Fundamentos de Navegación Aérea

Tema 10: Sistema de navegación por posicionamiento. Navegación por satélite.

Sistema de navegación por posicionamiento.

- La navegación por posicionamiento consiste en averiguar la localización geográfica con ayuda de señales o medidas exteriores.
- El ejemplo más temprano es la navegación astronómica que ya se vio en la introducción histórica. Dicho tipo de navegación aún se emplea, especialmente para vehículos espaciales y misiles balísticos.
- Actualmente la navegación por posicionamiento se realiza mediante radioayudas (por ejemplo VOR/DME, DME/DME), radar y/o sistemas de navegación por satélite (GNSS).
- Además de la posición se puede encontrar la velocidad estudiando el efecto Doppler en las señales. También puede ser posible hallar la actitud.
- Veremos en detalle la navegación DME/DME como introducción a GNSS, para luego profundizar en la navegación por satélite.

Fundamentos básicos.

- Los sistemas de posicionamiento que vamos a estudiar se basan en la recepción (y en el caso del DME, emisión) de señales respecto a un punto de referencia cuya localización es conocida (una estación, un satélite).
- Estudiando el tiempo de transmisión de dichas señales, se encuentra la distancia hasta el punto de referencia.
- Con dicha distancia se puede construir un lugar geométrico de puntos posibles donde puede hallarse la aeronave.
- Dado el suficiente número de estaciones o satélites, se podrá hallar la posición de la aeronave como la intersección de dichos lugares geométricos.
- La posición relativa de los puntos de referencia influirá en el error (DOP: Dilution of Precision).

DME I

- DME=Distance Measurement Equipment.
- El sistema requiere un emisor/receptor en la aeronave y un transponder en la estación en tierra.
- El sistema en la aeronave interroga al transponder en tierra mediante una serie de pares de pulsos. La estación responde con una secuencia idéntica de pulsos con un cierto retraso específico (50 microsegundos).
- La distancia se calcula simplemente midiendo el tiempo que tardan las señales en retornar tras su emisión; a dicho tiempo se le resta 50 microsegundos y se divide por 2. Dividiendo el resultado por la velocidad de la luz, se obtiene una buena estimación de la distancia a la estación en tierra.

DME II

- La secuencia de pares de pulsos depende del equipo del avión, por lo que un mismo equipo de tierra puede responder a múltiples equipos en el aire (hasta 100–200 aeronaves).
- La precisión típica de un DME está entre 185 m (0.1 nm) y 926 m. (0.5nm) $2-\sigma$. Se pueden obtener medidas casi continuamente (10 medidas por segundo). También se obtiene una estimación de la velocidad (proyectada en la dirección de la estación) mediante el efecto Doppler.
- Obsérvese que la medida de distancia D es 3-D. Para obtener la distancia sobre el terreno, d_G, si la altitud Alt es conocida: $D^2 = d_G^2 + Alt^2$.

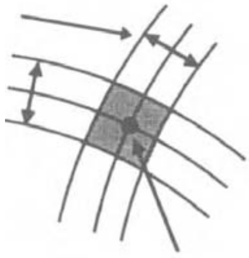
Navegación DME/DME

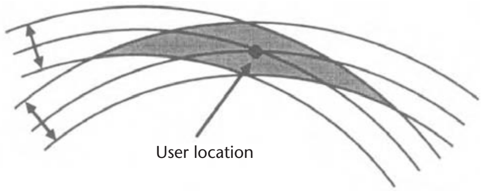
- Consideremos el caso de dos DMEs. En principio existirá una ambigüedad que se puede resolver conocidas medidas anteriores o con una tercera estación.
- Simplifiquemos y supongamos Tierra plana y las coordenadas x, y que miden la posición de la aeronave; las coordenadas x_1, y_1 y x_2, y_2 determinan la posición de las estaciones.
- Se mide la distancia a la primera estación ρ_1 y a la segunda estación ρ_2 (distancias sobre tierra).
- Las ecuaciones que hay que resolver para hallar la posición son:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \rho_1^2, \; (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = \rho_2^2.$$

- Éstas ecuaciones son sencillas de resolver. Pero si las distancias contienen error, ¿cómo determinar el error final en la estimación de posición?

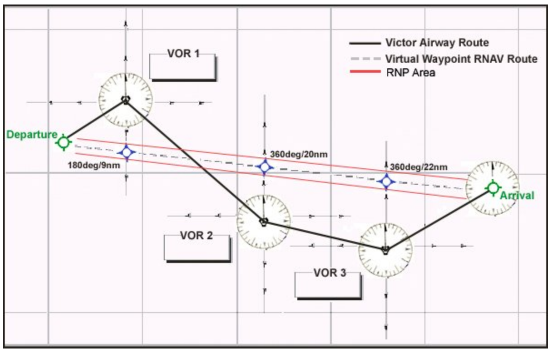
Errores en navegación DME/DME





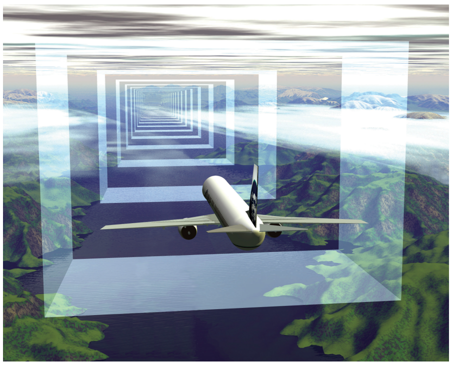
- Los errores dependen de la posición relativa de las estaciones DME con respecto al receptor.
- Si la linea que une al receptor con uno de los DME forma 90 grados con la linea que une al receptor con el otro DME, la situación es óptima, como se ve en la figura de la izquierda.
- Si dichas lineas forman un ángulo pequeño (por ejemplo si el receptor se encuentra aproximadamente entre las estaciones DME) la situación es adversa, como se muestra en la figura de la derecha.

RNAV



- RNAV=aRea NAVigation.
- La navegación tradicional exige emplear radioayudas (típicamente VOR) como waypoints generando aerovías rígidas que no permiten explotar el espacio aéreo.
- Los sistemas de navegación actuales permiten saber la posición de la aeronave con precisión, para cualquier ruta.
- RNAV es un procedimiento de navegación que permite diseñar una ruta arbitraria con waypoints virtuales, siempre que la ruta de la aeronave se encuentre en una zona donde los sistemas de navegación tengan la suficiente precisión.
- Dicha precisión se puede especificar, de forma que una determinada ruta o procedimiento RNAV sólo la pueden realizar aviones con ciertas características y adecuadamente equipados. Ésta especificación se denomina RNP.

RNAV/RNP



- RNP=Required Navigation Performance.
- Es un conjunto de estándares que especifican los requisitos mínimos que una aeronave y su sistema de navegación deben cumplir para operar en un determinado espacio aéreo.
- RNAV/RNP: permite diseñar rutas con menor separación que la tradicionalmente empleada, y por tanto una explotación eficiente del espacio aéreo.
- RNAV/RNP es el futuro del tráfico aéreo y requiere un amplio conocimiento de los sistemas de navegación utilizados.
- Ejemplificamos éstos conceptos para el caso DME-DME.

