Vehículos Espaciales y Misiles

Tema 5: El problema de los tres cuerpos.

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

14 de mayo de 2014

El problema de los n cuerpos

- Una de las hipótesis fundamentales en el estudio del problema de los dos cuerpos era la consideración de sistema aislado sin más fuerzas externas. Más adelante se consideraron otros cuerpos como perturbaciones.
- No obstante esta aproximación no es válida cuando se está en una zona intermedia entre estos cuerpos, ya que ningún cuerpo tendrá una influencia dominante.
- Ya desde los tiempos de Newton, se observó que el problema con n cuerpos para $n \geq 3$ era mucho más difícil que el de los dos cuerpos, ya que tiene $6n - 8$ grados de libertad. No obstante aparece en la práctica, por ejemplo un viaje interplanetario es un problema de al menos 4 cuerpos (Tierra, Sol, planeta destino, y el propio vehículo).
- Se buscaban soluciones en series de potencias (ya que en aquella época no existía todavía el cálculo numérico al nivel moderno).

El problema de los 3 cuerpos

- Para el caso $n = 3$, si se realizan algunas hipótesis simplificativas, se pueden obtener algunos resultados de interés que veremos en este tema.
- A finales del siglo XIX el rey Oscar II de Suecia convocó un concurso que requería la solución del problema de los 3 cuerpos (entendiendo como solución una expresión en series de potencias). Nadie fue capaz de encontrar la solución (aunque si existe, Sundman la encontró en 1912, sin embargo no es demasiado útil en la práctica).
- No obstante el matemático francés Poincaré ganó el concurso inventando la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, que permite estudiar el problema desde un punto de vista cualitativo y obtener resultados muy interesantes.

Caos en el problema de los 3 cuerpos

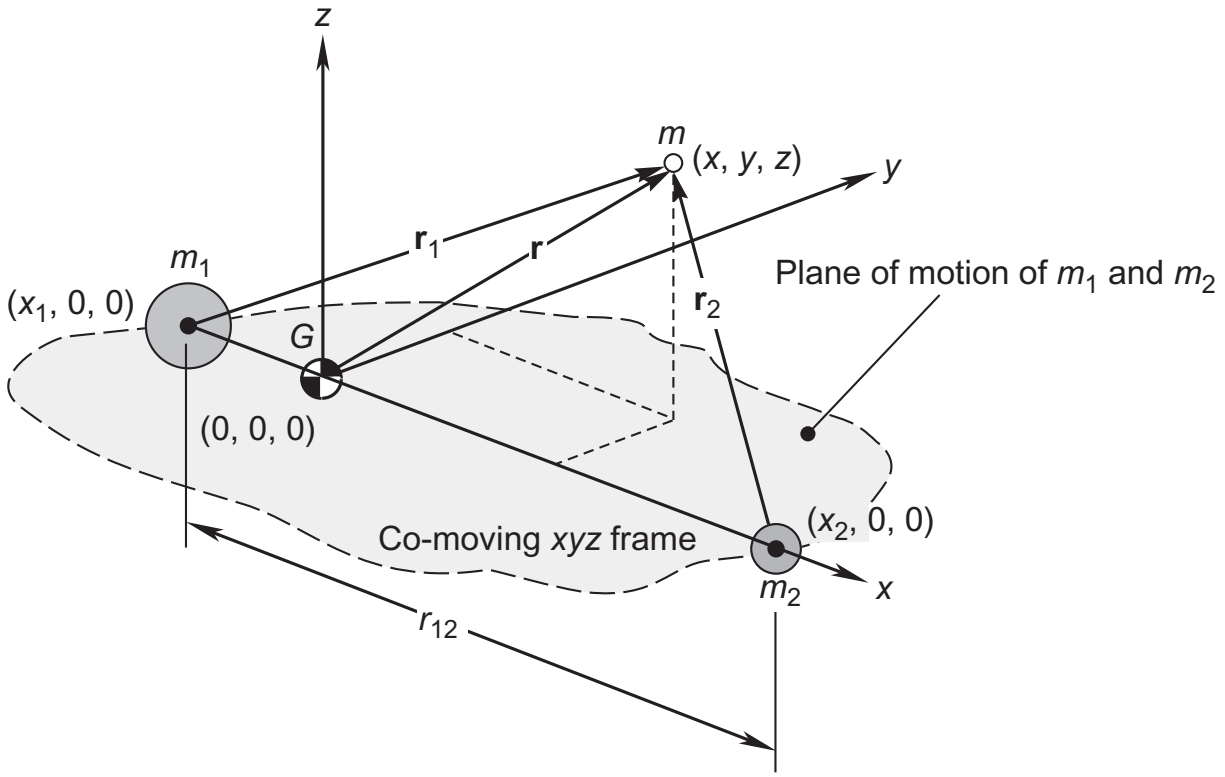
- El problema de los tres cuerpos, para ciertas relaciones de masa entre los cuerpos masivos, exhibe comportamiento caótico.
- Este comportamiento se caracteriza porque pequeños cambios en las condiciones iniciales se amplifican y resultan en grandes cambios en el estado del sistema pasado un tiempo.
  Poincaré no encontró este tipo de soluciones (al no disponer de herramientas para cálculo numérico), que fue descrito en detalle por primera vez por Lorenz en 1963 en un artículo sobre un modelo de convección climatológica. Lorenz también creó el término "efecto mariposa".
- En el sistema solar no se observa este tipo de comportamiento normalmente, pero podría ser posible. Observaremos algunas soluciones caóticas en simulación.

El problema de los 3 cuerpos circular restringido

- En este tema estudiaremos en detalle el problema de los 3 cuerpos circular restringido (P3CCR), para el cual se pueden obtener bastantes resultados de mucho interés.
- Las hipótesis simplificativas son las siguientes:
  - De los tres cuerpos, dos son "masivos" (por ejemplo, el Sol, planetas, lunas), de masa M_1 y M_2.
  - El tercer cuerpo es poco masivo (por ejemplo un vehículo) y no tiene ninguna influencia sobre los otros dos.
  - Por tanto, los dos cuerpos masivos orbitan el uno en torno al otro siguiendo una órbita kepleriana, que se supone circular para el P3CCR; es decir la distancia D entre ambos cuerpos es una constante y la velocidad angular con la que rotan es $n = \sqrt{\frac{\mu_1+\mu_2}{D^3}}$.
- También existe el problema de los 3 cuerpos restringido elíptico, pero los resultados son similares y es más complejo.
- Ejemplos que se pueden aproximar: SOL-TIERRA-sonda interplanetaria, TIERRA-LUNA-sonda lunar.

El problema de los 3 cuerpos circular restringido

- Para estudiar el problema, se usará un sistema de referencia centrado en el centro de masas 1-2 y que rota con velocidad angular n, de forma que los cuerpos masivos en este sistema de referencia están fijos en el eje x, tal como se ve en la figura.



El problema de los 3 cuerpos circular restringido

- La distancia entre el cuerpo 1 y el centro de masas será D_1 y la distancia entre el cuerpo 2 y el cdm será D_2. Obviamente $D_1 + D_2 = D$. Además, por definición de centro de masas, $M_1 D_1 = M_2 D_2$. Luego se tiene, despejando D_1 y D_2:

$$D_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} D = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} D, \quad D_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} D = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} D$$

- La posición del vehículo respecto al cdm vendrá dada por $\vec{r} = [x \ y \ z]^T$, mientras que la posición respecto a 1 y 2, respectivamente, vendrá dada por $\vec{r}_1 = [D_1 + x \ y \ z]^T$ y $\vec{r}_2 = [x - D_2 \ y \ z]^T$.
- En el sistema de referencia inercial se tendría que:

$$\ddot{\vec{r}}|_{IN} = -\mu_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}$$

- Puesto que el sistema de referencia es no inercial, habrá que aplicar:

$$\ddot{\vec{r}}|_{IN} = \ddot{\vec{r}}|_{ROT} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}|_{IN} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

El problema de los 3 cuerpos circular restringido

- Puesto que $\vec{\omega} = [0\ 0\ n]^T$, calculamos cada término:

$$\ddot{\vec{r}}|_{IN} = -\frac{\mu_1}{r_1^3}\begin{bmatrix} x+D_1 \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{\mu_2}{r_2^3}\begin{bmatrix} x-D_2 \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}}|_{ROT} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}|_{IN} = n\begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = n^2\begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Sustituyendo llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= -\frac{\mu_1(x+D_1)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-D_2)}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= -\frac{\mu_1 y}{r_1^3} - \frac{\mu_2 y}{r_2^3} \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu_1 z}{r_1^3} - \frac{\mu_2 z}{r_2^3} \end{aligned}$$

- Un sistema de ecuaciones no lineal, donde $r_1 = \sqrt{(x+D_1)^2 + y^2 + z^2}$, y $r_2 = \sqrt{(x-D_2)^2 + y^2 + z^2}$.

Adimensionalización del P3CCR

- Adimensionalizamos las ecuaciones del P3CCR usando como nuevo tiempo $\tau = n \cdot t$, y como posiciones $\bar{x} = x/D$, $\bar{y} = y/D$, $\bar{z} = z/D$. Además definimos $\rho = D_1/D$ y observamos que $D_2/D = 1 - \rho$. Finalmente definimos $\bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$ y $\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$.
- Las ecuaciones adimensionales resultan

$$\begin{aligned} \bar{x}'' - 2\bar{y}' - \bar{x} &= -\frac{\bar{\mu}_1(\bar{x}+\rho)}{\bar{r}_1^3} - \frac{\mu_2(\bar{x}-1+\rho)}{\bar{r}_2^3} \\ \bar{y}'' + 2\bar{x}' - \bar{y} &= -\frac{\bar{\mu}_1\bar{y}}{\bar{r}_1^3} - \frac{\bar{\mu}_2\bar{y}}{\bar{r}_2^3} \\ \bar{z}'' &= -\frac{\bar{\mu}_1\bar{z}}{\bar{r}_1^3} - \frac{\bar{\mu}_2\bar{z}}{\bar{r}_2^3} \end{aligned}$$

  donde $\bar{r}_1 = \sqrt{(\bar{x}+\rho)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$, $\bar{r}_2 = \sqrt{(\bar{x}-1+\rho)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$.
- Obsérvese $\rho = \frac{D_1}{D} = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} = \bar{\mu}_2$, luego $\bar{\mu}_1 = 1 - \rho$. Luego realmente sólo hay un parámetro, ρ!

