

# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 6: Dinámica de la Actitud. Estabilidad.

Rafael Vázquez Valenzuela

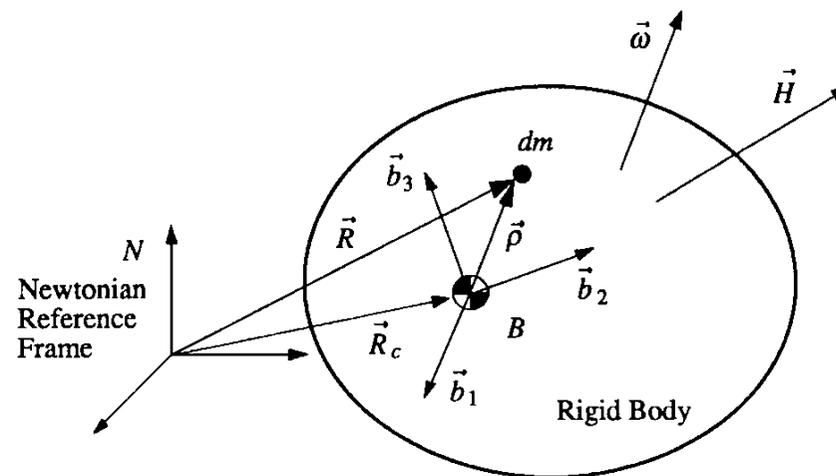
Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

3 de mayo de 2016

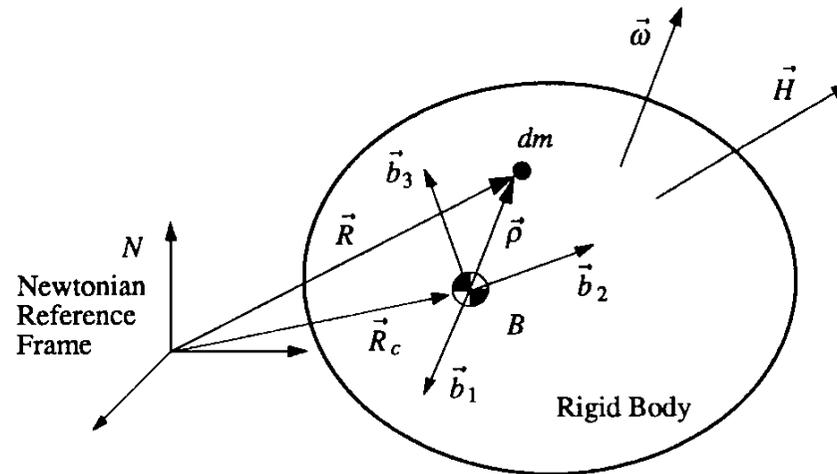


# Dinámica de la actitud de un vehículo

- La dinámica de la actitud de un vehículo está descrita por las ecuaciones de la dinámica rotacional, que describen la relación entre las causas (momentos ejercidos en el vehículo) y los efectos (velocidad angular).
- Partimos de la hipótesis básica de que el vehículo es un sólido rígido (si tuviera partes móviles, o efectos de flexibilidad, habría que ampliar el modelo), y estudiamos su rotación respecto a un sistema de referencia inercial.



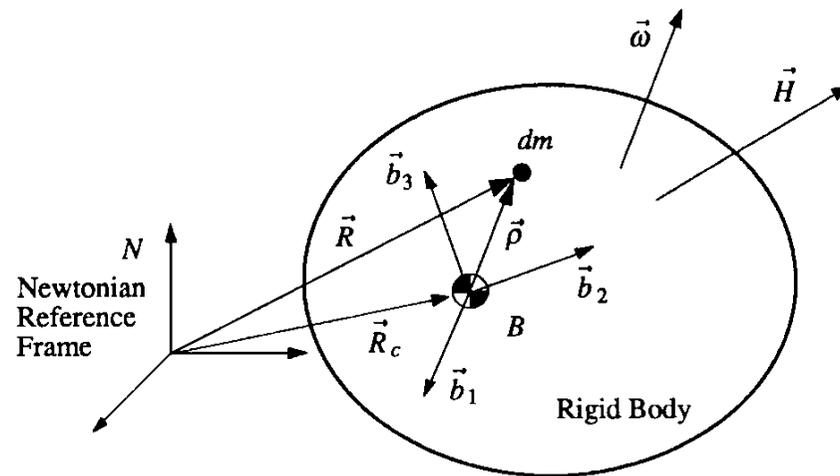
# Momento cinético y par I



- Para cada punto  $dm$ , se tendrá que  $\vec{R}dm = d\vec{F}$ . Tomando momento respecto al centro de masas  $B$ , tendremos que  $\vec{\rho} \times \vec{R}dm = \vec{\rho} \times d\vec{F} = d\vec{M}_B$ , e integrando en todo el volumen  $V$ , obtenemos el momento total de las fuerzas respecto a  $B$ :  
$$\int_V \vec{\rho} \times \vec{R}dm = \vec{M}_B.$$
- Estas derivadas están tomadas respecto al sistema de referencia inercial.



# Momento cinético y par II



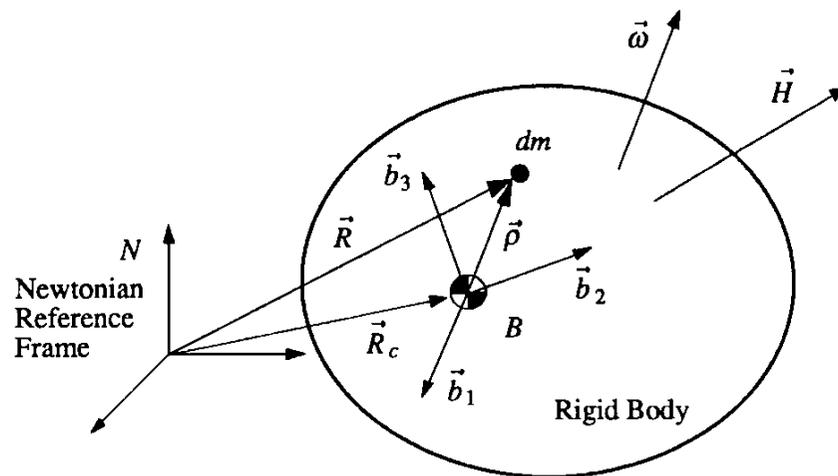
- Se define el momento cinético angular absoluto respecto a \$B\$, \$\vec{\Gamma}\_B\$ como:  $\vec{\Gamma}_B = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{R}} dm$ .
- Observemos que  $\dot{\vec{\Gamma}}_B = \int_V \dot{\vec{\rho}} \times \dot{\vec{R}} dm + \int_V \vec{\rho} \times \ddot{\vec{R}} dm$ .
- Puesto que  $\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{\rho}$ , se tiene:  

$$\dot{\vec{\Gamma}}_B = \int_V \dot{\vec{\rho}} \times \dot{\vec{\rho}} dm + \int_V \dot{\vec{\rho}} \times \dot{\vec{R}}_c dm + \vec{M}_B$$
- El primer término es cero. El segundo cumple  

$$\int_V \dot{\vec{\rho}} \times \dot{\vec{R}}_c dm = \left( \frac{d}{dt} \int_V \vec{\rho} dm \right) \times \dot{\vec{R}}_c = \vec{0}.$$
- Por tanto  $\dot{\vec{\Gamma}}_B = \vec{M}_B$



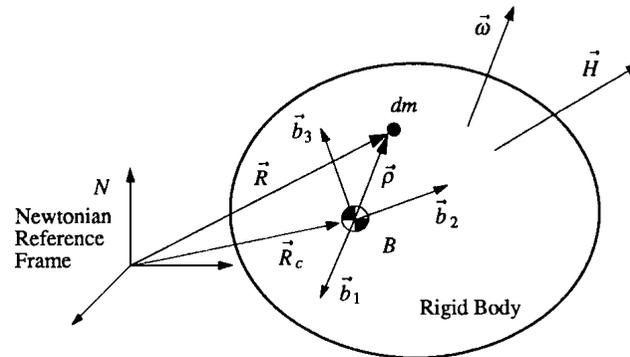
# Momento cinético y tensor de inercia I



- El momento  $\vec{\Gamma}_B$  cumple
 
$$\vec{\Gamma}_B = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{R}} dm = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{R}}_c dm + \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm.$$
- Recordemos la ecuación de Coriolis
 
$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}\right)_N = \left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}\right)_B + \vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho},$$
 donde  $N$  es el sdr inercial y  $B$  ejes cuerpo. Se tiene entonces  $\left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}\right)_N = \vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho}.$
- Por tanto:
 
$$\vec{\Gamma}_B = \int_V \vec{\rho} \times (\vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho}) dm = \left(-\int_V \vec{\rho} \times \vec{\rho} \times dm\right) \vec{\omega}_{B/N}$$
- Definimos el tensor de inercia
 
$$\mathcal{I} = -\int_V \vec{\rho} \times \vec{\rho} \times dm = \int_V [(\rho^T \vec{\rho}) \text{Id} - \rho \vec{\rho}^T] dm$$



# Momento cinético y tensor de inercia II



- Luego  $\vec{\Gamma}_B = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N}$ . La expresión explícita del tensor de inercia es

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \int_V (\rho_2^2 + \rho_3^2) dm & - \int_V \rho_1 \rho_2 dm & - \int_V \rho_1 \rho_3 dm \\ - \int_V \rho_1 \rho_2 dm & \int_V (\rho_1^2 + \rho_3^2) dm & - \int_V \rho_2 \rho_3 dm \\ - \int_V \rho_1 \rho_3 dm & - \int_V \rho_2 \rho_3 dm & \int_V (\rho_1^2 + \rho_2^2) dm \end{bmatrix}$$

- Siempre se pueden encontrar unos ejes cuerpo principales en los que esta matriz es diagonal. En dichos ejes

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

- El mayor de los  $I_i$  se denomina eje mayor, el menor eje menor, y el restante eje intermedio.



