Aeronaves y Vehículos Espaciales **Duración**: 60 minutos

Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI	____________	Curso 07/08
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido	____________	19/06/08
	2^{do}Apellido	____________	
Universidad de Sevilla	Nombre	____________	**Ejercicio II**

La *Agencia Espacial Europea* (*ESA*) quiere poner un nano-satélite diseñado y construido en la *University of Washington*, en una órbita de 5000 km de altura mediante el uso de una lanzadera *Delta IV*. Dicho satélite servirá para estudiar un sistema de posicionamiento por camaras diseñado e implementado por estudiantes de la *E.S.I. de Sevilla*. Durante el despeque se produce un error en una de las etapas de lanzamiento y se prevee que el satelite no podrá ser insertado en la órbita de 5000 km de altura, sino que la inserción la hará a 3578 km de altura en una órbita circular. Todos los ordenadores de la estación de seguimiento están inoperativos (sólo se les ocurrio que poner *Güindows Pista* © en todos los ordenadores), por lo que se llama al becario en prácticas de 1^{o} de Ing. Aeronáuticos de la *E.S.I. de Sevilla* para pedirle que, a riesgo de perder su posición de becario, calcule ciertos parámetros que definirán la viabilidad de la misión. Los ingenieros del centro de seguimiento están evaluando la posibilidad de corregir el error de inserción mediante una transferencia bieliptica por lo que se le pide al becario que calcule:

1. El ΔV total necesario para la transferencia bielíptica, teniendo en cuenta que el radio de paso de la transferencia de la órbita intermedia es de 300000 km.
2. Teniendo en cuenta que la masa total del satelite es 450 kg (incluida la carga del combustible), que la carga de combustible que transportará el satélite para maniobras es de 50 kg, y que los motores del satelite tienen un Impulso especifico de $I_{SP} = 50$ s, ¿Puede realizar la corrección de órbita con la cantidad de combustible que dispone?

Al llegar al punto de inserción se detecta que la ultima etapa de combustión ha tenido un fallo, por lo que el satelite se insertar a la altura 3578 km, pero con una velocidad de $\sqrt{100}$ km/s y con una orientación $\psi = 25°$(ψ es el ángulo formado por el radio vector y el vector velocidad), por lo que se pide al becario, dadas las nuevas condiciones:

1. Determinar el tipo de órbita y sus parámetros característicos (p, e, θ).
2. En el momento de interseción con la órbita circular final de 5000 km, determinar, su velocidad, la orientación del satelite (ψ - ángulo formado por el radio vector y el vector velocidad) y la anomalia verdadera (θ).

Datos: $\mu = 3{,}986x10^5\ km^3/s^2$, $R_{Tierra} = 6378$ km;

Nota: las relaciones entre los parámetros gemétricos de la órbita son: $e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$, $p = a(1 - e^2)$ para órbitas elípticas.

1. Apartado 1

La figura 1 se representan la figura que describe el enunciado. Mientras que en la figura 2 se representan la trayectoria bielíptica propuesta por los ingenieros.

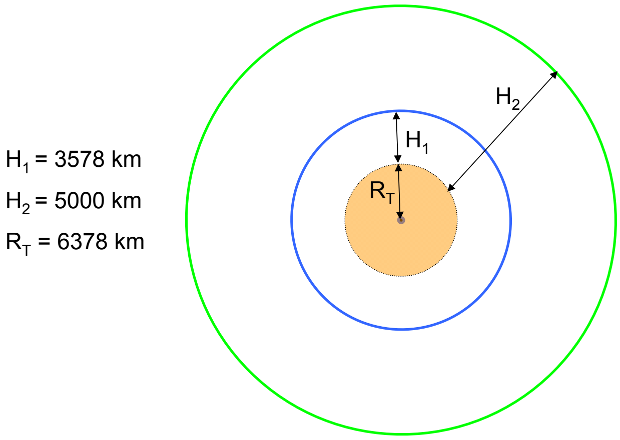

Figura 1: Inserción de un nano-satélite.