Equilibrios del P3CCR

- En adelante omitimos las barras sobre las variables, entendiendo que siempre estamos trabajando con variables adimensionales.
- Para obtener los equilibrios hacemos las derivadas cero:

$$\begin{aligned} -x &= -\frac{\mu_1(x+\rho)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-1+\rho)}{r_2^3} \\ -y &= -\frac{\mu_1 y}{r_1^3} - \frac{\mu_2 y}{r_2^3} \\ 0 &= -\frac{\mu_1 z}{r_1^3} - \frac{\mu_2 z}{r_2^3} \end{aligned}$$

- Puesto que $\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} > 0$, obtenemos directamente de la tercera ecuación $z = 0$.
- En la segunda:

$$\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} - 1\right) y = 0$$

- Luego hay dos posibilidades: $y = 0$, $y \neq 0$.

Caso $y = 0$: equilibrios colineales

- Estos equilibrios fueron ya obtenidos por Euler.
- Puesto que $y = 0$, obtenemos que $r_1 = |x + \rho|$ y $r_1 = |x - 1 + \rho|$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x = \frac{\mu_1(x+\rho)}{|x+\rho|^3} + \frac{\mu_2(x-1+\rho)}{|x-1+\rho|^3}$$

- Simplificando:

$$F(x) = \frac{\mu_1}{|x+\rho|(x+\rho)} + \frac{\mu_2}{|x-1+\rho|(x-1+\rho)} - x = 0$$

- ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación? (si es que tiene). Observamos que para $x = -\rho$ y para $x = 1 - \rho$, $F(x)$ se hace infinito. En particular:

$$\lim_{x \to -\rho^-} F(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\rho^+} F(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to (1-\rho)^-} F(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to (1-\rho)^+} F(x) = +\infty,$$

- Además, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$.

Caso $y = 0$: equilibrios colineales

- Por tanto:
  - Para $x \in (-\infty, -\rho)$, $F(x)$ va de $+\infty$ a $-\infty$: debe cruzar por cero al menos una vez.
  - Para $x \in (-\rho, 1-\rho)$, $F(x)$ va de $+\infty$ a $-\infty$: debe cruzar por cero al menos una vez.
  - Para $x \in (1-\rho, +\infty)$, $F(x)$ va de $+\infty$ a $-\infty$: debe cruzar por cero al menos una vez.
- Luego al menos hay tres equilibrios. ¿Puede haber más? Veamos que no.
- Por ejemplo, para $x \in (-\infty, -\rho)$, $F(x)$ se escribe como:

$$F(x) = -\frac{\mu_1}{(x+\rho)^2} - \frac{\mu_2}{(x-1+\rho)^2} - x$$

- Y calculando la derivada:

$$F'(x) = 2\frac{\mu_1}{(x+\rho)^3} + 2\frac{\mu_2}{(x-1+\rho)^3} - 1$$

- Para $x \in (-\infty, -\rho)$, es fácil ver que siempre $F'(x) < 0$, luego la función es monótona decreciente: sólo puede cortar una vez.

Caso $y = 0$: equilibrios colineales

- Para los otros dos casos la demostración es idéntica.
- Por tanto hay siempre exactamente tres equilibrios colineales. Uno entre las dos masas (llamado punto L_1), otro a la derecha de la masa 2 (llamado punto L_2) y otro a la izquierda de la masa 3 (llamado L_3).
- Estos equilibrios hay que buscarlos numéricamente de la ecuación

$$F(x) = \frac{\mu_1}{|x+\rho|(x+\rho)} + \frac{\mu_2}{|x-1+\rho|(x-1+\rho)} - x = 0$$

  por ejemplo usando el método de Newton, y comenzando con una estimación inicial en la zona adecuada para cada punto.
- Para el caso $\rho \approx 0$ (la masa 1 mucho mayor y situada prácticamente en el origen), es fácil ver que el punto L_3 se sitúa aproximadamente en $x = -1$ y los puntos L_1 y L_2 se aproximan al punto $x = 1$ (donde está la masa 2).

Caso $y \neq 0$

- Si $y \neq 0$, entonces $\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} - 1\right) = 0$.
- Por tanto, de la ecuación

$$-x = -\frac{\mu_1(x+\rho)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-1+\rho)}{r_2^3}$$

  llegamos a:

$$0 = -\frac{\mu_1\rho}{r_1^3} - \frac{\mu_2(-1+\rho)}{r_2^3}$$

- Recordando $\mu_1 = 1-\rho$ y $\mu_2 = \rho$, y simplificando, llegamos simplemente a $r_1 = r_2$. Por tanto:

$$0 = \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} - 1 = \frac{\mu_1+\mu_2}{r_1^3} - 1 = \frac{1}{r_1^3} - 1 \longrightarrow r_1 = r_2 = 1$$

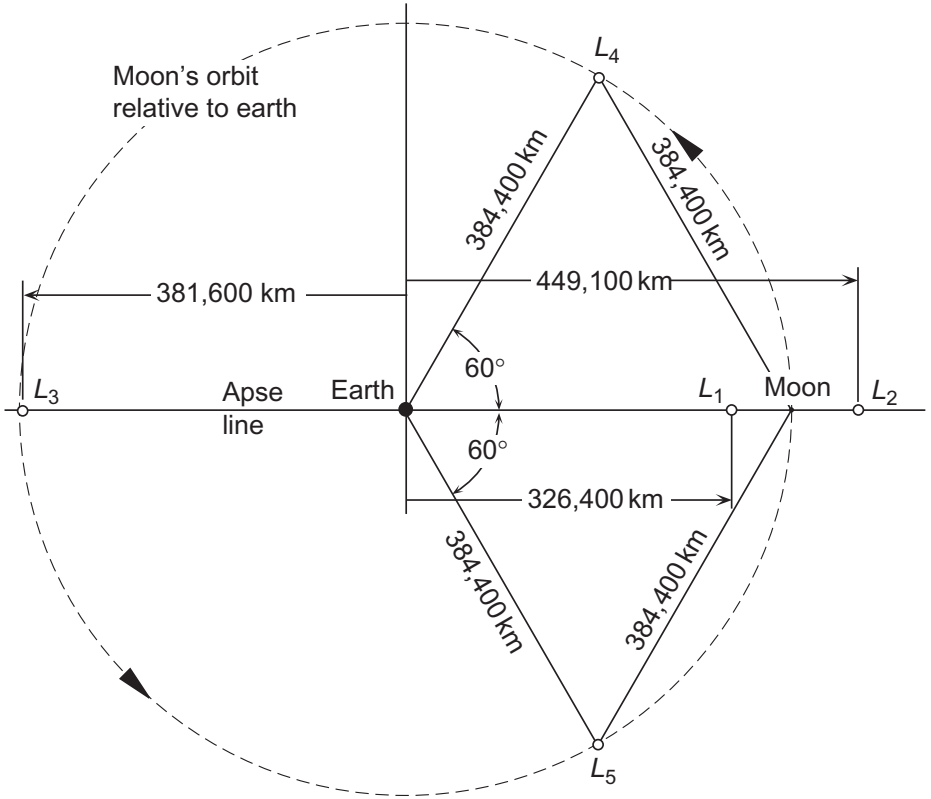
- Por otro lado, de $r_1 = r_2$ obtenemos $(x+\rho)^2 = (x-1+\rho)^2$, de donde $x+\rho = 1-x-\rho$, es decir, $x = \frac{1-2\rho}{2}$.
- Por tanto como r_1, hallamos $y = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Caso $y \neq 0$

- Por tanto estos equilibrios no colineales son dos, y puesto que $r_1 = r_2 = 1$, si trazamos un triángulo equilátero hacia arriba con base la distancia M_1-M_2 (que es 1 para el problema adimensionalizado), uno de los puntos (L_4) estará situado en el vértice opuesto. Sus coordenadas son $(\frac{1-2\rho}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.
- Si igualmente trazamos un triángulo equilátero hacia abajo, el otro punto (L_5) estará también situado en el vértice opuesto. Sus coordenadas son $(\frac{1-2\rho}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.
- Estos puntos fueron hallados por Lagrange. En la naturaleza se pueden encontrar a veces asteroides en estos puntos; por ejemplo, en los puntos L_4 y L_5 del sistema Sol-Júpiter existen asteroides, los llamados troyanos.

Puntos de Lagrange

- Al conjunto de todos los puntos de equilibrio se les denomina puntos de Lagrange, y juegan un papel importante en la dinámica y estabilidad del P3CCR.
- Ejemplo Tierra-Luna:



- En el caso Sol-Tierra, L_1 y L_2 están aproximadamente a 1.5 millones de km de la Tierra.

