Ingenieros Aeronáuticos	N^{o}DNI ____________	Curso 13/14
Escuela Superior de Ingenieros	1erApellido ____________ 2doApellido ____________	11/04/14
Universidad de Sevilla	Nombre ____________	**Cuestiones**

Puntuación total: 10 puntos.

1. (**1.5 puntos**) Responder a las siguientes cuestiones teóricas

   a) Definir brevemente los siguientes conceptos (máximo 4 líneas para cada concepto):
   1) Sistema de Control de Reacción.
   2) Disipador de nutación.
   3) Giróscopos de control de momento (CMG).
   4) Cuerpo prolato.
   5) Rigidez giroscópica.

   b) Describir brevemente pero con precisión qué métodos, actuadores y sensores sería razonable utilizar para ADCS (determinación y control de la actitud) en las siguientes misiones:
   1) Un pequeño satélite de bajo coste en órbita baja con forma de cubo (CubeSat).
   2) Un satélite cartográfico en órbita heliosíncrona (baja) que requiere altas precisiones y maniobras rápidas.
   3) Una sonda interplanetaria durante la fase heliocéntrica de su trayectoria.
   4) Un satélite geoestacionario para observación del clima terrestre, sin requisitos estrictos de precisión, que no requiere maniobras, y cuya vida se pretende maximizar.
   5) Un vehículo lanzador en la fase final del lanzamiento (desde capas muy elevadas de la atmósfera hasta desplegar la carga útil en órbita baja).

2. (**2.5 puntos**) Responder a las siguientes preguntas sobre cinemática de actitud

   a) Definir esquemáticamente la secuencia de ángulos de Euler 2-3-2, denotando el primer giro como θ_1, el segundo como θ_2 y el tercero como θ_3. Deducir de forma razonada las ecuaciones diferenciales cinemáticas (no es necesario invertir la matriz en el último paso, se puede dejar indicada). ¿Cuál es la singularidad o singularidades de esta secuencia?

   b) Supongamos que un cuerpo tiene una actitud inicial, descrita usando la secuencia estudiada en el anterior apartado y dada por $(\theta_1 = 60^o, \theta_2 = 90^o, \theta_3 = 0^o)$, y se desea que llegue a una actitud final dada por $(\theta_1 = 180^o, \theta_2 = -60^o, \theta_3 = 0^o)$. Suponiendo que se desea realizar esta transición en un periodo T de diez minutos, encontrar una velocidad angular $\vec{\omega}(t)$ (en ejes cuerpo) que sea capaz de realizar el giro y con la condición adicional de que $\vec{\omega}(0) = \vec{\omega}(T) = \vec{0}$, es decir, la velocidad angular deberá ser nula al principio y al final de la maniobra.

   c) Recordando las ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= M_3 \end{aligned}$$

   y suponiendo momentos de inercia I_1, I_2, I_3 diferentes entre sí y que se puede ejercer el par $\vec{M} = [M_1\ M_2\ M_3]^T$ que se desee, ¿qué par $\vec{M}$ serviría para llevar a cabo la maniobra descrita? ¿Cómo habría que modificar el apartado anterior para que los pares sean nulos al principio y al final de la maniobra, es decir $\vec{M}(0) = \vec{M}(T) = \vec{0}$?

(Sigue por detrás)

3. (**2 puntos**) Sea un satélite rígido sin pares externos y con velocidad angular $\vec{\omega} = [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]^T$, donde ω_i son las componentes de la velocidad angular del satélite en ejes cuerpo, y con momentos de inercia I_i (en ejes principales). Además se tiene que $I_1 > I_2 > I_3$.

   a) Enunciar y justificar la regla del eje mayor cuando existe disipación de energía.

   b) ¿Sería posible estabilizar el vehículo (con disipación de energía) rotando en torno al **eje intermedio**, si se añade un volante de inercia con inercia I_R y velocidad angular ω_R que se puede suponer constante? Encontrar las condiciones que se deben verificar. Para ello se recable el siguiente resultado matemático:

   Teorema: Sea $F(x, y, z)$ una función a minimizar sujeta a la restricción $G(x, y, z) = 0$. Sea $L(x, y, z) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$ el Lagrangiano del sistema de forma que x^*, y^*, z^*, λ^* es un punto crítico (que hace las primeras derivadas parciales de L cero) donde se quiere investigar si hay un mínimo. Si se cumplen las condiciones:

   - $\frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) \neq 0$
   - $\mathrm{Det}(H_3(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$
   - $\mathrm{Det}(H_4(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$

   entonces se tiene un mínimo en el punto crítico, donde H_3 y H_4 son las matrices:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$

