Vehículos Espaciales y Misiles

Tema 4: Rendezvous de vehículos espaciales. Dinámica, estabilidad y maniobras básicas. Planificación.

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

21 de abril de 2014

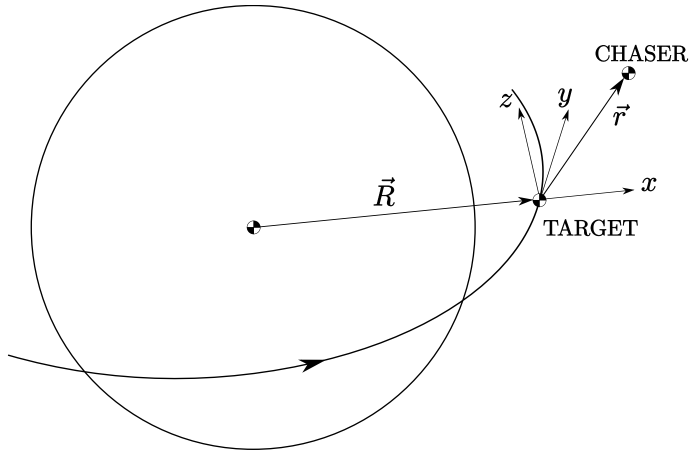
Introducción I

- En el contexto de los vehículos espaciales, se denomina "rendezvous" al encuentro en el espacio de dos vehículos.
- El encuentro debe ser controlado:
  - Proximidad en posición.
  - Proximidad en velocidad.
- Uno de los vehículos es el "**vehículo objetivo**" o "**blanco**". Se halla en una órbita conocida. Tiene un papel pasivo.
- El otro vehículo es el "**vehículo interceptor**" o "**perseguidor**". Parte de una órbita inicial y juega un papel activo (realiza maniobras).
- Rendezvous e intercepción:
  - Rendezvous: encuentro es controlado.
  - Intercepción: Sólo se busca la proximidad en posición o incluso el impacto.
- Ambos problemas se estudian mediante técnicas similares.

Introducción II

- Típicamente en órbitas geocéntricas (vehículos orbitando en torno a la Tierra).
- También aplicable a otros planetas, un satélite natural o, incluso, a órbitas en el campo gravitatorio del Sistema Solar.
- Utilidad:
  - Abastecimiento y mantenimiento de estaciones espaciales (MIR,ISS).
  - Reparación de satélites en órbita (Hubble).
  - Recuperación de satélites diseñados para ser recogidos en órbita.
  - Operaciones de salvamento.
  - Operaciones militares (ASAT).
  - Misiones tripuladas lunares e interplanetarias (Apollo).
  - Recogida/destrucción de basura espacial.