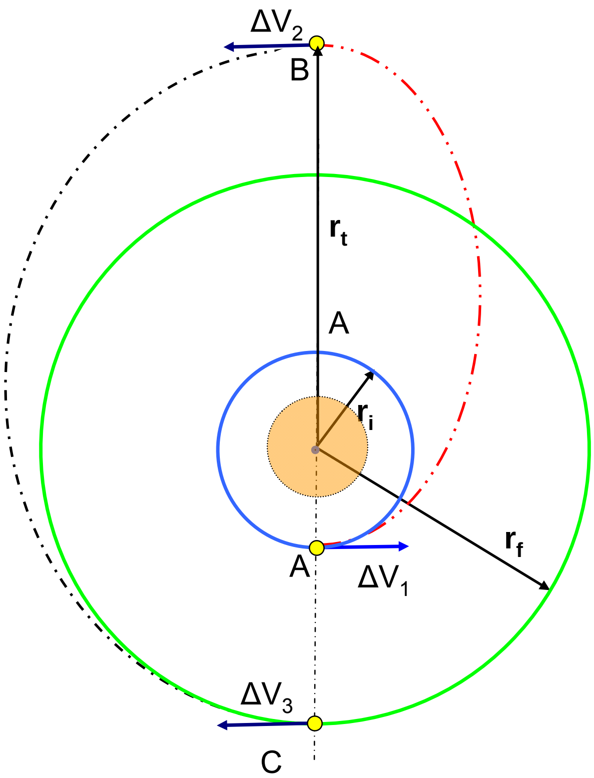

Figura 2: Trayectoria Bielíptica.

Para poder calcular el ΔV total necesario para la transferencia bielíptica, teniendo en cuenta que el radio de paso de la transferencia ($r_t = 300000\ km$) hay que calcular los ΔV's necesarios en cada una de las 3 diferentes maniobras (ΔV_1,ΔV_2,ΔV_3). La primera maniobra se realiza para cambiar de la órbita circular en la que se inserta inicialmente el satélite ($r_i = H_1 + R_T = 3578 + 6378 = 9956$ km), a la primera órbita elíptica que hace su transferencia a la órbita externa ($r_t = 300000\ km$). La segunda órbita transferencia se realiza para cambiar de la órbita elíptica de transferencia a la órbita dircular final ($r_f = H_2 + R_T = 5000 + 6378 = 11378\ km$). Para ello es necesario canlcular los diferentes incrementos en velocidades:

$$\Delta V_1 = V_{E_{1A}} - V_{C_A} \tag{1}$$

$$\Delta V_2 = V_{E_{2B}} - V_{E_{1B}} \tag{2}$$

$$\Delta V_3 = V_{C_C} - V_{E_{2C}} \tag{3}$$

donde $V_{E_{1A}}$ representa la velocidad que necesita adquirir el satélite para cambiar a la primera órbita elíptica en el punto A; V_{C_A} representa la velocidad que tiene originalmente el satélite en la órbita circular en el mismo punto A; $V_{E_{2B}}$ representa la velocidad necesaria que se le quiere imprimir al satélite en el punto B para cambiar a la segunda órbita elíptica; $V_{E_{1B}}$ representa la velocidad que tiene originalmente el satélite en la primera órbita elíptica en el mismo punto B; V_{C_C} representa la velocidad final que tiene que tener el satélite para poder mantener la órbital circular final, mientras que $V_{E_{2C}}$ representa la velocidad que tiene originalmente el satélite en la segunda órbita de transferencia al llegar al punto C. Para órbitas cerradas tenemos que la energía viene dada por

$$E = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(e^2 - 1) = \frac{1}{2}\frac{\mu}{p}(e^2 - 1) \tag{4}$$

si se utiliza la relación $p = a(1 - e^2)$ entonces tenemos que la Energía de una órbita cerrada viene dada por:

$$E = -\frac{\mu}{2a} \tag{5}$$

utilizando la relación de la energía total por unidad de masa

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} \tag{6}$$

se puede obtener la relación de la velocidad para una órbita cerrada:

$$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{7}$$

Ecuación **??** se puede generalizar para órbitas circulares substituyendo $a = r$ y para órbitas elípticas substituyendo $a = \frac{r_p + r_a}{2}$, donde r_p es el radio al periapsis de la órbita elíptica, y r_a es el radio al apoapsis de la órbita elíptica de tal manera que la velocidad para una órbita circular es

$$V_C = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \tag{8}$$

y para la órbita elíptica tenemos que:

