Dinámica de Vehículos Espaciales

Tema 8: Control activo de la actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

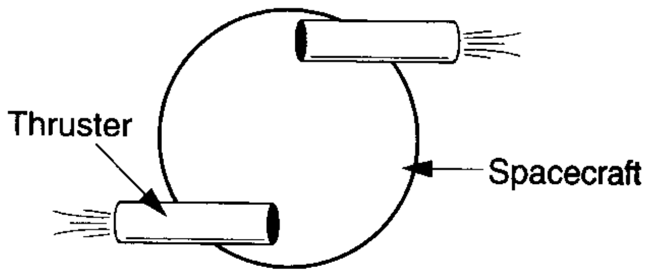
Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

3 de junio de 2016

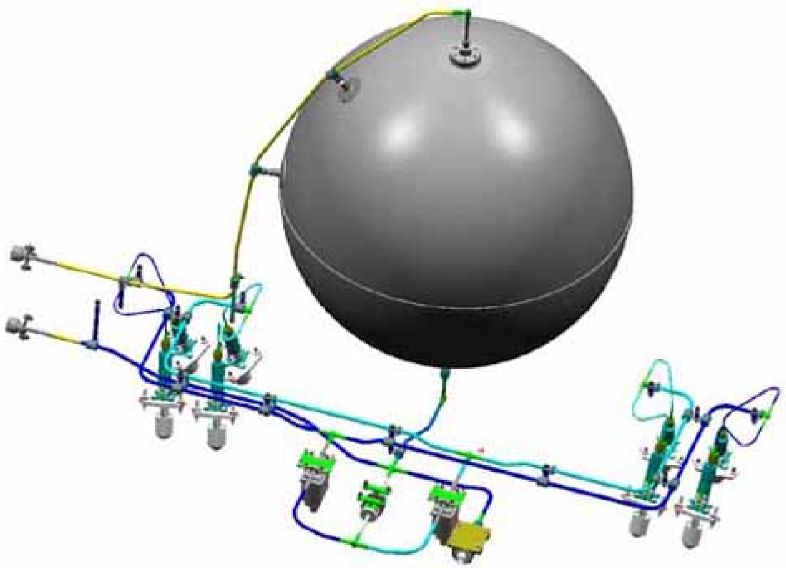
Actuadores

- Existen diferentes tipos de actuadores para controlar la actitud de un vehículo espacial, entre los que destacan:
  - Propulsores: basados en la expulsión de masa a alta velocidad.
  - Ruedas/Volantes de inercia: discos de velocidad variables, que controlan la actitud basándose en el intercambio de momento cinético.
  - Giróscopos de control de momento (CMG): son volantes de inercia que rotan a velocidad constante, pero que pueden ser rotados en el espacio, de forma que provocan una reacción por la conservación de momento cinético.
  - Magnetopares o varillas magnéticas, que utilizan el campo magnético para provocar un par.
  - Elementos estructurales para control pasivo: mástiles, "booms", disipadores, sistemas yo-yo...
- Típicamente habrá dos o más tipos de actuadores en un vehículo, ya que son complementarios en sus características.

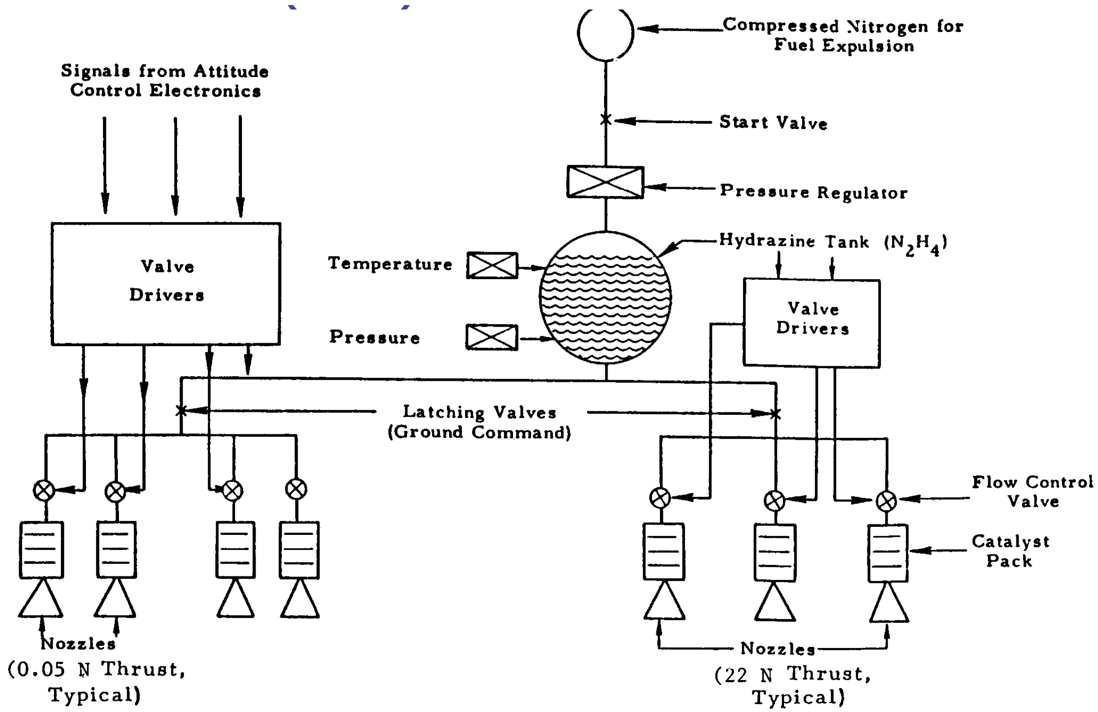
Propulsores

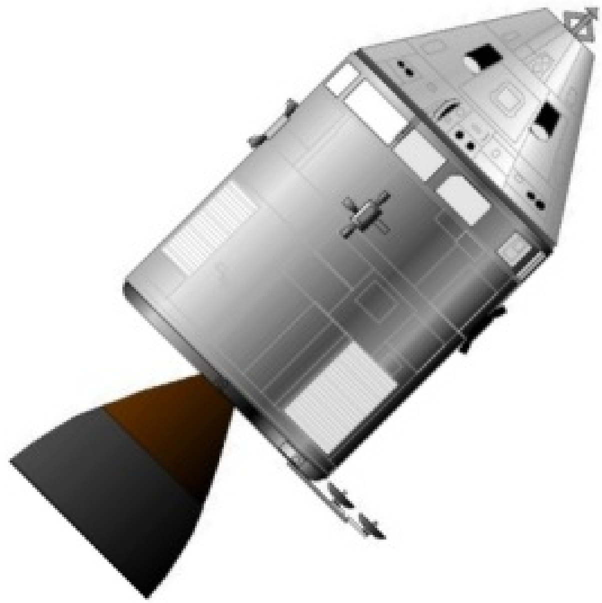


- Son el actuador más eficaz, capaz de ejercer actuaciones de elevada magnitud con rapidez.
- El más costoso y de uso limitado, ya que utilizan combustible.
- Para ejercer un par, se utilizan en una configuración en pareja (por cada eje que se pretenda controlar).
- Nunca se utiliza un único par por eje, sino varias toberas de forma redundante.
- El conjunto de elementos de propulsión junto con la lógica de control se denomina Sistema de Control de Reacción (RCS)



Ejemplos de RCS

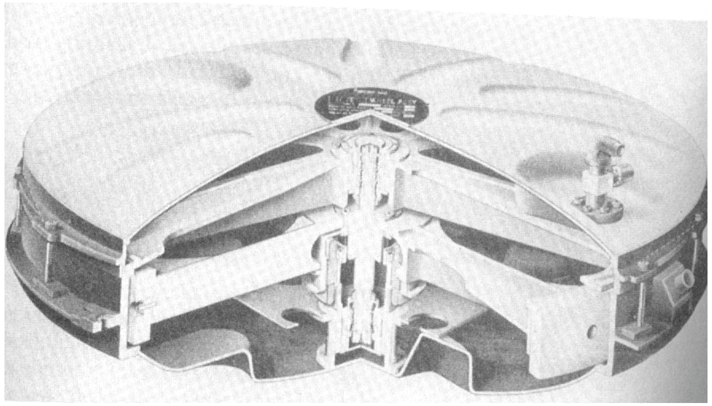




- El RCS del Apollo.

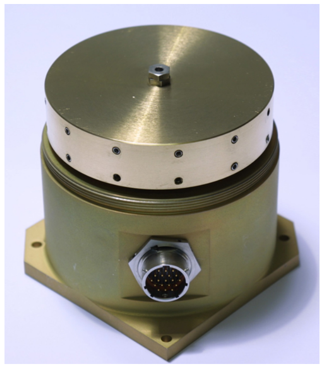
- Típicamente habrá toberas de empuje “pequeño” para maniobras de actitud “finas”, y toberas de mayor empuje para maniobras rápidas de actitud y maniobras orbitales.

Ruedas y Volantes de Inercia

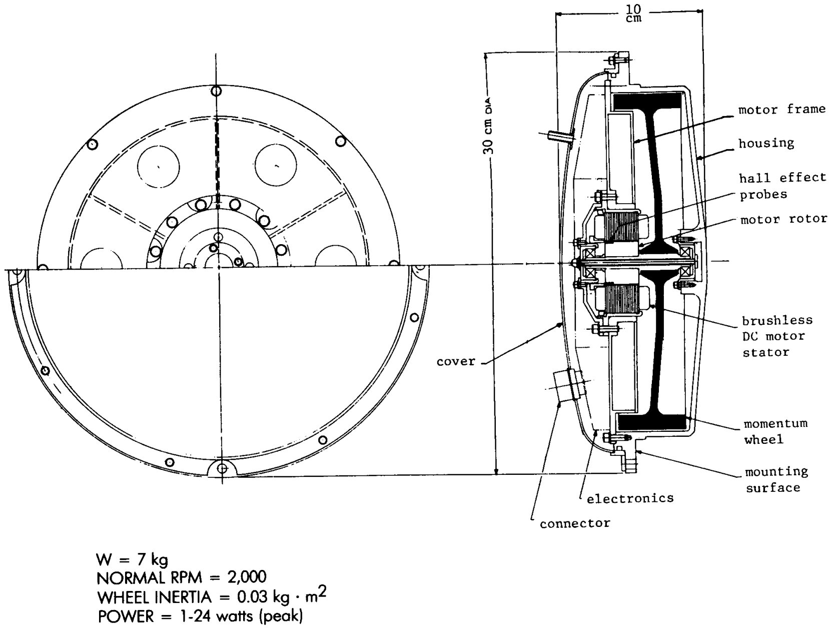


- Son elementos compuestos por un disco de elevada inercia (muy elevada en el caso de los volantes de inercia).
- Poseen un motor eléctrico que hace girar al disco con la velocidad deseada.

- La diferencia fundamental entre los volantes de inercia y las ruedas de reacción es que los volantes de inercia (bias momentum wheel) están diseñados para rotar permanentemente a una cierta velocidad de base (que proporciona estabilidad giroscópica), sobre la que se pueden realizar cambios para absorber momentos perturbadores o rotar el vehículo.



Ruedas y Volantes de Inercia

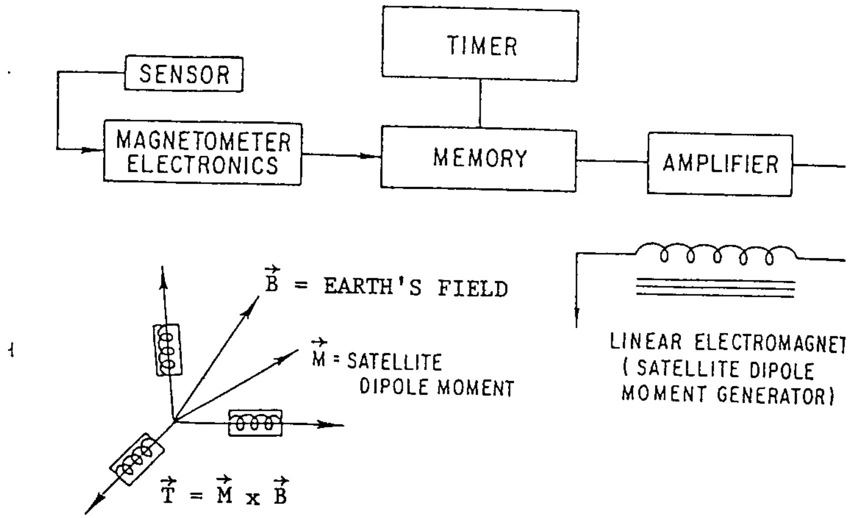


- Ambos elementos funcionan como actuadores "absorbiendo" momento cinético en forma de rotación.
- Puesto que el momento cinético del conjunto vehículo-rueda se conserva, mediante varias ruedas se puede modificar a voluntad el momento cinético del vehículo (y por tanto su velocidad de rotación en cada eje)
- Por ejemplo se pueden usar las ruedas para "almacenar" el momento cinético causado por pares perturbadores.
- No obstante las ruedas tienen un límite de saturación a partir del cual el motor no puede aumentar el momento cinético.
- Por tanto, se debe "descargar" el momento cinético con otro elemento capaz de disminuirlo, por ejemplo propulsores o actuadores magnéticos.

CMGs

- La ISS tiene 4 CMGs girando a 6600 rpm y almacenando, cada uno de ellos, un momento cinético igual a 4760 Nms.
- Pueden producir un par igual a 258 Newtons por metro y una esperanza de vida de unos 10 años, aunque algunos han fallado prematuramente.

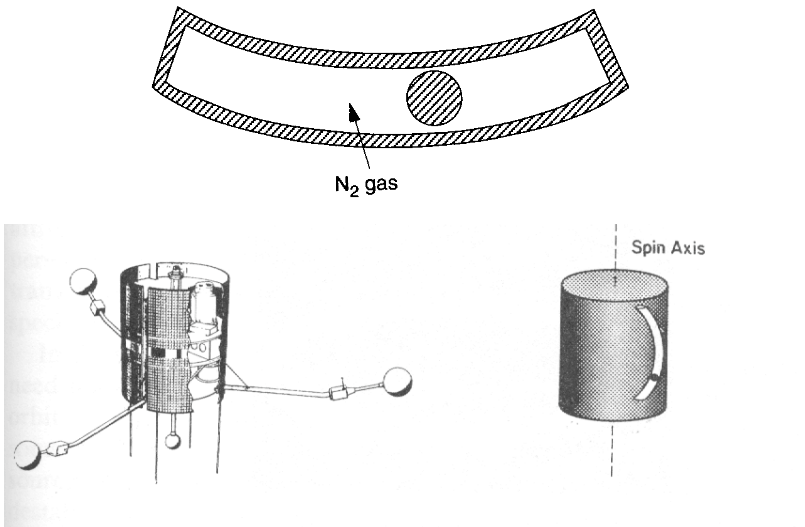
Magnetopares



- Magnetopares o Varillas magnéticas: son elementos que aprovechan la fuerza de Lorentz.
- Esta fuerza es causada por una partícula cargada en movimiento en un campo magnético, que será el de la Tierra (u otro planeta).
- Pueden ser permanentes (un imán permanente), que normalmente se usan para maniobras de adquisición de actitud (orientando al vehículo como si de una brújula se tratase).
- También pueden ser variables y usarse para control y estabilización.
- Típicamente se usan en microsatélites, y también en satélites más grandes para descargar el exceso de momento cinético de las ruedas de reacción.

Elementos de control estructurales

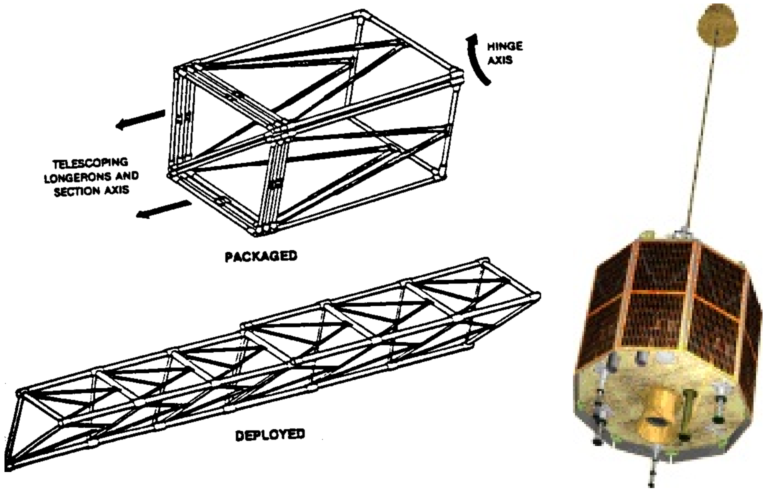
- No son actuadores en el sentido más estricto de la palabra, pero juegan un papel importante en el control (pasivo) de la actitud.
- Consisten en partes móviles que actúan de diversas formas:
  - Incorporando disipación: disipadores de nutación.
  - Modificando los momentos de inercia del vehículo (y por tanto afectando la estabilidad): mástiles, “booms”,
  - Expulsando masa para modificar el momento cinético total: dispositivo yo-yo.



(a) ESRO 4, from [Willems]   (b) Ball-in-Tube Pendulum Damper

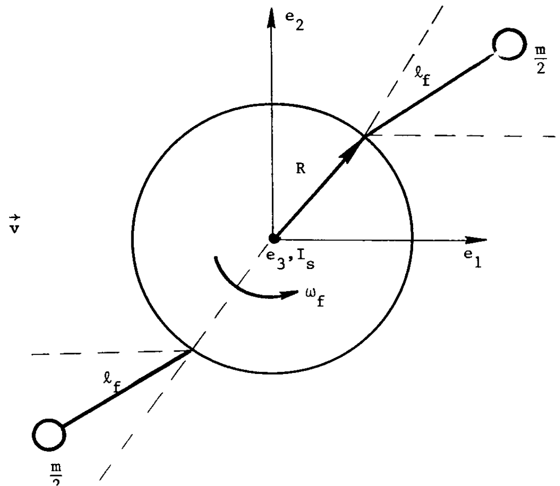
- Ejemplo: disipador de nutación.
- Su objetivo es evitar desviaciones del eje de rotación.

Elementos de control estructurales



- Partes móviles para modificación de los momentos de inercia: suelen ser mástiles motorizados o telescópicos.
- Se emplean especialmente en vehículos estabilizados por gradiente gravitatorio, de forma que se alcanze la orientación deseada.

- Expulsión de masa: se emplean para detener rápidamente una rotación.
- Ejemplo: sistemas yo-yo. Se expulsan 2 masas atadas a la estructura; al acelerarse "concentran" el momento cinético, frenando la rotación.
- Cuando los cables se tensan, las masas se liberan.



Resumen de actuadores

- Resumen de actuadores

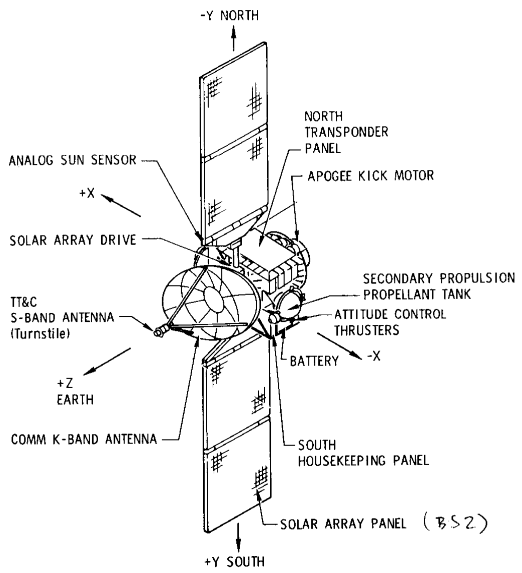
Table 9.2 Types of torquer

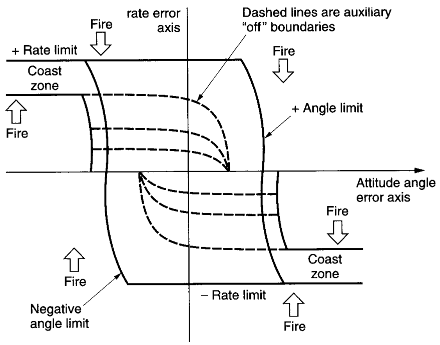
Type	Advantages	Disadvantages
External types	Can control momentum build-up	
Gas jets	Insensitive to altitude Suit any orbit Can torque about any axis	Requires fuel On-off operation only Has minimum impulse Exhaust plume contaminants
Magnetic	No fuel required Torque magnitude is controllable	No torque about the local field direction Torque is altitude and latitude sensitive Can cause magnetic interference
Gravity gradient	No fuel or energy needed	No torque about the local vertical Low accuracy Low torque, altitude sensitive Libration mode needs damping
Solar radiation	No fuel required	Needs controllable panels Very low torque
Internal types	No fuel required Can store momentum Torque magnitude is controllable	Cannot control momentum build-up
Reaction wheels (RW)	Continuous, fine-pointing capability	Non-linearity at zero speed
Momentum wheels (MWs)	Provide momentum bias	
Control moment gyroscope (CMG)	Suitable for three-axis control Provides momentum bias	Complicated Potential reliability problem

Sistemas de control activos

- Los sistemas de Control Pasivo permiten un nivel de estabilidad adecuado para muchas aplicaciones
- No obstante (sobre todo al principio de su vida útil), todos los vehículos necesitan realizar:
  - Maniobras de actitud.
  - Ajustes de la velocidad de rotación
  - Maniobras de stationkeeping (mantener el apuntamiento a la estación o estaciones base).
- Para ello es necesario un sistema de control que será activo tanto en el sentido energético como en el estructural, precisando de una fuente de energía y una lógica de control.
- En misiones que requieran gran precisión en la actitud dicho sistema será primario. En este caso se dice que el satélite está estabilizado en tres ejes o triaxialmente estabilizado.
- En otros casos puede ser un sistema secundario que sólo se activará cuando sea necesario.

Sistemas de Control de Reacción (RCS)

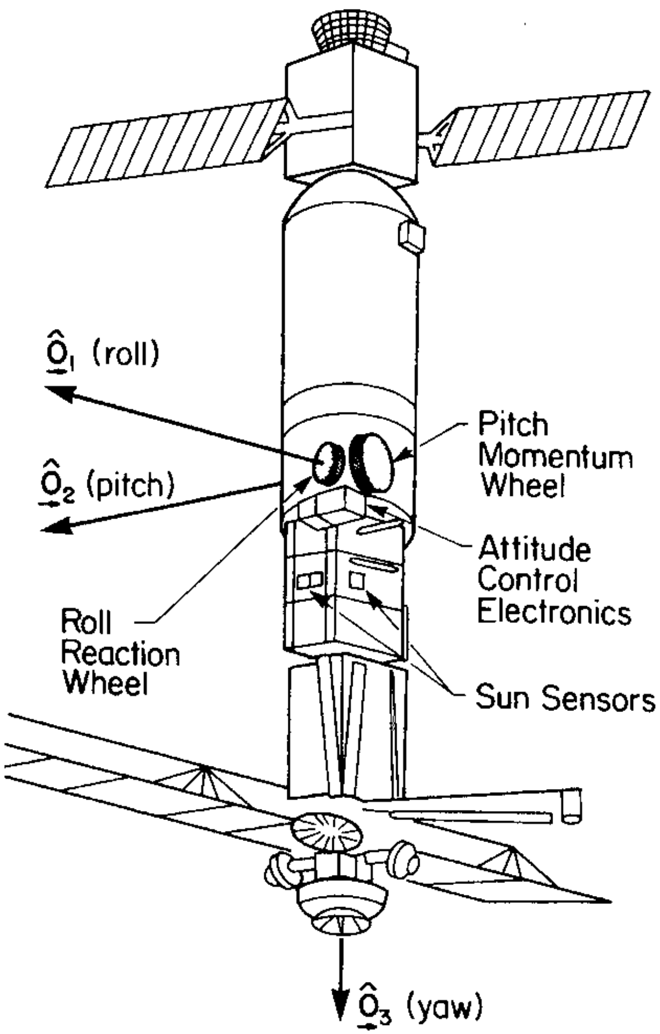




- En sistemas que requieran elevada y/o rápida maniobrabilida, se emplea un sistema de control de reacción o RCS, que emplea un conjunto de propulsores distribuidos por el vehículo para modificar la actitud.
- La llamada "lógica de propulsión" establece cuando se disparan los propulsores y cuando se acepta un pequeño error de actitud/velocidad.
- Normalmente es una combinación de "zonas muertas" (sin actuación) e histéresis (para evitar el disparo repetitivo de propulsores).
- Además los propulsores suelen ser actuadores "todo o nada", con lo que siempre actúan en saturación.
- Por tanto un RCS es intrínsecamente no-lineal.

Sistemas de Intercambio de Momento Cinético

- Para la mayor precisión de actitud, maniobrabilidad en los tres ejes y estabilización en cualquier orientación independientemente de los momentos de inercia, se usan sistemas de intercambio de momento angular que usan ruedas de reacción, volantes de inercia y/o CMGs, basados en la conservación del momento cinético.
- No obstante es un sistema caro, poco tolerante a fallos, y requiere un sistema propulsivo auxiliar (en algunos casos magnetopares) para descargar el momento de las ruedas y así evitar la saturación.



Satélites estabilizados en tres ejes

- Los satélites estabilizados en tres ejes pueden tener cualquier tipo de apuntamiento (inercial, orbital...).
- Los objetivos pueden ser dos: mantener al satélite de forma estable en una actitud prefijada (estabilización) o realizar una maniobra de actitud (bien sea un seguimiento—tracking— o simplemente cambiar de una actitud a otra).
- En primer lugar nos centraremos en el objetivo de estabilización de una cierta actitud inercialmente fija (es decir sin velocidades angulares, lo que sería un apuntamiento inercial); el objetivo de modificar la actitud es más complicado.
- Estudiaremos este objetivo para los dos tipos de actuadores: ruedas y volantes de inercia, y sistemas de control de reacción.
- También consideraremos el objetivo de pasar de una actitud inicial a otra final, sólo para el caso de ruedas y volantes de inercia.

Vehículo con ruedas de reacción

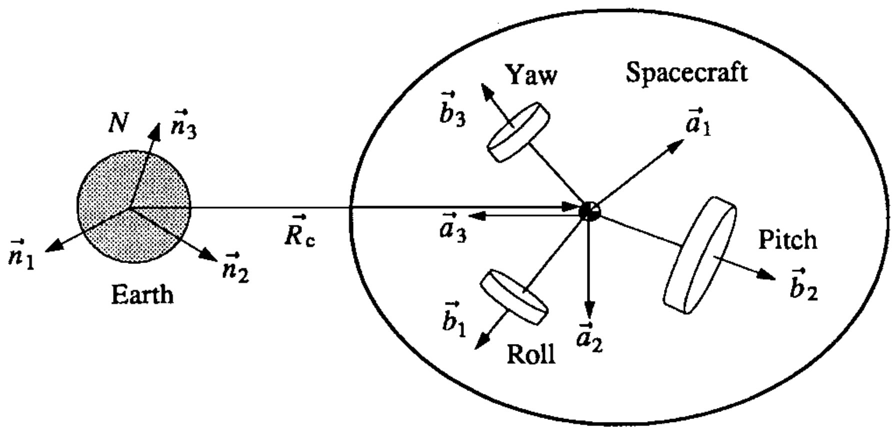


Fig. 6.10 Gyrostat in a circular orbit.

- Supongamos la situación de la figura: un cuerpo en órbita con ruedas en torno a los tres ejes:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + \dot{h}_1 + \omega_2 h_3 - \omega_3 h_2 &= M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 + \dot{h}_2 + \omega_3 h_1 - \omega_1 h_3 &= M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 + \dot{h}_3 - \omega_2 h_1 + \omega_1 h_2 &= M_3 \end{aligned}$$

- El momento cinético de las ruedas se denota por h_i: variables de control.

Vehículo con ruedas de reacción

- Supongamos que podemos manipular directamente los momentos cinéticos de las ruedas mediante motores eléctricos internos. agrupando todos los términos de control obtenemos:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= u_1 + M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= u_2 + M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= u_3 + M_3 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u_1 &= -\dot{h}_1 - \omega_2 h_3 + \omega_3 h_2 \\ u_2 &= -\dot{h}_2 - \omega_3 h_1 + \omega_1 h_3 \\ u_3 &= -\dot{h}_3 - \omega_1 h_2 + \omega_2 h_1 \end{aligned}$$

Es decir $\vec{u} = -\dot{\vec{h}} + \vec{h}^{\times}\vec{\omega}$

Regulación en torno a una posición

- Además tendremos la EDC

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \star q_{\vec{\omega}}$$

- Supongamos que ahora el objetivo es mantener $q(t) = q_{ref}$ y $\omega(t) = 0$, y supongamos también que inicialmente estamos cerca de dicho estado.
- Linealizando la ecuación de la velocidad angular e ignorando pares perturbadores:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

donde $\vec{u} = -\dot{\vec{h}} + \vec{h}^{\times}\delta\vec{\omega}$

- Obsérvese que si encontramos $\vec{u}$ que resuelve el problema de control, podríamos encontrar los valores de $\vec{h}$ resolviendo una ecuación diferencial.

Estabilización

- Por otro lado el cuaternión que describe la actitud será pequeño (si estamos cerca de una actitud que queremos mantener).
- Siguiendo la teoría del Tema 2, se tendrá entonces $q = q_{ref} \star \delta q$, donde q_{ref} es la actitud que queremos mantener y

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

- Por otro lado la relación entre $\vec{a}$ y la velocidad angular es $\dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_{ref}$, como $\vec{\omega}_{ref} = \vec{0} \rightarrow \dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega}$. Es decir
- Es decir:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{bmatrix}$$

- Combinando las ecuaciones de error en velocidad angular y actitud encontramos la descripción del sistema (siguiente transparencia).

Estabilización

- Descripción del sistema:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta\omega_1\\ \delta\omega_2\\ \delta\omega_3\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\omega_1\\ \delta\omega_2\\ \delta\omega_3\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/I_1&0&0\\0&1/I_2&0\\0&0&1/I_3\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

- Llamando $\vec{x}$ a las variables que describen al estado, es una descripción clásica

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$$

- Se puede usar "nuestro método favorito lineal" para encontrar una ley de control $\vec{u}$, que luego habrá que convertir en comandos de velocidad angular de las ruedas resolviendo la ecuación diferencial que relaciona $\vec{u}$ con los pares de las ruedas, en cada instante, y luego se podrá transformar en comandos del motor de las ruedas.
- Se ejemplificará con el método LQR (linear quadratic regulator) con "horizonte infinito".

Regulación con el método LQR

- Dado
$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$$
encontrar una ley de control $\vec{u}(t)$ con realimentación que minimice el siguiente funcional:
$$J = \int_0^{\infty} (\vec{x}^T(t) Q \vec{x}(t) + \vec{u}^T(t) R \vec{u}(t)) dt$$
- Problema planteado y resuelto por Rudolph Kalman!
- Hipótesis: Q, R simétricas y $Q > 0, R \geq 0$ (definidas -semidefinidas- positivas, equivale a todos los autovalores positivos -no negativos-).
- Hipótesis: El sistema es “controlable”. Quiere decir que “es posible resolver el problema” (es fácil construir problemas no resolubles. Por ejemplo $\dot{x}_1 = u_1, \ \dot{x}_2 = x_2$.) Matemáticamente un problema es controlable si la matrix $\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ A^{n-1}B]$ es de rango completo, donde n es el número de estados. Se verifica en nuestro caso.

Regulación con el método LQR

- La ley de control que minimiza el funcional es

$$\vec{u} = K\vec{x}$$

donde la ganancia K se encuentra de la siguiente manera:

1. Encontrar la matriz P que resuelve la llamada "ecuación de Riccati algebraica":

$$Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = 0$$

por ejemplo con la orden de Matlab "are" (necesita el Control Systems Toolbox) `P=are(A,B*inv(R)*B',Q);`

2. La ganancia $K = -R^{-1}B^T P$

- La ecuación de Riccati sólo es resoluble si el sistema es controlable.
- El control óptimo garantiza un buen comportamiento del sistema, pero no tiene en cuenta saturaciones de los actuadores. La elección de Q y R determina en gran medida la calidad del controlador (más conservador o más agresivo).

Regulación con el método LQR

- Para implementar la ley de control

$$\vec{u} = K\vec{x}$$

  hay que recordar la definición de $\vec{x}$.
- Como $\vec{\omega}_{ref} = \vec{0}$, las tres primeras componentes son el valor real de la velocidad angular.
- Las tres segundas componentes corresponden a $\vec{a}$, que se extrae del cuaternión de error. Es fácil ver que

$$\vec{a} = 2\frac{\delta\vec{q}}{\delta q_0}$$

  para lo cual hay que calcular $\delta q = q^*_{ref} \star q(t)$.
- Finalmente, una vez calculado el control $\vec{u}$ en cada instante resolver $\dot{\vec{h}} = -\vec{u} + \vec{h}^{\times}\delta\vec{\omega}$ para saber como modificar el momento cinético de las ruedas.

Cambio de actitud entre dos apuntamientos inerciales

- Hemos estudiado en los temas 2 y 4 como calcular una velocidad angular que me permite pasar de una cierta actitud a otra, por ejemplo empezando y terminando en reposo. Denotémosla como $\vec{\omega}_{ref}(t)$. También obtuvimos el cuaternión de referencia $q_{ref}(t)$.
- Como seguir este perfil de velocidades y actitudes a veces se denomina problema de tracking.
- Sustituyendo esta velocidad angular de referencia en las ecuaciones del sólido con ruedas de reacción (e ignorando los pares de perturbación) podemos calcular (analíticamente o numéricamente) un valor de control de referencia $\vec{u}_{ref}$. Este valor es "en bucle abierto" (no utiliza realimentación):

$$
\begin{aligned}
u_{ref1} &= I_1\dot{\omega}_{ref1} + (I_3 - I_2)\omega_{ref2}\omega_{ref3} \\
u_{ref2} &= I_2\dot{\omega}_{ref2} + (I_1 - I_3)\omega_{ref3}\omega_{ref1} \\
u_{ref3} &= I_3\dot{\omega}_{ref3} + (I_2 - I_1)\omega_{ref1}\omega_{ref2}
\end{aligned}
$$

Cambio de actitud entre dos apuntamientos inerciales

- Linealizando en torno a este perfil de referencia y calculando un controlador extra en bucle cerrado (que se sumará al valor de referencia) podemos garantizar que (al menos ante pequeños errores y perturbaciones) el vehículo se mantendrá en la trayectoria deseada. Sea $\delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref}$, $\delta\vec{u} = \vec{u} - \vec{u}_{ref}$, y el cuaternión de error definido como antes. Las ecuaciones linealizadas son:

$$\begin{aligned}
I_1\delta\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)(\omega_{ref2}\delta\omega_3 + \delta\omega_2\omega_{ref3}) &= \delta u_1 + M_1 \\
I_2\delta\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)(\omega_{ref3}\delta\omega_1 + \delta\omega_3\omega_{ref1}) &= \delta u_2 + M_2 \\
I_3\delta\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)(\omega_{ref1}\delta\omega_2 + \delta\omega_1\omega_{ref2}) &= \delta u_3 + M_3
\end{aligned}$$

y para el error en actitud:

$$\dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref}^{\times}\vec{a}$$

Tracking

- Descripción del sistema:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta\omega_1\\ \delta\omega_2\\ \delta\omega_3\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_{ref3} & \frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_{ref2} & 0 & 0 & 0\\ \frac{I_3-I_1}{I_2}\omega_{ref3} & 0 & \frac{I_3-I_1}{I_2}\omega_{ref1} & 0 & 0 & 0\\ \frac{I_1-I_2}{I_3}\omega_{ref2} & \frac{I_1-I_2}{I_3}\omega_{ref1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_{ref3} & -\omega_{ref2}\\ 0 & 1 & 0 & -\omega_{ref3} & 0 & \omega_{ref1}\\ 0 & 0 & 1 & \omega_{ref2} & -\omega_{ref1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\omega_1\\ \delta\omega_2\\ \delta\omega_3\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 1/I_1 & 0 & 0\\ 0 & 1/I_2 & 0\\ 0 & 0 & 1/I_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta u_1\\ \delta u_2\\ \delta u_3\end{bmatrix}$$

- Llamando $\vec{x}$ a las variables que describen al estado, es una descripción clásica

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + B(t)\delta\vec{u}$$

- Como A y B varían con el tiempo la solución se complica.
- Son necesarios métodos más avanzados; por ejemplo el método LQR (linear quadratic regulator) con "horizonte finito".

Tracking con el método LQR de horizonte finito

- Dado

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + B(t)\delta\vec{u}$$

encontrar una ley de control $\delta\vec{u}(t)$ con realimentación que minimice el siguiente funcional:

$$J = \int_0^T (\vec{x}^T(t)Q(t)\vec{x}(t)+\delta\vec{u}^T(t)R(t)\delta\vec{u}(t))dt+\vec{x}^T(T)Q_{fin}\vec{x}(T)$$

- Hipótesis: Q, R, Q_{fin} simétricas y $Q_{fin}, Q > 0, R \geq 0$ (definidas o semidefinidas positivas, equivale a todos los autovalores positivos o no negativos).
- Al ser de horizonte finito, no require la hipótesis de controlabilidad (pero puede haber problemas si hay pérdida de controlabilidad en algún instante).

Tracking con el método LQR de horizonte finito

- La ley de control que minimiza el funcional es

$$\delta \vec{u} = K(t)\vec{x}$$

  donde la ganancia $K(t)$ se encuentra de la siguiente manera:

  1. Encontrar la matriz $P(t)$ que resuelve la llamada "ecuación diferencial de Riccati":

  $$-\dot{P} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad P(T) = Q_{fin}$$

     mediante por ejemplo la orden ode45 de Matlab.
  2. La ganancia $K = -R^{-1}B^T P$
- La ecuación diferencial de Riccati es siempre resoluble! Pero, importante, no se puede resolver en tiempo real porque hay que resolverla desde el futuro hacia el presente; se resuelve previamente y se almacenan los valores de $K(t)$.
- Como antes: la elección de Q y R (también Q_{fin}) determina en gran medida la calidad del controlador (más conservador o más agresivo).

Tracking con el método LQR de horizonte finito

- Para implementar la ley de control

$$\delta\vec{u} = K(t)\vec{x}$$

hay que recordar la definición de $\vec{x}$.
- Como $\vec{\omega}_{ref} \neq \vec{0}$, las tres primeras componentes son $\vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref}$.
- Las tres segundas componentes corresponden a $\vec{a}$, que se extrae del cuaternión de error. Es fácil ver que

$$\vec{a} = 2\frac{\delta\vec{q}}{\delta q_0}$$

para lo cual hay que calcular $\delta q = q^*_{ref} \star q(t)$.
- El control final es $\vec{u} = \vec{u}_{ref} + \delta\vec{u}$.
- Finalmente, una vez calculado el control $\vec{u}$ en cada instante resolver $\dot{\vec{h}} = -\vec{u} + \vec{h}^{\times}\delta\vec{\omega}$ para saber como modificar el momento cinético de las ruedas.

Control no lineal

- "Control no lineal" es un nombre amplio que designa a un abanico de técnicas que no requiere el uso de linealización.
- Consideremos el siguiente problema. Partiendo de un estado inicial dado por $\vec{\omega}(0)$ y $q(0)$ queremos alcanzar el reposo en la actitud identidad, pero nos "conformamos" con que el sistema tienda a dicho estado, es decir, nuestro objetivo es que $\vec{\omega}(t) \to \vec{0}$ y $q_0(t) \to 1$, $\vec{q}(t) \to \vec{0}$ cuando $t \to \infty$.
- Es decir hacemos "asintóticamente estable" el equilibrio del sistema en el origen.
- Si esto es cierto para cualquier condición inicial se dice que el equilibrio es globalmente asintóticamente estable.
- Obsérvese que la actitud objetivo puede ser cualquier actitud que se desee con sólo hacer una rotación fija del sistema de referencia inercial, $q' = q_{ref}^* \star q$.
- Vamos a resolver este problema con la llamada "técnica de las funciones de Lyapunov".

Control no lineal: el sistema

- Ahora no linealizamos, luego el sistema es el original, cambiando como antes los términos que dependan de las ruedas por términos de control.
- Empecemos por la velocidad angular:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2\omega_3 + \frac{u_1}{I_1} \\
\dot{\omega}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_3\omega_1 + \frac{u_2}{I_2} \\
\dot{\omega}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2 + \frac{u_3}{I_3}
\end{aligned}$$

Control no lineal: función de Lyapunov

- ¿Podemos encontrar un valor de u_1, u_2 y u_3 que garantice que el equilibrio $\vec{\omega} = \vec{0}$, sea asintóticamente estable?
- La técnica de las funciones de Lyapunov consiste en lo siguiente. Sea una función V regular (continua, diferenciable) que depende del estado (en este caso la velocidad angular y los cuaterniones), tal que:
  - Es siempre positiva para cualquier valor de los estados, excepto cuando el estado es cero; para dicho valor es cero (esto se denomina definida positiva).
  - La derivada con respecto al tiempo de V es definida negativa (es decir negativa para cualquier valor de los estados excepto cero).
- Entonces se demuestra que el origen (valor cero del estado) es asintóticamente estable (Idea: entender como funciona este método imaginando las curvas de nivel de V en función del estado).
- Además si el límite de V cuando el estado tiende a infinito es infinito, este resultado es global.

Control no lineal: encontrando el control

- Usemos la función de Lyapunov

$$V = I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} + I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} + I_3 \frac{\omega_3^2}{2k}$$

- Vemos que cumple la primera condición (se ha desplazado q_0 para que el equilibrio en $q_0 = 1$ sea el origen).
- k es una constante positiva que definiremos más adelante.
- Tomando derivada:

$$V_t = I_1 \frac{\omega_1 \dot{\omega}_1}{k} + I_2 \frac{\omega_2 \dot{\omega}_2}{k} + I_3 \frac{\omega_3 \dot{\omega}_3}{k}$$

- Sustituyendo los valores de las derivadas:

$$V_t = \frac{\omega_1((I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1)}{k} + \frac{\omega_2((I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2)}{k} + \frac{\omega_3((I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + u_3)}{k}$$

Control no lineal: encontrando el control

- Simplificando

$$V_t = \frac{\omega_1 u_1}{k} + \frac{\omega_2 u_2}{k} + \frac{\omega_3 u_3}{k}$$

- Elegimos ahora: $u_1 = -c_1\omega_1$, $u_2 = -c_2\omega_2$, $u_3 = -c_3\omega_3$, donde c_i es una constante positiva. Sustituyendo:

$$V_t = -\frac{c_1\omega_1^2 + c_2\omega_2^2 + c_3\omega_3^2}{k}$$

- Aplicando la técnica de Lyapunov, queda demostrado que el equilibrio $\vec{\omega} = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Control no lineal: el sistema

- Consideremos ahora también la cinemática de la actitud. El problema es más complejo.

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2\omega_3 + \frac{u_1}{I_1} \\
\dot{\omega}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_3\omega_1 + \frac{u_2}{I_2} \\
\dot{\omega}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2 + \frac{u_3}{I_3} \\
\dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}\left(q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3\right) \\
\dot{q}_1 &= \frac{1}{2}\left(q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3\right) \\
\dot{q}_2 &= \frac{1}{2}\left(q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3\right) \\
\dot{q}_3 &= \frac{1}{2}\left(-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3\right)
\end{aligned}
$$

Control no lineal: función de Lyapunov

- ¿Podemos encontrar un valor de u_1, u_2 y u_3 que garantice que el equilibrio $\vec{\omega} = \vec{q} = \vec{0}$, $q_0 = 1$ sea asintóticamente estable?
- Además del resultado de Lyapunov, necesitamos el llamado "Teorema de La Salle":
  - Sea una función de Lyapunov V tal que su derivada es **semidefinida negativa** (es decir negativa para algún valor de los estados además de cero). Llamemos E al conjunto de los puntos que verifica $\dot{V} = 0$.
  - Sea M el **conjunto invariante** del sistema más grande contenido en E.
- Entonces se demuestra que el estado tiende a M cuando el tiempo tiende a infinito.
- ¿Qué es un conjunto invariante de un sistema? Es un conjunto tal que si la condición inicial empieza en el conjunto, el estado permanece en el conjunto durante todo t.

Control no lineal: encontrando el control

- Usemos la función de Lyapunov

$$V = I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} + I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} + I_3 \frac{\omega_3^2}{2k} + (q_0 - 1)^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

- Vemos que cumple la primera condición de Lyapunov (se ha desplazado q_0 para que el equilibrio en $q_0 = 1$ sea el origen).
- Tomando derivada:

$$V_t = I_1 \frac{\omega_1 \dot{\omega}_1}{k} + I_2 \frac{\omega_2 \dot{\omega}_2}{k} + I_3 \frac{\omega_3 \dot{\omega}_3}{k} + 2(q_0 - 1)\dot{q}_0 + 2q_1 \dot{q}_1 + 2q_2 \dot{q}_2 + 2q_3 \dot{q}_3$$

- Sustituyendo los valores de las derivadas:

$$\begin{aligned} V_t = \; & \frac{\omega_1((I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1)}{k} + \frac{\omega_2((I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2)}{k} + \frac{\omega_3((I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + u_3)}{k} \\ & -(q_0 - 1)(q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3) + q_1(q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3) \\ & +q_2(q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3) + q_3(-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3) \end{aligned}$$

Control no lineal: encontrando el control

- Simplificando

$$V_t = \frac{\omega_1 u_1}{k} + \frac{\omega_2 u_2}{k} + \frac{\omega_3 u_3}{k} + (q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3)$$

- Elegimos ahora: $u_1 = -(kq_1 + c_1\omega_1)$, $u_2 = -(kq_2 + c_2\omega_2)$, $u_3 = -(kq_3 + c_3\omega_3)$, donde c_i es una constante positiva. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} V_t &= -\frac{\omega_1(kq_1 + c_1\omega_1)}{k} - \frac{\omega_2(kq_2 + c_2\omega_2)}{k} - \frac{\omega_3(kq_3 + c_3\omega_3)}{k} \\ &\quad + (q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3) \\ &= -\frac{c_1\omega_1^2 + c_2\omega_2^2 + c_3\omega_3^2}{k} \end{aligned}$$

- Ya no podemos aplicar Lyapunov directamente, sino que necesitamos La Salle. En primer lugar, el conjunto E es simplemente $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ para todo t.

Conjunto invariante

- Sustituyamos en el sistema $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ para todo t (lo que en particular implica que sus derivadas son nulas):

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 + u_1 \\
0 &= 0 + u_2 \\
0 &= 0 + u_3 \\
\dot{q}_0 &= 0 \\
\dot{q}_1 &= 0 \\
\dot{q}_2 &= 0 \\
\dot{q}_3 &= 0
\end{aligned}
$$

- Luego el conjunto invariante verifica $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, y q constante.
- Por tanto, como $u_1 = -(kq_1 + c_1\omega_1)$, $u_2 = -(kq_2 + c_2\omega_2)$, $u_3 = -(kq_3 + c_3\omega_3)$, obtenemos $q_1 = q_2 = q_3 = 0$.

Conjunto invariante

- Finalmente, del hecho de que el cuaternión debe ser unitario, obtenemos $q_0 = \pm 1$. Al ser $q_0 = 1$ el origen de la función de Lyapunov, es el que se estabiliza. De hecho, se puede comprobar que $q_0 = -1$ es inestable (lo cual es un inconveniente al ser en realidad el mismo punto; se comprobará por simulación).
- Si se usa k negativo en la ley de control entonces $q_0 = -1$ se vuelve estable y $q_0 = 1$ inestable. Esto se comprueba modificando la función de Lyapunov a

$$V = -I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} - I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} - I_3 \frac{\omega_3^2}{2k} + (q_0 + 1)^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

- Si se fija $k = k_0 \cdot \operatorname{sgn}(q_0)$ entonces se vuelve estable el equilibrio "más próximo"!
- Obsérvese que en la ley de control no aparecen las inercias: no es necesario conocerlas. Pero si es necesario conocer el estado ($\vec{\omega}$ y q) para poder aplicar la ley de control.

Sistema de control de reacción

- Si ahora tenemos toberas, éstas actúan como pares.
- Supongamos la estabilización de una actitud inicial inercial (velocidad angular cero). Si linealizamos y tomamos ángulos de Euler 1-2-3 en torno a dicha actitud inicial, combinando las ecuaciones cinemáticas y dinámicas linealizadas el sistema a controlar escrito en la forma típica de control resultaría:

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 &\approx u_1\,, \\ I_2\ddot{\theta}_2 &\approx u_2\,, \\ I_3\ddot{\theta}_3 &\approx u_3\,, \end{aligned}$$

- Deberíamos diseñar u_1, u_2 y u_3 para estabilizar el sistema; los ejes son independientes entre sí. Los métodos clásicos de control no se pueden emplear en el caso de que se usen toberas, ya que éstas no pueden dar un valor variable, sino solamente un valor constante, en una u otra dirección, o cero. Es decir, las únicas posibilidades son $u = 0, u_{MAX}, u_{MIN}$, donde u_{MIN} sería un valor negativo (suponemos $u_{MIN} = -u_{MAX}$). Para diseñar leyes de control hay que usar técnicas de control óptimo.

Maniobras con toberas

- Consideremos sólo un eje, con la ecuación $\ddot{\alpha} = u$ (donde u se ha redefinido dividida por la inercia), con condiciones iniciales $\dot{\alpha}_0$ y α_0. Integrando la ecuación diferencial obtenemos velocidad y posición:

$$\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0 = tu, \quad \alpha - \alpha_0 - t\dot{\alpha}_0 = \frac{t^2}{2}u$$

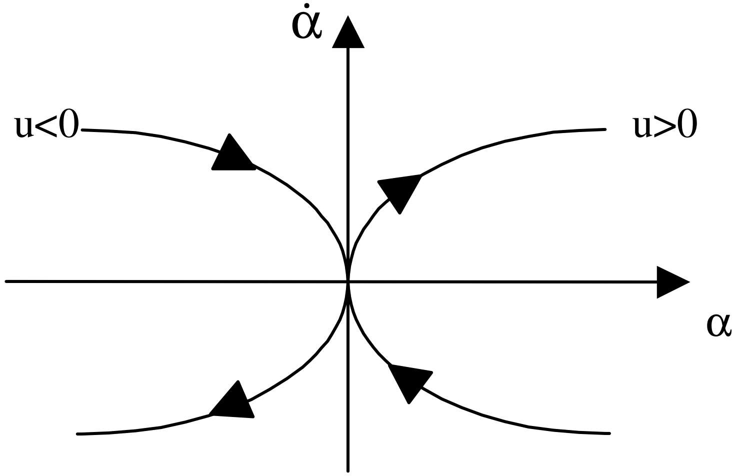
- Eliminando el tiempo:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\dot{\alpha}_0(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0)}{u} + \frac{(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0)^2}{2u}$$