Navegación RNAV DME/DME

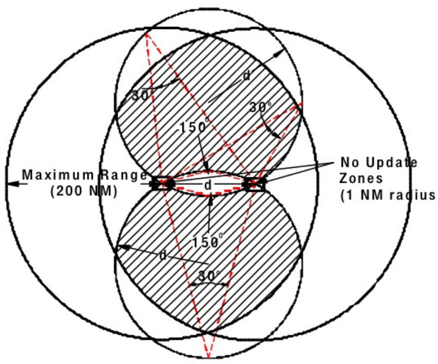
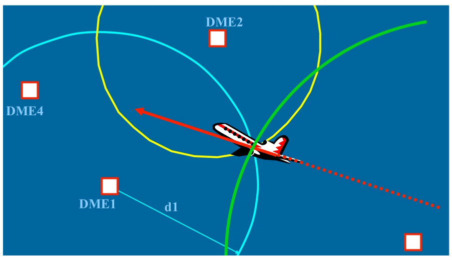
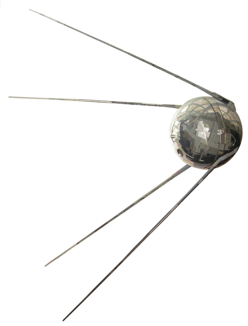


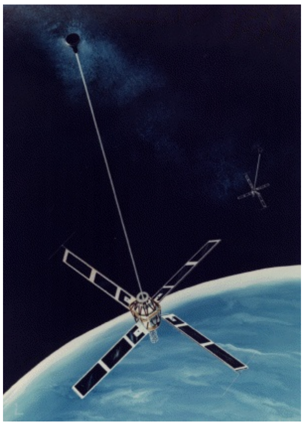
Figure 2 - DME Coverage



- Los sistemas DME/DME están extendidos hoy en día y permiten suficiente cobertura para todas las operaciones en ruta en Europa. Permiten cumplir los requisitos RNAV si bien se reconoce que debería aumentar el número de estaciones para mejorar la precisión.
- Para poder realizar navegación DME/DME los requisitos mínimos son 2 estaciones cumpliendo:
  - Distancia menor de 200 nm y mayor de 1nm.
  - Arco subtendido entre las dos estaciones situado entre 30 grados y 150 grados.
- Cuantas más estaciones estén disponibles, mayor precisión se podrá conseguir. En cualquier caso la precisión dependerá del equipo.

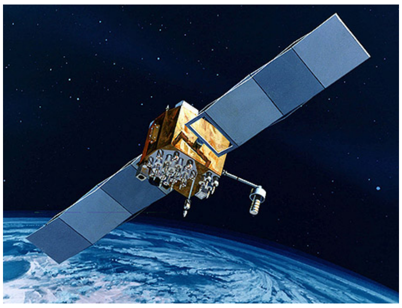
Sistemas de posicionamiento satelitales: TRANSIT





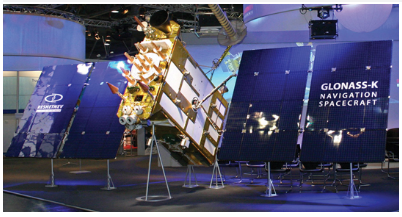
- En 1957, cuando se lanzó el Sputnik, se observó que empleando el efecto Doppler a sus señales de radio se podía estimar su velocidad relativa al observador.
- A partir de la velocidad relativa se podía encontrar la posición relativa, y suponiendo que el observador conociera su posición perfectamente, por tanto se encontraba la posición del Sputnik.
- Se plantea la idea de invertir este cálculo: conocida la posición del satélite, y utilizando señales de radio, determinar la posición del observador.
- Un primer sistema satelital es el sistema TRANSIT:
  - 5 satélites en órbita polar baja y 5 repuestos.
  - Empleaba el efecto Doppler para obtener medidas 2-D de la posición, con precisión de 200–400 m.
  - En servicio desde 1965 hasta 1991.
  - Actualización de posición cada 30 minutos ($\phi = 80^o$)–110 minutos ($\phi = 0^0$).

Sistemas de posicionamiento satelitales: GPS



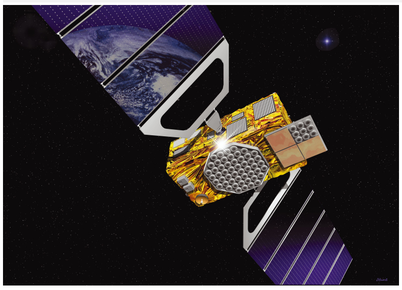
- En los años 60 agencias de EE.UU. (NASA, DoD...) se interesan por desarrollar un sistema:
  - Global.
  - 3-D.
  - De gran precisión.
  - Con operación continua.
  - Útil en plataformas de dinámica rápida.
- En los años 70 nace el GPS (Global Positioning System) que satisface los criterios y es pasivo: permite infinitos usuarios.
- El sistema en su concepción es de naturaleza militar.
  - 1978: Se lanza el primer satélite.
  - Años 80: el sistema es operacional.
  - Años 90: modernización; el uso civil supera al militar.
  - 2000: Se desconecta la S.A. (Selective Availability).
  - 31/1/2019: 31 satélites operativos, 1 en mantenimiento.

Sistemas de posicionamiento satelitales: Glonass



- En los años 70 la URSS comienza el desarrollo de su propio sistema de navegación, GLONASS=Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema, o lo que es lo mismo, Sistema de Navegación Global por Satélite.
- GLONASS es también militar en su concepción. En el año 88, la URSS ofrece el uso gratuito de la señal al resto del mundo.
  - 1982: Se lanza el primer satélite.
  - Año 93: Se alcanzan 8 satélites, primeras operaciones.
  - Año 95: Se completa la constelación nominal (24 satélites).
  - 1997-2001: El sistema se degrada por falta de mantenimiento, llegando a un mínimo de 6-8 satélites en 2001.
  - 2002-2011: se considera la restauración del sistema una prioridad nacional y se reorganiza la gestión, inyectando dinero público y lanzándose nuevos satélites.
  - 2011: El sistema vuelve a ser operativo.
  - 31/1/2019: 23 satélites operativos, 1 mantenimiento, 1 de repuesto, 1 en test.

Sistemas de posicionamiento satelitales: Galileo

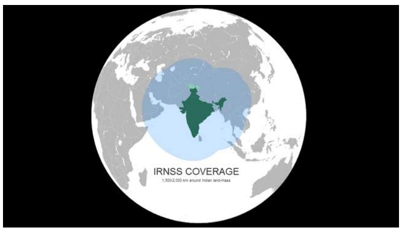


- Galileo es una iniciativa conjunta de la Comisión Europea y de la ESA.
- La "European GNSS Supervisory Authority (GSA)" (www.gsa.eu) se responsabiliza del programa desde 2007. Su sede actual está en Praga.
- 2005: Se lanza el primer satélite en pruebas.
- 2008: Segundo satélite en pruebas.
- 2011: los dos primeros satélites (IOV) en órbita nominal.
- 2012: dos satélites adicionales.
- 2013: primeras pruebas de señal
- 2014: dos satélites adicionales, lanzados en órbitas incorrectas. Actualmente en órbitas "aprovechables".
- 2019: 18 satélites disponibles, 2 en pruebas, 4 posicionándose, 2 inoperativos.
- FOC (Full Operational Capability): 2020??