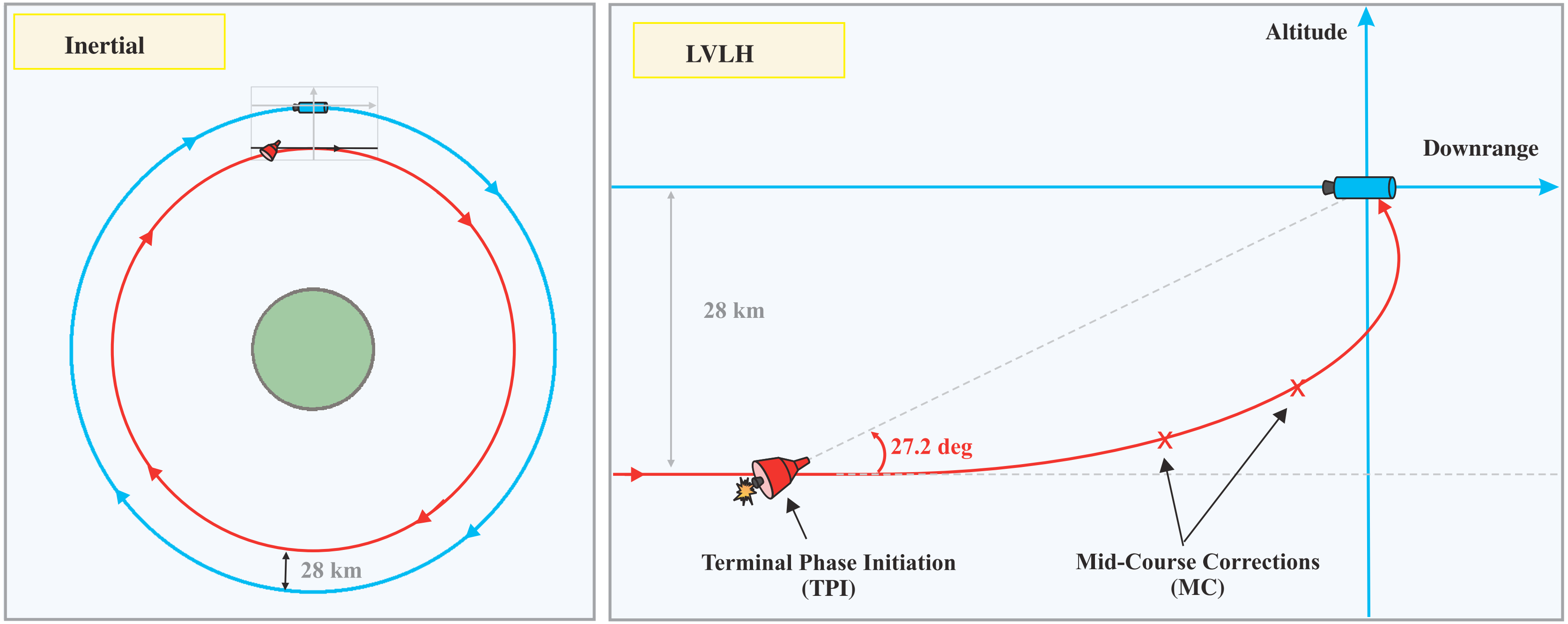
Sistema de referencia LVLH



LVLH FRAME

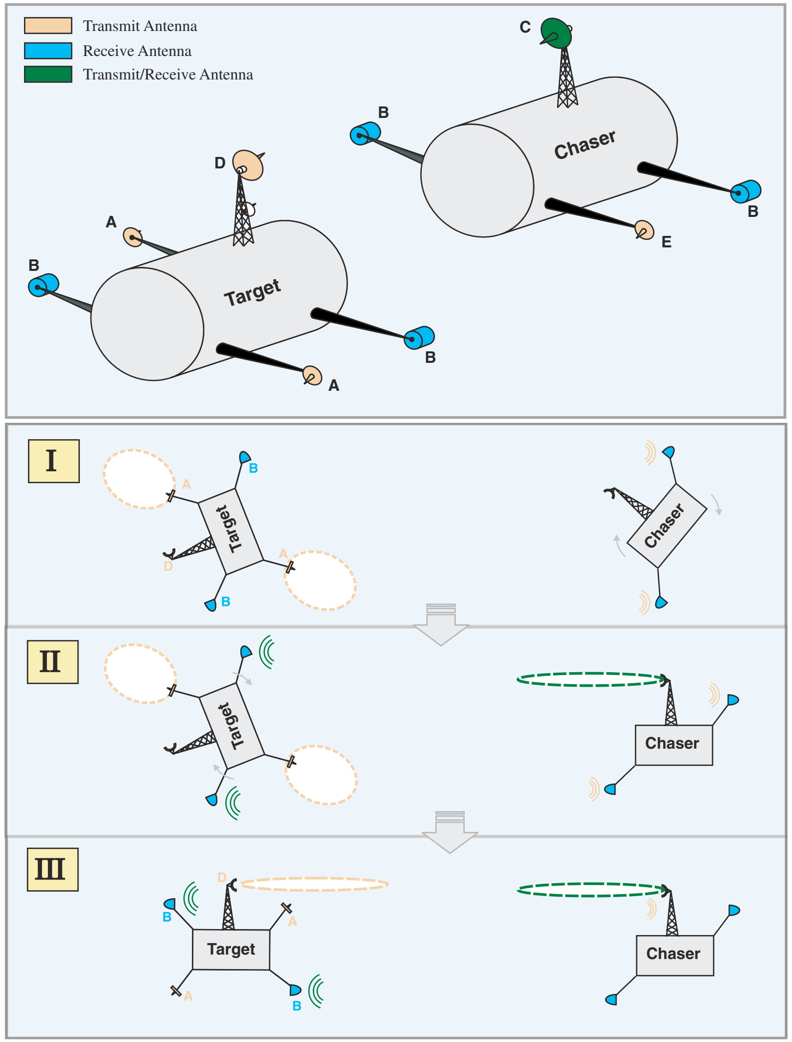
- Trabajamos en el sistema de referencia LVLH (local vertical, local horizontal), centrado en el blanco y definido de forma que la dirección x tiene la dirección de $\vec{R}$, z es perpendicular a la órbita (dirección de $\vec{h}$), e y completa el triedro.
- A veces la dirección x se denomina Altitude y/o R-BAR, y la dirección y Downrange y/o V-BAR.

Antecedentes: Misión Gemini



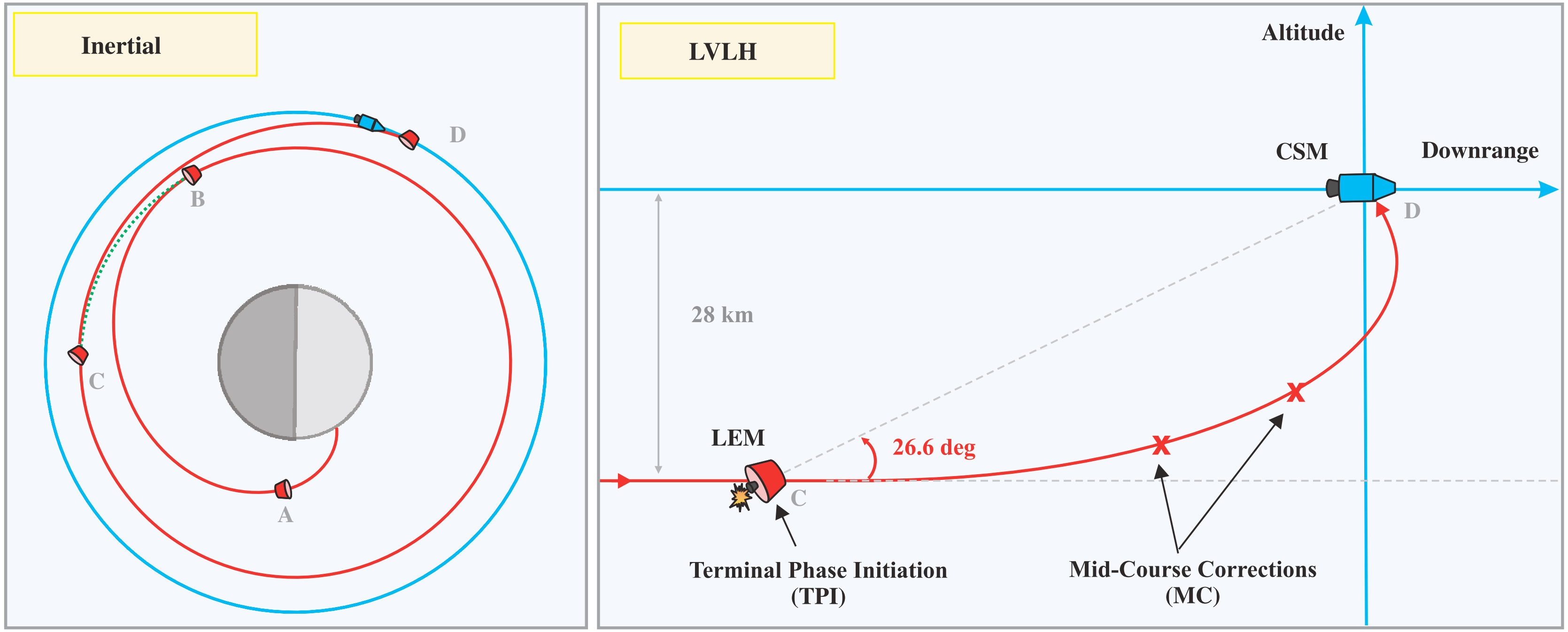
- Las misiones Gemini realizaron tests de rendezvous en 1965.
- El rendezvous se efectuó con control manual llevado a cabo por astronautas a bordo de los vehículos.
- El 15 de Diciembre de 1965 fue el primer rendezvous orbital de la historia (entre el Gemini VI y el Gemini VII).
- Hubo un intento fallido el 3 de Junio de 1965 con el Gemini IV; la NASA aprendió que “apuntar en la dirección del blanco y disparar” no es una solución adecuada.

