Ingenieros Aeronáuticos Escuela Superior de Ingenieros Universidad de Sevilla	DNI ______ 1erApellido ______ 2doApellido ______ Nombre ______	Curso 07/08 19/06/08 **Problema 1**

Valor total: 2.5 puntos.

Se dispone de un avión trimotor *McDonnell Douglas DC-10* con las siguientes características:

- Polar parabólica de coefientes constantes: $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ ($C_{D_0} = 0{,}02$, $k = 0{,}07$)
- Superficie alar: $S = 367{,}7\mathrm{m}^2$
- Masa total de la aeronave: $m = 190 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$
- Coeficiente de sustentación máximo: $C_{L_{max}} = 1{,}3$
- Planta motora: Tres turbofanes GE CF6-6D. Cada motor se caracteriza por:
  - Empuje: $T = T_0 \frac{\rho}{\rho_{sl}}$, con $T_0 \in [0, 170900]\ \mathrm{N}$

La aeronave se encuentra realizando un vuelo de crucero a $10000\,\mathrm{m}$ de altura, a velocidad constante, cuando se produce un fallo de uno de los tres motores de los que dispone la aeronave, quedando totalmente inoperativo:

1 ¿Es posible mantener un crucero a velocidad constante, a la misma altitud de vuelo? En caso afirmativo, calcular la velocidad máxima a la que se puede volar.

2 Calcular a qué altitud deberá descender el avión (como mínimo) para poder realizar un vuelo de crucero a una velocidad de $700\,\mathrm{km/h}$

Estando el avión volando a la altitud calculada en el apartado anterior, fallan los dos motores restantes, por lo que el piloto decide realizar un planeo a velocidad constante.

3 Plantear las ecuaciones que permiten calcular el ángulo de planeo.

4 El aeropuerto más cercano se encuentra a $130\,\mathrm{km}$ de distancia. Comprobar si es posible aterrizar. Suponer que la densidad del aire permanece constante, y es la correspondiente a la altitud de vuelo calculada en el apartado anterior.

NOTAS:

- Por razones de seguridad, la velocidad mínima de vuelo tiene que ser, al menos, un 10 % superior a la velocidad de entrada en pérdida: $V \geq 1{,}1V_{stall}$
- Se considera la masa constante.
- Atmósfera Estándar Internacional:

- $\rho_{sl} = 1{,}225\,\mathrm{kg/m^3}$
- $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$
- $T_{sl} = 288{,}16\,\mathrm{K}$
- $R_g = 287\,\mathrm{J/(kg\,K)}$
- $\alpha = 6{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K/m}$
- $h(\rho) = \frac{T_{sl}}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{sl}}\right)^{\frac{R_g\alpha}{g - R_g\alpha}}\right)$

SOLUCIÓN

1 Comprobación de la viabilidad de mantener un crucero a una altitud de $10000\,\mathrm{m}$

Para contestar a esta pregunta, hay que plantear las ecuaciones del vuelo de crucero horizontal a velocidad constante:

$$L = W \tag{1}$$

$$T_{total} = D \tag{2}$$

Existen dos procedimientos para dar respuesta a la pregunta que se plantea. Se recomienda el primero de ellos por ser mucho más directo y cargado de sentido físico.

La forma más rápida y directa para dar solución a este apartado es mediante el siguiente razonamiento:

> ”El avión podrá mantener un crucero nivelado a $10000\,\mathrm{m}$ y a velocidad constante sí y sólo sí el empuje máximo disponible a esa altitud es mayor o igual que la resistencia mínima posible”

El empuje máximo disponible vendrá dado por:

$$T_{max} = 2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}} \tag{3}$$

donde se conocen todos los parámetros, exepto la densidad a 10000 m. No obstante, ésta se puede determinar a partir de la expresión que se da en el enunciado:

$$h = \frac{T_{sl}}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{sl}}\right)^{\frac{R_g\alpha}{g-R_g\alpha}}\right) \Rightarrow \rho = \rho_{sl}\left(1 - \frac{\alpha h}{T_{sl}}\right)^{\frac{g}{R_g\alpha}-1} \tag{4}$$

Con esta ecuación se puede encontrar que:

$$\rho\left(h = 10000\mathrm{m}\right) = 0{,}4130\,\mathrm{kg/m^3} \tag{5}$$

De este modo, el empuje máximo disponible a $10000\,\mathrm{m}$ será:

$$T_{max} = 115235\,\mathrm{N} \tag{6}$$

Se trata ahora de calcular la resistencia mínima posible. Así, a partir de las ecuaciones 1 y 2, junto con la definición de la eficiencia aerodinámica, se puede establecer que:

$$E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \Rightarrow D = \frac{W}{E} \Rightarrow D_{min} = \left(\frac{W}{E}\right)_{min}$$

Puesto que el peso de la aeronave es constante:

$$\left(\frac{W}{E}\right)_{min} \Rightarrow E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = 13{,}3631$$

Por tanto, se puede concluir que la resistencia mínima posible es:

$$D_{min} = \frac{W}{E_{max}} = 139339\,\mathrm{N} \tag{7}$$

Puesto que la resistencia mínima es mayor que el empuje máximo disponible, se puede concluir que **no se puede mantener un crucero 10000 m y a velocidad constante con un motor inoperativo**.

La otra forma de proceder para dar respuesta a la pregunta que se plantea se basa en intentar encontrar una velocidad de vuelo físicamente posible que satisfaga las ecuaciones del crucero. A continuación se detalla el procedimiento.

Teniendo en cuenta que la polar del avión es conocida, de las ecuaciones 1 y 2 se puede deducir:

$$T_{total} = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{1}{2}\rho S V^2 k \left(\frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \tag{8}$$

La ecuación 8 representa el empuje que se necesita para mantener un crucero a velocidad constante (V) y a una altura determinada ($\rho = \rho(h)$), para un avión con masa y polar conocidas.

Teniendo en cuenta la situación que se plantea en este problema, la forma de comprobar si es posible mantener un crucero a $10000\,\mathrm{m}$ es encontrando una velocidad de vuelo que satisfaga la ecuación 8 y que sea físicamente posible (esto es, que sea real y mayor que $1{,}1V_{stall}$). Además, habrá que considerar que los motores proporcionando el máximo empuje posible, ya que si no se encuentra ninguna velocidad de vuelo factible con empuje máximo, será imposible encontarla con un empuje inferior.

Introduciendo el modelo de empuje en la ecuación 8 y despejando la velocidad de vuelo, queda:

$$2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}} = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \tag{9}$$

$$2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S V^2 = \left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 V^4 C_{D_0} + kW^2 \tag{10}$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 C_{D_0} V^4 - 2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S V^2 + kW^2 = 0 \tag{11}$$

$$V^2 = \frac{2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S \pm \sqrt{\left(2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 C_{D_0} k W^2}}{2\left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 C_{D_0}} \tag{12}$$

Ya se conocen todos los datos para calcular V mediante la ecuación 12. Así, haciendo aplicación numérica, puede comprobarse que el radicando que aparece en esta ecuación es:

$$\left(2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}}\frac{1}{2}\rho S\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\rho S\right)^2 C_{D_0} k W^2 = -3{,}5378 \cdot 10^{13} \tag{13}$$

Este resultado implica que no existe ninguna velocidad de vuelo posible (ya que el resultado de la expresión 12 sería una velocidad compleja). Por este motivo, se puede concluir que el avión no es capaz de mantener un vuelo de crucero a altitud y velocidad constantes con un motor inoperativo, de modo que el piloto se verá obligado a realizar un descenso.

2 Cálculo de la altura a la que se tendrá que descender (como mínimo) para poder realizar un vuelo de crucero a $700\mathrm{km/h}$

Puesto que se busca seguir un vuelo de crucero a altitud y velocidad constantes, la solución de este apartado se basa en la ecuación 8 obtenida anteriormente:

$$T_{total} = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho S V^2}$$

Teniendo en cuenta que para una velocidad de vuelo dada, el empuje requerido para mantener la altitud a esa velocidad crece con la altitud a la que se quiera volar. Así, para calcular la altitud máxima a la que se puede volar a la velocidad requerida, de nuevo es necesario seleccionar el máximo empuje disponible de los motores. Es importante no olvidar que el empuje máximo que puede entregar cada motor depende de la densidad, y por tanto de la alitud de vuelo.

$$2T_{0_{max}}\frac{\rho}{\rho_{sl}} = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{kW^2}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \tag{14}$$

En esta ecuación, todo es conocido exepto la densidad, despejando, se obtiene:

$$\rho = \sqrt{\frac{kW^2}{\frac{T_{0max}}{\rho_{sl}} S V^2 - \left(\frac{1}{2} S V^2\right)^2 C_{D_0}}} = 0{,}4994\,\mathrm{kg/m^3} \tag{15}$$

Una vez conocida la densidad requerida para volar a altura constante y con una velocidad de $700\mathrm{km/h}$, se puede usar la Atmósfera Estándard Internacional para calcular a qué altura corresponde el valor de densidad obtenido:

$$h = \frac{T_{sl}}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{sl}}\right)^{\frac{R_g \alpha}{g - R_g \alpha}}\right) \Rightarrow h(\rho = 0{,}4994) = 8432\mathrm{m} \tag{16}$$

3 Planteamiento de las ecuaciones que definen el ángulo de planeo

Teniendo en cuenta que se trata de un planeo a velocidad constante, las ecuaciones que definen esta condición de vuelo vienen dadas por el siguiente equilibrio de fuerzas:

$$L = W\cos\gamma_d \tag{17}$$

$$D = W\sin\gamma_d \tag{18}$$

Dividiendo 18 entre 17, se obtiene:

$$\tan\gamma_d = \frac{D}{L} = \frac{1}{E} \tag{19}$$

4 ¿Consigue aterrizar el avión en un aeropuerto situado a 130 km de distancia?

La distancia recorrida por el avión durante todo el planeo puede calcularse a partir del ángulo de planeo de la siguiente forma:

$$\tan\gamma_d = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan\gamma_d} \tag{20}$$

donde h es la altitud desde la que se inicia el planeo y x es la distancia horizontal recorrida.

Para saber si el avión llega o no al aeropuert, hay que calcular la distancia horizontal máxima que puede recorrer. Para ello, hay que tener en cuenta que la distancia recorrida será máxima cuando el ángulo de planeo sea mínimo; y este a su vez será mínimo cuando se vuele con eficiencia aerodinámica máxima.

$$E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = 13{,}3631$$

$$\tan\gamma_{d_{min}} = \frac{1}{E_{max}} = 0{,}0748$$

$$x_{max} = \frac{h}{\tan\gamma_d} = 112680\mathrm{m}$$

Puesto que el aeropuerto está situado a $130000\mathrm{m}$, puede concluirse que el avión no es capaz de llegar al aeropuerto.