# Momento cinético y tensor de inercia III

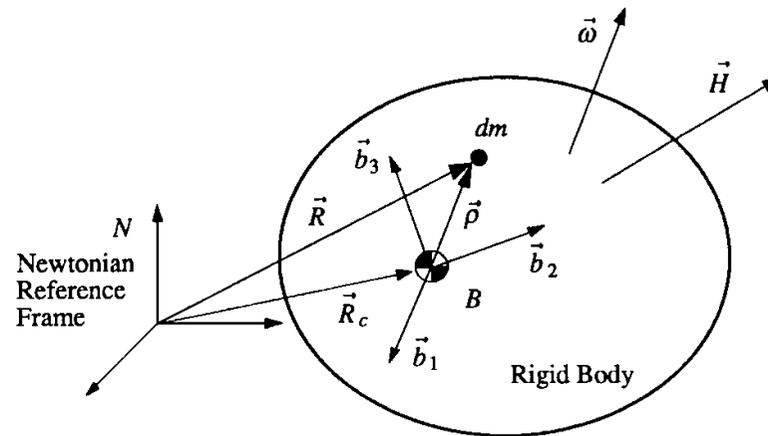
- Si el vehículo se compone de  $m$  partes, de cada una de las cuales se conoce su masa, centro de masas y tensor de inercia, se puede encontrar el tensor de inercia del conjunto con la siguiente fórmula:

$$\mathcal{I} = \sum_{k=1}^m \left[ M_k \left( \|\vec{r}_{ck}\|^2 \text{Id} - \vec{r}_{ck} \vec{r}_{ck}^T \right) + \mathcal{I}_k \right]$$

- En la fórmula,  $M_k$  es la masa de la parte  $k$ ,  $\mathcal{I}_k$  el tensor de inercia de la parte  $k$  considerada por separado, y  $\vec{r}_{ck}$  el vector que une el centro de masas de la parte  $k$  con el centro de masas del conjunto.
- En la práctica al estar formado un vehículo espacial por muchos elementos estructurales es una fórmula muy utilizada para calcular el tensor de inercia del conjunto.



# Energía cinética



- La energía cinética se definirá como  $T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{\rho}} dm$ .
- Usando la relación anteriormente encontrada de que  $\left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}\right)_N = \vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho}$ , obtenemos  $T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\vec{\rho}} \cdot (\vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho}) dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{B/N} \cdot \int_V (\vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}) dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{B/N} \cdot \vec{\Gamma}_B = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{B/N} \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N}$ .
- Observemos que en ejes principales, si  $\vec{\omega}_{B/N} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ ,

se tiene:  $\vec{\Gamma}_B = \begin{bmatrix} \omega_1 l_1 \\ \omega_2 l_2 \\ \omega_3 l_3 \end{bmatrix}$

- Por tanto en estos ejes:  $T = \frac{\omega_1^2 l_1 + \omega_2^2 l_2 + \omega_3^2 l_3}{2}$



# Ecuaciones de Euler

- Partimos de  $\dot{\vec{\Gamma}} = \vec{M}$ . Puesto que esta derivada está tomada en el sistema de referencia inercial, pasando a ejes cuerpo:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\Gamma}\right)_N = \left(\frac{d}{dt}\vec{\Gamma}\right)_B + \vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\Gamma} = \vec{M}.$$

- Sustituyendo el tensor de inercia:

$$\left(\frac{d}{dt}\mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N}\right)_B + \vec{\omega}_{B/N} \times (\mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N}) = \vec{M}$$

- Puesto que bajo la hipótesis de sólido rígido  $\left(\frac{d}{dt}\mathcal{I}\right)_B = 0$ , se tiene:  $\mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{B/N} + \vec{\omega}_{B/N}^\times \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N} = \vec{M}$ .

- Desarrollando para el caso de ejes principales y escribiendo  $\vec{M} = [M_1 \ M_2 \ M_3]^T$

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = M_3$$



# Movimiento libre

- En primer lugar estudiaremos el movimiento libre, es decir,  $\vec{M} = \vec{0}$ . En estas circunstancias se conserva el momento cinético total del sistema.
- Si bien en la realidad no se da este caso, ya que siempre existen momentos perturbadores, éstos son pequeños.
- Veremos algunas soluciones analíticas pero lo más interesante será estudiar la estabilidad del sistema; encontraremos la regla del eje mayor.
- Consideraremos dos casos: axisimétrico (dos ejes de inercia iguales) y asimétrico (los tres ejes de inercia iguales).
- El caso totalmente simétrico ( $I_1 = I_2 = I_3$ ) desacopla totalmente las ecuaciones y es trivialmente resoluble (las velocidades angulares resultantes son independientes y constantes).



## Caso axilsimétrico. Resolución analítica.

- Consideremos el caso en el que  $I_1 = I_2 = I$ ,  $I_3 \neq I$ .
- Las ecuaciones se reducen a:

$$I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

- En primer lugar obtenemos  $\omega_3 = \text{Cte} = n$  (tasa de rotación del VE alrededor de su eje de simetría). Definamos  $\lambda = \frac{I - I_3}{I} n$ , la llamada “tasa de rotación relativa”. Las dos primeras ecuaciones quedan:

$$\dot{\omega}_1 - \lambda\omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 + \lambda\omega_1 = 0$$

Son las ecuaciones de un oscilador armónico, obteniendo:

$$\omega_1 = \omega_1(0) \cos \lambda t + \omega_2(0) \text{sen } \lambda t$$

$$\omega_2 = \omega_2(0) \cos \lambda t - \omega_1(0) \text{sen } \lambda t$$



## Caso axilsimétrico. Resolución analítica.

- Es fácil ver que  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{Cte} = \omega_{12}^2$ , la llamada velocidad angular transversal. Por tanto  $\|\omega\| = \sqrt{\omega_{12}^2 + n^2} = \text{Cte}$  y su tercera componente (en ejes b) también es cte. Por lo que el  $\vec{\omega}$  en ejes cuerpo describe un cono en torno al eje de simetría del cuerpo, de ángulo  $\gamma = \arctan\left(\frac{\omega_{12}}{n}\right)$ .
- Por otro lado, puesto que  $\vec{\Gamma} = \text{Cte}$  en el sdr inercial al conservarse el momento cinético, podemos elegir el eje 3 del sistema de referencia inercial apuntado en la dirección de  $\vec{\Gamma}$  ( $\vec{H}$  en la figura). Además su módulo  $\Gamma$  ha de ser constante.
- Además observemos que en ejes cuerpo,  $\vec{\Gamma} = [I\omega_1 \ I\omega_2 \ I_3 n]^T$ , y por tanto  $\vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z^b = I_3 n = \cos \theta \Gamma$ , es decir el ángulo entre  $\vec{\Gamma}$  y el eje z cuerpo es constante; este ángulo,  $\theta$ , es el llamado el ángulo de nutación. Además:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{\Gamma^2 - I_3^2 n^2}}{I_3 n} = \frac{I\omega_{12}}{I_3 n} = \frac{I}{I_3} \tan \gamma$$

- Se puede verificar que el ángulo entre  $\vec{\Gamma}$  y  $\vec{\omega}$  es  $\theta - \gamma$ .





# Caso axilsimétrico. Resolución analítica.

- Para la secuencia

$$n \xrightarrow[z^n]{} S \xrightarrow[x^S]{} S' \xrightarrow[z^{S'}]{} BFS$$

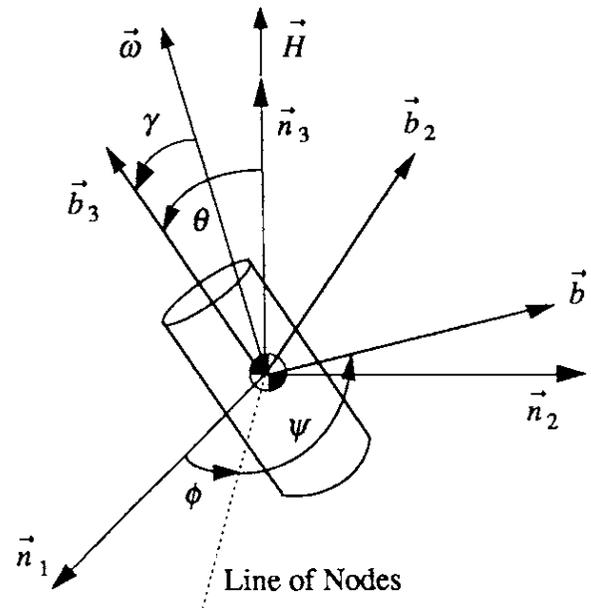
las ecuaciones diferenciales cinemáticas son, aplicando  $\theta = \text{Cte}$ :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta\end{aligned}$$

- Aplicando  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{12}^2$  obtenemos:  $\omega_{12} = \dot{\phi} \sin \theta$ . Luego  $\dot{\phi} = \frac{\omega_{12}}{\sin \theta} = \text{Cte}$ , la llamada tasa de precesión. Finalmente  $\dot{\psi} = n - \dot{\phi} \cos \theta = n - \frac{\omega_{12}}{\tan \theta} = n - \frac{l_3 n}{l} = n \frac{l-l_3}{l} = \lambda = \text{Cte}$ .
- Similarmente  $\dot{\phi} = \frac{\omega_{12}}{\sin \theta} = \frac{l_3 n}{l \cos \theta} = \frac{l_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)}{l \cos \theta}$ , de donde  $\dot{\phi} = \frac{l_3 \dot{\psi}}{(l-l_3) \cos \theta}$ .



# Caso axilsimétrico. Interpretación geométrica.

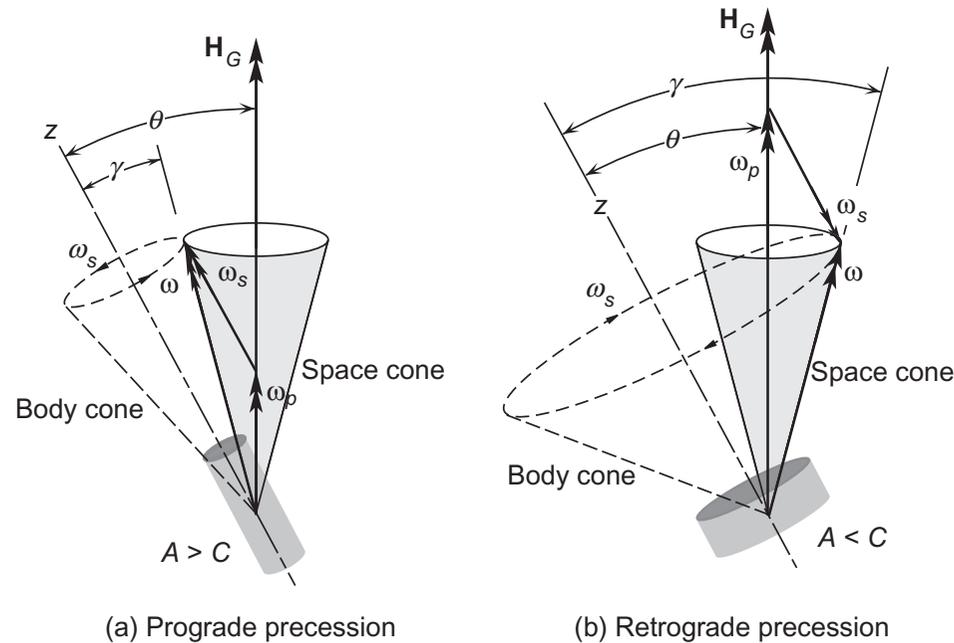


$$n \xrightarrow[\dot{\phi}]{z^n} S \xrightarrow[\dot{\psi}]{x^S} S' \xrightarrow[\dot{\psi}]{z^{S'}} BFS$$

- Mirando la secuencia y teniendo en cuenta las deducciones que hemos hecho antes, nos podemos imaginar el movimiento como el de dos conos que rotan (con velocidades angulares  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ ) deslizando uno sobre otro; el punto de contacto es donde se mueve la velocidad angular  $\vec{\omega}$ .