Antecedentes: Soyuz



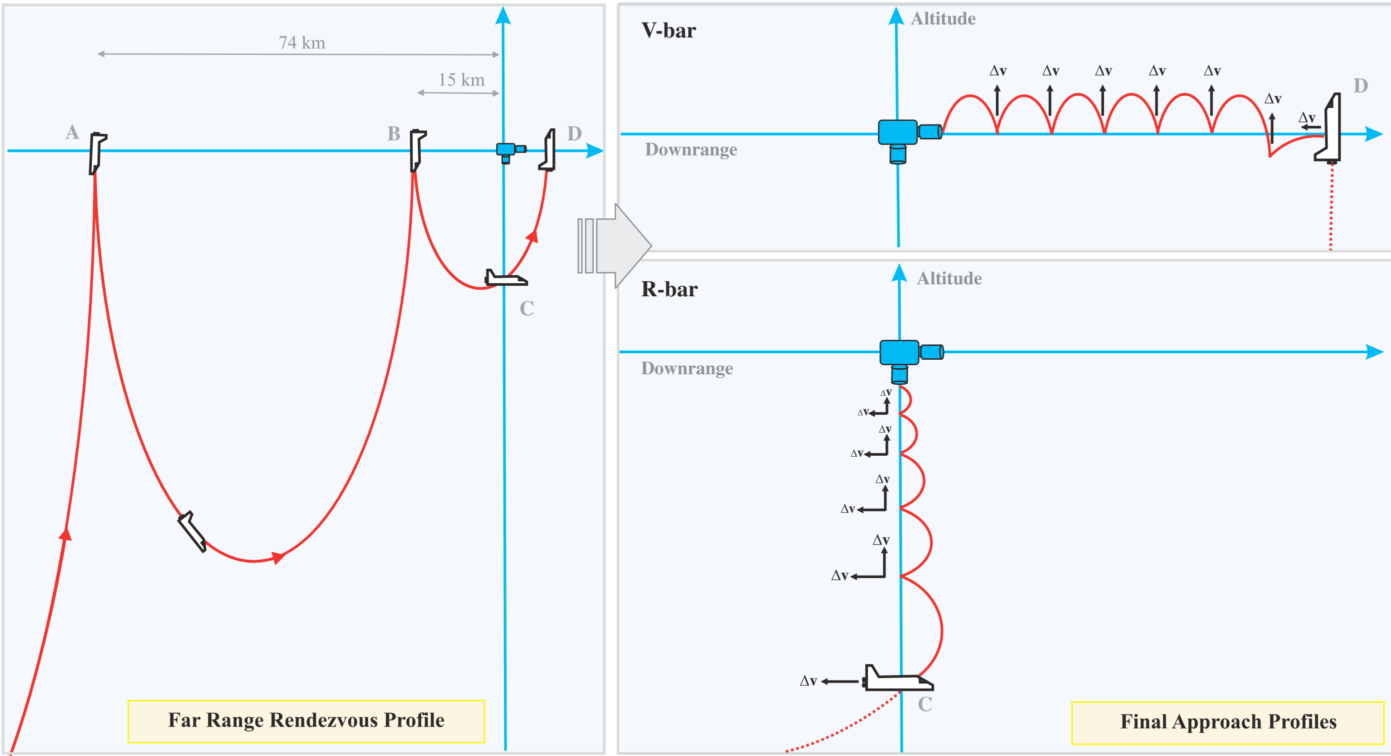
- En 1967 se produjo el primer rendezvous automático entre dos vehículos espaciales no tripulados (dos Soyuz).
- Mucho más complejo que el sistema americano.
- Se basaba en la comunicación entre los sistemas de navegación de los vehículos (llamados Igla—aguja), que al poseer varias antenas permitía obtener posición, velocidad y actitud relativas.
- Requiere cooperación del blanco.

Antecedentes: Apollo



- Para el programa espacial americano, el Apollo había sido la motivación fundamental para obtener capacidades de rendezvous.
- El usar una técnica de rendezvous permitió reducir pesos.
- Uno de los puntos críticos en la misión a la luna era el rendezvous entre el Módulo Lunar y el Módulo de Comando.

Sistemas modernos: Shuttle



- Se muestra el perfil de un rendezvous entre la estación internacional y el transbordador espacial.
- Aparece una subdivisión en fases según la proximidad.
- La fase final continúa siendo manual. Se muestran dos alternativas (acercamiento R-Bar o V-Bar).