La constante de Jacobi

- Recordando las ecuaciones adimensionales del P3CCR:

$$\begin{aligned} x'' - 2y' - x &= -\frac{\mu_1(x+\rho)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-1+\rho)}{r_2^3} \\ y'' + 2x' - y &= -\frac{\mu_1 y}{r_1^3} - \frac{\mu_2 y}{r_2^3} \\ z'' &= -\frac{\mu_1 z}{r_1^3} - \frac{\mu_2 z}{r_2^3} \end{aligned}$$

- Multiplicando x' por la primera ecuación, y' por la segunda, y z' por la tercera, y sumando el resultado:

$$\begin{aligned} & x'x'' - 2x'y' - x'x + y'y'' + 2y'x' - y'y + z'z'' \\ = & -\frac{\mu_1\left((x+\rho)x' + yy' + zz'\right)}{r_1^3} - \frac{\mu_2\left((x-1+\rho)x' + yy' + zz'\right)}{r_2^3} \end{aligned}$$

- Cancelando términos e integrando ambos lados:

$$\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2 - x^2 - y^2}{2} = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + C$$

donde C es una constante.

La constante de Jacobi

- Llamando $U(x, y, z)$ al "pseudopotencial" $U = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{x^2+y^2}{2}$ y $v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ a la velocidad en el sistema de referencia rotatorio, tenemos una constante del movimiento similar a la energía:

$$\frac{v^2}{2} = U + C$$

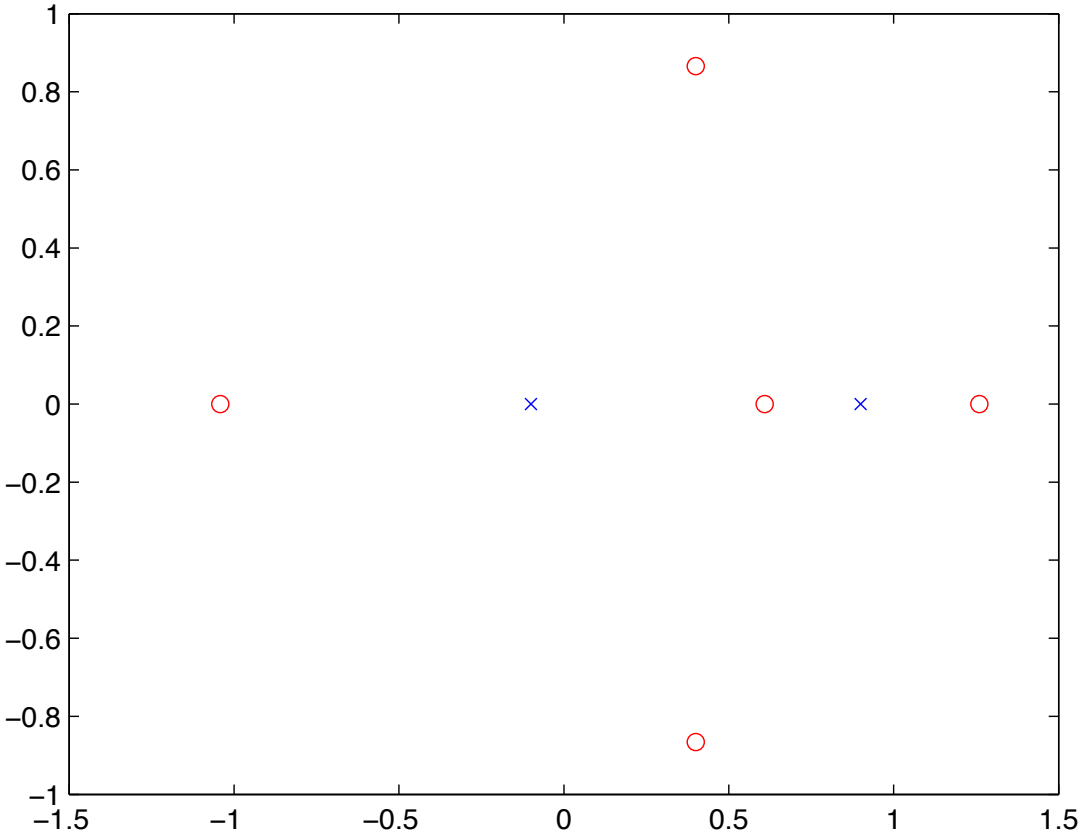
- Podemos calcular C con las condiciones iniciales del problema: $C = \frac{v_0^2}{2} - U_0$, donde $U_0 = U(x_0, y_0, z_0)$.
- Para un valor dado de C, los puntos donde $v = 0$ nos determinan "barreras del movimiento" (no es posible avanzar a partir de ellos):

$$U(x, y, z) = -C = U_0 - \frac{v_0^2}{2}$$

- En particular, los valores de C dados por los puntos de Lagrange nos dan una idea del "papel energético" que juegan estos puntos.

La constante de Jacobi: ejemplos

- Consideremos el caso $\mu_1 = 0{,}9$ y $\mu_2 = 0{,}1$, es decir, el cuerpo 1 nueve veces más masivo que el cuerpo 2. Entonces $\rho = \mu_2 = 0{,}1$. Los puntos de Lagrange (en rojo) se pueden ver en la siguiente gráfica:



La constante de Jacobi: ejemplos

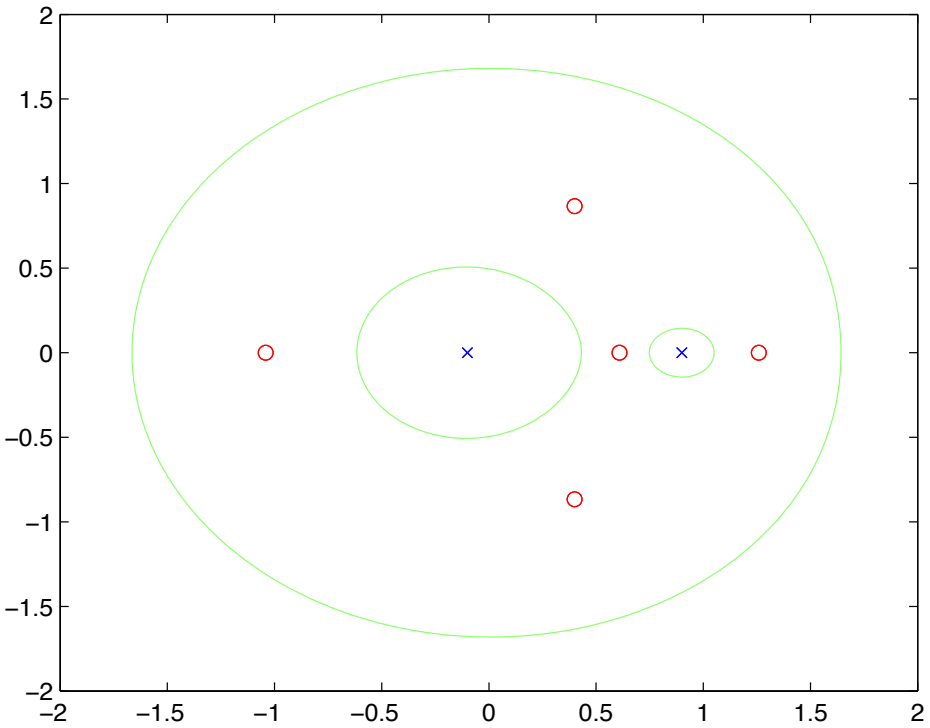
- Los puntos de Lagrange se ubican en los siguientes puntos y tienen el siguiente valor de la constante de Jacobi:

Valor	Punto L_1	Punto L_2	Punto L_3	Punto L_4	Punto L_5
(x, y)	(0.6090,0)	(1.2597,0)	(-1.0416,0)	(0.4,0.866)	(0.4,-0.866)
C	-1.7985	-1.7333	-1.5498	-1.4550	-1.4550

- A continuación mostraremos las curvas que definen valores de la constante de Jacobi en valores intermedios e iguales a los puntos de Lagrange, y veremos que dichos puntos definen "puntos de paso" naturales para órbitas de mínima energía.

La constante de Jacobi: ejemplos

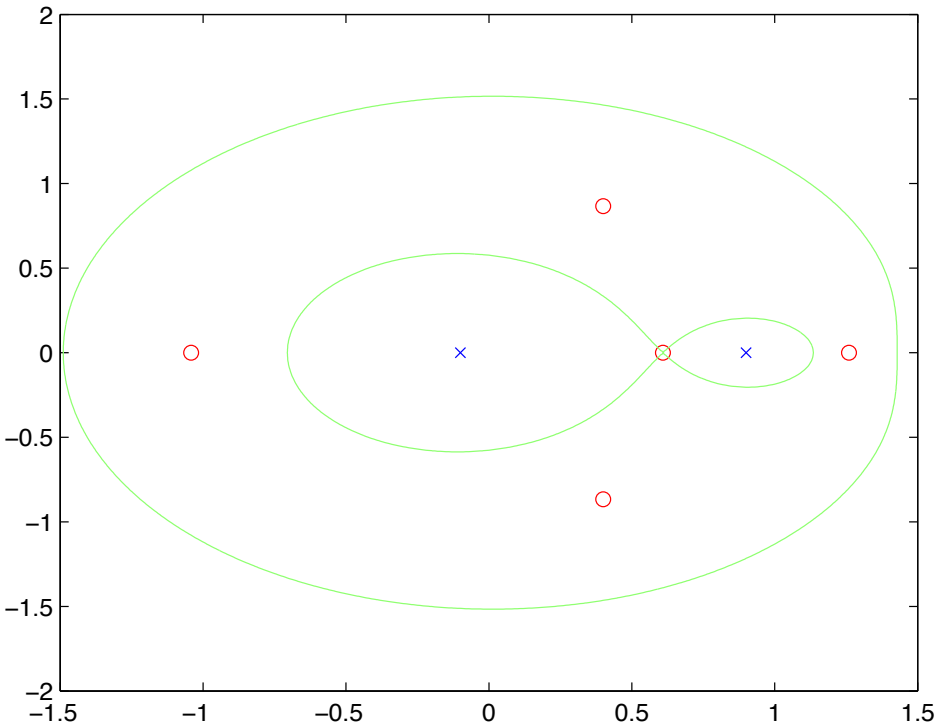
- Para un valor de $C = -2$, que es menor que el de L_1, obtenemos:



- Las soluciones estarán limitadas a las proximidades de los cuerpos masivos, o al exterior lejano. No se puede ir de 1 a 2.