Sistemas de posicionamiento satelitales: Beidou

- Beidou es un sistema de navegación chino, que consta de dos etapas:
  - Un sistema en pruebas regional (BeiDou-1) con una constelación de 3 satélites en órbita geoestacionaria que abarca fundamentalmente China y las regiones cercanas. Actualmente ya no operativo.
  - Un sistema global (BeiDou-2) actualmente en construcción.
- 2000: Se lanza el primer satélite de BeiDou-1.
- 2003: Se lanza el tercer y último satélite de BeiDou-1.
- 2007: Se lanza el primer satélite de pruebas de BeiDou-2.
- 2011-2012: Beidou-1 deja de funcionar y Beidou-2 empieza a operar.
- 19/5/16: 15 satélites, dos con problemas. 5 IGSOS, 5 GEO, 5 MEO.
- 31/1/19: 32 satélites operativos, 5 en pruebas, 1 posicionándose. 5 GEOs, 7 IGSOs, 20 MEOs
- 2020: Cobertura global?

Sistemas de posicionamiento satelitales: IRNSS (NAVIC)



- De acuerdo a la agencia espacial de la India, el IRNSS (Indian Regional Navigation Satellite System) consistirá en tres satélites geoestacionarios así como dos IGSOs (satélites geosíncronos con inclinación de 29°), y dos repuestos en cada una de estas órbitas (siete satélites en total).
- Estado de IRNSS:
  - 2013: Se lanza el primer IGSO.
  - 2014: Se lanza el segundo IGSO.
  - 2014: Se lanza el primer GEO.
  - 2015: Se lanza el tercer IGSO.
  - 28/4/2016: Constelación completa.
  - 31/1/19: 7 satélites geosíncronos operativos. Un fallo de un GEO ocurrio en 2017 y el lanzamiento del reemplazo fallo en 2018. Su segundo reemplazo está operativo.
  - Planes de expandir de 7 a 11 satélites.

Comparación entre los distintos GNSS

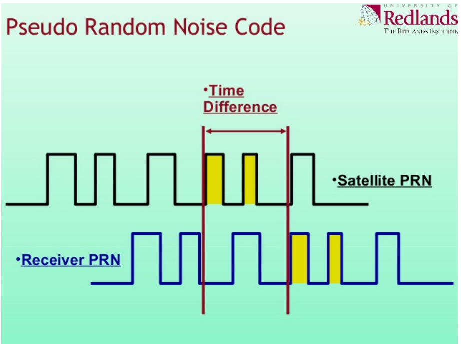
Cuadro: Comparativa GNSS

Sistema	Propietario	Satélites	Precisión	Estado
GPS	USA	$>$ 24 órbita MEO	$\approx$ 5m	operativo
GLONASS	Rusia	$>$ 24 órbita MEO	5-10m	operativo
Galileo	EU	$>$ 24 órbita MEO	$\approx$ 1m	en construcción
BeiDou	China	27 MEO, 5 GEO, 3 IGSO	$\approx$ 10m	17 sats. operativos (regional)
IRNSS	India	3 GEO, 4 IGSO	10m (India), 20m (Índico)	operativo

GPS: segmento espacial

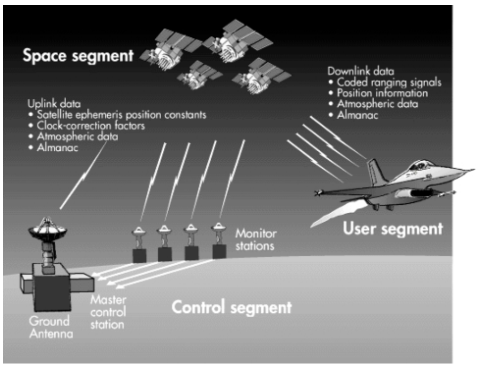
- Constelación de 24 satélites (nominal) distribuidos en 6 planos orbitales, con 4 satélites por plano. Órbitas circulares.
- La constelación se ubica en órbita media, con una altitud aproximada de 20200 kilómetros sobre la Tierra.
- Satélites NAVSTAR, fabricados por Rockwell International. Pesan 860 kg.
- Cada satélite lleva a bordo un reloj atómico sincronizado con el tiempo GPS.
- Cada satélite emite continuamente un mensaje en dos frecuencias: L1(1575.42 Mhz), L2(1227.6MHz).
- La banda L se usa porque penetras nubes, niebla, lluvia, tormentas y vegetación, así como otras consideraciones (retardo ionosférico aceptable, tamaño de antena de recepción, etc...).

GPS: señales



- La señal emitida tiene 3 partes: C/A code (coarse/adquisition), P code (precision), y el mensaje de navegación. Contienen una secuencia que permite estimar el tiempo de recepción e información sobre la localización del satélite (efemérides).
- Tanto el C/A code como el P code son un tipo de secuencia denominada PRN (pseudo-random noise).
- La característica de un PRN es que aunque no tiene ningún patrón definido, se repite una vez termina su periodo.
- Aunque parece aleatorio no lo es y se puede replicar en el receptor.
- Se usa para identificar la señal de cada satélites (cada uno emite un PRN diferente) y determinar el instante en el que fue emitida la señal.

GPS: segmento de control



- Segmento de control: red que monitoriza el estado de los satélites.
- Actualiza con observaciones la posición real de los satélites (efemérides).
- Sincroniza los relojes atómicos.
- Controlado por el ejército. La estación de control maestra está en Colorado (Schriever AFB).

GPS: segmento de usuario

- Dispositivo que emplea un usuario de GPS para obtener su posición a partir de las señales recibidas. Para ello implementa un algoritmo de estimación de posición.
- Requiere: receptor de radio, reloj de cuarzo.
- Contiene un propagador de órbitas: calcula la posición de los satélites a partir de las efemérides.
- El GPS fue concebido con uso dual, civil o militar.
- La señal militar está encriptada, y permite mayor precisión (PPS=Precise Positioning System). La señal civil tenía ruido añadido para hacerla menos precisa (SPS=Standard Positioning System), denominado S.A.=Selective Availability, pero se desactivó en 2000, incrementando la precisión SPS.
- Las precisiones mínimas garantizadas SPS son del orden de 13m. 2drms horizontal, 22m 2-σ vertical, 0.2m/s 2-σ en velocidad y 40ns 2-σ en tiempo. Actualmente, los datos reales muestran precisiones típicas de 3.5 metros horizontales!

Observables. Pseudodistancia.

- Las medidas del receptor GPS se denominan observables.
- A partir de las señales enviadas por un satélite, es posible determinar el tiempo t_0 en el que se enviaron. Comparando con el tiempo t_1 de recepción, el primer observable que se obtiene es la diferencia de tiempos $\Delta t = t_1 - t_0$.
- Llamando $\underline{r}$ a la distancia receptor-satélite, $r = \|\underline{r}\| = c\Delta t$, donde c es la velocidad de la luz. Definamos $\rho = c\Delta t$.
- Si el reloj del receptor (un reloj de cuarzo) estuviera sincronizado perfectamente con el tiempo GPS (dado por los relojes atómicos a bordo de los satélites), entonces ρ sería una medida exacta de la distancia.
- Pero un reloj de cuarzo tiene errores; $t_{receptor} = t_{GPS} + t_u$, donde t_u es el sesgo del reloj. Errores muy pequeños corresponden con grandes distancias ya que c es muy elevado.
- Ya que ρ no es una medida exacta de la distancia se denomina pseudodistancia.

Cálculo de la posición.