Sistemas modernos: Soyuz

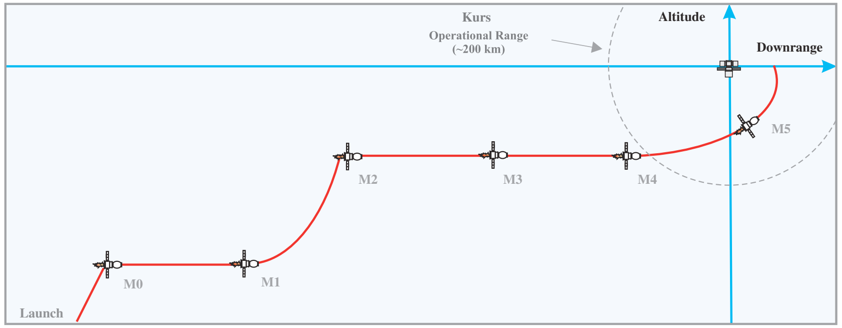
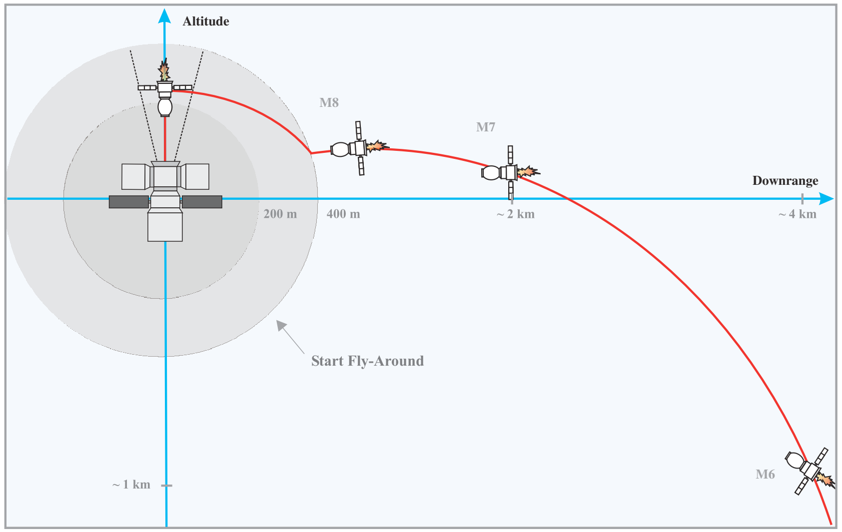
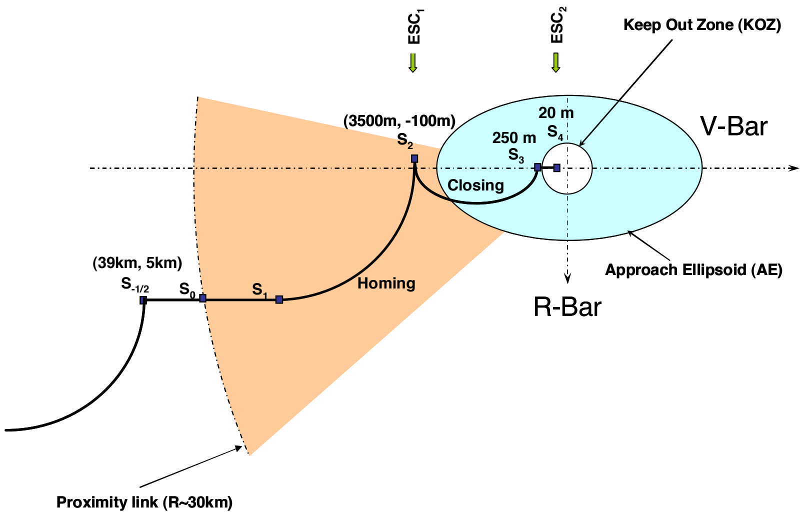


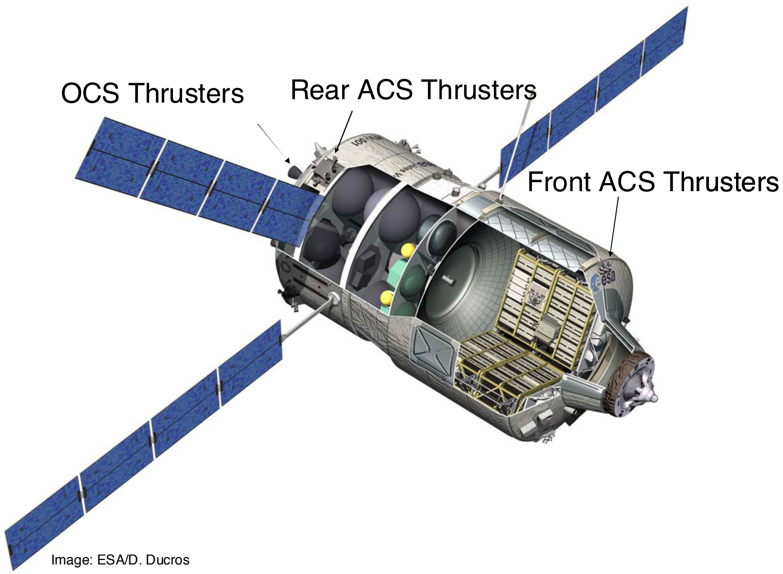
Fig. 6 Phasing and rendezvous sequence for Soyuz/Progress vehicles.



- El sistema Igla fue reemplazado por el sistema Kurs (curso).
- Permitió el rendezvous entre la Soyuz y la MIR.
- El nuevo sistema también era automático pero mucho más preciso y de mayor alcance que el anterior.
- No requiere cooperación del blanco (pero sí un sistema instalado).
- Problema: pesa 85 kg. y consume 270 W de potencia (en el lado del blanco el sistema tiene similares características).

Sistemas modernos: ATV





- El ATV (Automated Transfer Vehicle) de la ESA permite reabastecer la ISS y, al final de su vida útil, elevar la altitud de la estación y eliminar los residuos generados.
- Utiliza GPS relativo y star trackers para seguir una maniobra pre-programada que requiere sus diversos sistemas de propulsión.
- Tiene una serie de maniobras adicionales pre-programadas (de escape, de re-entrada, collision-avoidance) para posibles eventualidades.
- Se han lanzado 4 ATVS (Julio Verne, Johannes Kepler, Eduardo Amaldi, Albert Einstein), cada 17 meses.