La constante de Jacobi: ejemplos

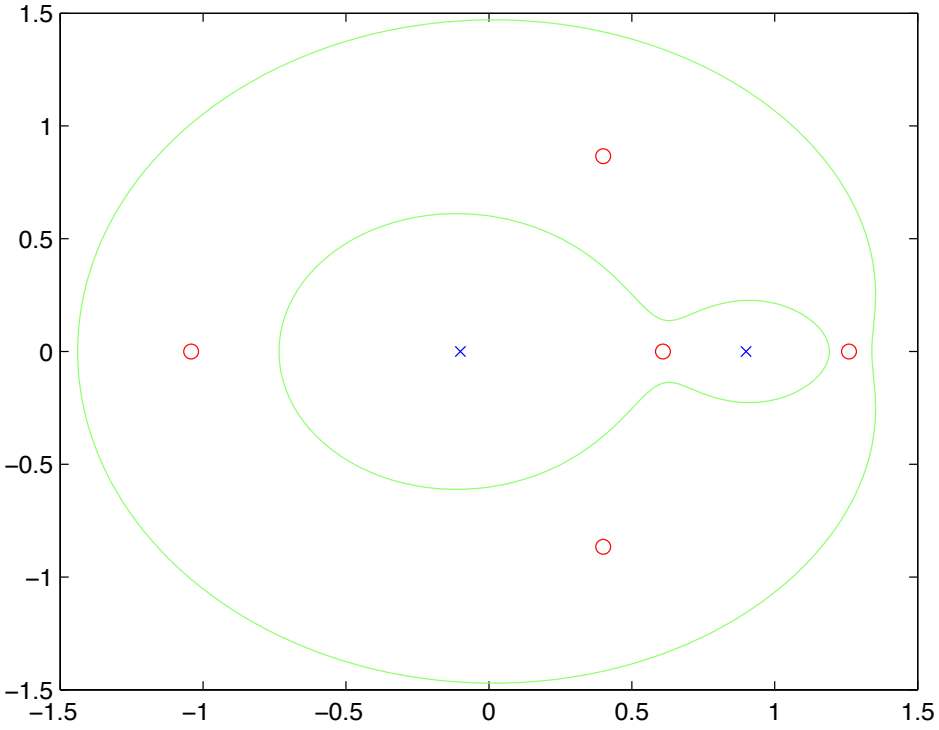
- Para un valor de $C = -1{,}7985$, que es del punto L_1, obtenemos:



- Luego este valor da la energía mínima que justo permite viajar de 1 a 2. El viaje pasa por el punto L_1.

La constante de Jacobi: ejemplos

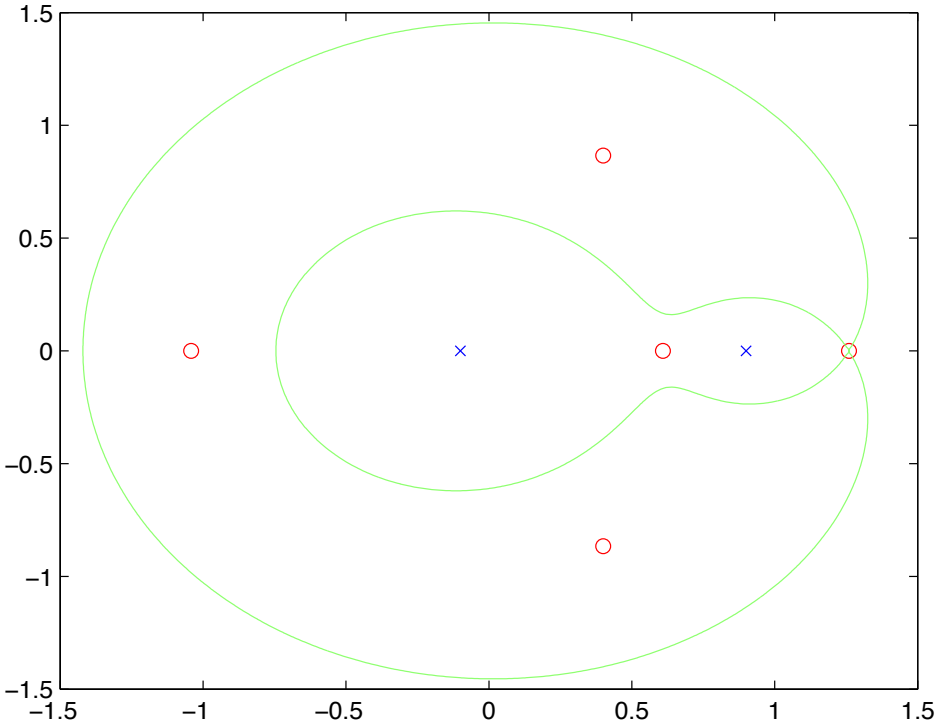
- Para un valor de $C = -1{,}75$, intermedio entre el de los puntos L_1 y L_2, obtenemos:



- Seguimos pudiendo ir entre 1 y 2 pero no se puede escapar al exterior.

La constante de Jacobi: ejemplos

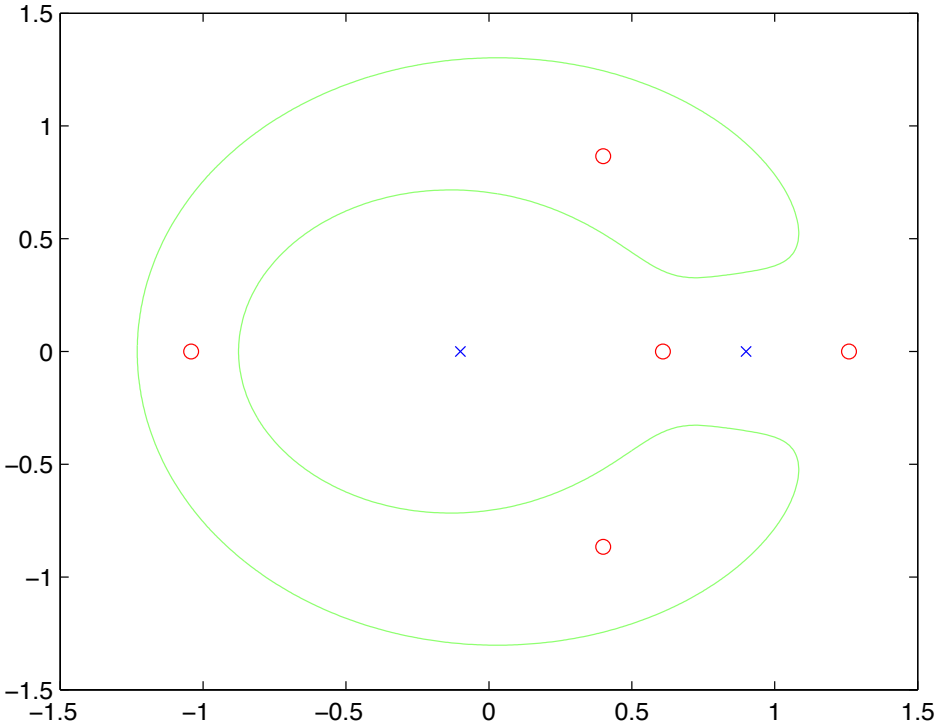
- Para un valor de $C = -1{,}7333$, el del punto L_2, obtenemos:



- Luego este valor da la energía mínima que justo permite alejarse tanto de 1 como de 2. El viaje pasa por el punto L_2.

La constante de Jacobi: ejemplos

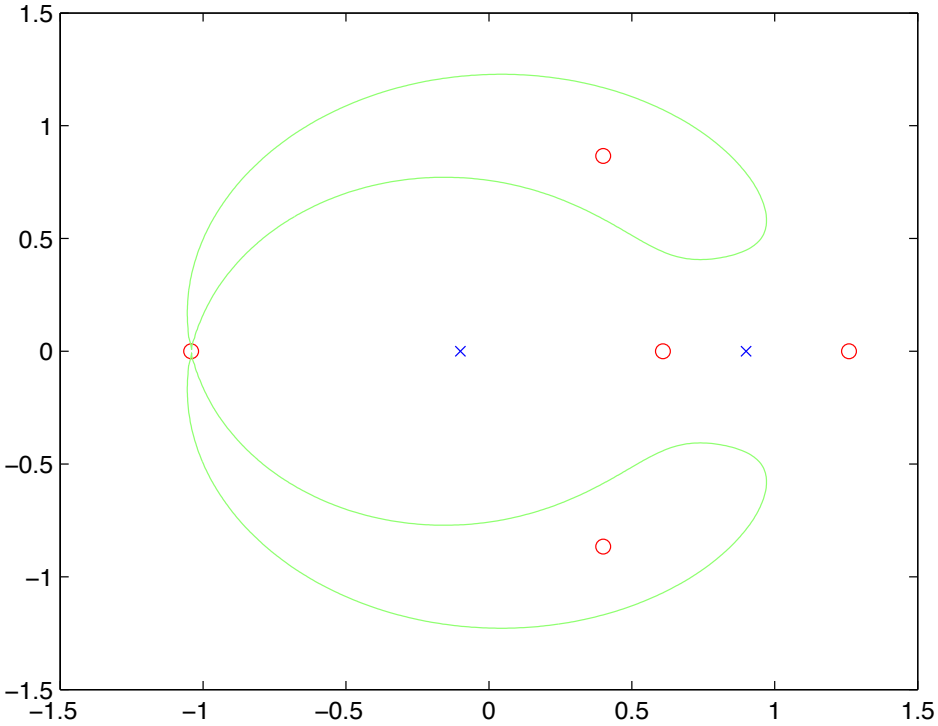
- Para un valor de $C = -1{,}6$, intermedio entre el de los puntos L_2 y L_3, obtenemos:



- Se puede escapar al exterior pasando cerca de 2, pero no directamente desde 1.

