a_{B_1} = \frac{1}{2}(r_{p_i} + r_t)$, y $a_{B_2} = \frac{1}{2}(r_{p_f} + r_T)$ respecticamente, por lo que el tiempo empleado viene dado por:

$$\begin{aligned} t_{be} &= \frac{T_{be_1}}{2} + \frac{T_{be_2}}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_{B_1}^3}{\mu}} + \pi\sqrt{\frac{a_{B_2}^3}{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\left(r_{p_i} + r_t\right)\right)^3}{\mu}} + \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\left(r_{p_f} + r_t\right)\right)^3}{\mu}} \\ &= 568585,3\,s + 576226,5\,s = 1144811.9\,s \approx 318.003\,h \end{aligned}$$