Sistemas modernos: SpaceX Dragon

Fases del rendezvous

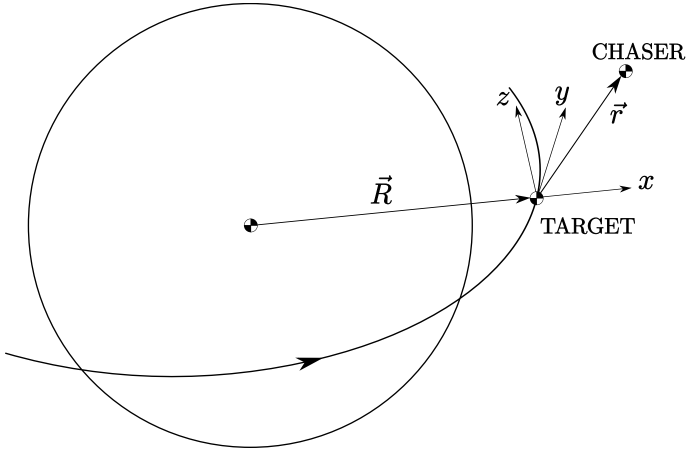
- Modernamente, el problema del encuentro en órbita suele dividirse en cuatro fases:
  1. **Fase orbital**: típicamente el vehículo interceptor comienza en Tierra o en una órbita diferente a la del blanco. Es necesario llevar al interceptor a las proximidades del blanco.
  2. **Acercamiento inicial** (far range rendezvous): El interceptor comienza cerca del objetivo ($\sim 10 - 100$ km), y debe acercarse hasta ($\sim 10 - 1000$ m) metros del objetivo. Se emplea navegación relativa.
  3. **Acercamiento final** (close range rendezvous): Se realizan maniobras con el objetivo de acercar el interceptor a muy poca distancia (menos de un metro) del blanco y con velocidades realtivas finales del orden de centímetros por segundo.
  4. **Acoplamiento** (docking): Se pretende realizar un contacto (captura) lo más suave posible que no dañe estructuralmente a ninguno de los dos vehículos, seguido de un acoplamiento estructural permanente entre los dos vehículos (si no hay acoplamiento, entonces es "berthing", literalmente, atraque) .

Acercamiento final

- La proximidad del blanco exige que se extremen las medidas de seguridad.
- Algunos posibes requisitos:
  - Evitar colisiones entre el interceptor y el blanco.
  - El interceptor debe aproximarse por un corredor previamente designado ("safe zone").
  - Si falla alguno de los motores del interceptor, debe garantizarse el rendezvous (si es posible).
  - Si la actitud del blanco cambia con el tiempo (blanco giratorio), el interceptor debe acoplarse con dicho movimiento para garantizar el rendezvous.
  - En caso de fallo total, la posibilidad de impacto debe ser la menor posible.
- Dichas restricciones han de respetarse a la vez que se minimiza el consumo de combustible en los motores del interceptor.
- Esta fase es la considerada en detalle en la asignatura.

Ecuaciones del movimiento relativo

- Ecuaciones del movimiento relativo en un caso sencillo.
- Hipótesis:
  - El blanco se encuentra en una órbita circular de radio R.
  - No se consideran perturbaciones orbitales.
  - El interceptor se encuentra "cerca" (≈ 1 kilómetro) del blanco.



LVLH FRAME

- Trabajamos en el sistema de referencia LVLH (local vertical, local horizontal), centrado en el blanco y definido de forma que la dirección x tiene la dirección de $\vec{R}$, y la dirección de la velocidad, y z completa el triedro.

Ecuaciones HCW

- Bajo las hipótesis anteriores, las ecuaciones de Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) describen el movimiento relativo del perseguidor respecto al blanco en el sistema de referencia LVLH.
- En un sistema de referencia inercial, la dinámica del blanco $\ddot{\vec{R}}$ y la del perseguidor $(\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}})$ viene dada por:

$$\ddot{\vec{R}} = -\mu \frac{\vec{R}}{R^3}, \quad \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{R}+\vec{r}}{|\vec{R}+\vec{r}|^3} \quad \longrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \mu \frac{\vec{R}}{R^3} - \mu \frac{\vec{R}+\vec{r}}{|\vec{R}+\vec{r}|^3}$$

- Como el sdr LVLH rota, hay que aplicar la ecuación de Coriolis: $\dot{\vec{r}}|_{IN} = \dot{\vec{r}}|_{LVH} + \omega \times \vec{r}$, que aplicada dos veces:

$$\ddot{\vec{r}}|_{IN} = \ddot{\vec{r}}|_{LVH} + 2\omega \times \dot{\vec{r}}|_{LVH} + \omega \times \omega \times \vec{r}$$

Despejando $\ddot{\vec{r}}|_{LVH}$:

$$\ddot{\vec{r}}|_{LVLH} = \mu \frac{\vec{R}}{R^3} - \mu \frac{\vec{R}+\vec{r}}{|\vec{R}+\vec{r}|^3} - 2\omega \times \dot{\vec{r}}|_{LVH} - \omega \times \omega \times \vec{r}$$

Ecuaciones HCW

- Linealizando el segundo término:

$$\mu\frac{\vec{R}+\vec{r}}{|\vec{R}+\vec{r}|^3} \approx \mu\frac{\vec{R}+\vec{r}}{R^3} - 3\mu\vec{R}\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^5}$$

- Sustituyendo en la ecuación:

$$\ddot{\vec{r}}|_{LVLH} \approx \mu\frac{\vec{r}}{R^3} + 3\mu\vec{R}\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^5} - 2\omega\times\dot{\vec{r}}|_{LVH} - \omega\times\omega\times\vec{r}$$

- Puesto que en el sdr LVLH tenemos que

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix},$$

donde $n = \sqrt{mu/R^3}$, efectuando los productos vectoriales:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = n^2 \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \\ -z \end{bmatrix} + 2n \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estudio de las ecuaciones HCW

- Por tanto, las ecuaciones HCW quedan:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 3n^2x + 2n\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x}, \\ \ddot{z} &= -n^2z. \end{aligned}$$

- Obsérvese:
  - Los equilibrios son $x = z = 0$ y cualquier valor constante de y. Estos valores representan órbitas del perseguidor iguales que las del blanco pero ligeramente desfasadas.
  - La dinámica en z está desacoplada y es estable (un oscilador no amortiguado) aunque no asintóticamente (las perturbaciones no tenderían a cero, pero tampoco crecerían).
- Para ver la estabilidad en $x - y$, escribimos el sistema como:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Estudio de las ecuaciones HCW

- Los autovalores de la matriz A son los del sistema. Para encontrar los autovalores se puede desarrollar $\det(A - \lambda I)$ por la columna en la que sólo hay un elemento, obteniendo fácilmente que los autovalores son $\lambda = 0(\mathrm{doble}), \pm ni$.
- El hecho de que aparezca un cero doble implica que el sistema es inestable, aunque algebraicamente (es decir, una perturbación crecería como $C \cdot t$, no exponencialmente). Físicamente esta situación corresponde a que el perseguidor, aunque esté muy cerca, tendrá en general un periodo orbital ligeramente distinto al del blanco, por lo que (si no se hace nada), eventualmente la distancia entre ambos crecerá.
- Para encontrar más propiedades de las ecuaciones HCW es necesario resolver las ecuaciones, lo que es posible dado que las ecuaciones son lineales y sencillas.