# Caso axilsimétrico. Interpretación geométrica.



- Recordemos  $\tan \gamma = \tan \theta \frac{I_3}{I}$  y  $\dot{\phi} = \frac{I_3 \dot{\psi}}{(I - I_3) \cos \theta}$ . Dos casos:
  - Cuerpo prolato (eje de simetría alargado,  $I_3 < I$ ): es el caso (a). Como  $\gamma < \theta$  los conos rotan por fuera y como los signos de  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\theta}$  son iguales el giro de ambos conos es en la misma dirección (movimiento directo).
  - Cuerpo oblato (eje de simetría aplastado,  $I_3 > I$ ): es el caso (b). Como  $\gamma > \theta$  un cono rota dentro de otro y como los signos de  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\theta}$  son distintos el giro de ambos conos es en la dirección opuesto (movimiento retrógrado).



# Movimiento libre de un sólido asimétrico

- En el caso asimétrico, existirá un eje mayor, un eje menor, y un eje intermedio; las ecuaciones no se pueden resolver analíticamente en términos de funciones convencionales.

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0$$

- Algunos autores resuelven las ecuaciones usando las “funciones elípticas” de Jacobi. No obstante no es fácil interpretar físicamente estas funciones y no tomaremos esta vía, sino una vía más geométrica.
- Observemos que debido a la conservación del momento cinético,  $\vec{\Gamma}$  es constante (en ejes inerciales). Eso implica que  $\|\vec{\Gamma}\| = \Gamma$  es constante en cualesquiera ejes que se escriba  $\vec{\Gamma}$ . En particular en ejes cuerpo,  $\vec{\Gamma} = [I_1 \omega_1 \ I_2 \omega_2 \ I_3 \omega_3]^T$ , luego  $\Gamma^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = \text{Cte.}$



# Movimiento libre de un sólido asimétrico

- Similarmente al no existir momentos externos la energía cinética  $T$  debe conservarse. Eso implica
$$2T = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = \text{Cte}'$$
- Por tanto, las componentes de la velocidad angular  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_3(t)$ , sean las que sean, deben verificar:

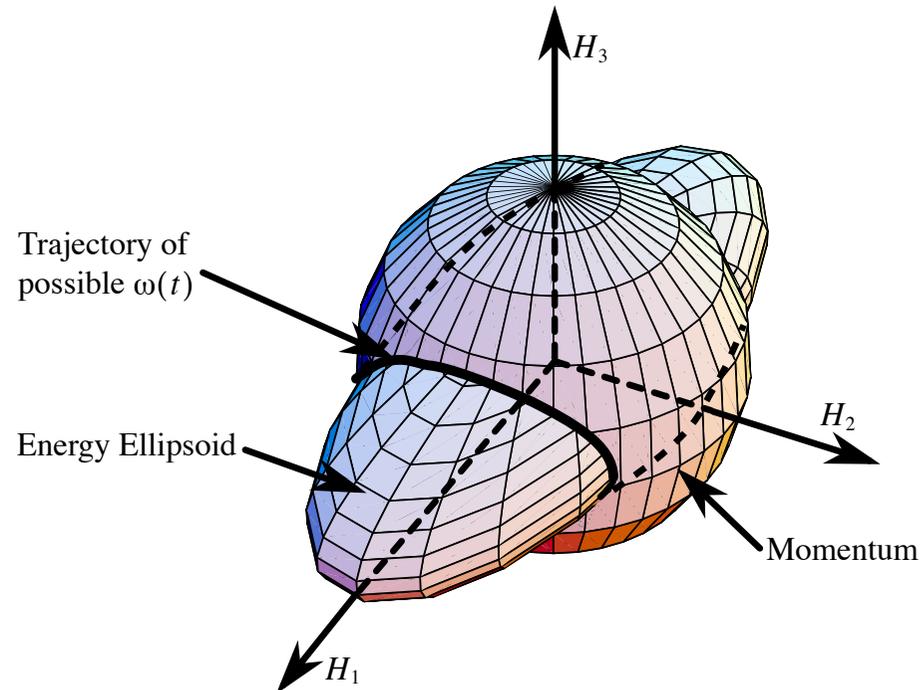
$$\frac{\omega_1^2}{\frac{\Gamma^2}{I_1^2}} + \frac{\omega_2^2}{\frac{\Gamma^2}{I_2^2}} + \frac{\omega_3^2}{\frac{\Gamma^2}{I_3^2}} = 1$$
$$\frac{\omega_1^2}{\frac{2T}{I_1}} + \frac{\omega_2^2}{\frac{2T}{I_2}} + \frac{\omega_3^2}{\frac{2T}{I_3}} = 1$$

- Estas son las ecuaciones de dos elipsoides: el elipsoide del momento cinético y el elipsoide de la energía cinética. Por tanto el vector velocidad angular debe siempre encontrarse en la intersección entre estos dos elipsoides; estas son las llamadas “curvas polodia”.



# Curvas polodia

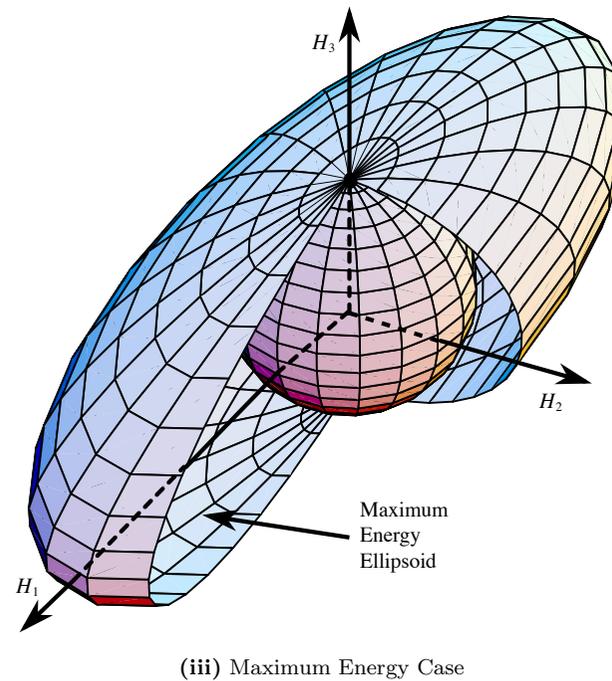
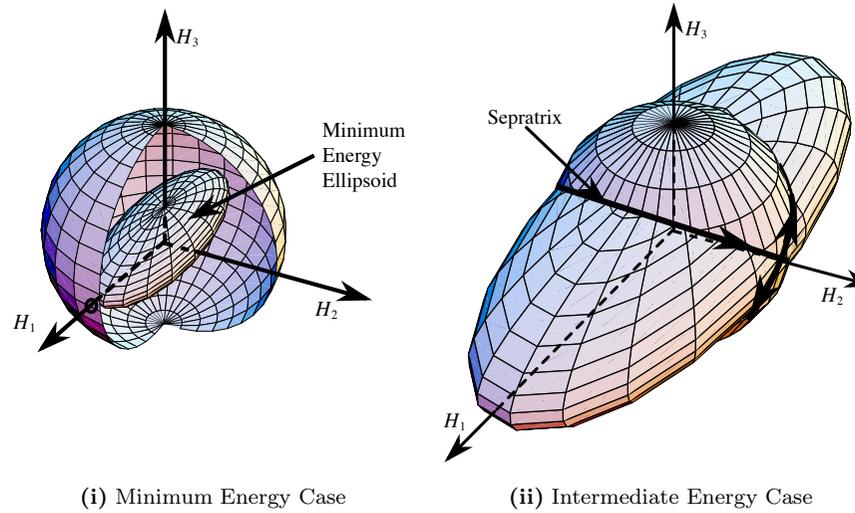
- En general la intersección resultará en dos curvas cerradas, disjuntas.



- Hay tres casos en los que la intersección se reduce a tres puntos: cuando los elipsoides son tangentes en alguno de los ejes. Estos casos corresponden a extremos de la energía (excepto el caso intermedio que es un “punto de silla”).



# Curvas polodia: casos especiales



# Movimiento libre de un sólido asimétrico

- Supongamos que  $I_3 < I_2 < I_1$ . Definamos  $I^* = \frac{\Gamma^2}{2T}$ . Restando las ecuaciones de los elipsoides y multiplicando por  $\Gamma^2$ , obtenemos:

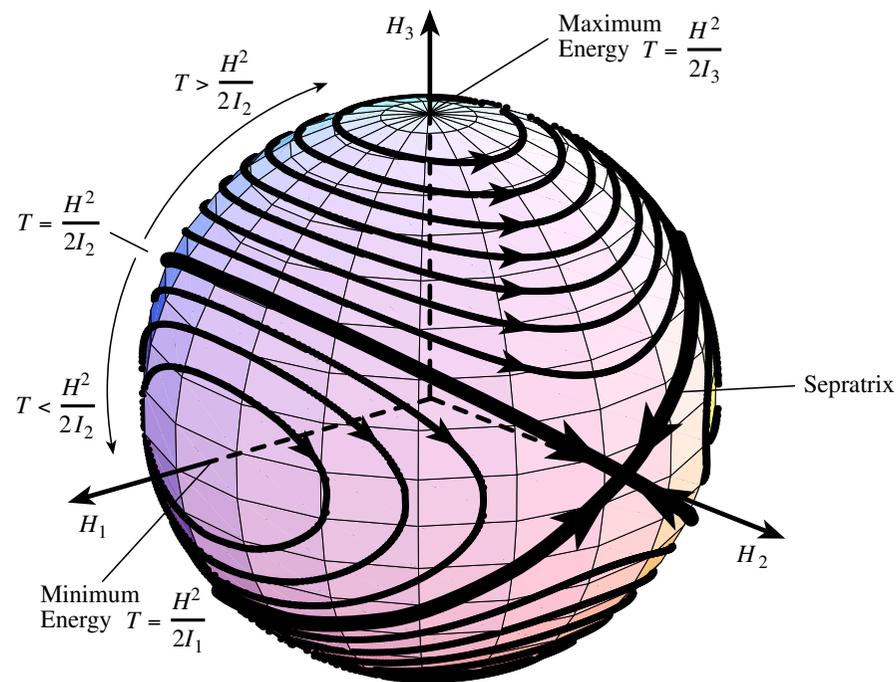
$$I_1\omega_1^2 (I_1 - I^*) + I_2\omega_2^2 (I_2 - I^*) + I_3\omega_3^2 (I_3 - I^*) = 0$$

- Observemos que si  $I^* < I_3$  todos los términos son positivos (y por tanto no pueden sumar cero). Igualmente si  $I^* > I_1$  todos los términos son negativos. Luego  $I^* \in [I_3, I_1]$ . Para  $\Gamma$  fijo, eso implica que la energía tiene que estar en un cierto rango. Los casos extremos son  $I^* = I_1$  (energía mínima, implica  $\omega_2 = \omega_3 = 0$  y por tanto un giro en el eje 1, el mayor) e  $I^* = I_3$  (energía máxima, implica  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  y por tanto un giro en el eje 3, el menor)
- El caso  $I^* = I_2$  tiene más soluciones aparte de rotaciones puras en torno al eje 2 ( $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ); dichas soluciones se llaman separatrices.



# Curvas polodia para $\Gamma$ fijo

- Si  $\Gamma$  está fijo y variamos la energía, obtenemos las posibles curvas polodia sobre la superficie del elipsoide del momento, incluyendo las separatrices.



# Estabilidad del movimiento libre alrededor de un eje principal

- Hemos visto que las soluciones más sencillas son rotaciones puras en torno a un eje principal. En este apartado, partamos de la solución de equilibrio  $\bar{\omega}_3 = n = \text{Cte}$  y que  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = 0$ . Estudiemos la estabilidad de esta rotación en función de si el eje 3 es mayor, menor o intermedio.
- Para ello perturbamos las ecuaciones, definiendo  $\omega_1 = \delta\omega_1$ ,  $\omega_2 = \delta\omega_2$  y  $\omega_3 = n + \delta\omega_3$ . Sustituyendo en las ecs de Euler:

$$I_1\delta\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\delta\omega_2(n + \delta\omega_3) = 0$$

$$I_2\delta\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\delta\omega_1(n + \delta\omega_3) = 0$$

$$I_3\delta\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\delta\omega_2\delta\omega_1 = 0$$

- Despreciando términos de segundo orden obtenemos:

$$I_1\delta\dot{\omega}_1 + n(I_3 - I_2)\delta\omega_2 = 0$$

$$I_2\delta\dot{\omega}_2 + n(I_1 - I_3)\delta\omega_1 = 0$$

$$I_3\delta\dot{\omega}_3 = 0$$



# Estabilidad del movimiento libre en un eje principal

- La ecuación en  $\delta\omega_3$  es (marginamente) estable, es decir, estable pero no asintóticamente estable (las perturbaciones no crecen pero tampoco se disipan).
- La ecuación de  $\delta\omega_1$  y  $\delta\omega_2$  se puede simplificar en una única ecuación:

$$\delta\ddot{\omega}_1 + \frac{n^2(l_3 - l_2)(l_3 - l_1)}{l_1 l_2} \delta\omega_1 = 0$$

- La estabilidad de esta ecuación depende del signo de  $(l_3 - l_2)(l_3 - l_1)$ . Si el signo es positivo las soluciones son oscilatorias (ni crecen ni disminuyen: marginalmente estable). Si el signo es negativo las soluciones son exponenciales (una de las soluciones crece en el tiempo: inestable)
- Si  $l_3$  eje mayor,  $(l_3 - l_2)(l_3 - l_1) = + \times + > 0$ : estable.
- Si  $l_3$  eje menor,  $(l_3 - l_2)(l_3 - l_1) = - \times - > 0$ : estable.
- Si  $l_3$  eje intermedio,  $(l_3 - l_2)(l_3 - l_1) = + \times - < 0$ : inestable.



# Estabilidad del movimiento libre con disipación de energía

- El cálculo anterior es correcto, pero sólo si el modelo empleado (Ecuaciones de Euler para el sólido rígido) es un modelo totalmente exacto.
- La realidad no es tan simple, y siempre existe alguna fuente de disipación de energía (efectos de flexibilidad, rozamientos de partes móviles, movimiento de combustible en el depósito, etc...). Ello modificará el resultado anterior, ya que el sistema siempre tenderá a permanecer en un mínimo de energía.
- Partiendo de principios físicos, encontremos el mínimo de energía para un momento cinético determinado, es decir, resolvamos el problema

$$\begin{aligned} & \text{mín } I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \\ & \text{sujeto a } I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = \Gamma^2 \end{aligned}$$



# Estabilidad del movimiento libre con disipación de energía

- Usando multiplicadores de Lagrange:

$$L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + \lambda(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 - \Gamma^2)$$

- Se tiene  $0 = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 2I_i\omega_i(1 + \lambda I_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$

- Por tanto hay tres soluciones:

- $\omega_2 = \omega_3 = 0$ ,  $\lambda = -\frac{1}{I_1}$ ,  $\omega_1 = \frac{\Gamma}{I_1}$ .  $T = \frac{\Gamma^2}{2I_1}$ .

- $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ,  $\lambda = -\frac{1}{I_2}$ ,  $\omega_2 = \frac{\Gamma}{I_2}$ .  $T = \frac{\Gamma^2}{2I_2}$ .

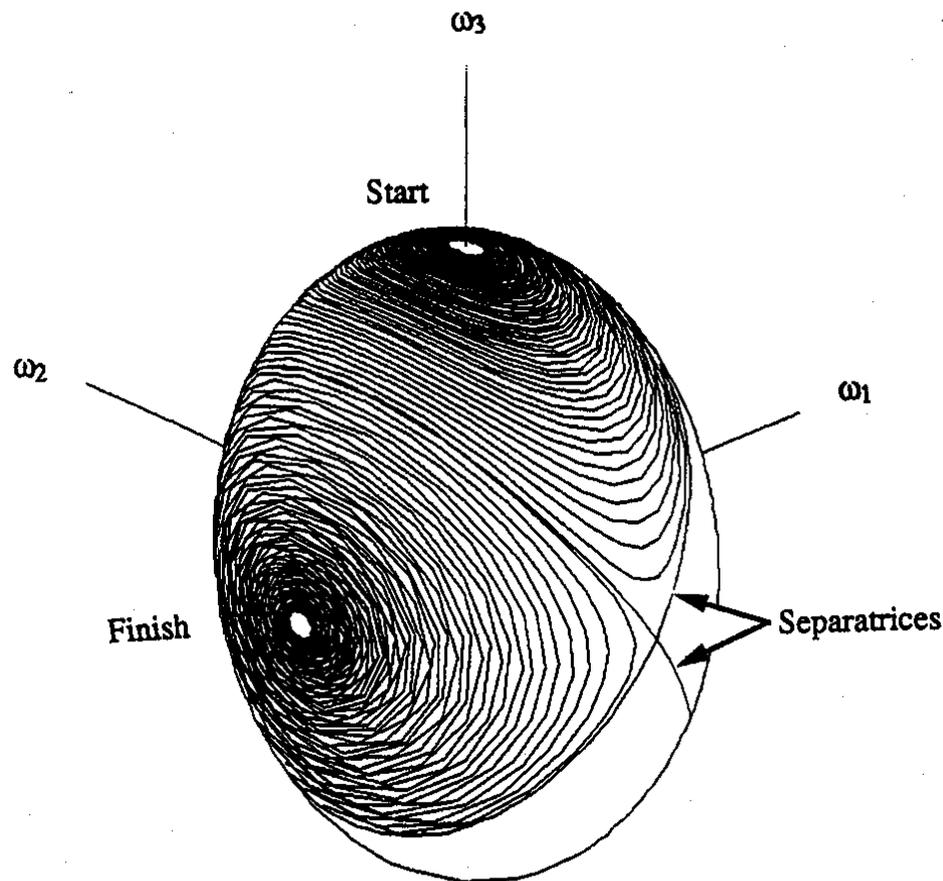
- $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\lambda = -\frac{1}{I_3}$ ,  $\omega_3 = \frac{\Gamma}{I_3}$ .  $T = \frac{\Gamma^2}{2I_3}$ .

- Claramente el mínimo viene dada por la primera solución (la segunda es punto de silla y la tercera máximo). Por tanto la única rotación matemáticamente estable y que a la vez es un mínimo de la energía son las rotaciones en torno al eje mayor.
- En base a este argumento se enuncia la regla del eje mayor: “En presencia de disipación de energía, las únicas rotaciones estables son aquellas en torno al eje mayor”.



# Estabilidad del movimiento libre con disipación de energía

- El efecto geométrico de la regla del eje mayor es que las curvas polodia pasan de ser cerradas a ser una única curva espiral que conduce al mínimo de la energía:



# Ejemplo de modelo con disipación de energía

- Modelo de un satélite con un depósito perfectamente esférico de combustible viscoso, lleno, tal que el combustible (de inercia  $J$  y coeficiente de fricción  $\Delta$ ) tiene su propia velocidad angular  $\vec{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T$  relativa al satélite.
- Sacado de C.D. Rahn, P.M. Barba, “Reorientation Maneuver for Spinning Spacecraft”, AIAA Journal of Guidance, Dynamics and Control, Vol. 14, 1991.

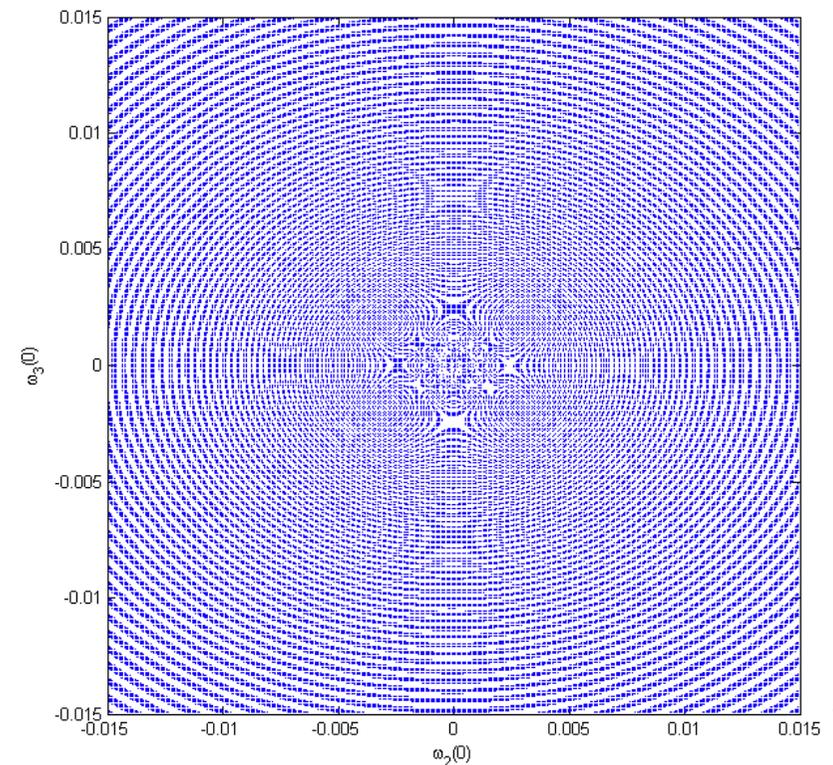
$$\begin{aligned}(l_1 - J)\dot{\omega}_1 + (l_3 - l_2)\omega_2\omega_3 &= \Delta\sigma_1 \\(l_2 - J)\dot{\omega}_2 + (l_1 - l_3)\omega_1\omega_3 &= \Delta\sigma_2 \\(l_3 - J)\dot{\omega}_3 + (l_2 - l_1)\omega_2\omega_1 &= \Delta\sigma_3 \\ \dot{\sigma}_1 + \dot{\omega}_1 + \omega_2\sigma_3 - \omega_3\sigma_2 &= -\frac{\Delta\sigma_1}{J} \\ \dot{\sigma}_2 + \dot{\omega}_2 + \omega_3\sigma_1 - \omega_1\sigma_3 &= -\frac{\Delta\sigma_2}{J} \\ \dot{\sigma}_3 + \dot{\omega}_3 + \omega_1\sigma_2 - \omega_2\sigma_1 &= -\frac{\Delta\sigma_3}{J}\end{aligned}$$

- Por la disipación, cualquier rotación termina en torno al eje mayor; sin embargo, no es posible saber a priori el sentido de la rotación ya que la ecuación tiene dinámica caótica.