- Llamemos $\underline{s}$ a la posición del satélite y $\underline{u}$ a la posición del usuario. En aplicaciones GPS se suele trabajar en el sistema de referencia ECI o a veces ECEF.
- Se tiene entonces que $\underline{r} = \underline{s} - \underline{u}$. Luego $r = \rho - ct_u = \|\underline{s} - \underline{u}\|$.
- En el mensaje de navegación está codificada la efemérides del satélite con gran precisión, lo que permite calcular $\underline{s}$ con gran exactitud.
- Por tanto para cada satélite i que sea visible en un instante dado tendremos una ecuación del tipo $\rho_i - ct_u = \|\underline{s}_i - \underline{u}\|$ (una esfera).
- ¿Cuántos satélites serán necesarios para hallar $\underline{u}$?
  - La intersección de dos esferas es una circunferencia.
  - La intersección de tres esferas son dos puntos.
- Además t_u es desconocido: son necesarios al menos cuatro satélites.

Cálculo de la posición con cuatro satélites I

- Por tanto tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\rho_1 - ct_u &= \|\underline{s}_1 - \underline{u}\| \\
\rho_2 - ct_u &= \|\underline{s}_2 - \underline{u}\| \\
\rho_3 - ct_u &= \|\underline{s}_3 - \underline{u}\| \\
\rho_4 - ct_u &= \|\underline{s}_4 - \underline{u}\|
\end{aligned}$$

- Es necesario un algoritmo para determinar t_u y $\underline{u}$. Se puede resolver exactamente con cierta manipulación, pero buscamos un algoritmo aproximado más sencillo.
- Si definimos $\underline{u} = [x_u\ y_u\ z_u]^T$ y $\underline{s}_i = [x_i\ y_i\ z_i]^T$, obsérvese que $\rho_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} + ct_u$. Por tanto $\rho_i = f_i(x_u, y_u, z_u, t_u)$.
- Supongamos que conozco una estimación inicial de $\underline{u}$ y t_u, dada por $\underline{\hat{u}} = [\hat{x}_u\ \hat{y}_u\ \hat{z}_u]^T$ y $\hat{t}_u$. Definamos $\delta\underline{u} = \underline{u} - \underline{\hat{u}} = [\delta x_u\ \delta y_u\ \delta z_u]^T$, $\delta t_u = t_u - \hat{t}_u$ y $\hat{\rho}_i = \|\underline{s}_i - \underline{\hat{u}}\| + c\hat{t}_u$.
- Linealicemos ahora f_i en torno a la estimación inicial.

Cálculo de la posición con cuatro satélites II

- Se tendrá que:

$$\begin{aligned}\rho_i &= f_i(x_u, y_u, z_u, t_u) = f_i(\delta x_u + \hat{x}_u, \delta y_u + \hat{y}_u, \delta z_u + \hat{z}_u, \delta t_u + \hat{t}_u) \\ &= f_i(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u) + \frac{\partial f_i(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{x}_u}\delta x_u + \frac{\partial f_i(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{y}_u}\delta y_u + \frac{\partial f_i(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{z}_u}\delta z_u \\ &\quad + \frac{\partial f_i(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{t}_u}\delta t_u\end{aligned}$$

- Se tiene que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_u} = -\frac{(x_i - \hat{x}_u)}{\sqrt{(x_i - \hat{x}_u)^2 + (y_i - \hat{y}_u)^2 + (z_i - \hat{z}_u)^2}}$$

- Puesto que todo es conocido en la expresión de arriba, definimos $a_{x_i} = -\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_u} = \frac{(x_i - \hat{x}_u)}{\sqrt{(x_i - \hat{x}_u)^2 + (y_i - \hat{y}_u)^2 + (z_i - \hat{z}_u)^2}}$.
- Similarmente se define $a_{y_i} = -\frac{\partial f_i}{\partial \hat{y}_u}$ y $a_{z_i} = -\frac{\partial f_i}{\partial \hat{z}_u}$.
- Finalmente se tiene que $\frac{\partial f_i}{\partial \hat{t}_u} = c$.
- Por tanto la linealización queda: $\rho_i = \hat{\rho}_i - a_{x_i}\delta x_u - a_{y_i}\delta y_u - a_{z_i}\delta z_u + c\delta t_u$

Cálculo de la posición con cuatro satélites III

- Definamos $\Delta\rho = \hat{\rho}_i - \rho_i = a_{x_i}\delta x_u + a_{y_i}\delta y_u + a_{z_i}\delta z_u - c\delta t_u$.
- Si definimos:

$$\Delta \underline{x} = \begin{bmatrix} \delta x_u \\ \delta y_u \\ \delta z_u \\ -c\delta t_u \end{bmatrix}, \ \Delta \underline{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 - \rho_1 \\ \hat{\rho}_2 - \rho_2 \\ \hat{\rho}_3 - \rho_3 \\ \hat{\rho}_4 - \rho_4 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} a_{x_1} & a_{y_1} & a_{z_1} & 1 \\ a_{x_2} & a_{y_2} & a_{z_2} & 1 \\ a_{x_3} & a_{y_3} & a_{z_3} & 1 \\ a_{x_4} & a_{y_4} & a_{z_4} & 1 \end{bmatrix}$$

- Se tiene que $\Delta\underline{\rho} = H\Delta\underline{x}$.
- Por tanto para determinar $\Delta\underline{x}$ simplemente $\Delta\underline{x} = H^{-1}\Delta\underline{\rho}$ y se obtienen los errores respecto a la estimación inicial.

Algoritmo de mínimos cuadrados para GPS

- El algoritmo anterior no es válido si se tienen más de cuatro satélites, porque H no sería cuadrada. En general para n satélites $\Delta\underline{\rho}$ es $n \times 1$ y H es $n \times 4$, mientras que $\Delta\underline{x}$ es 4×1.
- Típicamente es posible tomar medidas de 5 o más satélites; cuantos más satélites, más información se tendrá y más precisión se podrá alcanzar, por lo que sería deseable un algoritmo para calcular $\Delta\underline{x}$ incluyendo todas las medidas.
- Además, puesto que las medidas contienen error, se podría usar un modelo del tipo $\Delta\underline{\rho} = H\Delta\underline{x} + \underline{\nu}$, donde $\underline{\nu} \sim N_n(\underline{0}, \Sigma)$ es un modelo del error para la pseudodistancia.
- Este modelo es apto para ser resuelto con el algoritmo de mínimos cuadrados (ponderados o no), que además permitirá estimar el error que se está cometiendo en $\Delta\underline{x}$ a partir del valor de H y de Σ.
- Se obtiene: $\Delta\underline{\hat{x}} = (H^T H)^{-1} H^T \Delta\underline{\rho}$.