La constante de Jacobi: ejemplos

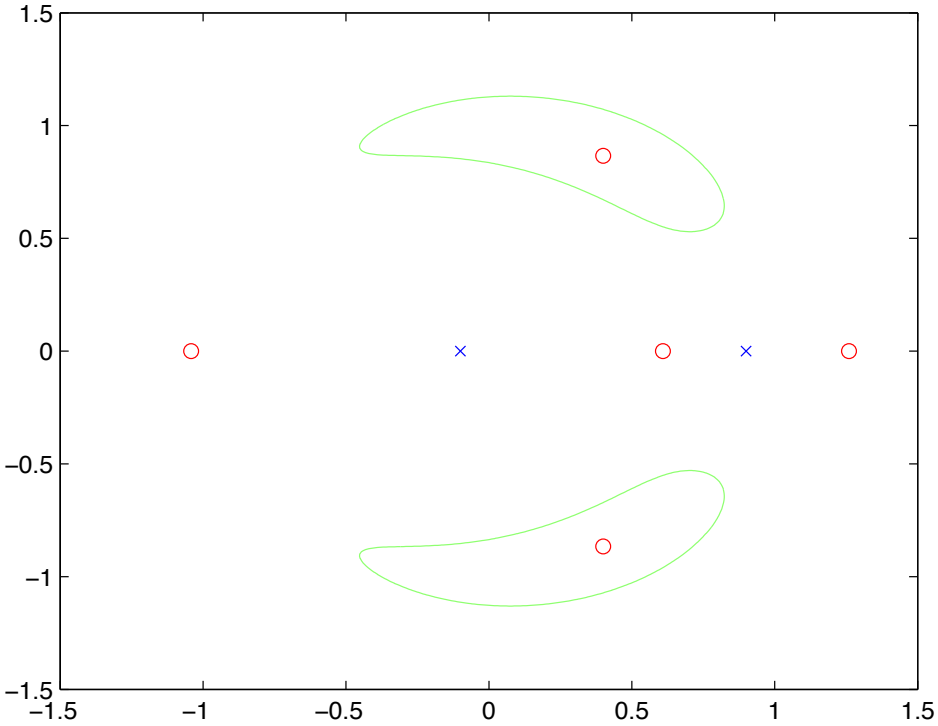
- Para un valor de $C = -1{,}5498$, el del punto L_3, obtenemos:



- Luego este valor da la energía mínima que justo permite alejarse de 1 sin pasar primero cerca de 2. El viaje pasa por el punto L_3.

La constante de Jacobi: ejemplos

- Para un valor de $C = -1{,}5$, entre el del punto L_3 y los puntos L_4 y L_5, obtenemos:



- Con este valor de energía casi todo el espacio está permitido excepto las proximidades de los puntos L_4 y L_5. Si seguimos aumentando C todo el espacio estará permitido.

Estabilidad de los puntos de Lagrange

- Es importante conocer la estabilidad de los puntos de Lagrange para su posible aplicación en misiones espaciales. Si fueran inestables, sería necesario "gastar" combustible para permanecer en las proximidades.
- Para calcular la estabilidad, linealizamos en torno a cada uno de los equilibrios.
- Recordando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'' - 2y' - x &= -\frac{\mu_1(x+\rho)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-1+\rho)}{r_2^3} \\ y'' + 2x' - y &= -\frac{\mu_1 y}{r_1^3} - \frac{\mu_2 y}{r_2^3} \\ z'' &= -\frac{\mu_1 z}{r_1^3} - \frac{\mu_2 z}{r_2^3} \end{aligned}$$

vemos que es necesario linealizar la función $\frac{(x+\rho)}{r_1^3}$ y otras similares.

Ecuaciones linealizadas

- Linealicemos $\frac{(x+\rho)}{r_1^3}$ en torno a x^*, y^*, z^*:

$$\frac{(x+\rho)}{\left((x+\rho)^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \approx \frac{(x^*+\rho)}{\left((x^*+\rho)^2+(y^*)^2+(z^*)^2\right)^{3/2}} + \frac{\delta x}{\left((x^*+\rho)^2+(y^*)^2+(z^*)^2\right)^{3/2}} - 3(x^*+\rho)\frac{(x^*+\rho)\delta x + y^*\delta y + z^*\delta z}{\left((x^*+\rho)^2+(y^*)^2+(z^*)^2\right)^{5/2}}$$

- Las otras funciones que aparecen tienen linealizaciones similares. Llamando $\vec{r}^* = [x^*\ y^*\ z^*]^T$ y $\vec{r}_1^* = [x^*+\rho\ y^*\ z^*]^T$ podemos escribir esto de forma más simple:

$$\frac{(x+\rho)}{r_1^3} \approx \frac{(x^*+\rho)}{(r_1^*)^3} + \frac{\delta x}{(r_1^*)^3} - 3(x^*+\rho)\frac{\vec{r}_1^* \cdot \delta\vec{r}}{(r_1^*)^5}$$

Ecuaciones linealizadas

- Las ecuaciones linealizadas quedan:

$$\begin{aligned}
\delta x'' - 2\delta y' - \delta x &= -\frac{\mu_1 \delta x}{(r_1^*)^3} - \frac{\mu_2 \delta x}{(r_2^*)^3} \\
&\quad + 3\frac{\mu_1 (x^* + \rho)\vec{r}_1^* \cdot \delta\vec{r}}{(r_1^*)^5} + 3\frac{\mu_2 (x^* - 1 + \rho)\vec{r}_2^* \cdot \delta\vec{r}}{(r_2^*)^5} \\
\delta y'' + 2\delta x' - \delta y &= -\frac{\mu_1 \delta y}{(r_1^*)^3} - \frac{\mu_2 \delta y}{(r_2^*)^3} \\
&\quad + 3\frac{\mu_1 y^* \vec{r}_1^* \cdot \delta\vec{r}}{(r_1^*)^5} + 3\frac{\mu_2 y^* \vec{r}_2^* \cdot \delta\vec{r}}{(r_2^*)^5} \\
\delta z'' &= -\frac{\mu_1 \delta z}{(r_1^*)^3} - \frac{\mu_2 \delta z}{(r_2^*)^3} \\
&\quad + 3\frac{\mu_1 z^* \vec{r}_1^* \cdot \delta\vec{r}}{(r_1^*)^5} + 3\frac{\mu_2 z^* \vec{r}_2^* \cdot \delta\vec{r}}{(r_2^*)^5}
\end{aligned}$$

- Veamos la estabilidad de las diferentes ecuaciones para los distintos casos.

Estabilidad de los puntos colineales

- Para los puntos colineales $y^* = z^* = 0$. Obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta x'' - 2\delta y' - \delta x &= 2\frac{\mu_1 \delta x}{(r_1^*)^3} + 2\frac{\mu_2 \delta x}{(r_2^*)^3} \\ \delta y'' + 2\delta x' - \delta y &= -\frac{\mu_1 \delta y}{(r_1^*)^3} - \frac{\mu_2 \delta y}{(r_2^*)^3} \\ \delta z'' &= -\frac{\mu_1 \delta z}{(r_1^*)^3} - \frac{\mu_2 \delta z}{(r_2^*)^3} \end{aligned}$$

- Llamemos $\sigma^2 = \frac{\mu_1}{(r_1^*)^3} + \frac{\mu_2}{(r_2^*)^3}$. Obtenemos por un lado $\delta z'' = -\sigma^2 \delta z$ (estable) y por otro:

$$\begin{aligned} \delta x'' - 2\delta y' - \delta x &= 2\sigma^2 \delta x \\ \delta y'' + 2\delta x' - \delta y &= -\sigma^2 \delta y \end{aligned}$$

Estabilidad de los puntos colineales

- Escribiendo el sistema en la forma normal:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x' \\ \delta y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+2\sigma^2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sigma^2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x' \\ \delta y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x' \\ \delta y' \end{bmatrix}$$

- Los autovalores de A vendrán dados por la ecuación:

$$\lambda^4 + \lambda^2(2-\sigma^2) + (1+\sigma^2-2\sigma^4) = 0$$

- Es decir:

$$\lambda^2 = \frac{\sigma^2 - 2 \pm \sqrt{(2-\sigma^2)^2 - 4(1+\sigma^2-2\sigma^4)}}{2}$$

- Se obtienen las condiciones:

$$\sigma^2 - 2 < 0, \quad 1+\sigma^2-2\sigma^4 > 0, \quad 9\sigma^2 - 8 > 0$$

- De donde $\sigma^2 \in [8/9, 1]$. Pero se puede deducir que para todos los puntos colineales, siempre $\sigma^2 > 1$: son inestables.

Estabilidad de los puntos no colineales

- Para los puntos no colineales $z^* = 0$, $r_1^* = r_2^* = 1$, $x^* = \frac{1-2\rho}{2}$, $y^* = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
\delta x'' - 2\delta y' - \delta x &= -\delta x + 3\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{\delta x}{2} + \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\delta y\right) \\
&\quad -3\frac{\mu_2}{2}\left(-\frac{\delta x}{2} + \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\delta y\right) \\
\delta y'' + 2\delta x' - \delta y &= -\delta y + 3\mu_1\frac{\pm\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\delta x}{2} + \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\delta y\right) \\
&\quad +3\mu_2\frac{\pm\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\delta x}{2}\delta x + \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\delta y\right) \\
\delta z'' &= -\delta z
\end{aligned}$$

- Obviamente δz es estable.