# Ejemplo de modelo con disipación de energía

- El hecho de que la ecuación tenga dinámica caótica quiere decir que el sentido de la rotación depende enormemente de la condición inicial, hasta el punto de que un cambio de condición inicial, por minúsculo que sea, produce una variación en el sentido de la rotación.
- Eso implica que, a todos los efectos prácticos, es imposible predecir cuál va a ser el sentido final de la rotación.
- Un dibujo en el que se marque con el mismo color los puntos que producen el mismo sentido de rotación es de enorme complejidad (debido a esta propiedad caótica). Este tipo de figuras se conocen en matemáticas como fractales.



## Regla del eje mayor. Consideraciones.

- La inestabilidad que surge en el eje menor tiene una escala de tiempo muy inferior a la inestabilidad en el eje intermedio; dicha escala dependerá de la velocidad con la que la energía se disipa.
- Si el movimiento deseado es una rotación en torno al eje mayor se puede amplificar este efecto añadiendo disipación: disipadores de nutación (“péndulos” con fricción añadidos al sistema).
- Si puntualmente es necesaria una rotación en torno al eje menor, no hay ningún problema mientras se requiera por un corto periodo de tiempo. Luego se puede volver a una rotación en torno al eje mayor simplemente dejando pasar el tiempo.
- La presencia de partes móviles (p.ej. volantes de inercia) cambia estos resultados teóricos.



# Ecuaciones rotacionales con rueda/volante de inercia/CMG.

- Veamos para empezar como se modifican las ecuaciones del movimiento por tener  $k$  ruedas o CMGs.
- Para cada rueda/CMG  $i$ , supuesta axisimétrica, definimos  $I_{Ri}$  como su inercia en la dirección del eje de giro  $\vec{e}_i$  y su velocidad de giro relativa al vehículo como  $\omega_{Ri}$ .
- Observemos que la inercia del conjunto no cambia en ningún momento, por la simetría de la rueda/CMG.
- Por tanto el momento cinético del conjunto será:  
$$\vec{\Gamma} = \mathcal{I}\vec{\omega}_{B/N} + \sum_{i=0}^k \vec{e}_i I_{Ri} \omega_{Ri}$$
- Expresando como antes la derivada  $\dot{\vec{\Gamma}} = \vec{M}$  en los ejes cuerpo obtenemos las ecuaciones correspondientes.



# Ecuaciones rotacionales con una rueda en cada eje

- Si hay una rueda en cada eje el momento cinético del

$$\text{conjunto será: } \vec{\Gamma} = \mathcal{I}\vec{\omega}_{B/N} + \begin{bmatrix} \omega_{R1} I_{R1} \\ \omega_{R2} I_{R2} \\ \omega_{R3} I_{R3} \end{bmatrix}$$

- Obtenemos las siguientes ecuaciones de Euler:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + I_{R1} \dot{\omega}_{R1} + I_{R3} \omega_{R3} \omega_2 - I_{R2} \omega_{R2} \omega_3 = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 + I_{R2} \dot{\omega}_{R2} + I_{R1} \omega_{R1} \omega_3 - I_{R3} \omega_{R3} \omega_1 = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 + I_{R3} \dot{\omega}_{R3} + I_{R2} \omega_{R2} \omega_1 - I_{R1} \omega_{R1} \omega_2 = M_3$$

- A estas ecuaciones habría que añadir ecuaciones que gobiernan el giro de las ruedas; por ejemplo si  $J_{Ri}$  es el par interno que controla el giro de la rueda, estas ecuaciones serían:

$$I_{R1}(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_{R1}) = J_1$$

$$I_{R2}(\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_{R2}) = J_2$$

$$I_{R3}(\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_{R3}) = J_3$$



## Ecuaciones rotacionales con volante de inercia en el eje 3.

- Supongamos que el vehículo posee un volante de inercia en el eje 3, con inercia  $I_R$ , y que gira a una velocidad  $\omega_R$  relativa al resto del vehículo. También podría tratarse de un sistema de rotación doble, es decir, parte del vehículo (rotor) gira con respecto al resto del vehículo (plataforma) con una velocidad angular relativa.
- El momento cinético del sistema sería  $\Gamma = [I_1\omega_1 \ I_2\omega_2 \ I_3\omega_3 + I_R\omega_R]^T$ .
- Las ecuaciones de Euler quedan ahora:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + I_R\omega_R\omega_2 = 0$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 - I_R\omega_R\omega_1 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + I_R\dot{\omega}_R + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = 0$$

- Además hay que añadir  $I_R(\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_R) = J$ , donde  $J$  es el par del motor que controla el giro relativo del volante.



# Ecuaciones rotacionales con plataforma/volante de inercia.

- Podemos usar el motor, por ejemplo, para mantener  $\omega_R$  constante. En tal caso las ecuaciones se reducen a:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + I_R \omega_R \omega_2 = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 - I_R \omega_R \omega_1 = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0$$

- Ahora aparecen términos nuevos que modifican el análisis de estabilidad. Por ejemplo el eje intermedio se podría hacer estable!! Repitiendo el análisis de estabilidad de antes:

$$\delta \ddot{\omega}_1 + \frac{(n(I_3 - I_2) + I_R \omega_R)(n(I_3 - I_1) + I_R \omega_R)}{I_1 I_2} \delta \omega_1 = 0$$

- Si por ejemplo, el eje 1 es el menor y el eje 2 es el mayor, la condición necesaria para la estabilidad es  $n(I_3 - I_2) + I_R \omega_R > 0$ , es decir,  $\omega_R > \frac{I_2 - I_3}{I_R} n$ .
- Se puede realizar un análisis de energía y encontrar condiciones para que la estabilidad se verifique incluso en presencia de disipación de energía!



# Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Como antes, minimizamos la energía cinética fijando el momento cinético (ya que no hay pares externos).
- En este caso:

$$\begin{aligned}2T &= I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + I_R\omega_R^2, \\ \Gamma^2 &= I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + (I_3\omega_3 + I_R\omega_R)^2\end{aligned}$$

- El último término de la energía lo podemos ignorar ya que es una constante, y por tanto no cambiará el resultado de la minimización. El problema se plantea:

$$\begin{aligned}\text{mín } & I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \\ \text{sujeto a } & I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + (I_3\omega_3 + I_R\omega_R)^2 = \Gamma^2\end{aligned}$$



# Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Usando multiplicadores de Lagrange:

$$L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + \lambda(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + (I_3\omega_3 + I_R\omega_R)^2 - \Gamma^2)$$

- Se tiene  $0 = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 2I_i\omega_i(1 + \lambda I_i)$ ,  $i = 1, 2$  y

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \omega_3} = 2I_3(\omega_3 + \lambda(I_3\omega_3 + I_R\omega_R))$$

- Hay varias soluciones como antes, nos quedamos con:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = n, \quad \lambda = -\frac{n}{I_3n + I_R\omega_R}.$$

- Para resolver el problema usamos el siguiente teorema: Sea  $L(x, y, z) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$  el Lagrangiano del sistema de forma que  $F$  es la función a minimizar y  $G(x, y, z) = 0$  es la restricción. Entonces, se forman las matrices:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$



# Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Si  $x^*$ ,  $\lambda^*$  es el punto crítico (que hace las primeras derivadas de  $L$  cero) donde se quiere investigar si hay un mínimo o un máximo entonces, si se cumple:

1  $\frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) \neq 0$

2  $\text{Det}(H_3(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$

3  $\text{Det}(H_4(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$

entonces se tiene un mínimo en el punto crítico.

- Para verificar las condiciones, tenemos que llamar  $x = \omega_3$ ,  $y = \omega_1$ ,  $z = \omega_2$ . Entonces tenemos:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2l_3(l_3 n + I_r \omega_R) & 0 & 0 \\ 2l_3(l_3 n + I_r \omega_R) & 2l_3(1 + \lambda l_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l_1(1 + \lambda l_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2l_3(l_3 n + I_r \omega_R) & 0 & 0 & 0 \\ 2l_3(l_3 n + I_r \omega_R) & 2l_3(1 + \lambda l_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l_1(1 + \lambda l_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l_2(1 + \lambda l_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



# Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Obtenemos las condiciones de mínimo:

1  $\frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) = 2I_3(I_3 n + I_r \omega_R) \neq 0$  (puesto que si las otras dos velocidades angulares son cero, se tiene

$$I_3 n + I_r \omega_R = \pm \Gamma \neq 0).$$

2  $\text{Det}(H_3(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) = -8I_3^2(I_3 n + I_r \omega_R)^2 I_1(1 + \lambda I_1) < 0$

3  $\text{Det}(H_4(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) = \text{Det}(H_3)2I_2(1 + \lambda I_2) < 0$

- Por tanto llegamos a dos condiciones:

$$1 + \lambda I_1 > 0,$$

$$1 + \lambda I_2 > 0.$$

- Usando el valor de  $\lambda$  antes hallado llegamos a

$$1 - \frac{I_1 n}{I_3 n + I_R \omega_R} > 0,$$

$$1 - \frac{I_2 n}{I_3 n + I_R \omega_R} > 0.$$

- Hay que tener cuidado con el signo de  $I_3 n + I_R \omega_R$  ya que al despejar  $\omega_R$  puede cambiar el signo de la desigualdad.



# Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Si en vez de despejar  $\omega_R$  metemos “el uno” en la fracción, estas condiciones se reducen a:

$$\frac{(I_3 - I_1)n + I_R\omega_R}{I_3n + I_R\omega_R} > 0,$$
$$\frac{(I_3 - I_2)n + I_R\omega_R}{I_3n + I_R\omega_R} > 0,$$

- Por lo que claramente habrá dos casos:

**1** Si  $I_3n + I_R\omega_R > 0$ , es decir  $\omega_R > -\frac{I_3n}{I_R}$ , entonces las condiciones son  $\omega_R > \frac{(I_1 - I_3)n}{I_R}$ ,  $\omega_R > \frac{(I_2 - I_3)n}{I_R}$ .

**2** Si  $I_3n + I_R\omega_R < 0$ , es decir  $\omega_R < -\frac{I_3n}{I_R}$ , entonces las condiciones son  $\omega_R < \frac{(I_1 - I_3)n}{I_R}$ ,  $\omega_R < \frac{(I_2 - I_3)n}{I_R}$ .

- Se observa que son condiciones similares, pero más restrictivas, que las obtenidas sin disipación de energía!



# Ejemplo I

- Sea un satélite del que se sabe:

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad n = 60 \text{ r.p.m.}, \quad I_R = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- Si estudiamos a qué velocidad debe girar la rueda para que el eje 3 (intermedio) sea estable.
- Con análisis usando el modelo de sólido rígido, la condición es  $(n(I_2 - I_3) - I_R\omega_R)(n(I_3 - I_1) + I_R\omega_R) < 0$ . Dos casos:
  - 1 Primer paréntesis negativo, segundo positivo. Las condiciones son  $\omega_R > \frac{n(I_2 - I_3)}{I_R} = -300 \text{ r.p.m.}$  y  $\omega_R > \frac{n(I_3 - I_1)}{I_R} = 300 \text{ r.p.m.}$ . Como la segunda condición es más restrictiva, llegamos a la conclusión de que  $\omega_R > 300 \text{ r.p.m.}$ .
  - 2 Segundo paréntesis negativo, primero positivo. Las condiciones son  $\omega_R < \frac{n(I_2 - I_3)}{I_R} = -300 \text{ r.p.m.}$  y  $\omega_R < \frac{n(I_3 - I_1)}{I_R} = 300 \text{ r.p.m.}$ . Como la primera condición es más restrictiva, llegamos a la conclusión de que  $\omega_R < -300 \text{ r.p.m.}$ .
- En conclusión, con el modelo de sólido rígido el eje 3 es estable si  $\omega_R > 300 \text{ r.p.m.}$  o si  $\omega_R < -300 \text{ r.p.m.}$ , pero inestable si  $\omega_R \in [-300, 300] \text{ r.p.m.}$



## Ejemplo II

- Con análisis usando el modelo de sólido rígido, hay también dos casos:

1 Si  $l_3 n + I_R \omega_R > 0$ , es decir  $\omega_R > -\frac{l_3 n}{I_R} = -600$  r.p.m., entonces las condiciones son  $\omega_R > \frac{(l_1 - l_3)n}{I_R} = -300$  r.p.m.,  $\omega_R > \frac{(l_2 - l_3)n}{I_R} = 300$  r.p.m.. Como la tercera condición es más restrictiva, llegamos a la conclusión de que  $\omega_R > 300$  r.p.m..

2 Si  $l_3 n + I_R \omega_R < 0$ , es decir  $\omega_R < -\frac{l_3 n}{I_R} = -600$  r.p.m., entonces las condiciones son  $\omega_R < \frac{(l_1 - l_3)n}{I_R} = -300$  r.p.m.,  $\omega_R < \frac{(l_2 - l_3)n}{I_R} = 300$  r.p.m.. Como la primera condición es más restrictiva, llegamos a la conclusión de que  $\omega_R < -600$  r.p.m..

- En conclusión, en presencia de disipación de energía, el eje 3 es estable si  $\omega_R > 300$  r.p.m. o si  $\omega_R < -600$  r.p.m., pero inestable si  $\omega_R \in [-600, 300]$  r.p.m..
- Obsérvese que en la zona  $\omega_R \in [-600, -300]$  r.p.m. los dos modelos difieren; al ser más realista el modelo con disipación de energía, sabemos que en dicha zona falla el análisis con modelo de sólido rígido!



# Movimiento forzado

- En la realidad siempre existirán momentos perturbadores. Normalmente son de magnitud pequeña pero pueden ser persistentes (como por ejemplo el gradiente gravitatorio que actúa a lo largo de toda la órbita). También pueden ser más intensos, como por ejemplo en el caso de toberas propulsivas no perfectamente alineadas durante maniobras.
- En esta sección analizaremos dos casos:
  - Momento perturbador constante actuando sobre un sólido en rotación (efecto giroscópico).
  - Efecto en la estabilidad del gradiente gravitatorio.
- Además expondremos un modelo de vehículo espacial con ruedas y volante de inercia que será necesario para el posterior tema de control.



# Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- Modelamos este caso con las siguientes hipótesis:
  - Vehículo axilsimétrico:  $I_1 = I_2 = I$ .
  - Vehículo rotando con velocidad  $n$  en torno a su eje 3, es decir,  $\omega_3 = n$ .
  - Momento perturbador constante  $M_1$  en el eje 1. Sin momento en el resto de los ejes.
- Esta situación modela, por ejemplo, el caso de un vehículo estabilizado por rotación que realiza una maniobra propulsiva, pero con la tobera ligeramente desalineada con el eje de rotación. Si el vehículo no rotara, el momento causaría el giro inmediato del vehículo y la maniobra fallaría.
- Veremos que al haber rotación el vehículo posee “rigidez giroscópica” y el momento perturbador lo que finalmente produce es un movimiento (posiblemente muy pequeño) de precesión y nutación del eje de giro.



# Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- Las ecuaciones que modelan el movimiento son:

$$I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 = M_1$$

$$I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

- Encontramos la solución  $\omega_3 = \text{Cte} = n$  y definimos  $\lambda = \frac{I - I_3}{I}n$  y  $\mu = \frac{M_1}{I}$ . La ecuación a resolver es:

$$\dot{\omega}_1 - \lambda\omega_2 = \mu$$

$$\dot{\omega}_2 + \lambda\omega_1 = 0$$

- Derivando en la primera ecuación y sustituyendo la segunda:

$$\ddot{\omega}_1 + \lambda^2\omega_1 = 0$$

- La solución de esta ecuación es  $\omega_1(t) = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t$ .



# Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- Sustituyendo en la 1ª ecuación:  $\omega_2(t) = A \cos \lambda t - B \sin \lambda t - \frac{\mu}{\lambda}$ .
- Usando las condiciones iniciales  $\omega_1(0)$  y  $\omega_2(0)$  encontramos:  
 $B = \omega_1(0)$ ,  $A = \omega_2(0) + \frac{\mu}{\lambda}$ . Por tanto:

$$\omega_1 = \left( \omega_2(0) + \frac{\mu}{\lambda} \right) \sin \lambda t + \omega_1(0) \cos \lambda t = \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t$$

$$\omega_2 = \left( \omega_2(0) + \frac{\mu}{\lambda} \right) \cos \lambda t - \omega_1(0) \sin \lambda t - \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} (\cos \lambda t - 1)$$

donde finalmente se han supuesto  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ .

- Para describir la actitud usamos unos ángulos de Euler:

$$I \xrightarrow[\substack{\theta_1 \\ x^n}]{} S \xrightarrow[\substack{\theta_2 \\ y^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\theta_3 \\ z^{S'}}]{} BFS$$

- En el desarrollo de las ecuaciones cinemáticas se llegaría a:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\omega_1 \cos \theta_3 - \omega_2 \sin \theta_3}{\cos \theta_2}$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_1 \sin \theta_3 + \omega_2 \cos \theta_3$$

$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 + (-\omega_1 \cos \theta_3 + \omega_2 \sin \theta_3) \tan \theta_2$$



# Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- Se tomarán condiciones iniciales para los ángulos de 0.
- Esperamos que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  sean más bien pequeños, mientras que  $\theta_3$  será grande (ya que es en torno al eje de giro). Por ello sustituimos  $\cos \theta_2 \approx 1$  y  $\tan \theta_2 \approx \theta_2$ . Llegamos a:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \cos \theta_3 - \omega_2 \operatorname{sen} \theta_3$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_1 \operatorname{sen} \theta_3 + \omega_2 \cos \theta_3$$

$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 + \theta_2 (-\omega_1 \cos \theta_3 + \omega_2 \operatorname{sen} \theta_3) = \omega_3 - \theta_2 \dot{\theta}_1$$

- Suponiendo  $\omega_3 \gg \theta_2 \dot{\theta}_1$ , encontramos  $\theta_3 = \omega_3 t = nt$ .
- Las ecuaciones para  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \cos nt - \omega_2 \operatorname{sen} nt$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_1 \operatorname{sen} nt + \omega_2 \cos nt$$

- Sustituyamos los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  encontrados antes:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t \cos nt - \frac{\mu}{\lambda} (\cos \lambda t - 1) \operatorname{sen} nt = \frac{\mu}{\lambda} (\operatorname{sen} (\lambda - n) t + \operatorname{sen} nt)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t \operatorname{sen} nt + \frac{\mu}{\lambda} (\cos \lambda t - 1) \cos nt = \frac{\mu}{\lambda} (\cos (\lambda - n) t - \cos nt)$$



# Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- La solución de estas ecuaciones es:

$$\theta_1 = \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{1 - \cos(\lambda - n)t}{\lambda - n} + \frac{1 - \cos nt}{n} \right)$$

$$\theta_2 = \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{\sin(\lambda - n)t}{\lambda - n} - \frac{\sin nt}{n} \right)$$

- Definamos  $A_p = \frac{\mu}{\lambda(n-\lambda)}$  y  $\omega_p = n - \lambda$ , amplitud y frecuencia de precesión, respectivamente, y  $A_n = \frac{\mu}{\lambda n}$  y  $\omega_n = n$ , amplitud y frecuencia de nutación, respectivamente. La solución queda:

$$\theta_1 = -A_p (1 - \cos \omega_p t) + A_n (1 - \cos \omega_n t)$$

$$\theta_2 = A_p \sin \omega_p t - A_n \sin \omega_n t$$

- Es la superposición de dos movimientos circulares: epicicloide.

- Las amplitudes vienen dadas por  $A_p = \frac{M_1}{(I - I_3)n^2} \frac{I}{I_3}$  y

$A_n = \frac{M_1}{(I - I_3)n^2}$ , por lo que la “rigidez giroscópica” será mayor cuanto mayor sea  $n$ ,  $I_3/I$ , y la diferencia  $I - I_3$ .

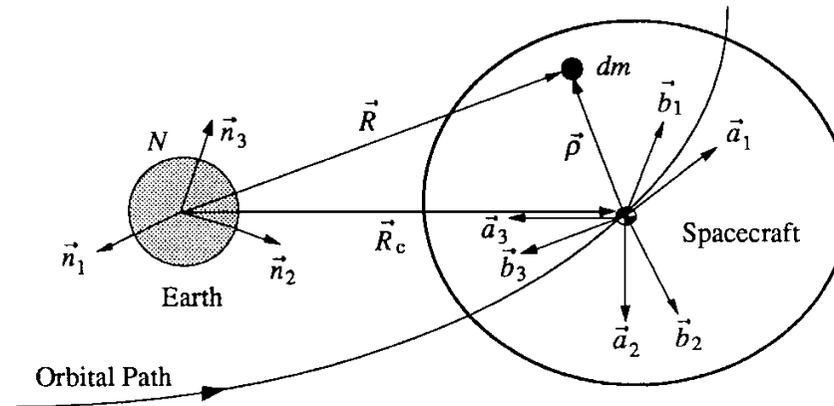


# Gradiente gravitatorio.

- El par perturbador más importante es el gradiente gravitatorio, puesto que siempre está presente en órbita.
- Vamos a estudiar el caso de un vehículo espacial asimétrico en órbita circular de radio  $R$  en torno a un planeta esférico; las órbitas elípticas y las desviaciones de la gravedad esférica (p.ej. el  $J_2$ ) introducen términos de orden mayor que no analizaremos.
- La velocidad angular se estudiará en ejes cuerpo; sin embargo los ángulos de Euler elegidos serán respecto a ejes órbita, que en sí no es un sistema de referencia inercial, lo que tendrá que tomarse en cuenta.
- La situación es la de la figura de la transparencia siguiente. Los ejes N son los inerciales, los ejes A son los ejes órbita (que definiremos) y los ejes B los ejes cuerpo (en ejes principales de inercia).



# Gradiente gravitatorio.



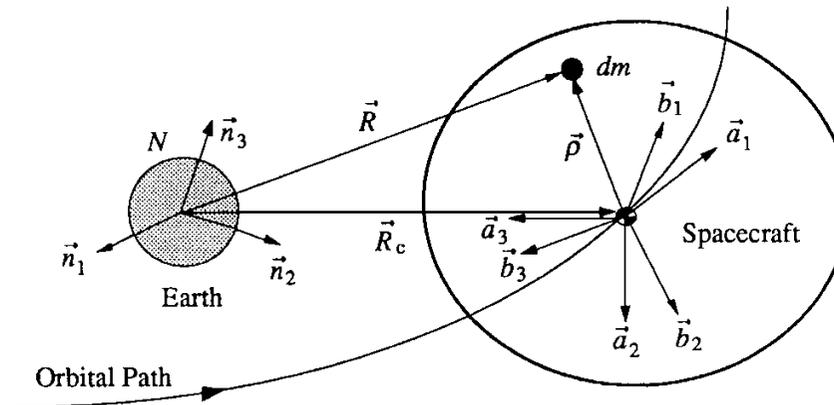
- Ejes órbita: la dirección  $z$  ( $\vec{a}_3$ ) apunta siempre al centro de la Tierra. La dirección  $x$  ( $\vec{a}_1$ ) en la dirección de la velocidad. La dirección  $y$  ( $\vec{a}_2$ ) en la dirección contraria al momento cinético  $\vec{h}$  (perpendicular al plano orbital).
- Estos ejes rotan respecto al sistema de referencia inercial ( $n$ ) en torno al eje  $-\vec{a}_2$  con velocidad  $n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R^3}}$ .
- La relación entre los sistemas de referencia es la siguiente:

$$N \xrightarrow[-nt]{y^n} A \xrightarrow[\theta_3]{z^A} S \xrightarrow[\theta_2]{y^S} S' \xrightarrow[\theta_1]{x^{S'}} B$$

- La situación es la de la figura de la transparencia siguiente. Los ejes  $N$  son los inerciales, los ejes  $A$  son los ejes órbita (que



# Gradiente gravitatorio.



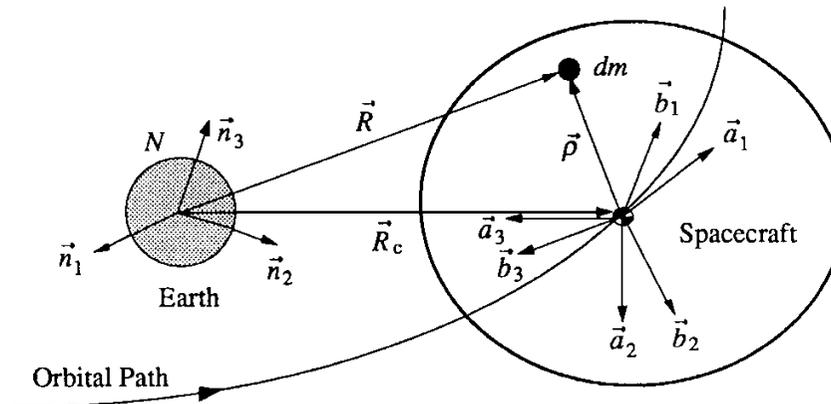
- La matriz  $C_A^B$  y las ecuaciones diferenciales cinemáticas entre  $B$  y  $A$  son:

$$C_A^B = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 & c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & s\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c\theta_2} \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 s\theta_1 & s\theta_2 c\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix} \vec{\omega}_{B/A}^B$$



# Gradiente gravitatorio.

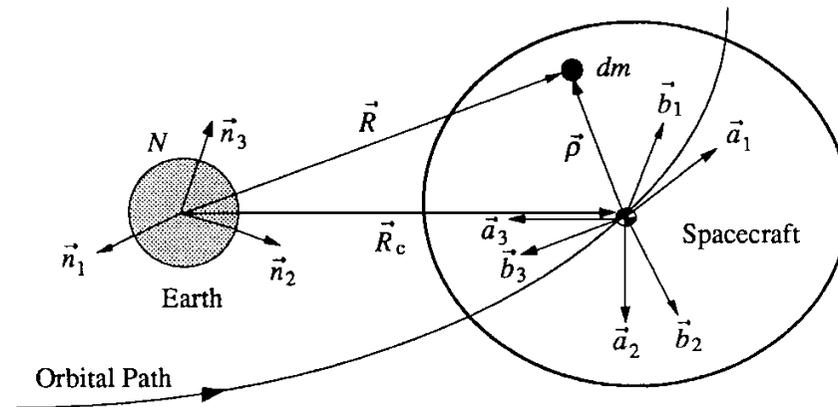


- Empecemos estudiando el gradiente gravitatorio. En cada  $dm$  del vehículo actuará una fuerza  $d\vec{F} = -\frac{\mu\vec{R}}{R^3} dm = -\frac{\mu(\vec{R}_c + \vec{\rho})}{|\vec{R}_c + \vec{\rho}|^3} dm$ .
- Por tanto el momento de las fuerzas será:

$$\vec{M} = \int_V \rho \times d\vec{F} = -\mu \int_V \rho \times \frac{\vec{R}_c + \vec{\rho}}{|\vec{R}_c + \vec{\rho}|^3} dm = -\mu \int_V \frac{\rho \times \vec{R}_c}{|\vec{R}_c + \vec{\rho}|^3} dm$$



# Gradiente gravitatorio.



- Usemos el hecho de que, puesto que  $|\vec{\rho}| \ll |\vec{R}_c|$ ,  
 $|\vec{R}_c + \vec{\rho}|^{-3} \approx \frac{1}{R_c^3} - 3\frac{\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}}{R_c^5}$ . Por tanto:

$$\begin{aligned}
 \vec{M} &\approx -\frac{\mu}{R_c^3} \int_V \rho \times \vec{R}_c dm + 3\frac{\mu}{R_c^5} \int_V \rho \times \vec{R}_c (\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}) dm \\
 &= 3\frac{\mu}{R_c^5} \int_V \rho \times \vec{R}_c (\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}) dm = -3\frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c^\times \left( \int_V \vec{\rho} \vec{\rho}^T dm \right) \vec{R}_c \\
 &= 3\frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c^\times \mathcal{I} \vec{R}_c - 3\frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c^\times \left( \int_V (|\vec{\rho}|^2) dm \right) \vec{R}_c = 3\frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c^\times \mathcal{I} \vec{R}_c
 \end{aligned}$$



# Gradiente gravitatorio.

- Por tanto  $\vec{M} = 3 \frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c \times \mathcal{I} \vec{R}_c$ . En ejes  $A$ ,  $\vec{R}_c^A = [0 \ 0 \ -R_c]^T$ .  
Por tanto, en ejes  $B$ :

$$\vec{R}_c^B = C_A^B \vec{R}_c^A = -R_c \begin{bmatrix} -s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix}$$

- Luego:

$$\vec{M}^B = 3 \frac{\mu}{R_c^3} \begin{bmatrix} 0 & -c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix}$$

- Operando:

$$\begin{aligned} \vec{M}^B &= 3n^2 \begin{bmatrix} 0 & -c\theta_1 c^2\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\theta_2 l_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 l_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 l_3 \end{bmatrix} \\ &= 3n^2 \begin{bmatrix} -c\theta_1 c^2\theta_2 s\theta_1 (l_2 - l_3) \\ c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (l_3 - l_1) \\ s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (l_1 - l_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# Gradiente gravitatorio.