Solución de las ecuaciones HCW

- La ecuación en z es fácil de resolver, obteniéndose, en función de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} z &= z_0 \cos nt + \frac{\dot{z}_0}{n} \operatorname{sen} nt, \\ \dot{z} &= -n z_0 \operatorname{sen} nt + \dot{z}_0 \cos nt \end{aligned}$$

- Para resolver las ecuaciones en $x - y$, derivamos la ecuación en x y sustituimos la de y, obteniendo $\dddot{x} = -n^2 \dot{x}$, cuyos autovalores son $0, ni, -ni$. Por tanto:

$$x = A \cos nt + B \operatorname{sen} nt + C$$

y para encontrar y despejamos $\dot{y}$ de la ecuación de $\ddot{x}$ y sustituimos la solución en x:

$$\dot{y} = \frac{\ddot{x} - 3n^2 x}{2n} = -n \frac{4A \cos nt + 4B \operatorname{sen} nt + 3C}{2},$$

e integrando, hallamos:

$$y = -2A \operatorname{sen} nt + 2B \cos nt - \frac{3Cnt}{2} + D,$$

Solución de las ecuaciones HCW

- La solución por tanto es:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= A + C, \\
y_0 &= 2B + D, \\
\dot{x}_0 &= nB, \\
\dot{y}_0 &= -n\frac{4A + 3C}{2}.
\end{aligned}
$$

- Resolviendo:

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{2\dot{y}_0}{n} - 3x_0 \\
B &= \frac{\dot{x}_0}{n}, \\
C &= 4x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}, \\
D &= y_0 - 2\dot{x}_0,
\end{aligned}
$$

Solución de las ecuaciones HCW

- Poniendo las constantes en función de las condiciones iniciales, encontramos:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0(4-3\cos nt) + \dot{x}_0\frac{\operatorname{sen} nt}{n} + \frac{2\dot{y}_0}{n}(1-\cos nt),\\
y &= x_0(6\operatorname{sen} nt - 6nt) + y_0 + 2\dot{x}_0\frac{\cos nt - 1}{n} + \dot{y}_0\left(\frac{4\operatorname{sen} nt - 3nt}{n}\right)\\
\dot{x} &= 3x_0 n\operatorname{sen} nt + \dot{x}_0\cos nt + 2\dot{y}_0\operatorname{sen} nt,\\
\dot{y} &= x_0 n(6\cos nt - 6) - 2\dot{x}_0\operatorname{sen} nt + \dot{y}_0\,(4\cos nt - 3)
\end{aligned}
$$

- En forma matricial, escribiendo $C=\cos nt$, $S=\operatorname{sen} nt$:

$$
\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ \dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
4-3C & 0 & 0 & \frac{S}{n} & \frac{2(1-C)}{n} & 0\\
6S-6nt & 1 & 0 & \frac{2C-2}{n} & \frac{4S-3nt}{n} & 0\\
0 & 0 & C & 0 & 0 & \frac{S}{n}\\
3nS & 0 & 0 & C & 2S & 0\\
6nC-6n & 0 & 0 & -2S & 4C-3 & 0\\
0 & 0 & -Sn & 0 & 0 & C
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\\ \dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \dot{z}_0\end{bmatrix}
$$

Solución periódica

- Obsérvese que el único término que crece sin límite cuando crece el tiempo es y. Haciendo $x_0 = -\frac{\dot{y}_0}{2n}$, se cancela este término y ya la solución no crece. Para simplificar, si también $y_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 0$, la solución $x - y$ es:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos nt, \\ y &= -2x_0 \operatorname{sen} nt \end{aligned}$$

- Esta solución verifica $x^2 + \frac{y^2}{4} = x_0^2$, es decir, una elipse de semieje mayor $2x_0$ (en el eje y) y semieje menor x_0 (en el eje x) centrada en el blanco, que el perseguidor recorre en el sentido de las agujas del reloj.
- La solución es como una “órbita” (de periodo igual al periodo orbital del blanco), pero hay que tener en cuenta que no existe atracción gravitatoria entre blanco y perseguidor. Esto se debe a que el perseguidor tenga una órbita ligeramente excéntrica con el mismo periodo que la del blanco.

Aplicación al rendezvous.

- Escribiendo la matriz que antes encontramos por bloques como

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rr}(t) & A_{rv}(t) \\ A_{vr}(t) & A_{vv}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- Llamando $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$, obtenemos la influencia de las condiciones iniciales de la velocidad y posición en la velocidad y posición actual:

$$\vec{r}(t) = A_{rr}(t)\vec{r}_0 + A_{rv}(t)\vec{v}_0, \quad \vec{v}(t) = A_{vr}(t)\vec{r}_0 + A_{vv}(t)\vec{v}_0$$

Aplicación al rendezvous.

- Podemos aprovechar esta solución para diseñar maniobras impulsivas que nos permitan ir desde nuestra posición actual a otra en un tiempo prefijado.
- Por ejemplo, supongamos que nuestra velocidad actual es $\vec{v}_0^-$, nuestra posición $\vec{r}_0$ y queremos ir al origen ($\vec{r} = \vec{0}$) en un tiempo $t = \tau$. Sustituimos en la primera ecuación: $\vec{0} = A_{rr}(\tau)\vec{r}_0 + A_{rv}(\tau)\vec{v}_0$. Por tanto la velocidad que necesitaríamos para llegar al origen sería: $\vec{v}_0^+ = -\left(A_{rv}(\tau)\right)^{-1} A_{rr}(\tau)\vec{r}_0$, y el primer impulso será
$$\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_0^+ - \vec{v}_0^- = -\left(A_{rv}(\tau)\right)^{-1} A_{rr}(\tau)\vec{r}_0 - \vec{v}_0^-.$$
- De la segunda ecuación, la velocidad al llegar sería $\vec{v}(\tau) = A_{vr}(\tau)\vec{r}_0 + A_{vv}(\tau)\vec{v}_0^+ = \left(A_{vr}(\tau) - A_{vv}(\tau)\left(A_{rv}(\tau)\right)^{-1} A_{rr}(\tau)\right)\vec{r}_0$, y para frenar hasta cero el segundo impulso será
$$\Delta\vec{v}_2 = -\vec{v}(\tau) = \left(A_{vv}(\tau)\left(A_{rv}(\tau)\right)^{-1} A_{rr}(\tau) - A_{vr}(\tau)\right)\vec{r}_0.$$

Otros procedimientos de rendezvous.

- Consideremos las ecuaciones HCW añadiendo un término de control (por ejemplo, toberas en cada dirección):
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 3n^2x + 2n\dot{y} + u_x, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + u_y, \\ \ddot{z} &= -n^2z + u_z. \end{aligned}$$
- Diseñando leyes de control para u_x, u_y, y u_z, podríamos crear diferentes procedimientos para rendezvous.
- Por ejemplo, si se usa “Pole placement” para hacer el origen estable, se conseguirá que desde cualquier condición inicial se llegue al origen. Igualmente, si se usa control LQR, se puede conseguir rendezvous optimizando el consumo de combustible.
- El problema de estas técnicas es que son poco seguras, ya que no se pueden especificar condiciones de seguridad (la zona por donde debe moverse el vehículo, máximos de control, etc...). Es necesario usar técnicas más avanzadas (por ejemplo planificación) para poder incluir estas condiciones.

Planificación usando optimización

- Consideremos ahora que durante un ΔT mantenemos constantes las señales de control (propulsión), desde una condición inicial en el estado.
- El resultado sería, en forma compacta, donde ahora $C_\Delta = \cos n\Delta T$, $S = \operatorname{sen} n\Delta T$:

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3C_\Delta & 0 & 0 & \frac{S_\Delta}{n} & \frac{2(1-C_\Delta)}{n} & 0 \\ 6S_\Delta - 6n\Delta T & 1 & 0 & \frac{2C_\Delta - 2}{n} & \frac{4S_\Delta - 3nt}{n} & 0 \\ 0 & 0 & C_\Delta & 0 & 0 & \frac{S_\Delta}{n} \\ 3nS_\Delta & 0 & 0 & C_\Delta & 2S_\Delta & 0 \\ 6nC_\Delta - 6n & 0 & 0 & -2S_\Delta & 4C_\Delta - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -S_\Delta n & 0 & 0 & C_\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \frac{1-C_\Delta}{n^2} & \frac{2n\Delta T - 2S_\Delta}{n^2} & 0 \\ \frac{2(S_\Delta - n\Delta T)}{n^2} & -\frac{3(\Delta T)^2}{2} + 4\frac{1-C_\Delta}{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-C_\Delta}{n^2} \\ \frac{S_\Delta}{n} & 2\frac{1-C_\Delta}{n} & 0 \\ \frac{2(C_\Delta - 1)}{n} & -3\Delta T + 4\frac{S_\Delta}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_\Delta}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}
$$

- Esta ecuación se puede escribir como $\vec{x}(\Delta T) = A\vec{x}_0 + B\vec{u}$ donde ahora $\vec{x}$ engloba todo el estado (posición y velocidad) y $\vec{u}$ las tres señales de control.

Planificación usando optimización

- Supongamos ahora que divido el tiempo en intervalos de duración ΔT, y denomino $\vec{x}_k$ al estado en el instante $t = k\Delta T$, y $\vec{u}_k$ a la señal de control que se mantiene constante durante todo el intervalo desde $t = k\Delta T$ hasta $t = (k+1)\Delta T$.
- Aplicando la ecuación anteriormente deducida tendríamos un "sistema discreto" (ecuación en diferencias):

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k + B\vec{u}_k,$$

de forma que si conozco la condición inicial $\vec{x}_0$ y las señales de control durante, por ejemplo, j intervalos, puedo encontrar $\vec{x}_{j+1}$ simplemente iterando la ecuación:

$$\vec{x}_{j+1} = A\vec{x}_j + B\vec{u}_j = A(A\vec{x}_{j-1} + B\vec{u}_{j-1}) + B\vec{u}_j = A^2\vec{x}_{j-1} + AB\vec{u}_{j-1} + B\vec{u}_j$$

- Iterando j veces:

$$\vec{x}_{j+1} = A^{j+1}\vec{x}_0 + A^j B\vec{u}_0 + \ldots + AB\vec{u}_{j-1} + B\vec{u}_j = A^{j+1}\vec{x}_0 + \sum_{i=0}^{i=j} A^{j-i}B\vec{u}_i$$

Planificación usando optimización

- En conclusión, el estado en el instante $j+1$ es función del estado en el instante 0 y de todas las señales de control desde 0 hasta j (en total $3j$ señales de control).
- Partiendo de este modelo podemos realizar una planificación óptima, si fijamos objetivos concretos y restricciones.
- Objetivos:
  1. Realizar el rendezvous (posición y velocidad igual a cero) tras N instantes de tiempo (el llamado "horizonte" de planificación.
  2. Minimizar la energía de control (representada por el cuadrado de la norma del vector de control en cada instante, $|u_j|^2$).
- Matemáticamente esto se refleja con las siguientes condiciones:

$$\vec{x}_N = \vec{0} = A^N \vec{x}_0 + \sum_{i=0}^{i=N-1} A^{N-1-i} B \vec{u}_i$$

y el objetivo de minimizar J, donde $J = \sum_{i=0}^{N-1} |u_i|^2$.