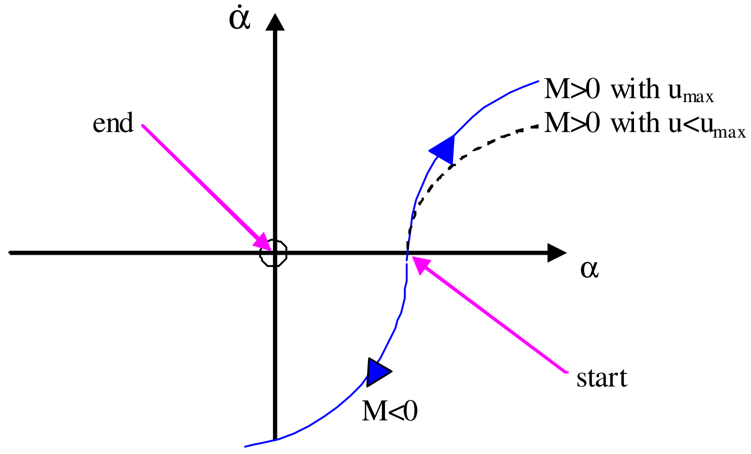
- Se trata de la ecuación de una parábola, cuya forma dependerá de las condiciones iniciales y de la elección del control ($u = 0, u_{MAX}, -u_{MAX}$). Si $u = 0$ obsérvese que no se puede eleminar el tiempo y se reduce a la recta $\alpha - \alpha_0 = t\dot{\alpha}_0$.

Maniobras con toberas

- Ejemplo de parábolas con condición inicial nula (las flechas indican la dirección que se sigue):

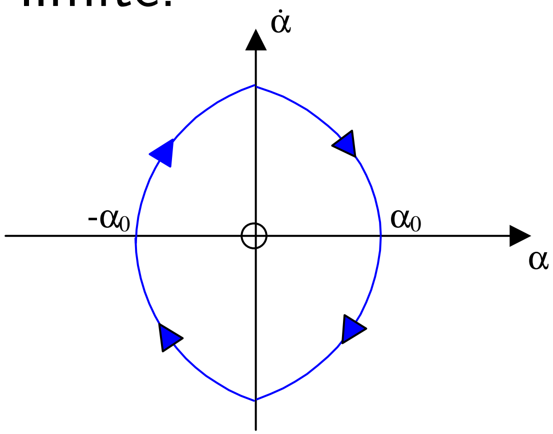


- Para ir de un punto a otro tendríamos que movernos por las parábolas:

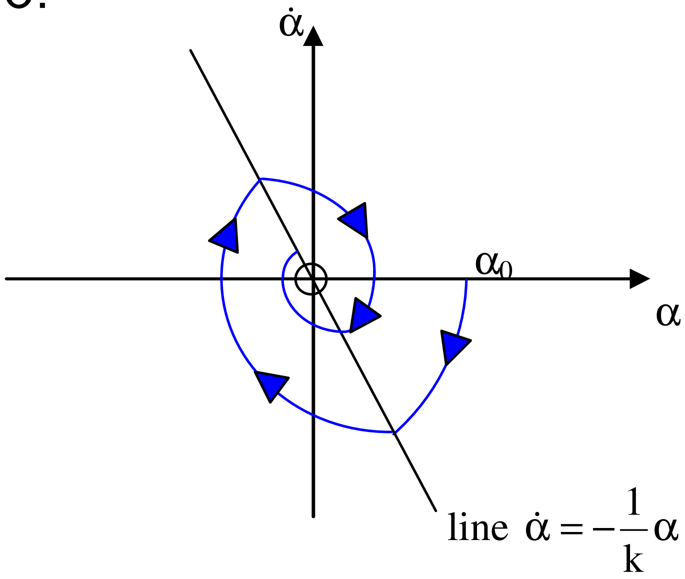


Maniobras con toberas

- Primera idea: usar una ley de control $u = -u_{MAX}\mathrm{signo}(\alpha)$. El resultado es un ciclo límite:

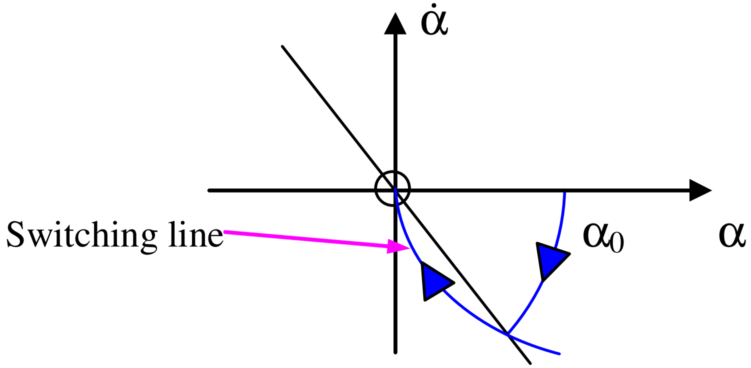


- Para evitar la oscilación: $u = -u_{MAX}\mathrm{signo}(\alpha + k\dot{\alpha})$, con $k > 0$. El resultado:

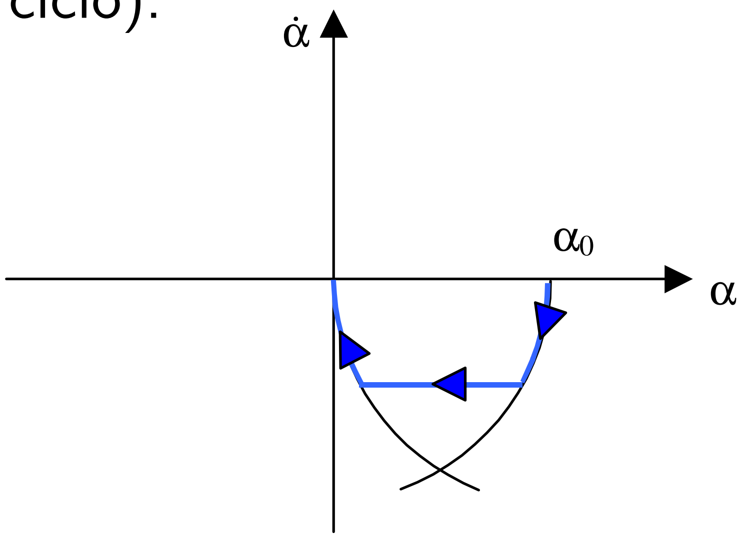


Maniobras con toberas

- Para llegar en un tiempo finito se puede usar $u = -u_{MAX}\mathrm{signo}(\alpha - \frac{1}{2u_{MAX}}\dot{\alpha}|\dot{\alpha}|)$ (ejercicio). El resultado:



- Si fijamos un tiempo mínimo y queremos gastar el mínimo combustible (ejercicio):



Maniobras con toberas: consideraciones prácticas

- El procedimiento analítico estudiado no se podría emplear si no se pueden despreciar los términos no lineales (los acoplamientos hacen que haya que estudiar toda la dinámica simultáneamente). Es necesario usar cálculo de variaciones.
- Por otro lado, en la práctica, es suficiente con garantizar que las soluciones converjan siempre a un ciclo límite suficientemente próximo al origen (para evitar encender los propulsores con demasiada frecuencia). Para ello se usan zonas muertas e histéresis.