$$V_E = \sqrt{\frac{2\mu}{r}\left(1 - \frac{r}{r_p + r_a}\right)} \tag{9}$$

Por lo que tenemos, recordando Ecuación (1) que la velocidad a la que se va a insertar el satélite inicialmente en la órbita de 3578 km de altitud en el punto A viene dada por:

$$V_{C_A} = \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} = \sqrt{\frac{\mu}{H_1 + R_T}} = \sqrt{\frac{3{,}986x10^5 \ \frac{km^3}{s^2}}{9956\ km}} = 6{,}327413\ \frac{km}{s}$$

y la velocidad que se le quiere inferir al satélite para poder hacer el cambio a la primera transferencia elíptica (mediante la órbita intermedia de 300000 km de radio) viene dado por la relación en la Ecuación 9 donde para esta primera órbita elíptica tenemos que los radios de periapsis (r_p), apoapsis (r_p) y el radio a la posición del satélite en el punto A (r_A):

$$r_A \ = \ r_p = r_i = R_T + H_1 = 9956\ km$$

$$r_a \ = r_B = \ 300000\ km$$

por lo que tenemos que:

$$V_{E_{1A}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_A}\left(1 - \frac{r_A}{r_p + r_a}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_i}\left(1 - \frac{r_i}{r_i + r_a}\right)} = 8{,}806372\ \frac{km}{s}$$

por lo que

$$\Delta V_1 = V_{E_{1A}} - V_{C_A} = 8{,}806372 - 6{,}327413 = 2{,}478959\ \frac{km}{s} \tag{10}$$

Recordando Ecuación (11) vemos que necesitamos calcular las velocidades en el apoapsis para las dos órbitas, siendo $V_{E_{1B}}$ la velocidad que tiene el satélite al llegar al apoapsis de la primera órbita elíptica (punto B), y $V_{E_{2B}}$ la velocidad a la que se quiere imprimir para cambiar a la segunda orbita en el apoapsis de dicha órbita, por lo que tenemos que:

$$\Delta V_2 = V_{E_{2B}} - V_{E_{1B}} \tag{11}$$

$$V_{E_{1B}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_B}\left(1 - \frac{r_B}{r_{p_1} + r_{a_1}}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_t}\left(1 - \frac{r_t}{r_i + r_t}\right)} = 0{,}286170\ \frac{km}{s}$$

$$V_{E_{2B}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_B}\left(1 - \frac{r_B}{r_{p_2} + r_{a_2}}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_t}\left(1 - \frac{r_t}{r_f + r_t}\right)} = 0{,}305239\ \frac{km}{s}$$

por lo que

$$\Delta V_2 = V_{E_{2B}} - V_{E_{1B}} = 0{,}305239 - 0{,}286170 = 0{,}019069\ \frac{km}{s} \tag{12}$$

Para la la última corrección de órbita, y recordando Ecuación (13) vemos que necesitamos calcular las velocidades en el periapsis para las segunda órbita en el punto C ($V_{E_{2C}}$), y la velocidad circular final (V_{C_C}) la velocidad que tiene el satélite al llegar al apoapsis de la primera órbita elíptica (punto B), y $V_{E_{2B}}$ la velocidad a la que se quiere imprimir para cambiar a la segunda orbita en el apoapsis de dicha órbita, por lo que tenemos que:

$$\Delta V_3 = V_{C_C} - V_{E_{2C}} \tag{13}$$

$$V_{C_C} = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} = \sqrt{\frac{\mu}{H_2 + R_T}} = 5{,}918827\ \frac{km}{s}$$

$$V_{E_{2C}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_C}\left(1 - \frac{r_C}{r_{p_2} + r_{a_2}}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_f}\left(1 - \frac{r_f}{r_f + r_t}\right)} = 8{,}219257\ \frac{km}{s}$$

por lo que

$$\Delta V_3 = V_{C_C} - V_{E_{2C}} = 5{,}918827 - 8{,}219257 = -2{,}300430\ \frac{km}{s} \tag{14}$$

Lo que nos dice que en el último ΔV es necesario desacelerar la velocidad del satélite para poder insertarlo en la trayectoria fin al deseada de 5000 km de altitud. Por lo que el ΔV total es:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3| = 2{,}478959 + 0{,}019069 + 2{,}300430 = 4{,}798458\ \frac{km}{s}$$