Estabilidad de los puntos no colineales

- La dinámica $\delta x - \delta y$ resulta:

$$\begin{aligned} \delta x'' - 2\delta y' &= \frac{3}{4}\delta x \pm 3\sqrt{3}\frac{\mu_1 - \mu_2}{4}\delta y \\ \delta y'' + 2\delta x' &= \pm 3\sqrt{3}\frac{\mu_1 - \mu_2}{4}\delta x + \frac{9}{4}\delta y \end{aligned}$$

- Llamando $\alpha = \pm 3\sqrt{3}\frac{\mu_1 - \mu_2}{4}$:

$$\begin{aligned} \delta x'' - 2\delta y' &= \frac{3}{4}\delta x + \alpha\delta y \\ \delta y'' + 2\delta x' &= \alpha\delta x + \frac{9}{4}\delta y \end{aligned}$$

- Calculando los autovalores como antes:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x' \\ \delta y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & \alpha & 0 & 2 \\ \alpha & 9/4 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x' \\ \delta y' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x' \\ \delta y' \end{bmatrix}$$

Estabilidad de los puntos no colineales

- Los autovalores de A vendrán dados por la ecuación:

$$\lambda^4 + \lambda^2 + (\frac{27}{16} - \alpha^2) = 0$$

- Es decir:

$$\lambda^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(\frac{27}{16} - \alpha^2)}}{2}$$

- Se obtienen las condiciones:

$$1 - 4(\frac{27}{16} - \alpha^2) > 0, \quad \frac{27}{16} - \alpha^2 > 0$$

- De donde $\alpha^2 \in [23/16, 27/16]$. Usando la definición de $\alpha = \pm 3\sqrt{3}\frac{\mu_1 - \mu_2}{4}$, obtenemos $\alpha^2 = 27\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{16}$, y por tanto $|\mu_1 - \mu_2| \in [\sqrt{23/27}, 1]$, es decir, $|2\mu_1 - 1| > \sqrt{23/27}$.

Estabilidad de los puntos de Lagrange

- En conclusión, los puntos de Lagrange colineales son siempre inestables.
- Los puntos no colineales pueden ser estables o inestables, dependiendo de si la condición $|2\mu_1 - 1| > \sqrt{23/27}$ (para μ_1 y μ_2 adimensionales) se cumple.
- Para el caso Tierra-Sol y Tierra-Luna se cumple. No obstante las perturbaciones introducidas por la Luna (en el primer caso) y el Sol (en el segundo) hacen que en la práctica sean inestables.
- Para el caso Júpiter-Sol también se cumple la condición, y en este caso son realmente estables. De hecho se pueden encontrar asteroides (los llamados troyanos) rotando sincronizadamente con Júpiter en estos puntos.
- Para el caso Plutón-Caronte, al ser sus masas relativamente parecidas, no se cumple la condición.

Aplicaciones de los puntos de Lagrange

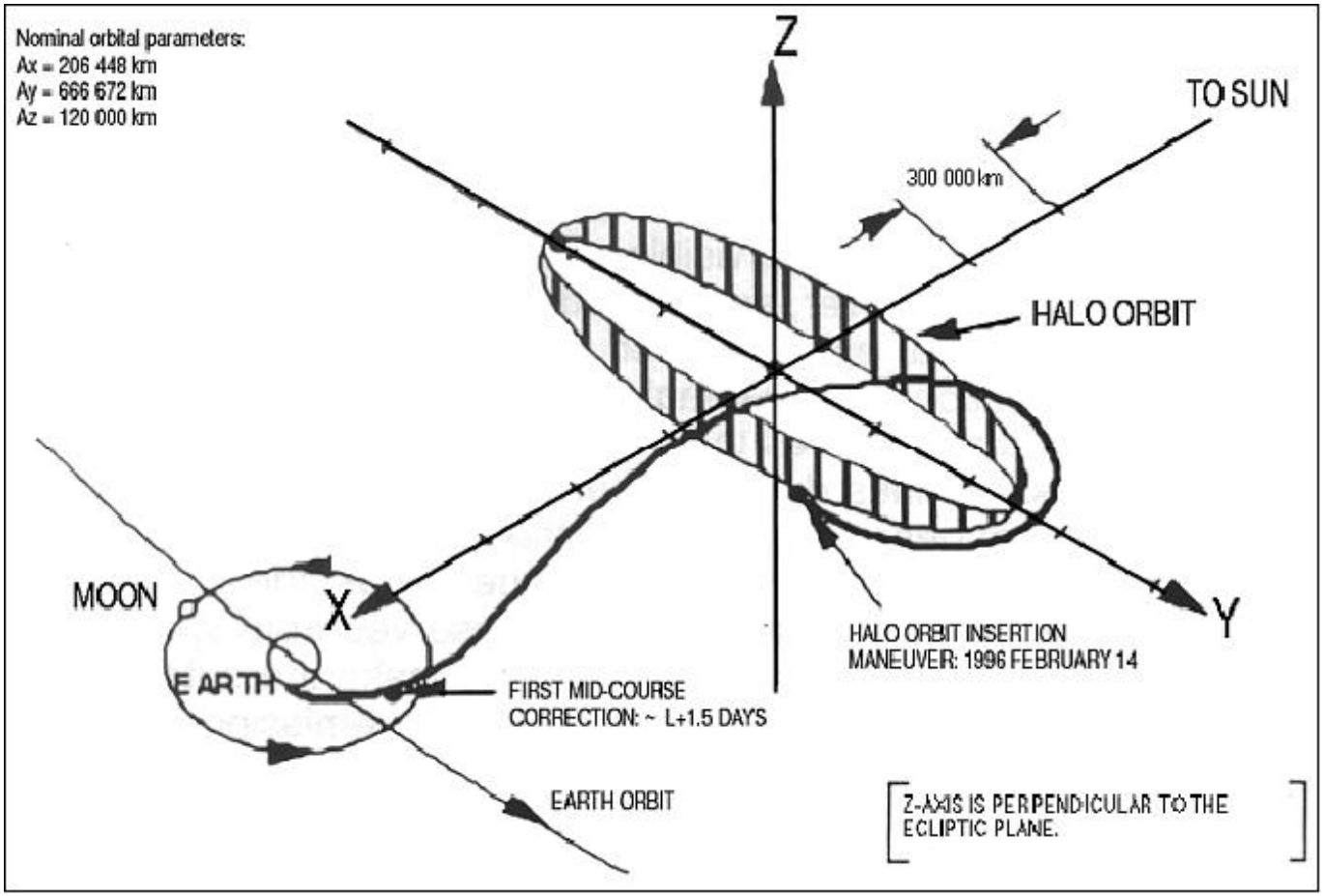
- A pesar de su inestabilidad, los puntos L_1, L_2 y L_3 pueden ser muy útiles.
- Por ejemplo:
  - El L_2 del sistema Tierra-Luna permite ver siempre la cara oculta de la Luna (y garantizar comunicaciones si hubiera una base).
  - El L_1 del sistema Tierra-Luna permitiría tener un punto intermedio para misiones lunares.
  - El punto L_1 del sistema Sol-Tierra permitiría ver siempre a la vez el Sol y la Tierra: ideal para un observatorio solar.
- El problema es que un vehículo situado exactamente en el punto L_1 o L_2 no tendría una posición favorable:
  - El L_2 del sistema Tierra-Luna no se ve directamente desde la Tierra sino que está "tapado" por la Luna.
  - El punto L_1 del sistema Sol-Tierra no podría comunicarse con la Tierra por las interferencias causadas por el propio Sol.

Órbitas halo

- Por tanto, surge la idea de buscar órbitas periódicas en torno a los puntos L_1 y L_2.
- Usando algunos conceptos de la teoría de ecuaciones diferenciales, se pueden encontrar estas órbitas: son las llamadas órbitas Halo.
- Así como estos puntos de Lagrange son inestables, las órbitas Halo también lo son: es necesario emplear combustible cada cierto punto para evitar alejarse de la órbita. Por tanto estas misiones tienen siempre vida limitada.
- Por ejemplo, varias misiones han estado o están en una órbita Halo en torno al L_1 Sol-Tierra, que se encuentra a 1.5 millones de kilómetros de la Tierra: la misión SOHO(1996), la misión ISEE-3 (1978) y la misión Génesis (2001).

Órbitas halo: misión SOHO

- Ejemplo—órbita de la misión SOHO:



Búsqueda de órbitas halo

- La forma de encontrar (numéricamente) estas órbitas requiere:

  1. Explotar la simetría del problema
  2. Plantear el método de las correcciones diferenciales
  3. Partir de una solución periódica del problema linealizado
  4. Usar el método de correcciones diferenciales para encontrar una solución exacta del problema no lineal

- Las órbitas halo típicamente son tridimensionales, pero vamos a centrarnos para simplificar el problema y entenderlo bien en el caso plano (plano de los dos cuerpos masivos).
- En el caso plano las ecuaciones adimensionales son:

$$\begin{aligned} x'' - 2y' - x &= -\frac{\mu_1(x+\rho)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-1+\rho)}{r_2^3} \\ y'' + 2x' - y &= -\frac{\mu_1 y}{r_1^3} - \frac{\mu_2 y}{r_2^3} \end{aligned}$$

donde $r_1 = \sqrt{(x+\rho)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-1+\rho)^2 + y^2}$, $\mu_2 = \rho$, $\mu_1 = 1 - \rho$.