4. (**1 punto**) Para un vehículo espacial en órbita cuyo centro de gravedad se encuentra a una distancia $\vec{R}_c$ de un cuerpo masivo (con parámetro gravitatorio μ), y sabiendo que el tensor de inercia del vehículo es $\mathcal{I}$, encontrar razonadamente una expresión lo más exacta posible del par $\vec{M}$ (respecto al centro de gravedad del vehículo) debido al gradiente gravitatorio experimentado por el vehículo (no es necesario expresar $\vec{M}$ en ninguna base, simplemente encontrar una fórmula vectorial). Puede ser útil recordar las siguientes expresiones:

   - Si $|\vec{B}| \lll |\vec{A}|$, se cumple $|\vec{A} + \vec{B}|^n \approx |\vec{A}|^n + n|\vec{A}|^{n+2}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$.
   - Ley de gravitación universal para un cuerpo de masa m a distancia $\vec{r}$ de un cuerpo masivo con parámetro gravitatorio μ: $\vec{F} = -\frac{\mu m}{r^3}\vec{r}$, donde $r = |\vec{r}|$.
   - Definición del tensor de inercia: $\mathcal{I} = \int_V \left([\vec{\rho}^T \vec{\rho}]\mathrm{Id} - \vec{\rho}\vec{\rho}^T\right) dm$ donde $\vec{\rho}$ es la distancia de cada partícula de masa dm al centro de gravedad del vehículo (integral extendida al volumen completo V del vehículo).

5. (**1 punto**) Describir la formulación del algoritmo Q (cuantas medidas son necesarias, qué función de coste se emplea, etc...). Una vez formulado, no es necesario describir los pasos intermedios, sino que se puede usar el hecho de que, expresando la actitud como un cuaternión q y tras realizar diversas manipulaciones algebraicas, se llega a una formulación $J = q^T K q$, donde K es una matriz 4x4 que depende de las medidas y los pesos elegidos para ponderarlas entre sí, y J es una función de coste que hay que maximizar. Supuesta conocida K, concluir la pregunta **de forma razonada** encontrando el cuaternión de actitud que maximiza J.

6. (**2 puntos**) Describir el mecanismo yo-yo y su utilidad. Describir las hipótesis habitualmente utilizadas para estudiar la dinámica del mecanismo. Recordando que la energía cinética inicial es $T_0 = \frac{1}{2} m R^2 K n_0^2$ y el módulo del momento cinético inicial es $\Gamma_0 = m R^2 K n_0$, donde $K = 1 + \frac{I_3}{mR^2}$, I_3 el momento inercia en torno al eje de simetría del vehículo, R el radio del vehículo en el plano perpendicular al eje de simetría,m la masa y n_0 la velocidad angular inicial, y que cuando se desenrolla un ángulo ϕ de cable del mecanismo se obtiene que $T = \frac{mR^2}{2}\left(Kn^2 + (\dot{\phi} + n)^2\phi^2\right)$ y $\Gamma = mR^2(Kn + (n + \dot{\phi})\phi^2)$, donde n es la velocidad angular del vehículo, deducir de forma razonada el valor de $\dot{\phi}$, los posibles valores finales de la velocidad angular, y la longitud de cable que es necesario desenrollar para obtener dichos valores de velocidad angular, así como el tiempo final t_f que se tarda en alcanzar la velocidad deseada.

   Partiendo de los resultados anteriores, expresar la velocidad angular del vehículo como función del tiempo, $n(t)$. Calcular la aceleración angular $\alpha(t) = \dot{n}$. Encontrar la tensión en los cables T relacionando la aceleración angular con el par que los cables transmiten al vehículo.

   En particular, para un vehículo tal que $I_3 = 200\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$, $m = 4\ \mathrm{kg}$, $R = 1\ \mathrm{m}$, $n_0 = 75\ \mathrm{rpm}$, ¿qué longitud de cable será necesaria para detener totalmente el vehículo y cuánto tiempo se tardará en hacerlo? ¿Cuál será la tensión máxima que los cables tendrán que soportar?

Solución

1. Cuestión teórica.

   a) Las respuestas se obtienen directas de teoría.

   b) Existen varias posibles respuestas válidas, pero las siguientes serían correctas:

      1) Un pequeño satélite de bajo coste en órbita baja con forma de cubo (CubeSat). Estabilización por momentos magnéticos. Serían necesarios magnetopares y magnetómetro. Como sensores adicionales se sugieren giróscopos electrónicos de bajo coste.
      2) Un satélite cartográfico en órbita heliosíncrona (baja) que requiere altas precisiones y maniobras rápidas. Debe estar estabilizado en sus tres ejes. Para conseguir maniobras rápidas y precisas se sugiere el uso de CMGs (control moment gyros). Como sensores se podrían usar sensores digitales de aspecto solar y star trackers. El uso de magnetopares adicionales sería recomendable puesto que permitiría eliminar momento cinético acumulado sin necesidad de usar combustible.
      3) Una sonda interplanetaria durante la fase heliocéntrica de su trayectoria. Sistema estabilizado por rotación, sin mayores requisitos, rotando en torno al eje mayor. Se podría instalar un disipador de nutación para aumentar la estabilidad del sistema. Para detener la rotación se puede utilizar propulsión o un sistema yo-yo. Para maniobrar la posición del eje de giro, maniobras de "coning", para lo cual sería necesario tener toberas y un sistema RCS asociado. Serían necesarios sensores precisos (por ejemplo star trackers) para adquirir la actitud una vez llegado al destino, pero durante la fase heliocéntrica es suficiente con tener giróscopos de bajo coste y sensores de radiación solar.
      4) Un satélite geoestacionario para observación del clima terrestre, sin requisitos estrictos de precisión, que no requiere maniobras, y cuya vida se pretende maximizar. Estabilización por gradientes gravitatorios. El uso de mástiles desplegables permitiría aumentar la diferencia entre las inercias de los ejes aumentando el efecto del gradiente gravitatorio. Adicionalmente se puede instalar un volante de inercia para mejorar la estabilidad en guiñada. Como sensores típicamente se usarían sensores de radiación solar, de horizonte terrestre, y giróscopos electrónicos.
      5) Un vehículo lanzador en la fase final del lanzamiento (desde capas muy elevadas de la atmósfera hasta desplegar la carga útil en órbita baja). Estabilizado por rotación en torno al eje menor. Sin necesidad de actuadores o sensores adicionales ya que es una fase muy corta, aunque el vehículo lanzador típicamente tendrá un sistema de navegación inercial, GPS, y toberas.

2. Cinemática de actitud:

   a) Pregunta teórica. La singularidad se encuentra en $\theta_2 = 0^{\text{o}}, 180^{\text{o}}$.

   b) Para responder esta pregunta, llamemos q_0 a la actitud inicial y q_1 a la actitud final. Llamemos q_R a la actitud entre el perfil inicial y el final, como se vio en teoría $q_R = q_0^* \star q_1$. Calculando estos cuaterniones:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \star \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2} + j\sqrt{2} + k\sqrt{6}\right) \\
q_1 &= j \star \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - k\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(j\sqrt{3} - i\right) \\
q_R &= \frac{1}{8}\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2} - j\sqrt{2} - k\sqrt{6}\right) \star \left(j\sqrt{3} - i\right) \\
&= \frac{1}{8}\left((\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{18} - \sqrt{6}) + j(\sqrt{18} + \sqrt{6}) + k(-\sqrt{6} - \sqrt{2})\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left((\sqrt{3} - 1) + i(3 - \sqrt{3}) + j(3 + \sqrt{3}) + k(-\sqrt{3} - 1)\right)
\end{aligned}
$$

   Observando el cuaternión de rotación, para obtener la velocidad angular hay que extraer el eje y ángulo de Euler. Puesto que la parte escalar es $q_{R0} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{8} = \cos\theta/2$, obtenemos $\theta = 165{,}13^{\text{o}}$. Por tanto:

$$
\vec{e} = \frac{1}{\sin\theta/2}\frac{\sqrt{2}}{8}\begin{bmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}226 \\ 0{,}8436 \\ -0{,}4871 \end{bmatrix}
$$

   Como velocidad angular elegimos

$$
\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0{,}226 \\ 0{,}8436 \\ -0{,}4871 \end{bmatrix} \omega(t)
$$

donde $\omega(t)$ debe verificar: $\omega(0) = \omega(T) = 0$, $\int_0^T \omega(\tau)d\tau = \theta$. Tomamos por ejemplo una función parabólica $\omega(t) = Ct(T-t)$ que verifica las restricciones inicial y final, e integrando, obtenemos $C\left(\frac{T^3}{2} - \frac{T^3}{3}\right) = \theta$, de donde $\omega(t) = t(T-t)\frac{6\theta}{T^3}$, luego:

$$\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0{,}226 \\ 0{,}8436 \\ -0{,}4871 \end{bmatrix} t(T-t)\frac{6\theta}{T^3}$$

c) Para obtener el par simplemente sustituimos las componentes, encontrando:

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 e_1 \dot{\omega} + (I_3 - I_2)\omega^2 e_2 e_3, \\ M_2 &= I_2 e_2 \dot{\omega} + (I_3 - I_2)\omega^2 e_3 e_1, \\ M_3 &= I_3 e_3 \dot{\omega} + (I_3 - I_2)\omega^2 e_1 e_2, \end{aligned}$$

así por ejemplo $M_1 = I_1 e_1 (T-2t)\frac{6\theta}{T^3} + (I_3 - I_2)e_2 e_3 t^2 (T-t)^2 \frac{36\theta^2}{T^6}$. Para que el par fuera cero al principio y al final, escogemos la misma función $\omega(t)$ pero elevada al cuadrado, es decir, $\omega(t) = Ct^2(T-t)^2$, de esa forma su derivada es también cero al principio y al final. Calculando la integral obtenemos ahora $CT^5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \theta$, de donde $\omega(t) = t^2(T-t)^2\frac{30\theta}{T^5}$, luego:

$$\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0{,}226 \\ 0{,}8436 \\ -0{,}4871 \end{bmatrix} t^2(T-t)^2\frac{30\theta}{T^5}$$

y calculando por ejemplo $M_1 = I_1 e_1 2t(T-t)(T-2t)\frac{30\theta}{T^5} + (I_3 - I_2)e_2 e_3 t^4 (T-t)^4 \frac{900\theta^2}{T^{10}}$. Se verifica claramente que es cero al principio y al final de la maniobra.

3. Pregunta teórica, la segunda parte es exactamente igual que en teoría pero hay que sustituir el eje 3 por el 2.

4. Pregunta teórica, es necesario explicar bien por qué se cancelan las integrales que lo hacen.

5. Pregunta teórica.

6. La primera parte es teórica, llegando (con los pasos explicados en teoría) a $\dot{\phi} = n_0$, y la ecuación $\phi = \sqrt{K\frac{n_0 - n}{n_0 + n}}$. Resolviendo para ϕ: $\phi(t) = n_0 t$. Para obtener $n = 0$ necesitamos desenrollar una cantidad de cable tal que $\phi = \sqrt{K}$, lo que tardará un tiempo $t = \frac{\sqrt{K}}{n_0}$. Por otro lado despejando n en la segunda ecuación:

$$n(t) = \frac{K - \phi^2(t)}{K + \phi^2(t)} n_0 = \frac{K - n_0^2 t^2}{K + n_0^2 t^2} n_0$$

Por tanto:

$$\alpha(t) = \dot{n}(t) = \frac{-2n_0^2 t(K + n_0^2 t^2) - 2n_0^2 t(K - n_0^2 t^2)}{(K + n_0^2 t^2)^2} n_0 = \frac{-4n_0^3 t K}{(K + n_0^2 t^2)^2}$$

Teniendo en cuenta que $n = \omega_3$ en las ecuaciones de Euler y que las otras velocidades angulares son cero, encontraríamos $I_3 \dot{n} = M_3$, donde M_3 es el par ejercido en el eje 3 por los cables. Puesto que el par es el brazo por la fuerza (al ser esta tangente), obtendríamos $I_3 \dot{n} = -2RT$, de donde:

$$T = I_3 \frac{2n_0^3 t K}{R(K + n_0^2 t^2)^2}$$

El par máximo se encuentra derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dT}{dt} = I_3 \frac{2n_0^3 K(K + n_0^2 t^2)^2 - 4n_0^2 t(K + n_0^2 t^2) 2n_0^3 t K}{R(K + n_0^2 t^2)^4} = 2I_3 n_0^3 K \frac{K - 3n_0^2 t^2}{R(K + n_0^2 t^2)^3}$$

Igualando a cero, obtenemos que el tiempo en el que se produce el mínimo es tal que $K - n_0^2 t^2 = 0$, es decir, $t = \frac{\sqrt{K}}{n_0\sqrt{3}}$, lo que sucede antes de que el cable esté totalmente desenrollado. Por tanto:

$$T_{max} = I_3 \frac{2n_0^3 \frac{\sqrt{K}}{n_0\sqrt{3}} K}{R(K + n_0^2 \frac{K}{3n_0^2})^2} = I_3 \frac{2n_0^2 \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{3}}}{RK(1 + \frac{1}{3})^2} = \frac{3\sqrt{3} I_3 n_0^2}{8R\sqrt{K}}$$

En particular, con los datos del problema, $K = 1 + \frac{I_3}{mR^2} = 51$, la longitud de cable es $l = R\sqrt{K} = 7{,}14$ m, el tiempo sería $t = 0{,}9$ s, y la tensión máxima sería $T_{max} = 1122$ N.