+

2. Apartado 2

Para poder determinar si puede realizar la corrección de la órbita es necesario calcular el ΔV total, es decir:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3| = 2{,}478959 + 0{,}019069 + 2{,}300430 = 4{,}798458\ \frac{km}{s}$$

y utilizando la relación del impulso específico:

$$\Delta V = I_{sp} ln \frac{m_0}{m_n}$$

podemos obtener la siguiente relación

$$m_3 = m_s = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp}}}$$

donde substituyendo $m_0 = 450\ kg$ y $I_{sp} = 50\ s$ nos dará el gasto de combustible necesario para realizar la maniobra de ΔV siendo:4.088214

$$m_s = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp}}} = 450 e^{-\frac{4{,}798458}{50}} = 408{,}8214\ kg$$

Por lo que el combustible empleado seria:

$$m_f = m_0 - m_s = 450 - 408{,}8214 = 41{,}1785\ kg$$

Por lo que al disponer de 50 kg de combustible, podría realizar la corrección de la órbita con la cantidad de combustible que dispone

3. Apartado 3

Una vez determinado en nuevo punto de inserción la altura de 3578 km de altitud se hará con una velocidad de $\sqrt{100}$ km/s y con una orientación $\psi = 25°$(siendo ψ el ángulo formado por el radio vector y el vector velocidad), para poder determinar el tipo órbita y sus parámetros característicos (p, e, θ), se parte de la ecuación de la órbita:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

donde el parámetro p viene dado por

$$p = \frac{h^2}{\mu}$$

donde h representa el momento cinético del satélite y viene dado por

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{V}$$

$$h = rV\sin\psi = 9956 \cdot \sqrt{100} \cdot \sin 25° = 42075{,}8741 \frac{km^2}{s}$$

por lo que

$$p = \frac{h^2}{\mu} = \frac{42075{,}8741^2}{3{,}986x10^5} = 4441{,}4931\ km$$

la excentricidad se puede obtener a partir de la relación

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$$

donde la energía por unidad de masa se puede obtener a partir de:

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{100}^2 - \frac{3{,}986x10^5}{9956} = 9{,}9638\ \frac{km^2}{s^2}$$

por lo que se puede obserbar que al ser positiva la energia es una hipérbola, por lo que una vez conocida la energía podemos determinar la excentricidad:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9{,}9638 \cdot 42075{,}8741^2}{(3{,}986x10^5)^2}} = 1{,}1054$$

Para determinar la anomalia verdadera usamos la ecuación de la órbita que podemos expresar como:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\left(\frac{p}{r} - 1\right) \cdot \frac{1}{e}\right) = \cos^{-1}\left(\left(\frac{4441{,}4931}{9956} - 1\right) \cdot \frac{1}{1{,}1054}\right) = 2{,}0956\, rads = 120{,}069°$$

4. Apartado 4

Para determinar la velocidad y orientación del satélite hay que tener en cuenta que la cantidad de momento cinético se conserva por lo que se tiene que

$$h = rV\sin\psi \rightarrow \psi = \sin^{-1}\left(\frac{h}{r\cdot V}\right)$$

donde $r = r_f + R_T = 5000 + 6378 = 11378\ km$, y la velocidad se puede determinar a partir identificar que tanto la Energía como la cantidad de momento cinético se conservan por lo que podemos obtener la V a partir de la Energia total por unidad de masa tal que:

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} \rightarrow V = \sqrt{2\cdot\left(E + \frac{\mu}{r}\right)} = \sqrt{2\cdot\left(9{,}9638 + \frac{3{,}986x10^5}{11378}\right)} = 9{,}4864\ \frac{km}{s}$$

por lo que la orientación viene dada por

$$\psi = \sin^{-1}\left(\frac{h}{r\cdot V}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{42075{,}874}{11378\cdot 9{,}4864}\right) = 0{,}4004\ rads = 22{,}943\ ^\circ$$

Para determinar la anomalia verdadera usamos la ecuación de la órbita que podemos expresar como:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\left(\frac{p}{r} - 1\right)\cdot\frac{1}{e}\right) = \cos^{-1}\left(\left(\frac{4441{,}4931}{11378} - 1\right)\cdot\frac{1}{1{,}1054}\right) = 2{,}1549\ rads = 123{,}46^\circ$$