Simetría

- En el caso plano las ecuaciones adimensionales son:

$$\begin{aligned} x'' - 2y' - x &= -\frac{\mu_1(x+\rho)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-1+\rho)}{r_2^3} \\ y'' + 2x' - y &= -\frac{\mu_1 y}{r_1^3} - \frac{\mu_2 y}{r_2^3} \end{aligned}$$

- Supongamos que $\vec{x} = [x(t), y(t), x'(t), y'(t)]$ es una solución.
- Entonces $\vec{x} = [x(-t), -y(-t), -x'(-t), y'(-t)]$ es también una solución. Se puede verificar por simple sustitución.
- El significado físico es que por cada solución del problema hay una solución "reflejada" a través del eje x pero que se mueve "hacia atrás".

Explotando la simetría

- Una órbita halo debería verificar que $\vec{x}(T) = \vec{x}(0)$ donde T es el periodo de la órbita, y además contiene a un punto L. Sea x_L la coordenada x del punto L.
- Fijemos un valor de ϵ relativamente pequeño. Supongamos que a partir de una condición inicial de valores $\vec{x}(0) = [x_L - \epsilon, 0, 0, y_0']$, y que resolvemos la ecuación diferencial hasta que vuelva a encontrarse con el eje x en un tiempo t^*, de forma que $\vec{x}(t^*) = [x(t^*), 0, x'(t^*), y'(t^*)]$.
- Si tuviéramos "suerte" y resultara que $x'(t^*) = 0$, entonces por simetría la solución encontrada se trata de la mitad de una órbita halo, de periodo $T = 2t^*$.
- Por tanto el objetivo es, fijado ϵ, hallar el valor de y_0' que produce $x'(t^*) = 0$ en el corte con el eje x.

Método de correcciones diferenciales

- El método de correcciones diferenciales (también conocido como "shooting") se basa en el método de Newton para resolver el problema.
- Supongamos que parto de un y_0' supuesto que está relativamente cerca de la solución del problema. Resolviendo la ecuación, calculamos t^* y $x'(t^*)$ que resulta ser distinto de cero.
- Repetimos utilizando un nuevo y_0' calculado "corrigiendo" el anterior en base a $x'(t^*)$. ¿Cómo se hace esto?
- Supongamos que se tiene la ecuación diferencial $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, t)$ con condición inicial $\vec{x}(0)$. La influencia de las condiciones iniciales se obtiene calculando la "matriz de sensibilidad" $M(t)$, que verifica la siguiente ecuación matricial

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}(0)} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}\frac{\vec{x}}{\vec{x}(0)} = JM(t),$$

con condición inicial $M(0) = \mathrm{Id}$.

Método de correcciones diferenciales

- En realidad sólo necesitamos la influencia de la condición inicial $y'(0)$. Llamemos $\vec{\alpha}$ el vector de componentes:

$$\alpha_1 = \frac{\partial x(t)}{\partial y'(0)}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial y(t)}{\partial y'(0)}, \quad \alpha_3 = \frac{\partial x'(t)}{\partial y'(0)}, \quad \alpha_4 = \frac{\partial y'(t)}{\partial y'(0)},$$

- Nuestras ecuaciones diferenciales tienen la forma $x'' = f_1(x, y, x', y')$, $y'' = f_2(x, y, x', y')$.
- La sensibilidad respecto a esta condición inicial vendría dada por:

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= \alpha_3, \\
\alpha_2' &= \alpha_4, \\
\alpha_3' &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x'}\alpha_3 + \frac{\partial f_1}{\partial y'}\alpha_4, \\
\alpha_4' &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x'}\alpha_3 + \frac{\partial f_2}{\partial y'}\alpha_4,
\end{aligned}$$

con condición inicial $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0) = 0, \alpha_4(0) = 1$.

Método de correcciones diferenciales

- Puesto que el tiempo final también hay que recalcularlo, necesitamos asimismo la influencia del tiempo final t^*. No obstante esto es sencillo, puesto que la influencia respecto al tiempo es simplemente la derivada del estado, x', y', x'', y'', evaluada en el tiempo final:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial x(t)}{\partial t^*}\right|_{t=t^*} &= x'(t^*), \quad \left.\frac{\partial y(t)}{\partial t^*}\right|_{t=t^*} = y'(t^*), \quad , \\
\left.\frac{\partial x'(t)}{\partial t^*}\right|_{t=t^*} &= x''(t^*) = f_1(x(t^*), y(t^*), x'(t^*), y'(t^*)), \\
\left.\frac{\partial y'(t)}{\partial t^*}\right|_{t=t^*} &= y''(t^*) = f_2(x(t^*), y(t^*), x'(t^*), y'(t^*)),
\end{aligned}$$

- Ya estamos en condiciones de plantear el algoritmo. Partimos de una estimación $y'(0)_0$, t_0^*. Calculamos tanto la solución $\vec{x}(t)$ como $\vec{\alpha}(t)$ hasta llegar a t_0^*. Al no ser la solución correcta, sucederá que ni $x'(t_0^*) = 0$, ni $y(t_0^*) = 0$. Usando el método de Newton, corregimos:

$$\begin{bmatrix} y'(0)_{k+1} \\ t^*_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(0)_k \\ t^*_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_2 & y'(t_k^*) \\ \alpha_3 & f_1(x(t_k^*), y(t_k^*), x'(t_k^*), y'(t_k^*)) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(t_k^*) \\ x'(t_k^*) \end{bmatrix}$$

Estimación inicial

- Una posible estimación se podría obtener usando el problema linealizado en torno al punto L que se está estudiando. Al linealizar se obtiene:

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

- Analizando los autovalores, existen autovalores imaginarios puros $\lambda = \pm i\omega^2$, que representan soluciones oscilatorias de frecuencia ω. En particular

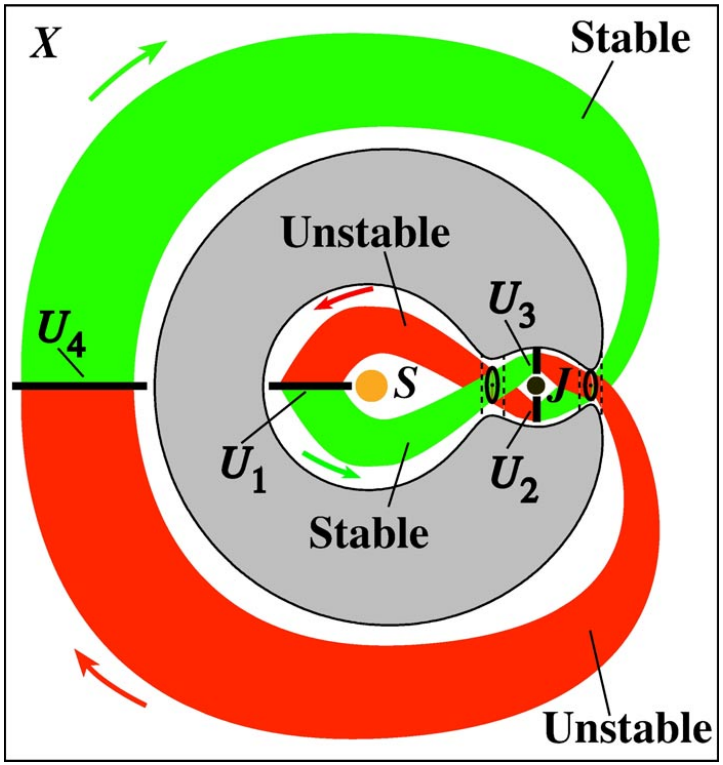
$$\omega^2 = \frac{\sigma^2 - 2 + \sqrt{(2-\sigma^2)^2 - 4(1+\sigma^2-2\sigma^4)}}{2}$$

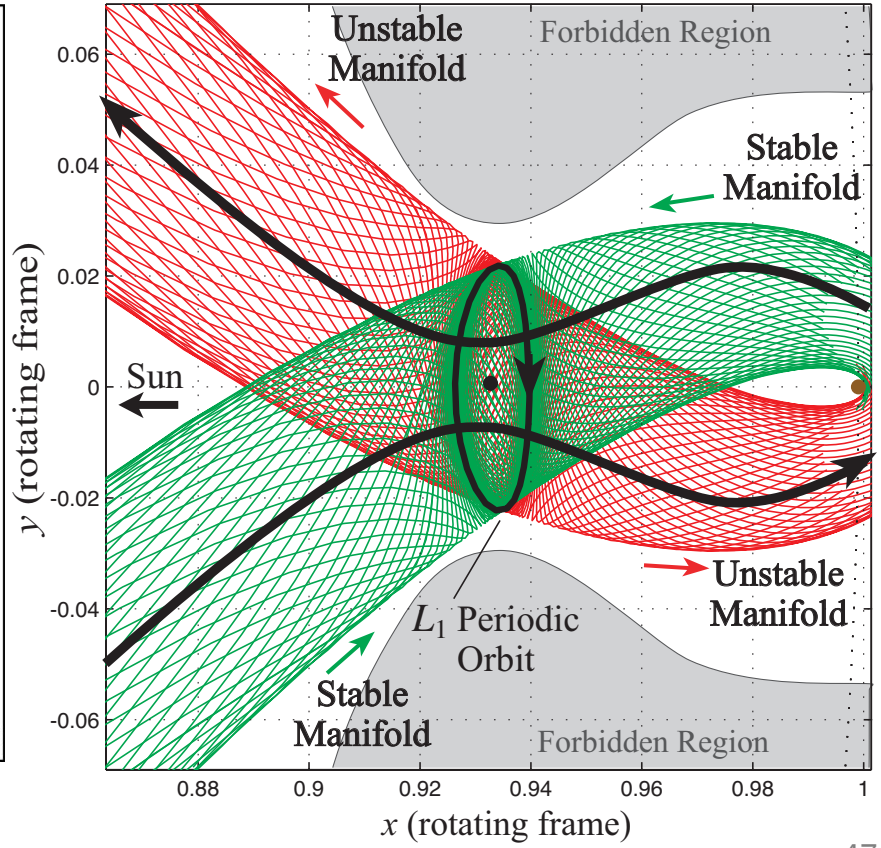
- El periodo es 2π dividido por la frecuencia: podemos tomar $t_0^* = \frac{\pi}{\omega}$.
- Para encontrar las condiciones iniciales, se pueden analizar los autovectores, y buscar las condiciones iniciales que no excitan los otros modos. En particular se encuentra:

$$y'(0)_0 = \epsilon \frac{2\omega^2}{\omega^2 + 2\sigma^2 + 1}$$

Diseño no lineal de misiones

- La proximidad de los puntos L está llena de otras órbitas: estables (que llevan a una órbita halo) e inestables (que alejaría un vehículo de una órbita halo).