Errores en los observables

- Es razonable suponer $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$, donde σ_i es la varianza del error de cada pseudodistancia.
- No obstante, es usual despreciar la diferencia de errores entre satélites. Por tanto en primera aproximación se toma $\sigma_i^2 = \sigma_{UERE}^2$, por lo que no tiene sentido usar mínimos cuadrados ponderados y se usa simplemente el algoritmo básico.
- UERE=User Equivalent Range Error, una estimación cuyo valor típico es $\sigma_{UERE} \sim 7 - 1{,}5\mathrm{m}$ (SPS-PPS), y proviene de las siguientes fuentes de error (sumadas con RSS):
  - Segmento espacial: error reloj (1.1 m), cálculo órbita (0.8 m).
  - Segmento usuario: Efectos atmosféricos, ruido del receptor y resolución, efectos multicamino: 7-1.4 m. (SPS-PPS)

Factores DOP I

- Por tanto en primera aproximación $\Sigma = \sigma^2_{UERE}\mathrm{Id}_n$.
- La covarianza del resultado será: $Cov[\Delta\hat{\underline{x}}] = (H^T H)^{-1}H^T\sigma^2_{UERE}\mathrm{Id}_n H(H^T H)^{-1} = \sigma^2_{UERE}(H^T H)^{-1}$.
- Definimos $G = (H^T H)^{-1}$, llegamos a $Cov[\Delta\hat{\underline{x}}] = \sigma^2_{UERE}G$.
- El significado físico de $Cov[\Delta\hat{\underline{x}}]$ viene dado por

$$Cov[\Delta\hat{\underline{x}}] = \begin{bmatrix} E[\delta x_u^2] & E[\delta x_u\delta y_u] & E[\delta x_u\delta z_u] & E[\delta x_u\delta t_u] \\ E[\delta x_u\delta y_u] & E[\delta y_u^2] & E[\delta y_u\delta z_u] & E[\delta y_u\delta t_u] \\ E[\delta x_u\delta z_u] & E[\delta z_u\delta y_u] & E[\delta z_u^2] & E[\delta z_u\delta t_u] \\ E[\delta x_u\delta t_u] & E[\delta t_u\delta y_u] & E[\delta t_u\delta z_u] & E[\delta t_u^2] \end{bmatrix} = \sigma^2_{UERE}\begin{bmatrix} G_{11} & & & \\ & G_{22} & & \\ & & G_{33} & \\ & & & G_{44} \end{bmatrix}$$

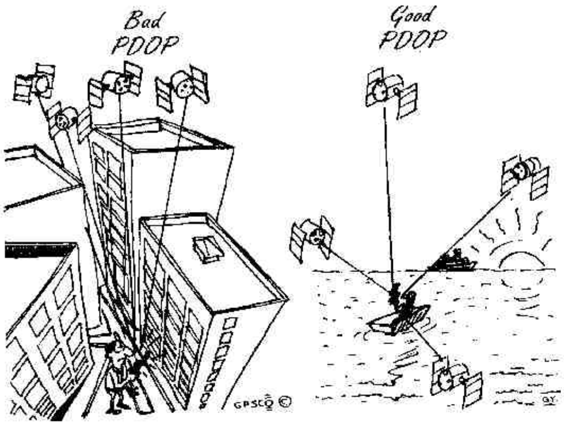
- Los valores interesantes son los de la diagonal: nos dicen la varianza en las diferentes direcciones y el tiempo.
- Éstas varianzas son el producto de dos factores: σ^2_{UERE}, que depende de la señal, y G, que depende sólo de H, que a su vez sólo depende de las derivadas de f_i: es decir de la geometría.

ERROR GPS=(FACTOR GEOMETRICO)× (ERROR SEÑAL)

Factores DOP II

- Éstos valores en la diagonal de G se combinan para formar los llamados factores DOP, que nos dicen cuánto afecta la geometría a la solución del error. Los valores típicamente usados son:
  - GDOP-Geometric Dilution of Precision. $GDOP = \sqrt{G_{11} + G_{22} + G_{33} + G_{44}}$.
  - PDOP-Position Dilution of Precision. $PDOP = \sqrt{G_{11} + G_{22} + G_{33}}$.
  - TDOP-Time Dilution of Precision. $TDOP = \sqrt{G_{44}}$.
  - HDOP-Horizontal Dilution of Precision. $GDOP = \sqrt{G_{11} + G_{22}}$.
  - VDOP-Vertical Dilution of Precision. $VDOP = \sqrt{G_{33}}$.
- Usando los factores DOP podemos hallar rápidamente una estimación de la precisión de nuestro GPS:
  - $\sigma_z = VDOP \times \sigma_{UERE}$
  - $\sigma_t = TDOP \times \sigma_{UERE}/c$
  - Precisión horizontal $2 - DRMS = 2HDOP \times \sigma_{UERE}$

Factores DOP III



- ¿Cómo influye la geometría en G?
- Intuitivamente, parece bastante claro que si las medidas se obtienen de satélites muy próximos, los resultados no serán buenos.
- Estudiamos para el caso de 4 satélites la configuración que minimiza el *GDOP*, con los satélites visibles en el horizonte (elevación mínima 5 grados).
- La elevación/azimut óptimo de los satélites es:

Satélite	1	2	3	4
h	5º	5º	5º	90º
Az	0º	120º	240º	0º

Nota: Al azimut de 1-3 se le puede añadir cualquier valor constante, siempre que se añada a todos.

Factores DOP IV

- Dicha configuración óptima es un tetraedro, con el usuario situado aproximadamente en el centro de una de las caras, y el vértice opuesto a dicha cara justo sobre el usuario.
- Para esta configuración se tiene:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}996 & 0{,}087 & 1 \\ 0{,}863 & -0{,}498 & 0{,}087 & 1 \\ -0{,}863 & -0{,}498 & 0{,}087 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow G = (H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}672 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}672 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}6 & -0{,}505 \\ 0 & 0 & -0{,}505 & 0{,}409 \end{bmatrix}$$

- Los factores DOP son: $GDOP = 1{,}83$, $PDOP = 1{,}72$, $TDOP = 0{,}64$, $HDOP = 1{,}16$, $VDOP = 1{,}26$.
- Tomando $\sigma_{UERE} = 7\mathrm{m}$ (SPS):
  - Error vertical: 17.64 metros 2-σ.
  - Precisión horizontal 16.24 metros 2-DRMS.
  - Precisión en tiempo 2-σ:$2 \times TDOP \times \sigma_{UERE}/c = 30\ \mathrm{ns}$
- En la práctica σ_{UERE} es menor gracias a mejores dispositivos y algoritmos en la actualidad.

Cálculo de la velocidad

- Una sistema de navegación enfocado a navegación aérea no sólo debe ser capaz de hallar la posición, sino también la velocidad (y la actitud).
- Un sistema GPS se puede actualizar aproximadamente desde 1 (receptores básicos baratos) hasta unas 20 veces por segundo (receptores con gran capacidad de cálculo, muy caros). Como primera idea para calcular $\underline{v}$ podríamos usar simplemente la posición en dos medidas consecutivas: $\underline{v} = \frac{\underline{u}(t+\Delta t)-\underline{u}(t)}{\Delta t}$.
- No obstante si $\underline{v}$ es elevado (lo que siempre sucede en aeronaves), incluso para un alto ancho de banda, la anterior fórmula es poco precisa e introduce errores.
- Los receptores GPS modernos encuentran la velocidad mediante otro observable: la frecuencia de la portadora. Ésta frecuencia se modifica por el efecto Doppler, debido a que entre el usuario y el satélite existe una velocidad relativa.

Efecto Doppler

- Ecuación del efecto Doppler: $f_R = f_T \left(1 - \frac{\underline{v}_r \cdot \underline{a}}{c}\right)$, donde:
  - f_R es la frecuencia recibida.
  - f_T es la frecuencia transmitida (conocida).
  - $\underline{v}_r = \dot{\underline{s}} - \dot{\underline{u}}$ es la velocidad relativa satélite-usuario.
  - $\underline{a} = \frac{\underline{s}-\underline{u}}{\|\underline{s}-\underline{u}\|}$ es el vector unitario en la dirección satélite-usuario. Si ya hemos obtenido la posición siguiendo los métodos anteriormente descritos se puede considerar $\underline{a}$ conocido.
- Por tanto la diferencia de frecuencia Δf vendrá dada por: $\Delta f = f_R - f_T = -f_T \frac{\underline{v}_r \cdot \underline{a}}{c}$.
- Por otro lado el observable no es directamente Δf, porque el reloj del segmento de usuario no tiene la suficiente precisión e introduce errores de medida de frecuencia de la siguiente forma: $f_M = f_R - f_M \dot{t}_u$, donde f_M es la frecuencia medida.