- Las ecuaciones de Euler que verifica la velocidad en ejes cuerpo son, por tanto:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = [\omega_2 \omega_3 - 3n^2 c\theta_1 c^2 \theta_2 s\theta_1] (I_2 - I_3)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = [\omega_1 \omega_3 + 3n^2 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2] (I_3 - I_1)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = [\omega_2 \omega_1 + 3n^2 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2] (I_1 - I_2)$$

- Por otro lado, puesto que

$$\vec{\omega}_{B/N}^B = \vec{\omega}_{B/A}^B + \vec{\omega}_{A/N}^B = \vec{\omega}_{B/A}^B + C_A^B \vec{\omega}_{A/N}^A, \text{ se tiene:}$$

$$\vec{\omega}_{B/A}^B = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} - C_A^B \begin{bmatrix} 0 \\ -n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} c\theta_2 s\theta_3 \\ c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ -s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \end{bmatrix}$$

- Y las ecuaciones cinemáticas son, operando:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c\theta_2} \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 s\theta_1 & s\theta_2 c\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \frac{n}{c\theta_2} \begin{bmatrix} s\theta_3 \\ c\theta_2 c\theta_3 \\ s\theta_2 s\theta_3 \end{bmatrix}$$



# Posición estable

- En primer lugar buscamos un equilibrio. Haciendo las derivadas cero, obtenemos:

$$0 = [\omega_2\omega_3 - 3n^2c\theta_1c^2\theta_2s\theta_1] (l_2 - l_3)$$

$$0 = [\omega_1\omega_3 + 3n^2c\theta_1c\theta_2s\theta_2] (l_3 - l_1)$$

$$0 = [\omega_2\omega_1 + 3n^2s\theta_1c\theta_2s\theta_2] (l_1 - l_2)$$

$$\vec{0} = \frac{1}{c\theta_2} \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2s\theta_1 & s\theta_2c\theta_1 \\ 0 & c\theta_1c\theta_2 & -s\theta_1c\theta_2 \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \frac{n}{c\theta_2} \begin{bmatrix} s\theta_3 \\ c\theta_2c\theta_3 \\ s\theta_2s\theta_3 \end{bmatrix}$$

- Un posible equilibrio sería  $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ,  $\omega_2 = -n$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ ,. Ojo: hay otros equilibrios (p.ej.  $\theta_1 = \pi$ ).
- Si los ángulos son pequeños, linealizamos las ecuaciones y obtenemos:

$$\dot{\omega}_1 = -[n\omega_3 + 3n^2\theta_1] (l_2 - l_3)$$

$$\dot{\omega}_2 = 3n^2\theta_2(l_3 - l_1)$$

$$\dot{\omega}_3 = -n\omega_1(l_1 - l_2)$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + n\theta_3$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2$$

$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 - n\theta_1$$



# Posición estable

- Tomando una derivada más en los ángulos obtenemos:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \dot{\omega}_1 + n\dot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_2 &= \dot{\omega}_2 \\ \ddot{\theta}_3 &= \dot{\omega}_3 - n\dot{\theta}_1\end{aligned}$$

- Sustituyendo las ecuaciones anteriores y eliminando las  $\omega_i$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}l_1\ddot{\theta}_1 &= -[n\dot{\theta}_3 + 4n^2\theta_1](l_2 - l_3) + nl_1\dot{\theta}_3 \\ l_2\ddot{\theta}_2 &= 3n^2\theta_2(l_3 - l_1) \\ l_3\ddot{\theta}_3 &= -n(\dot{\theta}_1 - n\theta_3)(l_1 - l_2) - nl_3\dot{\theta}_1\end{aligned}$$

- La segunda ecuación es estable si  $l_3 < l_1$ . Para la primera y tercera ecuaciones escribimos la matriz del sistema y calculamos sus autovalores:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4n^2 \frac{l_3 - l_2}{l_1} & 0 & 0 & n \frac{l_3 - l_2 + l_1}{l_1} \\ 0 & n^2 \frac{l_1 - l_2}{l_3} & n \frac{l_2 - l_1 - l_3}{l_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

- Definamos  $k_1 = \frac{l_2 - l_3}{l_1}$  y  $k_3 = \frac{l_2 - l_1}{l_3}$ . Puesto que  $l_1 + l_2 > l_3$ ,  $l_2 + l_3 > l_1$ ,  $l_1 + l_3 > l_2$ , se tiene  $k_1, k_3 \in [-1, 1]$ .



# Posición estable

- El sistema queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4n^2k_1 & 0 & 0 & n(1-k_1) \\ 0 & -n^2k_3 & n(k_3-1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

- Estudiando los autovalores de la matriz, encontramos el polinomio característico:

$\lambda^4 + \lambda^2 n^2 (1 + k_1 (3 + k_3)) + 4n^4 k_1 k_3 = 0$ , cuya solución es:

$$\lambda = \pm n \sqrt{\frac{-(1 + k_1 (3 + k_3)) \pm \sqrt{(1 + k_1 (3 + k_3))^2 - 16k_1 k_3}}{2}}$$

- Los autovalores serán estables si y sólo si las dos posibilidades dentro de la primera raíz son números negativos reales, es

decir:  $-(1 + k_1 (3 + k_3)) \pm \sqrt{(1 + k_1 (3 + k_3))^2 - 16k_1 k_3} < 0$ .

Esto sólo es posible:

- Si  $-(1 + k_1 (3 + k_3)) < 0$ , es decir,  $1 + k_1 (3 + k_3) > 0$ .
- Si  $\sqrt{(1 + k_1 (3 + k_3))^2 - 16k_1 k_3}$  es real, es decir,  $(1 + k_1 (3 + k_3))^2 - 16k_1 k_3 > 0$ .
- Si  $16k_1 k_3 > 0$  (si no la raíz sería mayor que el primer término y en el caso positivo saldría un número positivo dentro de la raíz)



# Posición estable

- Si representamos gráficamente estas condiciones, obtenemos la siguiente figura:

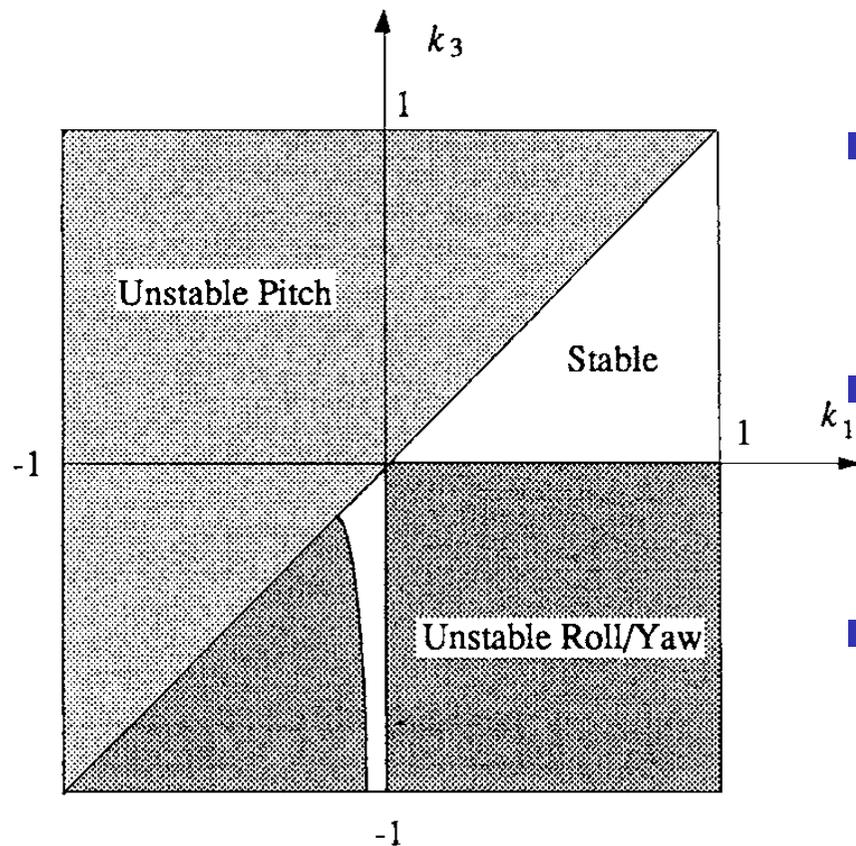


Fig. 6.9 Gravity-gradient stability plot.

- De  $16k_1k_3 > 0$ , obtenemos  $k_1$  y  $k_3$  o ambos positivos, o ambos negativos.
- Como  $I_3 < I_1$ , se comprueba calculando  $k_1 - k_3$  que se tiene que dar  $k_1 - k_3 > 0$ .
- Para  $k_1 > k_3 > 0$  obtenemos la llamada "región de Lagrange" (triángulo superior izquierdo).
- La otra región estable (llamada de "De Bra-Delp") se obtiene de  $(1 + k_1(3 + k_3))^2 - 16k_1k_3 > 0$ . No obstante la menor disipación de energía la hace inestable.



# Posición estable

- Si representamos gráficamente estas condiciones, obtenemos la siguiente figura:

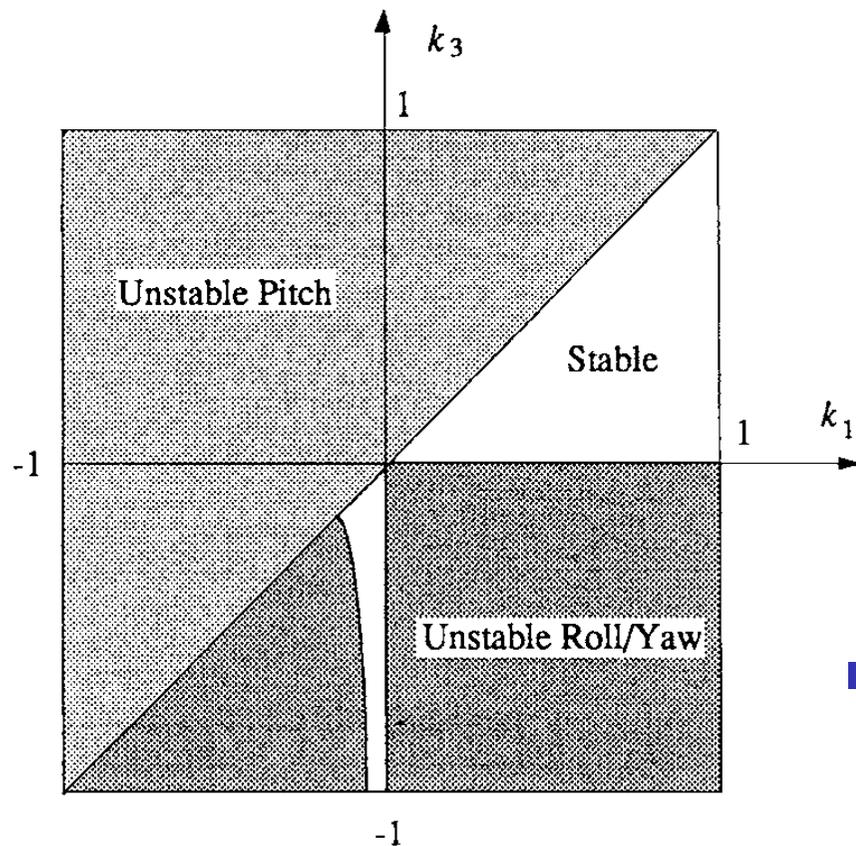


Fig. 6.9 Gravity-gradient stability plot.

- Por tanto la zona estable de interés práctico corresponde a  $k_1 > k_3 > 0$ , lo que se verifica para  $I_2 > I_1$  e  $I_2 > I_3$ . Antes obtuvimos  $I_3 < I_1$ . Luego el eje 2 (perpendicular al plano orbital) es el mayor, el eje 3 (en dirección al planeta) el menor, y el eje 1 (en la dirección de la velocidad) el intermedio.
- Hay que tener cuidado: los ángulos de equilibrio son 0 grados o también 180 grados (la actitud opuesta también es estable).

