Ingenieros Aeronáuticos Escuela Superior de Ingenieros Universidad de Sevilla	DNI ______ 1erApellido ______ 2doApellido ______ Nombre ______	Curso 07/08 05/07/08 **Problema 2**

Valor total: 2.5 puntos.

Un satélite de telecomunicaciones se quiere poner en una órbita circular a una altura de 4000 km. Durante la fase de lanzamiento se produce un error en el tiempo de quemado de la lanzadera y se pierde contacto con el satélite durante los instantes previos a la inserción. Al cabo de un tiempo se puede retomar las comunicaciones, pero solo durante unos instantes, apenas unos segundos en los que sólo se puede medir la velocidad, la altura sobre la tierra, y el ángulo que forma el radio vector con el vector velocidad :

- $h_1 = 4200$ km
- $V_1 = 8$ km/s
- $\psi_1 = 79°$

1. Determinar el tipo de órbita en la que se encuentra el satélite en el momento de la inserción, el parámetro p, su excentricidad (e) y la anomalia verdadera (θ_1).
2. Determinar la velocidad (V_2), la anomalia verdadera (θ_2), y el ángulo (ψ_2) que forma el radio vector con el vector velocidad en el momento en el que interseccione con la orbita a la que estaba originalmente previsto insertar el satélite ($h_f = 4000$ km).
3. Determinar el periodo completo de la órbita.

Datos: radio de la Tierra, R_T =6378 km; parámetro de gravitación de la Tierra, $\mu = 3{,}986 \times 10^5 km^3/s^2$.

Nota: las relaciones entre los parámetros geométricos de la órbita (p y e) y los físicos (h y E) son:

$$\begin{aligned} p &= \frac{h^2}{\mu} \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}} \end{aligned}$$

$$p = a\left(1 - e^2\right) = \frac{b^2}{a}$$

La velocidad areolar viene dada por $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h$, y el area de una elipse viene dada por $A = \pi ab$

SOLUCIÓN

Apartado 1

El tipo de órbita en la que se encuentra el satélite en el momento en el que se captan los datos numéricos referente a las propiedades del satñelite viene dado por la ecuación de la órbita:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

donde el radio es $r_1 = h_1 + R_T = 4200 + 6378 = 10578$ km, y el parámetro p viene dado por:

$$p = \frac{h^2}{\mu}$$

donde la cantidad de momento cinético h viene dada por

$$h = r_1 \cdot V_1 \cdot \sin\psi_1 = 10578 \cdot 8 \cdot \sin 79^\circ = 83069{,}21\ km^2/s$$

por lo que

$$p = \frac{h^2}{\mu} = \frac{(83069{,}21 km^2/s)^2}{3{,}986 \times 10^5 km^3/s^2} = 17311{,}82\ km$$

La energía de la órbita viene dada por

$$E = \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{\mu}{r_1} = \frac{1}{2}8^2 - \frac{3{,}986 \times 10^5}{10578} = -5{,}6819\ km^2/s^2$$

por lo que se puede deducir que la órbita es cerrada, por lo que se procede a calcular la excentricidad mediante la relacione:

$$e \;=\; \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \frac{2 \cdot (-5{,}6819\ km^2/^2) \cdot (83069{,}21 km^2/s)^2}{(3{,}986 \times 10^5 km^3/s^2)^2}} = 0{,}7116$$

lo que confirma que es una órbita elíptica. por lo que solo nos queda calcular la anomalia verdadera en la que se encuentra el satélite en el momento de recibir los datos de comunicación:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{e} \cdot \left(\frac{p}{r_1} - 1\right)\right) = 26{,}55^\circ$$

Apartado 2

Para determinar la velocidad (V_2), es necesario observar que, como la Energía se conserva, podemos obtener la velocidad en el punto en el que intersecciona con la órbita final en el momento en el que $r_2 = h_2 + R_T = 4000\ + 6378 = 10378\ km$ por lo que V_2 se puede determinar a partir de

$$E = \frac{1}{2}V_2^2 - \frac{\mu}{r_2} \rightarrow V_2 = \sqrt{2 \cdot \left(E + \frac{\mu}{r_2}\right)} = 8{,}0902\ km/s$$

la anomalia verdadera (θ_2) viene dada a partir de:

$$r_2 = \frac{p}{1 + e\cos\theta_2} \to \theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{p}{r_2} - 1\right)\right) = 20{,}14°$$

y el ángulo (ψ_2) que forma el radio vector con el vector velocidad en el momento en el que intersecciona con la orbita a la que estaba originalmente previsto insertar el satélite ($h_f = 4000$ km) viene dado por la ecuación de la cantidad de momento cinético (el cual se conserva al igual que la Energia):

$$h = r_2 \cdot V_2 \cdot \sin\psi_2 \to \psi_2 = \sin^{-1}\left(\frac{h}{r_2 \cdot V_2}\right) = 81{,}64°$$

Apartado 3

El periodo de la órbita elíptica en la que se encuentra mediante

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

el cual puede ser determinado a partir de la velocidad areolar (el área barrida por el radiovector por unidad de tiempo) y el área para un elipsoide tal como se ve

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{V}$$

cuyo módulo viene dado por

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h$$

por lo que el periodo viene dado por el cociente entre el área dividida entre el área de la órbita y la velocidad a la que ha barrido es decir

$$T = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h}$$

a partir de la ecuación que define el parámetro $p = \frac{h^2}{\mu}$, podemos expresar el momento cinético como

$$h = \sqrt{p\mu}$$

y utilizando que se puede representar el parámetro p en función de la geometría de la órbita cerrada como

$$p = \frac{b^2}{a} \to h = \sqrt{\frac{b^2}{a}\mu}$$

definimos el periodo como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

donde a representa el semieje mayor para la órbita elíptica, y el radio para la órbita circular, donde para calcular el semieje mayor es necesario calcular el radio del periapsis (r_p)y el radio del apoapsis (r_a)ya que $a = \frac{r_p + r_a}{2}$. El radio del periapsis y del apoapsis puede ser determinado a partir de la ecuación de la órbita:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

donde para el periapsis $\theta = 0°$por lo que

$$r_p = \frac{p}{1 + e\cos 0^\circ} = \frac{17311{,}829}{1 + 0{,}7116 \cdot \cos 0^\circ} = 10114{,}12\ km$$

y para el apoapsis $\theta = 180^\circ$ por lo que

$$r_a = \frac{p}{1 + e\cos 180^\circ} = \frac{17311{,}829}{1 + 0{,}7116 \cdot \cos 180^\circ} = 60037{,}46\ km$$

por lo que

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = 35075{,}79\ km$$

y el periodo de la órbita viene dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{(35075{,}79\ km)^3}{3{,}986 \times 10^5 km^3/s^2}} = 65376{,}6\ segundos$$