Deriva del reloj de usuario

- Para entender la ecuación $f_M = f_R - f_M \dot{t_u}$, imaginemos que el usuario mide una señal dada por $y = \sin(a \cdot \tau)$, donde τ es el tiempo del receptor.
- El receptor del usuario deduce que tiene una señal de a Hercios. Por tanto $f_M = a$.
- Pero si $\tau \neq t$, donde t es el tiempo GPS, se introduce un error. Este error es $\tau = t + t_u$, donde t_u es la deriva del reloj del usuario. Imaginemos que $t_u \simeq c_1 + c_2 t$. Luego $\dot{t_u} = c_2$.
- Entonces realmente $y = \sin(at + ac_1 + ac_2 t)$, lo que es una señal de $a + ac_2$ rad/s (ac_1 es un desfase y no influye en la frecuencia de la señal). Luego f_R es igual a $a + ac_2$.
- En efecto, se verifica: $a = a + ac_2 - ac_2$.
- Aunque $\dot{t_u}$ puede ser muy pequeño, tiene un efecto muy significativo en el resultado real, ya que estará multiplicado por c. Por tanto una deriva de 1 microsegundo por segundo (10^{-6}) daría errores del orden de 300 $\mathrm{m/s}$!

Algoritmo de cálculo de velocidad I

- Por tanto tenemos las dos ecuaciones: $f_R - f_T = -f_T \frac{\underline{v}_r \cdot \underline{a}}{c}$ y $f_M = f_R - f_M \dot{t_u}$.
- Eliminando f_R, se llega a:

$$c\frac{f_M - f_T}{f_T} = -\underline{v}_r \cdot \underline{a} - c\frac{f_M}{f_T}\dot{t_u}$$

- Puesto que $\underline{v}_r = \underline{\dot{s}} - \underline{\dot{u}}$, escribimos:

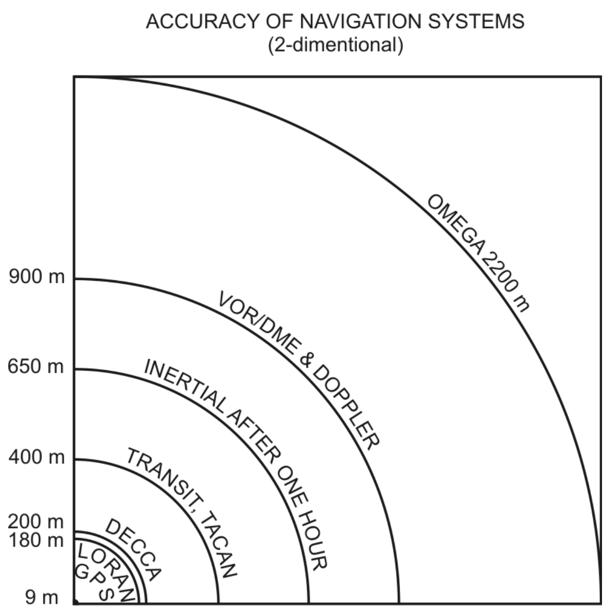
$$c\frac{f_M - f_T}{f_T} + \underline{\dot{s}} \cdot \underline{a} = \underline{\dot{u}} \cdot \underline{a} - c\frac{f_M}{f_T}\dot{t_u}$$

- Llamemos $\underline{d} = c\frac{f_M - f_T}{f_T} + \underline{\dot{s}} \cdot \underline{a}$; es un vector conocido en función de los datos, la medida de frecuencia de la portadora, el cálculo orbital, y la estimación anterior de la posición.
- Para cada satélite (un mínimo como ya vimos de 4) se tendrá una ecuación: $\underline{d}_i = \underline{\dot{u}} \cdot \underline{a}_i - c\frac{f_{Mi}}{f_{Ti}}\dot{t_u}$

Algoritmo de cálculo de velocidad II

- Obsérvese que las componentes de $\underline{a}_i$ a partir de una posición anteriormente estimada $\hat{\underline{u}}$ son:
$$a_{x_i} = \frac{(x_i - \hat{x}_u)}{\sqrt{(x_i-\hat{x}_u)^2+(y_i-\hat{y}_u)^2+(z_i-\hat{z}_u)^2}},$$
$$a_{y_i} = \frac{(y_i - \hat{y}_u)}{\sqrt{(x_i-\hat{x}_u)^2+(y_i-\hat{y}_u)^2+(z_i-\hat{z}_u)^2}},$$
$$a_{z_i} = \frac{(z_i - \hat{z}_u)}{\sqrt{(x_i-\hat{x}_u)^2+(y_i-\hat{y}_u)^2+(z_i-\hat{z}_u)^2}} .$$
- Estos valores ya se habían calculado anteriormente en la estimación de posición! Luego son conocidos. Llegamos a:
$\underline{d}_i = a_{x_i}\dot{u}_x + a_{y_i}\dot{u}_y + a_{z_i}\dot{u}_z - c\frac{f_{M\,i}}{f_{T\,i}}\dot{t}_u$
- Aproximamos $\frac{f_{M\,i}}{f_{T\,i}} \simeq 1$. Por tanto llegamos a la ecuación $\underline{d} = H\underline{g}$, donde H es la matriz que se usó para estimar la posición, $\underline{d}$ es un vector con las medidas y datos, y $\underline{g} = [\dot{u}_x \ \dot{u}_y \ \dot{u}_z \ \ -c\dot{t}_u]^T$ que hay que calcular.
- Resolvemos el problema por mínimos cuadrados como antes.

Disponibilidad, integridad y continuidad.



- En la tabla se resumen la mayor parte de los sistemas de navegación en uso.
- Como se puede ver, el GPS es el que consigue mayor precisión.
- No obstante, la precisión no es el único parámetro por el que se debe elegir un sistema de navegación.
- Otros conceptos de gran importancia son integridad, continuidad y disponibilidad.

Disponibilidad I

- Se define disponibilidad (availability) de un sistema de navegación como el porcentaje del tiempo que dicho sistema es “utilizable”, dentro de su área especificada de cobertura.
- Utilizable se refiere a que el sistema cumple unos requisitos mínimos (p.ej. en precisión) previamente especificados. Una definición típica de utilizable es que el usuario obtenga un $PDOP \leq 6$.
- En el caso del GPS, el área de cobertura es toda la superficie de la Tierra, pero también hay que considerar el llamado “ángulo de máscara”: el ángulo de elevación en el horizonte a partir del cual los satélites se consideran visibles para el receptor GPS.
- En un entorno urbano o con accidentes geográficos dicho ángulo tendrá que considerarse mayor que en un entorno sin accidentes (p.ej. el mar).

Disponibilidad II

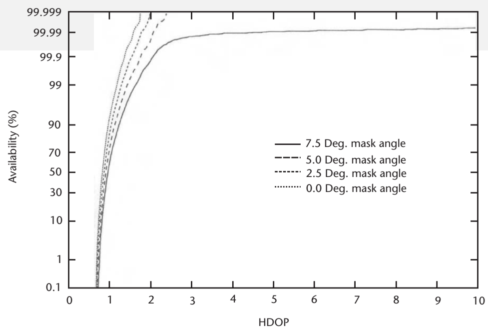


Figure 7.8 Cumulative distribution of HDOP with 7.5°, 5°, 2.5°, and 0° mask angles.

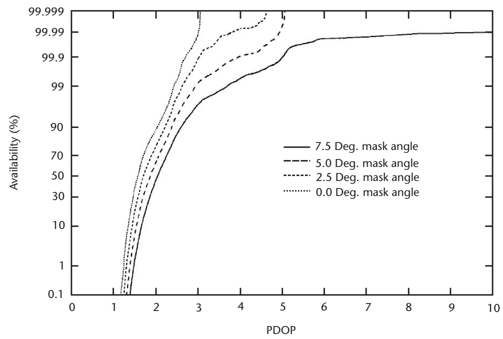


Figure 7.9 Cumulative distribution of PDOP with 7.5°, 5°, 2.5°, and 0° mask angles.

- Los datos mostrados son para la constelación nominal y para distintos ángulos de máscara.

Disponibilidad III

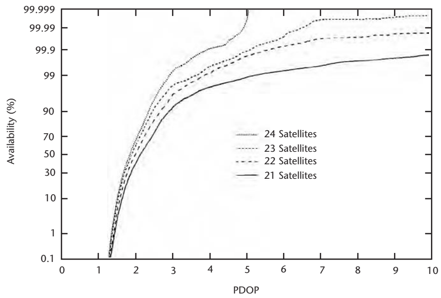


Figure 7.12 Cumulative distribution of PDOP with 5° mask angle cases of 24, 23, 22, and 21 satellites.

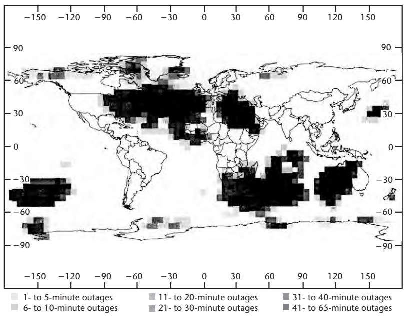


Figure 7.15 Availability of the GPS constellation with a 5° mask angle with three satellites removed from the constellation.

- Sólo el 72 % del tiempo la constelación nominal está disponible (por errores o reparaciones).
- Típicamente fallan 1, 2 o 3 satélites; el 98 % del tiempo habrá al menos 21 satélites.
- En la figura de la izquierda se muestra el PDOP para 24,23,22 y 21 satélites con ángulo de máscara 5°. Las disponibilidades son respectivamente 100 %, 99.969 %, 99.903 % y 99.197 %. Las zonas sin disponibilidad se muestran en la derecha para el caso de 21 satélites.

Disponibilidad IV

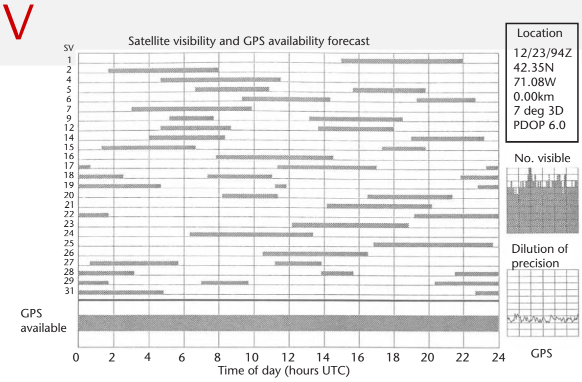


Figure 7.18 Satellite visibility/availability over a 24-hour period.

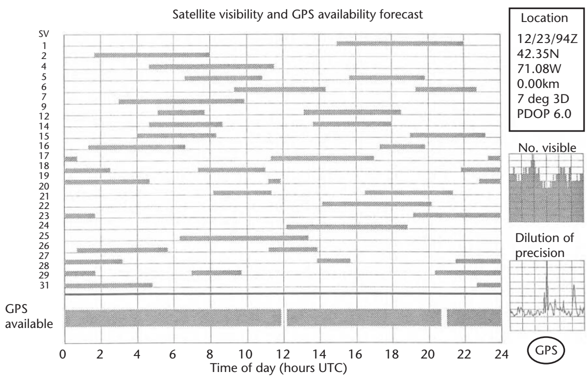


Figure 7.19 Satellite visibility/availability over a 24-hour period with satellites 16, 25, and 26 removed from the constellation.

- También se pueden realizar análisis locales, con toda la

Continuidad

- Se define continuidad (continuity) de un sistema de navegación respecto a una misión u operación, como la probabilidad de que dicho sistema sea "utilizable" de forma continua por toda la duración de dicha misión u operación.
- Utilizable se define respecto a los requisitos mínimos requeridos por la operación o misión, puede venir dado en términos de PDOP u otros términos.
- La continuidad depende mucho de la misión u operación, pero en cualquier caso está claramente relacionada con fallos no planificados de satélites. La probabilidad estimada de que un satélite deje de emitir de forma no planificada, es del 0.0001 %.

Integridad

- Se define integridad (integrity) de un sistema de navegación como la capacidad de dicho sistema para advertir que el sistema no debe ser utilizado (debido a que no está operativo o contiene errores). Por tanto da una medida de la confianza que se puede tener en el sistema.
- El sistema GPS no proporciona, por sí mismo, ningún mecanismo de integridad. Pueden suceder errores críticos (a veces denominados "aberraciones") que degraden el sistema. Por ejemplo:
  - Efectos de la radiación en el espacio: pueden afectar a los relojes o a la electrónica de los satélites, provocando señales anómalas.
  - Fallos en los satélites.
  - Error humano, de software o de hardware en el segmento de control.
- Son errores raros que ocurren pocas veces al año, pero no son admisibles para aplicaciones de navegación aérea.

Técnicas de mejora de integridad

- Puesto que la integridad es crítica para muchas aplicaciones, como por ejemplo aviación, se han implementando diversos mecanismos para proporcionar integridad al GPS.
- Las técnicas de GSP diferencial (que veremos a continuación) pueden proporcionar integridad.
- Una técnica muy utilizada es la RAIM (Receiver Autonomous Integrity Monitoring):
  - Es un algoritmo incorporado al receptor.
  - Requiere al menos cinco satélites visibles: detecta la inconsistencia de la solución y avisa que el GPS no debe ser utilizado.
  - Para ello emplea técnicas estadísticas de estimación.
  - Si tiene al menos seis satélites visibles, es capaz de ignorar el satélite y seguir proporcionando datos de navegación fiables.
- Obsérvese que puesto que RAIM requiere 5 o 6 satélites, la disponibilidad y continuidad con RAIM será menor en general.

GPS diferencial

- Para mejorar la precisión del GPS (o la integridad) se emplean las técnicas de GPS diferencial (DGPS).
- La idea básica es usar una o más estaciones (pseudollites), cuya posición se conoce con gran precisión, equipadas con un receptor GPS y en comunicación con el usuario (GBAS=Ground-Based Augmentation Systems).
- También se pueden emplear satélites extra que proporcionen medidas adicionales (SBAS=Space-Based Augmentation Systems). Por ejemplo, la red europea EGNOS.
- Los sistemas DGPS se clasifican como:
  - Absolutos (ECEF) o relativos (posiciones relativas a la estación).
  - Por zona geográfica de cobertura:
    - Locales (10-100 km)
    - Regionales (menos de 1000 km)
    - Wide-area (más de 1000 km)
  - Basados en pseudodistancias o en fases (en fases son más precisos, pueden conseguir precisión de mm.)

GPS diferencial basado en pseudodistancia I

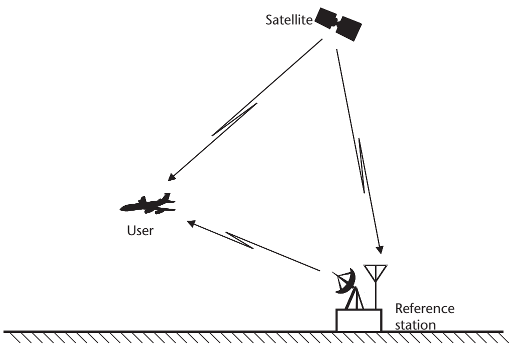


Figure 8.1 Local-area DGPS concept.

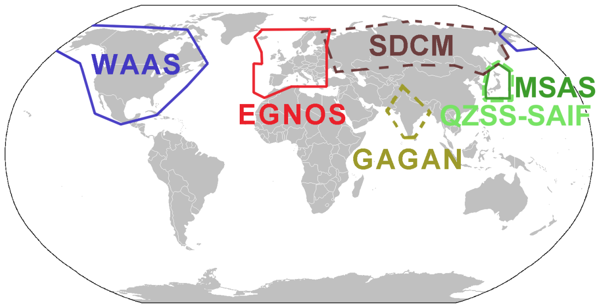
- Ejemplifiquemos el funcionamiento del DGPS con un caso simple: GBAS, absoluto, local, basado en distancias y con una sola estación.
- Recordemos que el usuario debe encontrar su posición $\underline{u}$ resolviendo el sistema de 4 o más ecuaciones $\rho_i - ct_u = \|\underline{s}_i - \underline{u}\| + \nu_u$, donde ν_u son los errores de las señales recibidas por el usuario.
- Supongamos ahora que se tiene una estación (pseudollite) de posición $\underline{m} = [x_m \; y_m \; z_m]^T$; su distancia al satélite i es: $R_i^m = \|\underline{s}_i - \underline{m}\| = \sqrt{(x_i - x_m)^2 + (y_i - y_m)^2 + (z_i - z_m)^2}$.
- Si tiene un error de reloj t_m, las medidas de pseudodistancia en la estación serán: $\rho_i^m - ct_m = \|\underline{s}_i - \underline{m}\| + \nu_m$

GPS diferencial basado en pseudodistancia II

- La posición de la estación es fija y conocida. Por tanto conocemos la cantidad $\Delta\rho_i^m = R_i^m - \rho_i^m = -ct_m - \nu_m$.
- La estación envía $\Delta\rho_i^m$ al receptor, y el receptor calcula $(\rho_i)_{corr} = \rho_i + \Delta\rho_i^m = \|\underline{s}_i - \underline{u}\| + c(t_u - t_m) + (\nu_u - \nu_m)$.
- Si definimos t_{um} como el error del reloj del receptor respecto al reloj de la estación, $t_{um} = t_u - t_m$ observamos que $(\rho_i)_{corr} = \|\underline{s}_i - \underline{u}\| + ct_{um} + (\nu_u - \nu_m)$.
- Por otro lado, $\nu' = \nu_u - \nu_m \lll \nu_u$, porque ν_u y ν_m serán muy parecidos (misma tecnología GPS). Luego hemos conseguido reducir mucho el error.
- El nuevo tiempo que calculemos será con respecto a la estación. Pero la estación puede calcular su error respecto al satélite e incluirla en su mensaje de radio, de forma que $t_u = t_{um} + t_m$. Luego recuperamos el tiempo GPS.
- Se consigue $\sigma_{UERE} \approx 0{,}3m + (1 - 6\ \mathrm{cm}) \times (d_{EST-RECEP}\ \ \mathrm{en\ km})$.

GPS aumentado SBAS

- Los sistemas de aumento espaciales en la práctica lo que hacen es añadir más satélites, que típicamente son regionales.
- En la figura se muestran distintos SBAS según las zonas.



- EGNOS: European Geostationary Navigation Overlay Service (Europa). 3 satélites en GEO (2 operativo, 1 en test).
- MSAS: Multi-functional Satellite Augmentation System (Japón). 2 satélites en GEO.
- QZSS: Quasi-Zenith Satellite System (Japón). 4 satélites en GEO, en órbita, operativo 11/18!
- GAGAN: GPS aided geo augmented navigation (India). 2 satélites en GEO.
- WAAS: Wide Area Augmentation System (USA). 3 satélites en GEO.
- SDCM: System for Differential Correction and Monitoring (Rusia). 3 satélites en GEO.

Cálculo de la actitud mediante GPS I

- Con DGPS de precisión (basado en fases) se obtiene la actitud. Se sitúan n antenas receptoras en puntos separados de la aeronave y un único receptor.
- Se conoce la posición de las antenas en ejes cuerpo, $\underline{R}_k^b$, y se miden con DGPS la posición de las antenas en ejes ECEF, $\hat{\underline{R}}_k^e$.
- Se calculan las diferencias de posición entre antenas $\underline{R}_k^b - \underline{R}_j^b$, y para las medidas de GPS $\hat{\underline{R}}_k^e - \hat{\underline{R}}_j^e$; por hipótesis de GPS diferencial, los errores se cancelan aproximadamente. Llamemos a estas medidas $\underline{r}_i^b$ y $\underline{r}_i^n$, respectivamente.
- Por ejemplo si hay 3 antenas habrá 3 diferencias (aunque sólo dos independientes). Si hay 4 antenas habrá 6 medidas (tres independientes). En general habrá $\frac{n(n-1)}{2}$ medidas. Además construimos más medidas con los productos vectoriales entre ellas, obteniendo el doble de medidas: $n(n-1)$.
- Suponiendo la posición conocida, obtenemos C_e^n y calculamos $\underline{r}_i^n = C_e^n \underline{r}_i^e$.

Cálculo de la actitud mediante GPS II

- Queremos calcular C_n^b de las ecuaciones $\underline{r}_i^b = C_n^b \underline{r}_i^n$. Formemos las matrices $R^b = [\underline{r}_1^b \underline{r}_2^b \ldots \underline{r}_n^b]$ y $R^n = [\underline{r}_1^n \underline{r}_2^n \ldots \underline{r}_n^n]$.
- Se tendrá que $R^b = C_n^b R^n$. Conviene mejor escribir $R^n = (C_n^b)^T R^b$, para invertir datos conocidos (R^b) y no medidas (R^n). Si tuviéramos tres medidas independientes, se podría hacer $(C_n^b)^T = R^n((R^b)^T)^{-1}$.
- En general tendremos al menos 6 medidas (para 3 antenas, tres medidas directas y los respectivos productos vectoriales), o más para 4 o más antenas.
- Por tanto no se puede invertir la matriz R^n y se usará una solución de mínimos cuadrados, que es la siguiente: $(C_n^b)^T = R^n(R^b)^T \left(R^b(R^b)^T\right)^{-1}$
- Trasponiendo esta ecuación: $C_n^b = \left(R^b(R^b)^T\right)^{-1} R^b(R^n)^T$
- El mínimo de antenas necesario será de 3 (para dos antenas sólo tenemos un dato de diferencias). Se suelen usar 4, para reducir errores.