Planificación usando optimización

- Restricciones:
  1. La potencia de control estará acotada entre un máximo y un mínimo: $\vec{u}_{MIN} \leq \vec{u}_i \leq \vec{u}_{MAX}$, para todo instante $0 \leq i \leq N-1$.
  2. Evitar el impacto con el objetivo durante el trayecto; esto se puede garantizar si por ejemplo obligamos a que siempre la coordenada y en todo instante de tiempo i sea positiva (suponiendo que empieza siéndolo). Para ello definiendo $c = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]$, obsérvese que $c\vec{x}_j \geq 0$ equivale a esta condición. Por tanto:

$$c\vec{x}_j = cA^j\vec{x}_0 + \sum_{i=0}^{i=j-1} cA^{j-1-i}B\vec{u}_i \geq 0$$

     para todo instante $0 \leq i \leq N-1$.
- ¿Cómo resolver este problema de optimización?

Optimización cuadrática con restricciones lineales

- Dadas matrices H, A, A_{eq} y vectores $\vec{f}$, $\vec{b}$, $\vec{b}_{eq}$ el siguiente problema se puede resolver de forma rápida y eficiente: hallar $\vec{r}$ solución del siguiente problema

$$\min_{\vec{r}} \frac{1}{2}\vec{r}^T H\vec{r} + \vec{f}^T\vec{r}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} A\vec{r} \leq \vec{b} \\ A_{eq}\vec{r} = \vec{b}_{eq} \end{cases}$$

- Por ejemplo la orden de Matlab *quadprog* lo resuelve:

QUADPROG Quadratic programming.
X = QUADPROG(H,f,A,b) attempts to solve the quadratic programming problem:
*min 0.5*x'*H*x + f'*x subject to: A*x ≤ b x*
*X = QUADPROG(H,f,A,b,Aeq,beq) solves the problem above while additionally satisfying the equality constraints Aeq*x = beq.*

Planificación usando optimización

- Por tanto todo se reduce a escribir el problema en la forma de "Optimización cuadrática con restricciones lineales".
- Para ello tenemos que meter todas las señales de control en un único vector de control. Definamos los siguientes "vectores apilados" (vectores de vectores):

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vdots \\ \vec{x}_{N-1} \\ \vec{x}_N \end{bmatrix}, \qquad \vec{U} = \begin{bmatrix} \vec{u}_0 \\ \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_{N-2} \\ \vec{u}_{N-1} \end{bmatrix},$$

- La evolución del sistema vendrá dada "de golpe" por $\vec{X} = F\vec{x}_0 + G\vec{U}$, donde F y G son matrices definidas por bloques:

$$F = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N-1} \\ A^N \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 & 0 \\ AB & B & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-2}B & A^{N-3}B & \dots & B & 0 \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & AB & B \end{bmatrix},$$

Planificación usando optimización

- Ya podemos escribir las matrices para poner el problema en la forma de optimización cuadrática. Está claro que la función de coste es simplemente $J = \frac{1}{2}\vec{U}^T\vec{U}$, luego la matriz H es la identidad (de orden $3N$) y el vector f es un vector de ceros.
- Restricción de igualdad: queremos que el último vector de $\vec{X}$ sea cero. Por tanto eso se escribirá $G_1\vec{X} = \vec{0}_6$, donde $\vec{0}_6$ es un vector de ceros de dimensión 6 y la matriz G_1 es

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0_{6\times 6} & 0_{6\times 6} & \dots & 0_{6\times 6} & \mathrm{Id}_{6\times 6} \end{bmatrix},$$

- Por tanto llegamos a:

$$\vec{0}_6 = G_1\vec{X} = G_1F\vec{x}_0 + G_1G\vec{U} \rightarrow G_1G\vec{U} = -G_1F\vec{x}_0$$

- Es decir, $A_{eq} = G_1G$, $b_{eq} = -G_1F\vec{x}_0$.

Planificación usando optimización

- Restricciones de desigualdad: Para escribir $\vec{u}_{MIN} \leq \vec{u}_i \leq \vec{u}_{MAX}$ definimos los vectores

$$\vec{U}_{min} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{MIN} \\ \vdots \\ \vec{u}_{MIN} \end{bmatrix}, \qquad \vec{U}_{max} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{MAX} \\ \vdots \\ \vec{u}_{MAX} \end{bmatrix},$$

- Podemos escribir las restricciones como

$$\vec{U} \leq \vec{U}_{max}, \qquad -\vec{U} \leq -\vec{U}_{min}$$

- Finalmente la última restricción la podemos escribir como $C\vec{X} \leq \vec{0}_N$, donde

$$C = \begin{bmatrix} -c & & \\ & \ddots & \\ & & -c \end{bmatrix}$$

- Por lo que $C(F\vec{x}_0 + G\vec{U}) \leq \vec{0}_N$, llegando a $CG\vec{U} \leq -CF\vec{x}_0$.
- Uniendo todas las restricciones: $A\vec{U} \leq \vec{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{3N\times 3N} \\ -\mathrm{Id}_{3N\times 3N} \\ CG \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{U}_{max} \\ -\vec{U}_{min} \\ -CF\vec{x}_0 \end{bmatrix},$$

Planificación usando optimización

- Con el procedimiento explicado obtenemos una secuencia de control que me permite llegar de forma óptima desde el punto inicial hasta el rendezvous verificando las restricciones.
- El problema de este método es que presupone que el modelo del sistema es perfecto, es decir, que no va a haber ningún tipo de desviaciones por el camino (técnicamente, es una solución de control en bucle abierto).
- La solución a este problema es, en vez de aplicar la secuencia de control "a ciegas", aplicar nada más que la primera secuencia calculada ($\vec{u}_1$ en vez de todo $\vec{U}$) y volver a replanificar todo el problema a partir del punto al que se llegue (cambiando la condición inicial por el valor $\vec{x}_1$ que se haya alcanzado). De esta forma "se cierra el bucle".
- Este procedimiento (control predictivo) es muy eficaz pero requiere resolver un problema de optimización en cada paso: sólo factible en sistemas "lentos" (p.ej. el rendezvous).