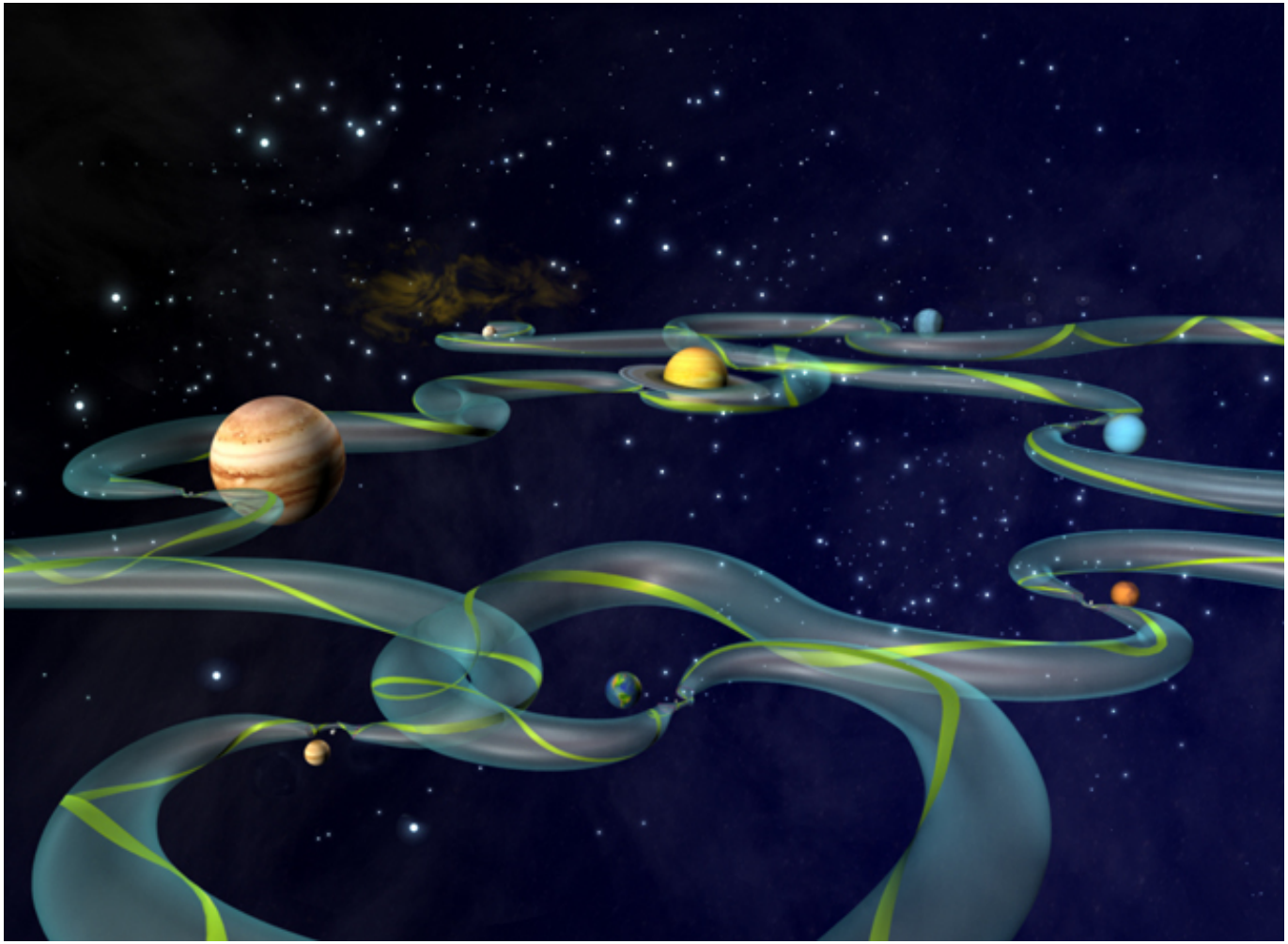


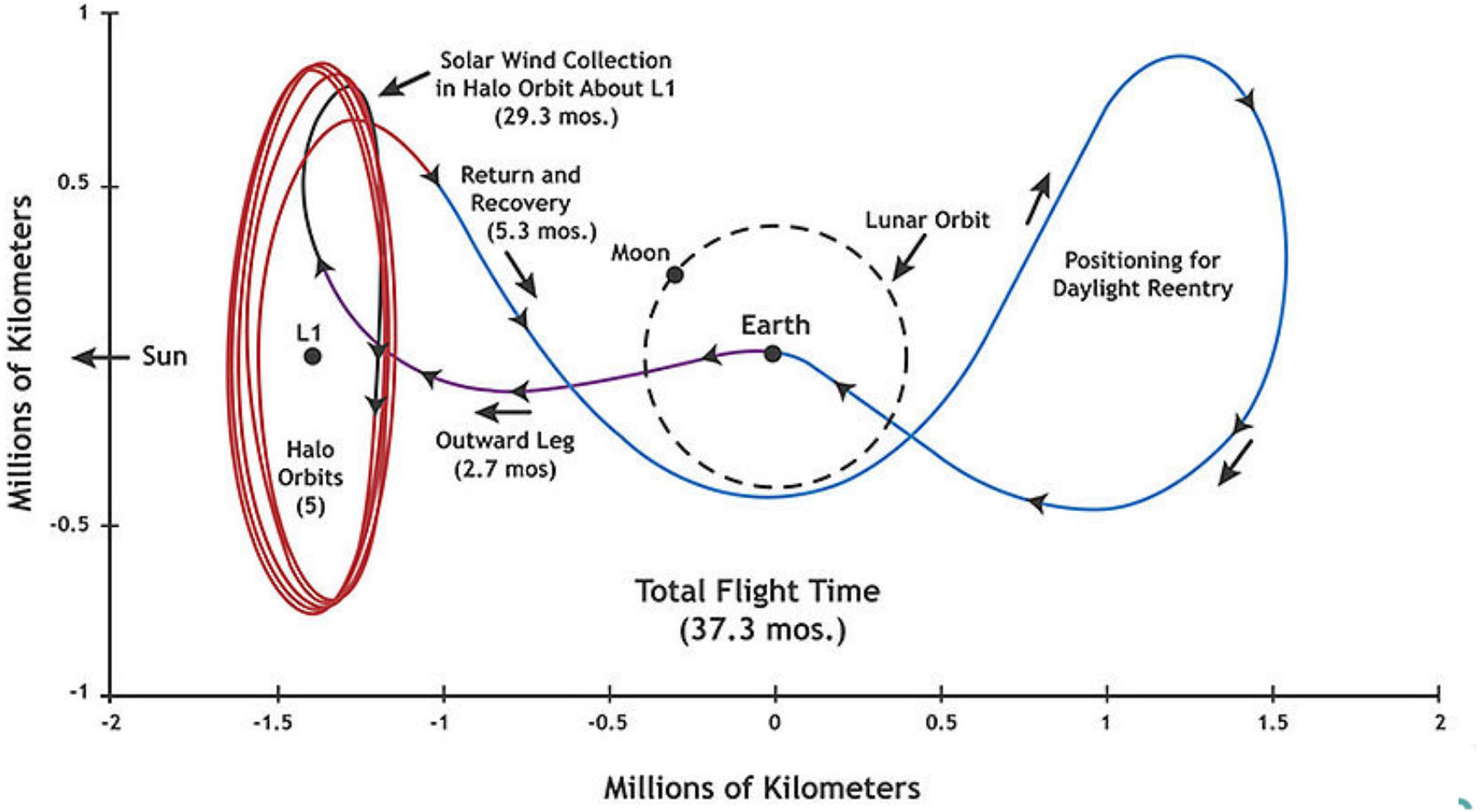
Diseño no lineal de misiones

- Una idea sería utilizar las órbitas estables para acercarse a los puntos L y las órbitas inestables para alejarse de ellos y posiblemente conectar con otros puntos L (por ejemplo pasar del L_1 Tierra-Luna al L_1 Sol-Tierra) utilizando el menor combustible posible, sino simplemente la dinámica no lineal del sistema.
- Esto tendría el inconveniente de tener que esperar el tiempo que dicte la dinámica, pero posibilitaría el ahorro de combustible. Se empleó para rescatar la misión Hiten (sonda lunar japonesa, que tuvo problemas de propulsión) y en la misión Génesis.
- Algunos autores tienen una visión futurista de que algún día estos procedimientos permitirán establecer una "autopista interplanetaria".

Diseño no lineal de misiones

- Una imagen de fantasía de la "autopista interplanetaria":



Órbitas complejas: misión Génesis

- Ejemplo—órbita de la misión Génesis: