

Dinámica de Vehículos Espaciales

Tema 5: Control de actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

26 de mayo de 2015



Control de actitud

- El sistema de control de actitud de los satélites se puede dividir a muy grandes rasgos en dos grandes tipos:
 - Satélites estabilizados por rotación: se aprovechan del efecto giroscópico para mantener una dirección inercialmente fija. Más barato y sencillo.
 - Satélites estabilizados en los tres ejes: utilizan algún mecanismo de control activo para mantener su actitud fija respecto a alguna referencia.
- Muchos satélites pueden usar los dos modos, según la fase de la misión (particularmente sondas interplanetarias).
- También se pueden estabilizar satélites utilizando el gradiente gravitatorio (no requiere control activo de ningún tipo, pero es poco preciso), o mediante algún sistema de rotación doble (esencialmente similares a los estabilizados por rotación). En las siguientes transparencias veremos los tipos de estabilización comúnmente empleados.



Métodos de control de actitud

- Otra clasificación de los métodos de control de actitud en dos clases: control activo y control pasivo.
- No obstante, la palabra pasivo tiene, en teoría de control, varias interpretaciones.
 - Control pasivo en el sentido energético: un sistema de control que no requiere ningún tipo de fuente de energía adicional para su funcionamiento.
 - Pasivo en el sentido estructural: un sistema de control que carece de lógica de comando, es decir, no necesita ningún tipo de procesamiento de información para su actuación, puesto que aprovecha algún tipo de efecto físico o natural.
 - Además, existe el concepto de “Sistema Pasivo”, una definición matemática utilizada en control no lineal.
- Ésto no se debe confundir con la distinción entre Bucle Abierto y Bucle Cerrado.
- Los sistemas que denominaremos de Control Pasivo no lo son estrictamente, sino que en general incorporan algún elemento activo complementario.

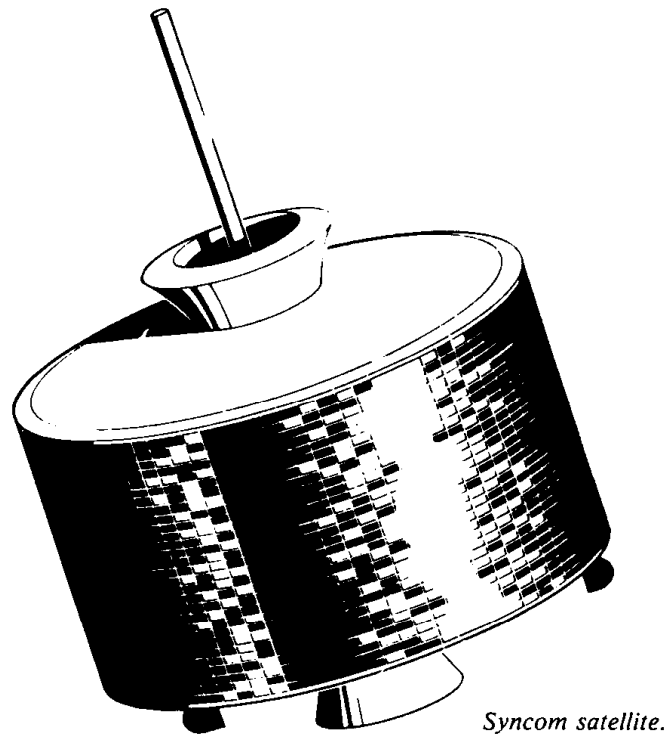


Sistemas de control pasivos

- Los sistemas de Control Pasivo típicamente encontrados en vehículos espaciales son los siguientes:
 - Estabilización por rotación (spin stabilized systems).
 - Estabilización por rotación doble (dual-spin stabilized systems).
 - Estabilización por gradiente gravitatorio (G^2).
 - Estabilización por volante de inercia (bias-momentum stabilized systems). Éste método también se puede considerar activo.
 - Estabilización por momentos magnéticos. Éste método también se puede considerar activo.

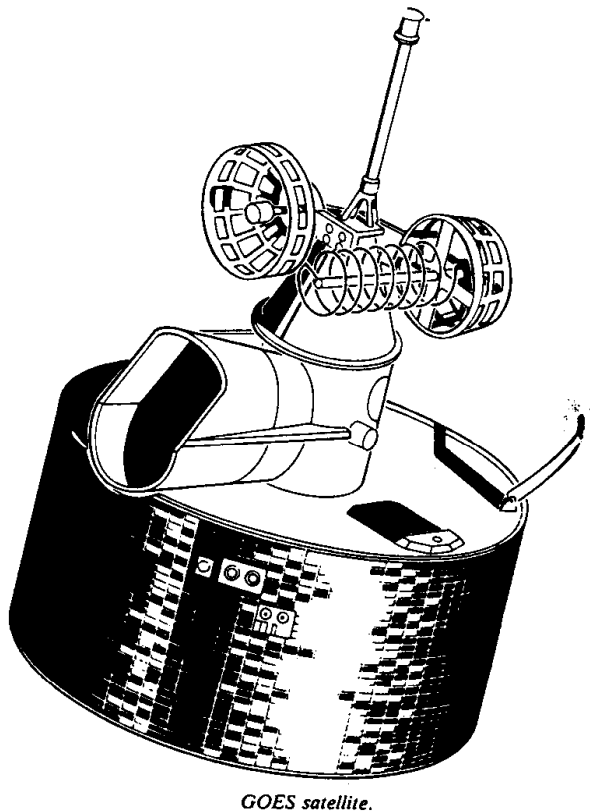


Estabilización por rotación



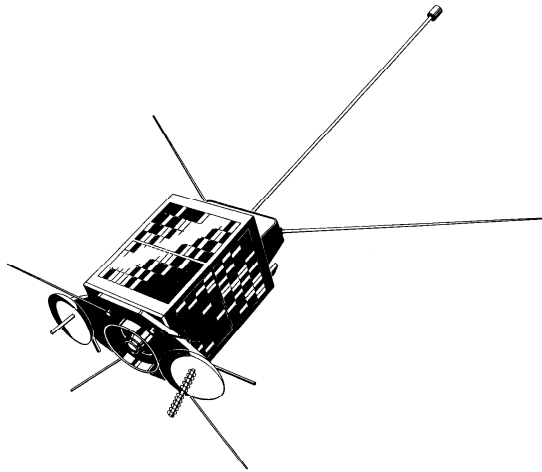
- Estabilización por rotación: Sistema simple y económico para estabilizar la actitud.
- Si el sistema es puramente pasivo, el eje de rotación debe ser el eje mayor.
- Típico en vehículos con simetría de revolución, que deben ser oblatos y no prolatos.
- Las perturbaciones provocarán un movimiento de nutación del eje de rotación, que puede ser eliminado mediante amortiguadores de nutación.
- Para acelerar o frenar la rotación se emplean propulsores o (para frenar) sistemas yo-yo.
- Los propulsores también se pueden emplear para re-orientar el eje de rotación (coning o “coneo”).

Estabilización por rotación doble



- Estabilización por rotación doble: Cuando se requiere mayor precisión de actitud o por requisitos de lanzamiento el vehículo no puede ser oblato, se recurre al sistema de estabilización de rotación doble.
- Una parte del vehículo (rotor) gira a una cierta velocidad, mientras que otra parte del vehículo (plataforma o estator) no gira o rota muy despacio.
- En la plataforma se suelen ubicar instrumentos de medida.
- Si el rotor adquiere el suficiente momento cinético, la rotación puede ser alrededor del eje menor o incluso el intermedio, permitiendo mayor libertad en la forma del vehículo y mejorando la maniobrabilidad.

Estabilización mediante gradiente gravitatorio



- El G^2 puede ser utilizado para estabilizar de forma simple y barata, de forma que siempre se apunte a un cuerpo central y la órbita sea casi-circular.
- Es un mecanismo lento y poco preciso, requiere elementos disipadores.
- Proporciona baja maniobrabilidad y poca estabilidad en guiñada.

- El gradiente gravitatorio tiende a alinear el eje menor con la vertical local, el eje intermedio con la dirección de la órbita y el eje mayor perpendicular al plano de la órbita, lo que debe ser considerado en el diseño.



Estabilización mediante gradiente gravitatorio

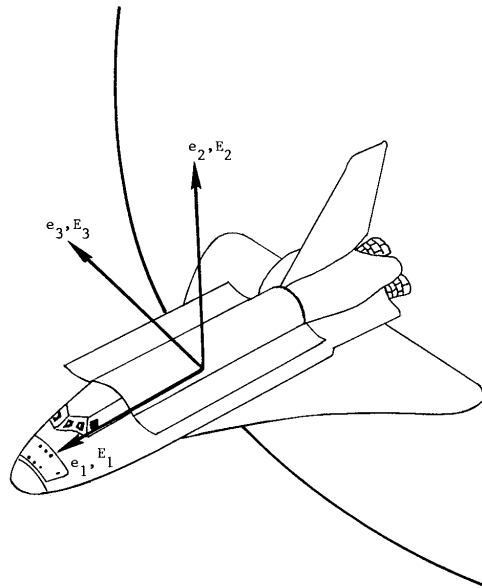


Figure 7.9 Space Shuttle body axes.

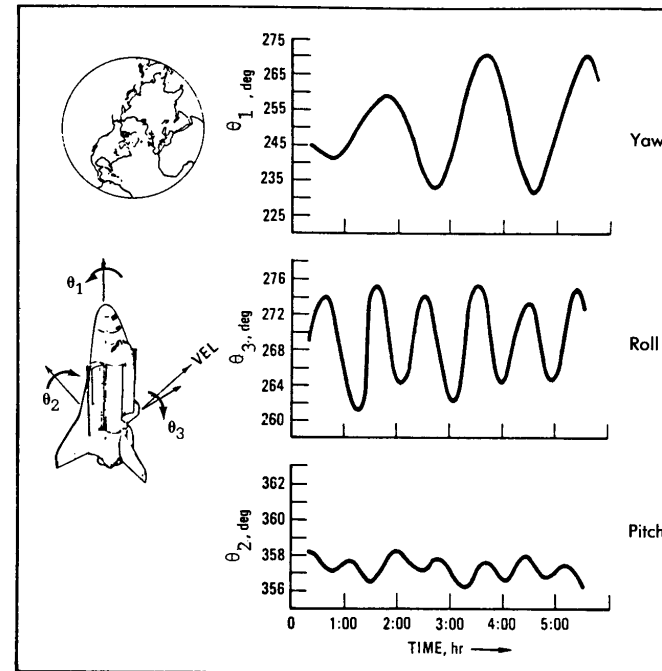
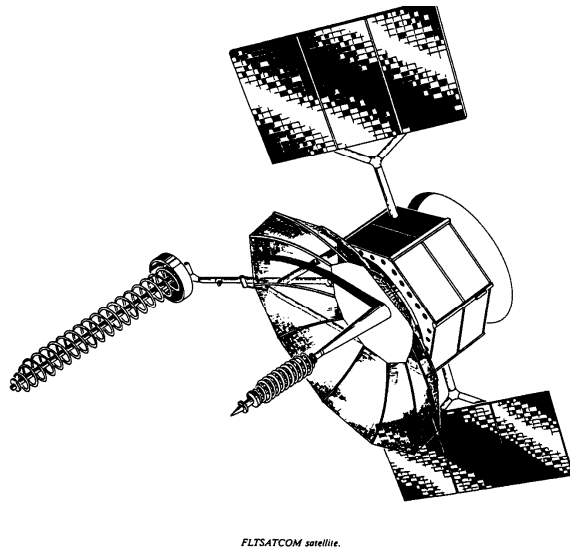


Figure 7.10 Space Shuttle attitude excursions in gravity gradient mode in an orbital coordinate frame.

- El G^2 en algunos casos es un mecanismo secundario, para ahorrar combustible en los momentos en los que no es crítico una actitud precisa.
- Los satélites de más larga vida incorporan este tipo de estabilización.

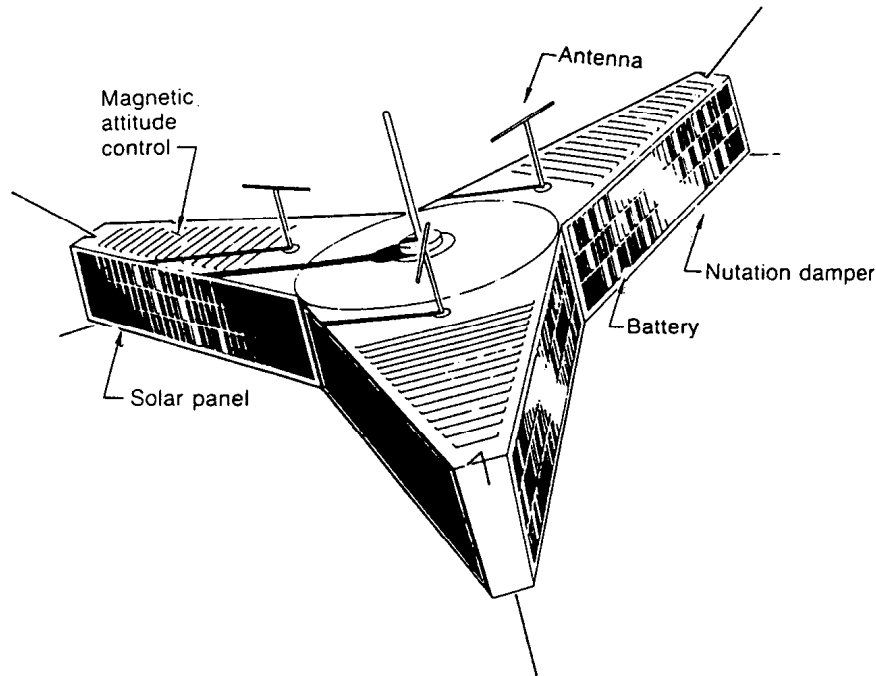


Estabilización con volante de inercia



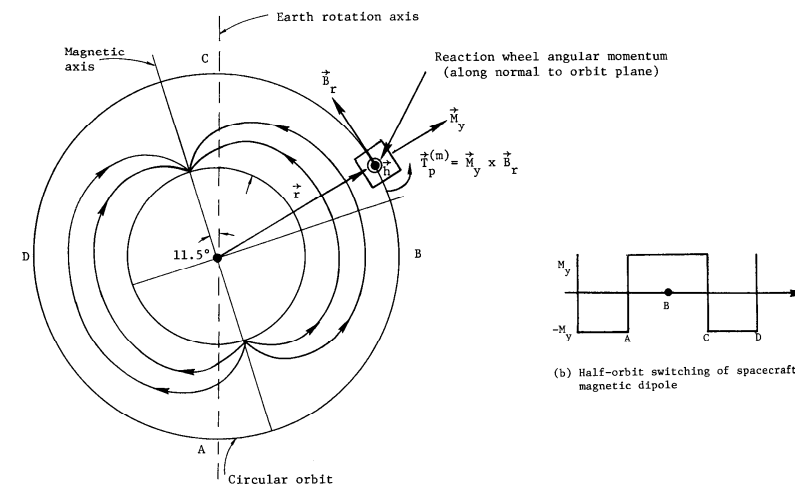
- El mismo concepto de los sistemas de rotación doble se puede incorporar a un vehículo espacial con una rueda interna (volante de inercia) rotando a una cierta velocidad base, eliminando así la necesidad de elementos externos rotatorios.
- Además se puede emplear como parte de un sistema de control activo.
- El volante de inercia se suele colocar con el eje perpendicular al plano orbital, combinándose con el G^2 .
- Para realizar maniobras en el plano orbital, si se acelera o frena el volante, provoca que el vehículo rote en la dirección opuesta, por conservación del momento cinético.

Estabilización por momentos magnéticos



- Usando magnetopares, se puede aprovechar el campo magnético de la Tierra para orientar un vehículo mediante las fuerzas de Lorenz.

- Sólo útil en órbita baja de planetas con campo magnético de suficiente intensidad.
- Puesto que el campo magnético de la Tierra siempre apunta hacia el Norte, se debe cambiar la polaridad de los actuadores cada media órbita.

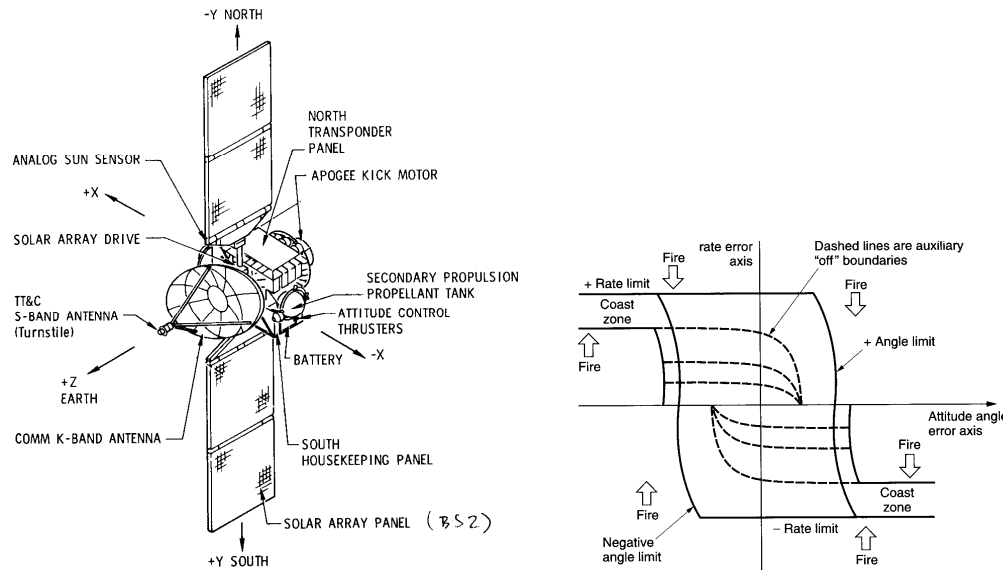


Sistemas de control activos

- Los sistemas de Control Pasivo permiten un nivel de estabilidad adecuado para muchas aplicaciones
- No obstante (sobre todo al principio de su vida útil), todos los vehículos necesitan realizar:
 - Maniobras de actitud.
 - Ajustes de la velocidad de rotación
 - Maniobras de stationkeeping (mantener el apuntamiento a la estación o estaciones base).
- Para ello es necesario un sistema de control que será activo tanto en el sentido energético como en el estructural, precisando de una fuente de energía y una lógica de control.
- En misiones que requieran gran precisión en la actitud dicho sistema será primario. En este caso se dice que el satélite está **estabilizado en tres ejes** o triaxialmente estabilizado.
- En otros casos puede ser un sistema secundario que sólo se activará cuando sea necesario.



Sistemas de Control de Reacción (RCS)



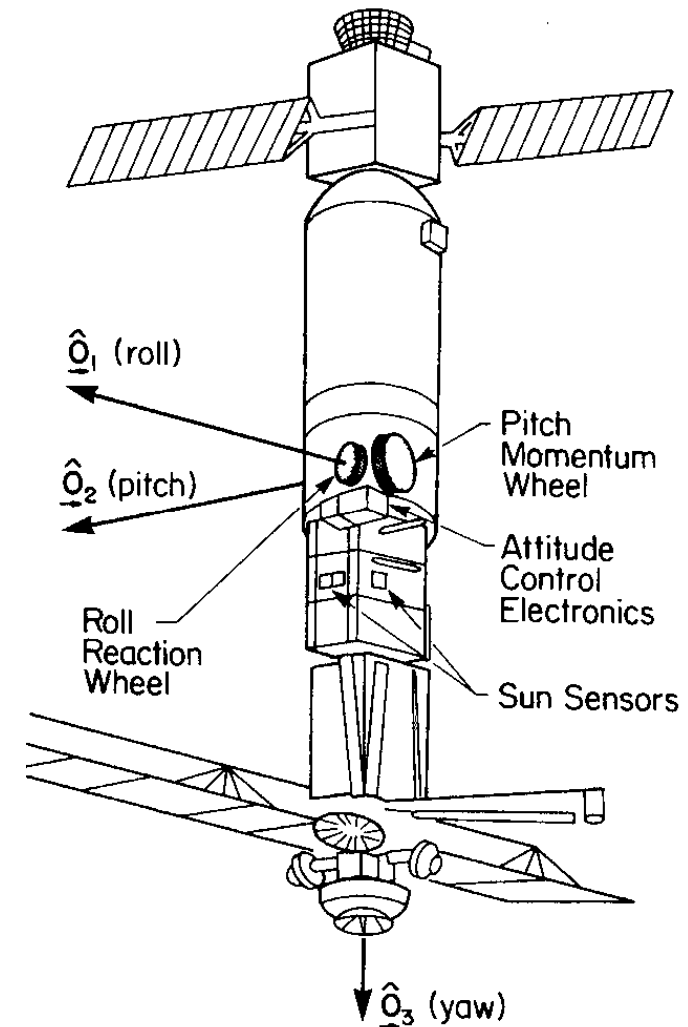
- En sistemas que requieran elevada y/o rápida maniobrabilidad, se emplea un sistema de control de reacción o RCS, que emplea un conjunto de propulsores distribuidos por el vehículo para modificar la actitud.

- La llamada “lógica de propulsión” establece cuando se disparan los propulsores y cuando se acepta un pequeño error de actitud/velocidad.
- Normalmente es una combinación de “zonas muertas” (sin actuación) e histéresis (para evitar el disparo repetitivo de propulsores).
- Además los propulsores suelen ser actuadores “todo o nada”, con lo que siempre actúan en saturación.
- Por tanto un RCS es intrínsecamente no-lineal.



Sistemas de Intercambio de Momento Cinético

- Para la mayor precisión de actitud, maniobrabilidad en los tres ejes y estabilización en cualquier orientación independientemente de los momentos de inercia, se usan sistemas de intercambio de momento angular que usan ruedas de reacción, volantes de inercia y/o CMGs, basados en la conservación del momento cinético.
- No obstante es un sistema caro, poco tolerante a fallos, y requiere un sistema propulsivo auxiliar (en algunos casos magnetopares) para descargar el momento de las ruedas y así evitar la saturación.



Diseño de un ADCS

- En las siguientes transparencias estudiaremos diferentes consideraciones a la hora de diseñar un ADCS (considerando tanto la parte de control como la de estimación).
- En primer lugar estudiaremos los requisitos y con estos se relacionan con otros subsistemas (trade-offs).
- En base a los requisitos expondremos los métodos antes vistos.
- Estudiaremos con más detalle los requisitos de maniobra y de las cargas útiles.



Diseño de un ADCS

■ Requisitos típicos de un ADCS

TABLE 11-3. Typical Attitude Determination and Control Performance Requirements.
Requirements need to be specified for each mode. The following lists the areas of performance frequently specified.

Area	Definition*	Examples/Comments
DETERMINATION		
<i>Accuracy</i>	How well a vehicle's orientation with respect to an absolute reference is known	0.25 deg, 3 σ , all axes; may be real-time or post-processed on the ground
<i>Range</i>	Range of angular motion over which accuracy must be met	Any attitude within 30 deg of nadir
CONTROL		
<i>Accuracy</i>	How well the vehicle attitude can be controlled with respect to a commanded direction	0.25 deg, 3 σ ; includes determination and control errors, may be taken with respect to an Inertial or Earth-fixed reference
<i>Range</i>	Range of angular motion over which control performance must be met	All attitudes, within 50 deg of nadir, within 20 deg of Sun
<i>Jitter</i>	A specified angle bound or angular rate limit on short-term, high-frequency motion	0.1 deg over 1 min, 1 deg/s, 1 to 20 Hz; usually specified to keep spacecraft motion from blurring sensor data
<i>Drift</i>	A limit on slow, low-frequency vehicle motion. Usually expressed as angle/time.	1 deg/hr, 5 deg max. Used when vehicle may drift off target with infrequent resets (especially if actual direction is known)
<i>Settling Time</i>	Specifies allowed time to recover from maneuvers or upsets.	2 deg max motion, decaying to < 0.1 deg in 1 min; may be used to limit overshoot, ringing, or nutation

* Definitions vary with procuring and designing agencies, especially in details (e.g., 1 or 3 σ , amount of averaging or filtering allowed). It is always best to define exactly what is required.



Diseño de un ADCS

- Estudio de los requisitos derivados de/hacia otros subsistemas

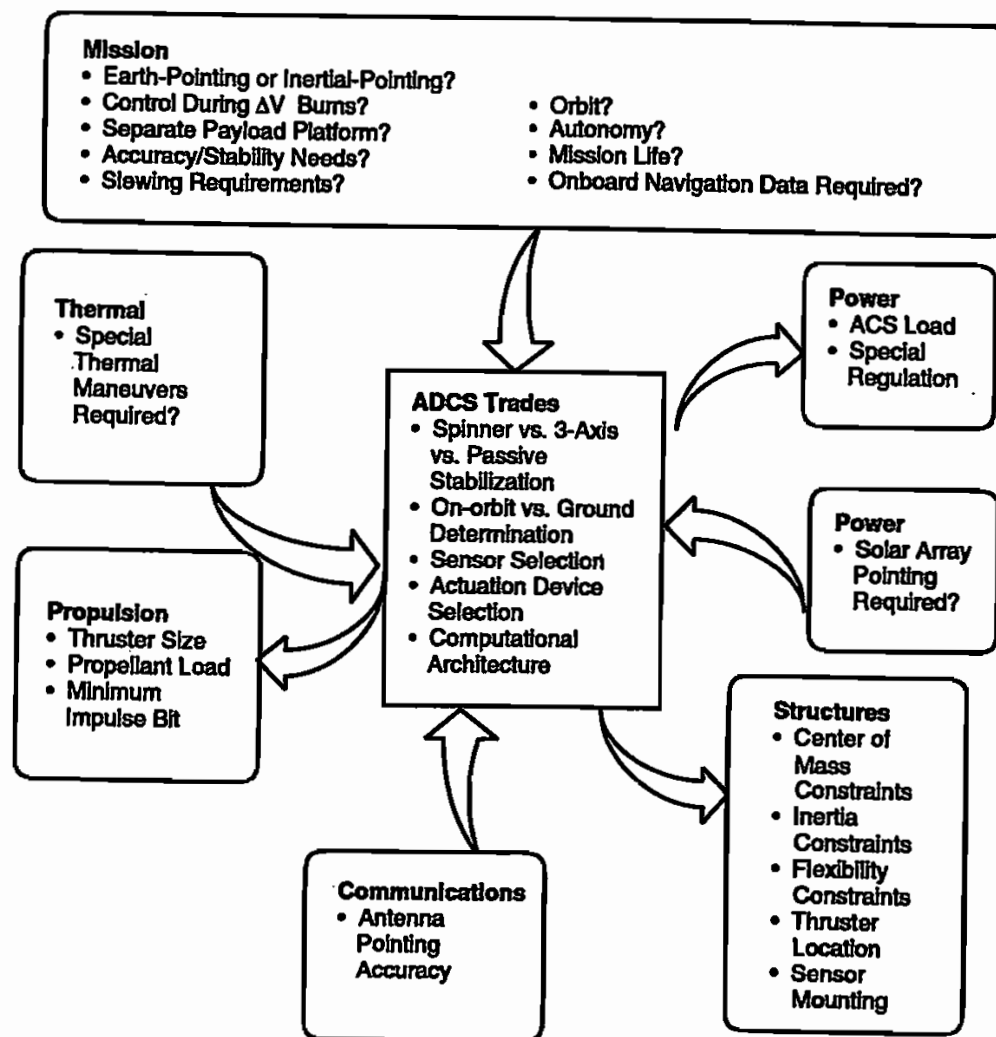


Fig. 11-2. The Impact of Mission Requirements and Other Subsystems on the ADCS Subsystem. Direction of arrows shows requirements flow from one subsystem to another.



Diseño de un ADCS

■ Selección del sistema o sistemas a utilizar

TABLE 11-4. Attitude Control Methods and Their Capabilities. As requirements become tighter, more complex control systems become necessary.

Type	Pointing Options	Attitude Maneuverability	Typical Accuracy	Lifetime Limits
<i>Gravity-gradient</i>	Earth local vertical only	Very limited	± 5 deg (2 axes)	None
<i>Gravity-gradient and Momentum Bias Wheel</i>	Earth local vertical only	Very limited	± 5 deg (3 axes)	Life of wheel bearings
<i>Passive Magnetic</i>	North/south only	Very limited	± 5 deg (2 axes)	None
<i>Pure Spin Stabilization</i>	Inertially fixed any direction Repoint with precession maneuvers	High propellant usage to move stiff momentum vector	± 0.1 deg to ± 1 deg in 2 axes (proportional to spin rate)	Thruster propellant (if applies)*
<i>Dual-Spin Stabilization</i>	Limited only by articulation on despun platform	Momentum vector same as above Despun platform constrained by its own geometry	Same as above for spin section Despun dictated by payload reference and pointing	Thruster propellant (if applies)* Despin bearings
<i>Bias Momentum (1 wheel)</i>	Best suited for local vertical pointing	Momentum vector of the bias wheel prefers to stay normal to orbit plane, constraining yaw maneuver	± 0.1 deg to ± 1 deg	Propellant (if applies)* Life of sensor and wheel bearings
<i>Zero Momentum (thruster only)</i>	No constraints	No constraints High rates possible	± 0.1 deg to ± 5 deg	Propellant
<i>Zero Momentum (3 wheels)</i>	No constraints	No constraints	± 0.001 deg to ± 1 deg	Propellant (if applies)* Life of sensor and wheel bearings
<i>Zero Momentum CMG</i>	No constraints	No constraints High rates possible	± 0.001 deg to ± 1 deg	Propellant (if applies)* Life of sensor and wheel bearings



Diseño de un ADCS

■ Efecto de los requisitos en los sistemas a elegir

TABLE 11-8. Effect of Control Accuracy on Sensor Selection and ADCS Design. Accurate pointing requires better, higher cost, sensors, and actuators.

Required Accuracy (3σ)	Effect on Spacecraft	Effect on ADCS
> 5 deg	- Permits major cost savings - Permits gravity-gradient (GG) stabilization	Without attitude determination - No sensors required for GG stabilization - Boom motor, GG damper, and a bias momentum wheel are only required actuators With attitude determination - Sun sensors & magnetometer adequate for attitude determination at ≥ 2 deg - Higher accuracies may require star trackers or horizon sensors
1 deg to 5 deg	- GG not feasible - Spin stabilization feasible if stiff, inertially fixed attitude is acceptable - Payload needs may require despun platform on spinner 3-axis stabilization will work	- Sun sensors and horizon sensors may be adequate for sensors, especially a spinner - Accuracy for 3-axis stabilization can be met with RCS deadband control but reaction wheels will save propellant for long missions - Thrusters and damper adequate for spinner actuators - Magnetic torquers (and magnetometer) useful
0.1 deg to 1 deg	3-axis and momentum-bias stabilization feasible - Dual-spin stabilization also feasible	- Need for accurate attitude reference leads to star tracker or horizon sensors & possibly gyros - Reaction wheels typical with thrusters for momentum unloading and coarse control - Magnetic torquers feasible on light vehicles (magnetometer also required)
< 0.1 deg	3-axis stabilization is necessary - May require articulated & vibration-isolated payload platform with separate sensors	- Same as above for 0.1 deg to 1 deg but needs star sensor and better class of gyros - Control laws and computational needs are more complex - Flexible body performance very important



Diseño de un ADCS

- Efecto de los requisitos de maniobras en los sistemas a elegir

TABLE 11-7. Slewing Requirements That Affect Control Actuator Selection. Spacecraft slew agility can demand larger actuators for intermittent use.

Slewing	Effect on Spacecraft	Effect on ADCS
None	Spacecraft constrained to one attitude—highly improbable	• Reaction wheels, if planned, can be smaller • If magnetic torque can dump momentum, may not need thrusters
Nominal rates— 0.05 deg/s (maintain local vertical) to 0.5 deg/s	Minimal	• Thrusters very likely • Reaction wheels adequate by themselves only for a few special cases
High rates— > 0.5 deg/s	• Structural impact on appendages • Weight and cost increase	• Control moment gyros very likely or two thruster force levels—one for stationkeeping and one for high-rate maneuvers



Diseño de un ADCS

■ Efecto de los requisitos de la carga útil en los sistemas a elegir

TABLE 11-6. Effect of Payload Pointing Directions on ADCS Design. The payload pointing requirements are usually the most important factors for determining the type of actuators and sensors.

Requirement	Effect on Spacecraft	Effect on ADCS
Earth-pointing • Nadir (Earth) pointing • Scanning • Off-nadir pointing	• Gravity-gradient fine for low accuracies (>1 deg) only • 3-axis stabilization acceptable with Earth local vertical reference	If gravity-gradient • Booms, dampers, Sun sensors, magnetometer or horizon sensors for attitude determination • Momentum wheel for yaw control If 3-axis • Horizon sensor for local vertical reference (pitch and roll) • Sun or star sensor for third-axis reference and attitude determination • Reaction wheels, momentum wheels, or control moment gyros for accurate pointing and propellant conservation • Reaction control system for coarse control and momentum dumping • Magnetic torquers can also dump momentum • Inertial measurement unit for maneuvers and attitude determination
Inertial pointing • Sun • Celestial targets • Payload targets of opportunity	• Spin stabilization fine for medium accuracies with few attitude maneuvers • Gravity gradient does not apply • 3-axis control is most versatile for frequent reorientations	If spin • Payload pointing and attitude sensor operations limited without despun platform • Needs thrusters to reorient momentum vector • Requires nutation damping If 3-axis • Typically, sensors include Sun sensors, star tracker, and inertial measurement unit • Reaction wheels and thrusters are typical actuators • May require articulated payload (e.g., scan platform)



Control de un satélite estabilizado por rotación

- Por la regla del eje mayor sabemos que un satélite rotando en torno a su eje mayor es estable; además hemos estudiado que su respuesta a perturbaciones externas es un movimiento de precesión y nutación, que terminará disipándose.
- Los objetivos de un sistema de control para un satélite estabilizado por rotación pueden ser:
 - Iniciar o incrementar la rotación.
 - Aumentar la estabilidad de la rotación.
 - Modificar la dirección del eje de rotación.
 - Frenar la rotación.
- El primer objetivo es trivial de conseguir con toberas propulsivas, aunque muchas veces los satélites empiezan con una cierta rotación que ya poseía el vehículo lanzador (tal vez en el eje equivocado).
- El segundo objetivo se puede conseguir con disipadores de nutación, que aumentan la disipación de energía y por tanto refuerzan la regla del eje mayor (ver tema 2).



Modificar el eje de rotación

- Una forma de modificar el eje de rotación sería frenar dicha rotación, entonces modificar el eje con otra rotación, y posteriormente volver a hacer rotar el eje. No obstante este procedimiento sería lento y caro en términos de gasto de combustible. Veamos otro procedimiento, la llamada maniobra de “coning”.
- Para simplificar nos centramos en el caso axisimétrico ($I_1 = I_2 = I < I_3$) y consideramos que podemos realizar maniobras impulsivas: podemos modificar el momento cinético instantáneamente en un $\Delta \Gamma$ usando toberas.
- Inicialmente, sea una rotación pura n en torno al eje 3 (eje de simetría y mayor), de forma que $\vec{\omega}$ y $\vec{\Gamma}$ están alineados.
- Recordemos el estudio del movimiento forzado (efecto giroscópico): sabemos que si aplicamos un par perpendicular al eje 3, se produce un movimiento de precesión y nutación.



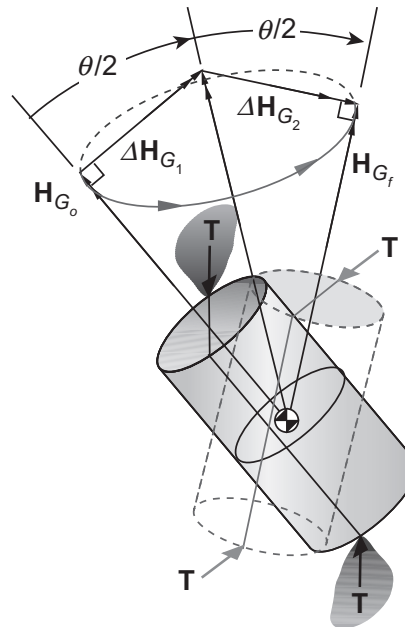
Modificar el eje de rotación

- Para simplificar, vamos a suponer, en vez de usar el movimiento forzado, que podemos modificar “instantáneamente” $\vec{\Gamma}$, con impulsos casi instantáneos, de forma que $\vec{\Gamma}_f = \vec{\Gamma}_i + \Delta\vec{\Gamma}$
- En el tema 3 estudiamos que el movimiento libre de un satélite axisimétrico rotando en torno a su eje de simetría era un movimiento de precesión, de forma que la velocidad angular $\vec{\omega}$ rota formando un cono en torno al momento cinético $\vec{\Gamma}$.
- Por tanto con la hipótesis de cambio de momento cinético instantáneo eliminamos el movimiento de nutación, que complica el problema, y podemos usar los resultados exactos del movimiento libre de un sólido axisimétrico.



Coning

- Supongamos que se quiere girar el eje de rotación un ángulo θ .
- La idea es aplicar un $\Delta \vec{\Gamma}$ de forma que el nuevo $\vec{\Gamma}$ forme un ángulo $\theta/2$ con la velocidad angular. Esto causará que la velocidad angular gire en torno al nuevo $\vec{\Gamma}$ formando un cono y cuando haya girado un ángulo de 180 grados habrá girado un ángulo θ respecto a su antigua posición. Entonces se aplica un nuevo $\Delta \vec{\Gamma}$ de forma que el $\vec{\Gamma}$ final sea paralelo a la velocidad angular. En la figura, $\mathbf{H_G} = \vec{\Gamma}$.



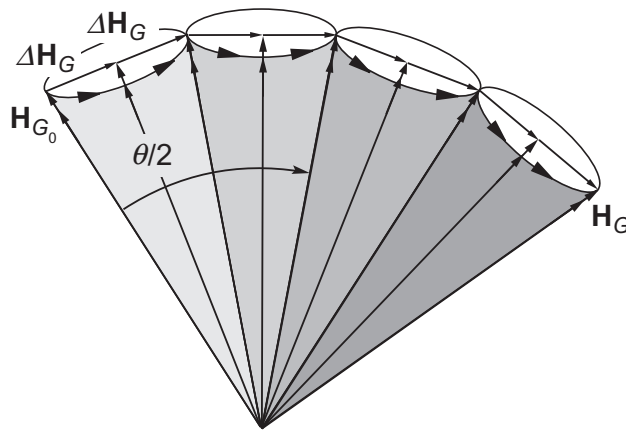
Coning

- De la figura, se ve que $\Delta\Gamma_1 = \Delta\Gamma_2 = \Gamma \tan \theta/2$, luego el total $\Delta\Gamma_{coning} = 2\Gamma \tan \theta/2$. El momento cinético final es igual al inicial (el intermedio es ligeramente mayor: $\frac{\Gamma}{\cos \theta/2}$).
- El tiempo que se tarda en realizar la maniobra será π (media vuelta) dividido por la velocidad angular de precesión: $t = \frac{\pi}{\dot{\phi}}$.
- Como del tema 3 se tiene $\dot{\phi} = \frac{I_3 n}{I \cos \theta/2} = \frac{\Gamma}{I \cos \theta/2}$, se tiene $t = \frac{\pi I \cos \theta/2}{\Gamma}$.
- Por otro lado durante ese tiempo el cuerpo habrá rotado respecto a su eje de simetría, en ejes cuerpo (ver tema 2), un ángulo $\psi = t\lambda = \frac{\pi I \cos \theta/2}{\Gamma} \frac{n(I-I_3)}{I} = \frac{\pi(I-I_3) \cos \theta/2}{I_3}$.
- En general este ángulo no será 180 grados (a menos que $\frac{(I-I_3) \cos \theta/2}{I_3} = 1$) luego habrá que usar un par de toberas distintas a las que se usaron para empezar la maniobra.



Coning múltiple

- Una idea para reducir el consumo de combustible (o para ángulos de giro demasiado grandes) es dividir la maniobra de coning en m pequeñas maniobras intermedias, como se ve en la figura:



- En cada maniobra hay que rotar Γ un ángulo $\theta/2m$ y esperar un giro de 180 grados.
- El consumo total será $\Delta\Gamma_{coning} = 2m\Gamma \tan \theta/2m$ (si m es grande tiende a $\theta\Gamma$, merece la pena para ángulos grandes).
- El tiempo de maniobra será $t = \frac{m\pi I \cos \theta/2m}{\Gamma}$ (si m es grande tiende a infinito).



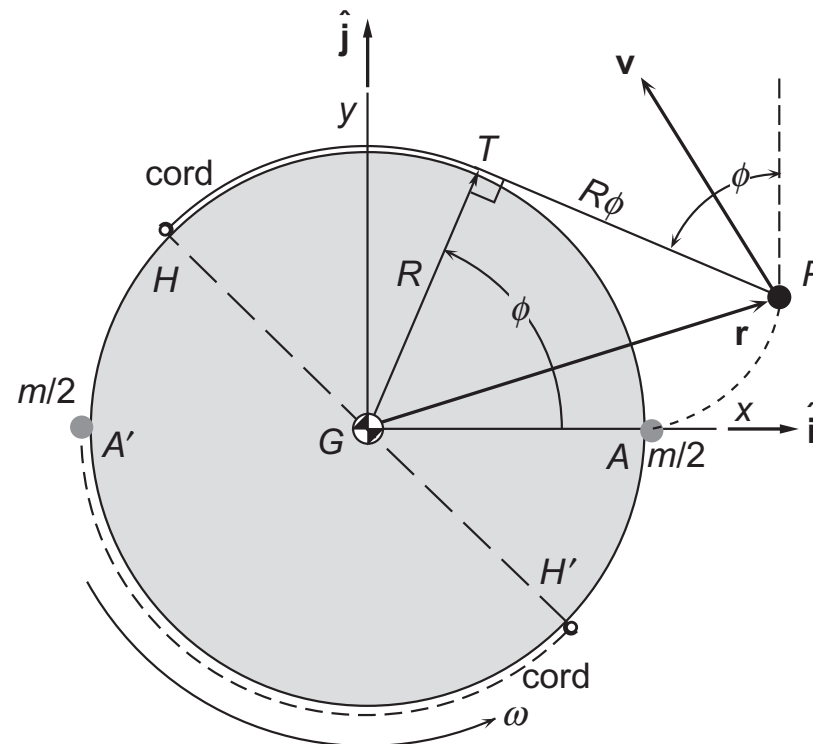
Frenar la rotación: mecanismo yo-yo

- El mecanismo yo-yo es un dispositivo de un único uso que se emplea para frenar total o parcialmente la rotación de un vehículo. El mecanismo consiste en dos masas simétricas fijadas al vehículo por una unión que se puede liberar, y a su vez unidas a un hilo que está fijado en otro punto al vehículo. Todo esto en un plano perpendicular a la rotación que se pretende frenar.
- Para frenar la rotación, se liberan las masas; éstas se empiezan a separar del vehículo y el hilo comienza a tensarse, hasta que se tensa en el punto donde está fijado en el vehículo y entonces también se libera el hilo. Si la longitud del hilo está bien diseñada, en este punto se habrá frenado el vehículo.
- Hipótesis: las masas se consideran puntuales de masa $m/2$, el hilo no tiene masa y no es flexible, vehículo axilissimétrico de radio R rotando inicialmente en su eje de simetría con velocidad n_0 .

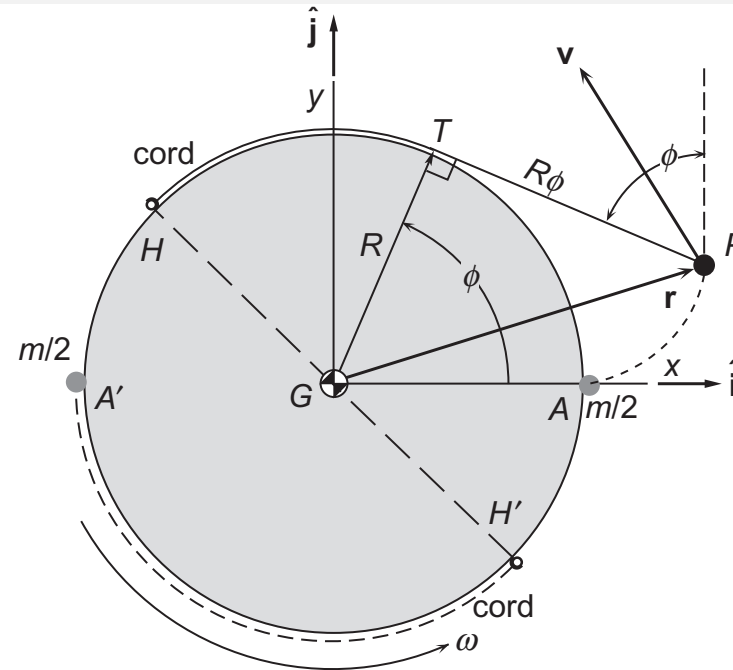


Mecanismo yo-yo

- Inicialmente, la energía cinética es $T_0 = \frac{1}{2} (I_3 n_0^2 + mR^2 n_0^2)$ y el momento cinético inicial $\Gamma_0 = I_3 n_0 + mR^2 n_0$. Usando el parámetro $K = 1 + \frac{I_3}{mR^2}$, podemos escribir $T_0 = \frac{1}{2} mR^2 K n_0^2$ y $\Gamma_0 = mR^2 K n_0$.
- La situación en un momento intermedio es la de la figura:



Mecanismo yo-yo



- Para frenar la rotación, se liberan las masas; éstas se empiezan a separar del vehículo y el hilo comienza a tensarse, hasta que se tensa en el punto donde está fijado en el vehículo y entonces también se libera el hilo. Si la longitud del hilo está bien diseñada, en este punto se habrá frenado el vehículo.
- Hipótesis: las masas se consideran puntuales, el hilo no tiene masa y no es flexible, vehículo axilisimétrico rotando inicialmente en su eje de simetría con velocidad n_0 .



Mecanismo yo-yo

- En la figura, el hilo se ha soltado ya un ángulo ϕ , y el vector $\vec{r}$ es el vector de posición de una de las masas (la otra tiene una posición simétrica, por lo que basta estudiar una de ellas). Por las hipótesis el hilo estará tangente justo en el punto T hasta donde se ha soltado. Usamos unos ejes móviles con el cuerpo $\vec{i}$ y $\vec{j}$ como en la figura.
- En estos ejes, $\vec{r}$ se escribirá como la suma
$$\vec{r} = \vec{GT} + \vec{TP} = R(\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}) + R\phi(\sin \phi \vec{i} - \cos \phi \vec{j}).$$
- Para hallar la energía cinética y el momento cinético en este estado intermedio necesitamos la velocidad (inercial). Se tiene

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}|_{IN} = \dot{\vec{r}}|_{ROT} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

donde $\vec{\omega} = n\vec{k}$.

- Operando, $\dot{\vec{r}}|_{ROT} = \dot{\phi}R\phi(\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j})$ y
$$\vec{\omega} \times \vec{r} = nR(\cos \phi \vec{j} - \sin \phi \vec{i}) + nR\phi(\sin \phi \vec{j} + \cos \phi \vec{i}).$$



Mecanismo yo-yo

- Por tanto

$$\vec{v} = R \left((\dot{\phi} + n)\phi \cos \phi - n \sin \phi \right) \vec{i} + R \left((\dot{\phi} + n)\phi \sin \phi + n \cos \phi \right) \vec{j}.$$

- Calculando el módulo de la velocidad:

$$v = R \sqrt{\left((\dot{\phi} + n)\phi \cos \phi - n \sin \phi \right)^2 + \left((\dot{\phi} + n)\phi \sin \phi + n \cos \phi \right)^2}.$$

- Operando: $v = R \sqrt{(\dot{\phi} + n)^2 \phi^2 + n^2}.$

- Por tanto, $T = \frac{1}{2} \left(I_3 n^2 + m R^2 ((\dot{\phi} + n)^2 \phi^2 + n^2) \right)$ y usando el parámetro K , $T = \frac{m R^2}{2} \left(K n^2 + (\dot{\phi} + n)^2 \phi^2 \right).$

- Por otro lado el momento cinético de las masas será $\Gamma_m = |\vec{r} \times m \vec{v}|$. Efectuando este producto hallamos $\Gamma_m = m R^2 (n + (n + \dot{\phi}) \phi^2).$

- Luego $\Gamma = I_3 n + m R^2 (n + (n + \dot{\phi}) \phi^2) = m R^2 (K n + (n + \dot{\phi}) \phi^2).$



Mecanismo yo-yo

- Aplicando conservación del momento cinético y conservación de la energía: $T = T_0$, $\Gamma = \Gamma_0$, llegamos a dos ecuaciones:

$$K(n_0^2 - n^2) = (\dot{\phi} + n)^2 \phi^2, \quad K(n_0 - n) = (n + \dot{\phi})\phi^2$$

- Dividiendo la primera por la segunda, obtenemos $n_0 + n = n + \dot{\phi}$, luego $\dot{\phi} = n_0$, es decir, la tasa de “desenrollamiento” del hilo es igual a la velocidad angular inicial del vehículo durante todo el proceso. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación y despejando ϕ , hallamos el ángulo de hilo suelto en función de la velocidad actual:

$$\phi = \sqrt{K \frac{n_0 - n}{n_0 + n}}$$

- Si queremos que al final del proceso $n = 0$, sustituyendo, llegamos a $\phi = \sqrt{K}$, y puesto que la longitud de hilo $l = R\phi$, obtenemos $l = R\sqrt{K}$, independiente de la velocidad inicial!
- Se puede encontrar longitud de hilo apropiada para cualquier valor de $n \in (-n_0, n_0)$.



Satélites estabilizados en tres ejes

- Los satélites estabilizados en tres ejes pueden tener cualquier tipo de apuntamiento (inercial, orbital...).
- Los objetivos pueden ser dos: mantener al satélite de forma estable en una actitud prefijada (estabilización) o realizar una maniobra de actitud (bien sea un seguimiento—tracking— o simplemente cambiar de una actitud a otra).
- En primer lugar nos centraremos en el objetivo de estabilización de una cierta actitud inercialmente fija (es decir sin velocidades angulares, lo que sería un apuntamiento inercial); el objetivo de modificar la actitud es más complicado.
- Estudiaremos este objetivo para los dos tipos de actuadores: ruedas y volantes de inercia, y sistemas de control de reacción.
- En segundo lugar consideraremos el objetivo de pasar de una actitud inicial a otra final, sólo para el caso de ruedas y volantes de inercia.



Vehículo con ruedas y volante de inercia

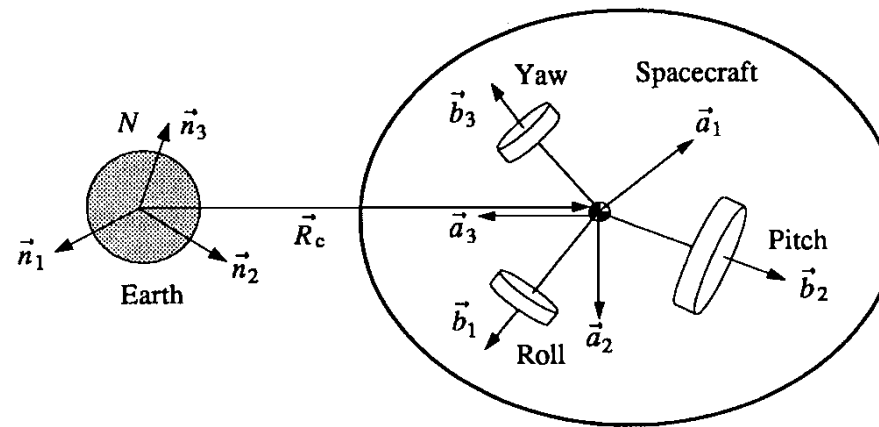


Fig. 6.10 Gyrostat in a circular orbit.

- Supongamos la situación de la figura: un cuerpo en órbita con dos ruedas en torno a los ejes cuerpo 1 y 3 y un volante de inercia en la dirección de 2. Las ecuaciones de Euler se modifican de la siguiente forma:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + \dot{h}_1 + \omega_2 h_3 - \omega_3 (-H_0 + h_2) = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 + \dot{h}_2 + \omega_3 h_1 - \omega_1 h_3 = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 + \dot{h}_3 - \omega_2 h_1 + \omega_1 (-H_0 + h_2) = M_3$$

- H_0 es la parte constante del momento cinético del volante de inercia y h_i los de las ruedas (y la parte variable del volante, que también puede modificarse): variables de control.



Vehículo con ruedas y volante de inercia

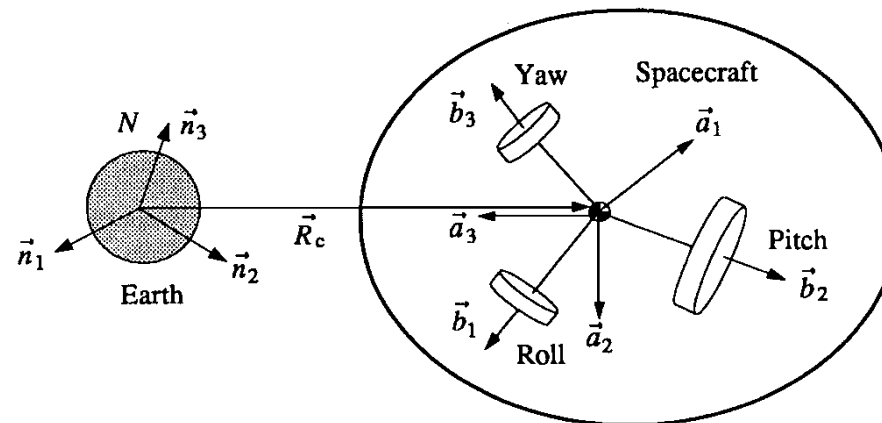


Fig. 6.10 Gyrostat in a circular orbit.

- Ignoraremos el gradiente gravitatorio (se podría considerar el problema de estabilizar asintóticamente la posición de equilibrio en órbita).
- Supondremos que podemos manipular directamente los momentos cinéticos de las ruedas mediante motores eléctricos internos.

Estabilización

- Para el movimiento libre, linealizando en torno a velocidades angulares nulas obtendríamos:

$$I_1 \delta \dot{\omega}_1 + \dot{h}_1 + \delta \omega_2 h_3 - \delta \omega_3 (-H_0 + h_2) = 0$$

$$I_2 \delta \dot{\omega}_2 + \dot{h}_2 + \delta \omega_3 h_1 - \delta \omega_1 h_3 = 0$$

$$I_3 \delta \dot{\omega}_3 + \dot{h}_3 - \delta \omega_2 h_1 + \delta \omega_1 (-H_0 + h_2) = 0$$

- Es decir:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \\ \delta \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-H_0}{I_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{H_0}{I_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \\ \delta \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

donde hemos hecho $\vec{u}$:

$$\vec{u} = - \begin{bmatrix} \frac{\dot{h}_1}{I_1} \\ \frac{\dot{h}_2}{I_1} \\ \frac{\dot{h}_3}{I_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h_3}{I_1} & \frac{h_2}{I_1} \\ \frac{h_3}{I_2} & 0 & -\frac{h_1}{I_2} \\ -\frac{h_2}{I_3} & \frac{h_1}{I_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \\ \delta \omega_3 \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que para un cierto $\vec{u}$ podríamos encontrar los valores de $\vec{h}$ resolviendo una ecuación diferencial.



Estabilización

- Por otro lado el cuaternión que describe la actitud será pequeño (si estamos cerca de una actitud que queremos mantener).
- Siguiendo la teoría del Tema 2, se tendrá entonces $q = \bar{q} \star \delta q$, donde $\bar{q}$ es la actitud que queremos mantener y

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

- Por otro lado la relación entre $\vec{a}$ y la velocidad angular es $\dot{\vec{a}} \approx \delta \vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_r$, como $\vec{\omega}_r = \vec{0}$ simplemente $\dot{\vec{a}} \approx \delta \vec{\omega}$. Es decir
- Es decir:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \\ \delta \omega_3 \end{bmatrix}$$

- Combinando las ecuaciones de error en velocidad angular y actitud encontramos la descripción del sistema (siguiente transparencia).



Estabilización

■ Descripción del sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-H_0}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{H_0}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

- Llamando $\vec{x}$ a las variables que describen al estado, es una descripción clásica

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$$

- Se puede usar “nuestro método favorito lineal” para encontrar una ley de control $\vec{u}$, que luego habrá que convertir en comandos de velocidad angular de las ruedas resolviendo la ecuación diferencial que relaciona $\vec{u}$ con los pares de las ruedas, en cada instante, y luego se podrá transformar en comandos del motor de las ruedas.



Cambio de actitud entre dos apuntamientos inerciales

- Hemos estudiado en el tema 2 como calcular una velocidad angular que me permite pasar de una cierta actitud a otra. Denotémosla como $\omega_{ref}(t)$.
- Sustituyendo esta velocidad angular de referencia en las ecuaciones del sólido con ruedas y volantes de inercia (e ignorando los pares de perturbación) podemos calcular (analíticamente o numéricamente) un valor de control de referencia u_i^{ref} . Este valor es “en bucle abierto” (no utiliza realimentación).
- Linealizando en torno a este perfil de referencia y calculando un controlador extra en bucle cerrado (que se sumará al valor de referencia) podemos garantizar que (al menos ante pequeños errores y perturbaciones) el vehículo se mantendrá en la trayectoria deseada. Se verá un ejemplo en clase para aclarar ideas y ver ciertas consideraciones particulares.



Control no lineal

- “Control no lineal” es un nombre amplio que designa a un abanico de técnicas que no requiere el uso de linealización.
- Consideremos el siguiente problema. Partiendo de un estado inicial dado por $\vec{\omega}(0)$ y $q(0)$ queremos alcanzar el reposo en la actitud identidad, pero nos “conformamos” con que el sistema tienda a dicho estado, es decir, nuestro objetivo es que $\vec{\omega}(t) \rightarrow \vec{0}$ y $q_0(t) \rightarrow 1$, $\vec{q}(t) \rightarrow \vec{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- Es decir hacemos “asintóticamente estable” el equilibrio del sistema en el origen.
- Si esto es cierto para cualquier condición inicial se dice que el equilibrio es globalmente asintóticamente estable.
- Obsérvese que la actitud objetivo puede ser cualquier actitud que se desee con sólo hacer una rotación fija del sistema de referencia inercial, $q' = q_{ref}^* \star q$.
- Vamos a resolver este problema con la llamada “técnica de las funciones de Lyapunov”.



Control no lineal: el sistema

- Ahora no linealizamos, luego el sistema es el original, cambiando como antes los términos que dependan de las ruedas por términos de control.
- Empecemos por la velocidad angular:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{l_2 - l_3}{l_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{u_1}{l_1} \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{l_3 - l_1}{l_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{u_2}{l_2} \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{l_1 - l_2}{l_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{u_3}{l_3}\end{aligned}$$



Control no lineal: función de Lyapunov

- ¿Podemos encontrar un valor de u_1 , u_2 y u_3 que garantice que el equilibrio $\vec{\omega} = \vec{0}$, sea asintóticamente estable?
- La técnica de las funciones de Lyapunov consiste en lo siguiente. Sea una función V regular (continua, diferenciable) que depende del estado (en este caso la velocidad angular y los cuaterniones), tal que:
 - Es siempre positiva para cualquier valor de los estados, excepto cuando el estado es cero; para dicho valor es cero (esto se denomina definida positiva).
 - La derivada con respecto al tiempo de V es definida negativa (es decir negativa para cualquier valor de los estados excepto cero).
- Entonces se demuestra que el origen (valor cero del estado) es asintóticamente estable (Idea: entender como funciona este método imaginando las curvas de nivel de V en función del estado).
- Además si el límite de V cuando el estado tiende a infinito es infinito, este resultado es global.



Control no lineal: encontrando el control

- Usemos la función de Lyapunov

$$V = I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} + I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} + I_3 \frac{\omega_3^2}{2k}$$

- Vemos que cumple la primera condición (se ha desplazado q_0 para que el equilibrio en $q_0 = 1$ sea el origen).
- k es una constante positiva que definiremos más adelante.
- Tomando derivada:

$$V_t = I_1 \frac{\omega_1 \dot{\omega}_1}{k} + I_2 \frac{\omega_2 \dot{\omega}_2}{k} + I_3 \frac{\omega_3 \dot{\omega}_3}{k}$$

- Sustituyendo los valores de las derivadas:

$$V_t = \frac{\omega_1((I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1)}{k} + \frac{\omega_2((I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2)}{k} + \frac{\omega_3((I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + u_3)}{k}$$



Control no lineal: encontrando el control

- Simplificando

$$V_t = \frac{\omega_1 u_1}{k} + \frac{\omega_2 u_2}{k} + \frac{\omega_3 u_3}{k}$$

- Elegimos ahora: $u_1 = -c_1\omega_1$, $u_2 = -c_2\omega_2$, $u_3 = -c_3\omega_3$, donde c_i es una constante positiva. Sustituyendo:

$$V_t = -\frac{c_1\omega_1^2 + c_2\omega_2^2 + c_3\omega_3^2}{k}$$

- Aplicando la técnica de Lyapunov, queda demostrado que el equilibrio $\vec{\omega} = 0$ es globalmente asintóticamente estable.



Control no lineal: el sistema

- Consideremos ahora también la cinemática de la actitud. El problema es más complejo.

$$\dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{u_1}{I_1}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{u_2}{I_2}$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{u_3}{I_3}$$

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2 + q_3 \omega_3)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2} (q_0 \omega_1 - q_3 \omega_2 + q_2 \omega_3)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2} (q_3 \omega_1 + q_0 \omega_2 - q_1 \omega_3)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2} (-q_2 \omega_1 + q_1 \omega_2 + q_0 \omega_3)$$



Control no lineal: función de Lyapunov

- ¿Podemos encontrar un valor de u_1 , u_2 y u_3 que garantice que el equilibrio $\vec{\omega} = \vec{q} = \vec{0}$, $q_0 = 1$ sea asintóticamente estable?
- Además del resultado de Lyapunov, necesitamos el llamado "Teorema de La Salle":
 - Sea una función de Lyapunov V tal que su derivada es **semidefinida negativa** (es decir negativa para algún valor de los estados además de cero). Llamemos E al conjunto de los puntos que verifica $\dot{V} = 0$.
 - Sea M el **conjunto invariante** del sistema más grande contenido en E .
- Entonces se demuestra que el estado tiende a E cuando el tiempo tiende a infinito.
- ¿Qué es un conjunto invariante de un sistema? Es un conjunto tal que si la condición inicial empieza en el conjunto, el estado permanece en el conjunto durante todo t .



Control no lineal: encontrando el control

- Usemos la función de Lyapunov

$$V = I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} + I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} + I_3 \frac{\omega_3^2}{2k} + (q_0 - 1)^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

- Vemos que cumple la primera condición de Lyapunov (se ha desplazado q_0 para que el equilibrio en $q_0 = 1$ sea el origen).
- Tomando derivada:

$$V_t = I_1 \frac{\omega_1 \dot{\omega}_1}{k} + I_2 \frac{\omega_2 \dot{\omega}_2}{k} + I_3 \frac{\omega_3 \dot{\omega}_3}{k} + 2(q_0 - 1)\dot{q}_0 + 2q_1\dot{q}_1 + 2q_2\dot{q}_2 + 2q_3\dot{q}_3$$

- Sustituyendo los valores de las derivadas:

$$\begin{aligned} V_t = & \frac{\omega_1((I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1)}{k} + \frac{\omega_2((I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2)}{k} + \frac{\omega_3((I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + u_3)}{k} \\ & -(q_0 - 1)(q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3) + q_1(q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3) \\ & + q_2(q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3) + q_3(-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3) \end{aligned}$$



Control no lineal: encontrando el control

- Simplificando

$$V_t = \frac{\omega_1 u_1}{k} + \frac{\omega_2 u_2}{k} + \frac{\omega_3 u_3}{k} + (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2 + q_3 \omega_3)$$

- Elegimos ahora: $u_1 = -(kq_1 + c_1\omega_1)$, $u_2 = -(kq_2 + c_2\omega_2)$, $u_3 = -(kq_3 + c_3\omega_3)$, donde c_i es una constante positiva.
Sustituyendo:

$$\begin{aligned} V_t &= -\frac{\omega_1(kq_1 + c_1\omega_1)}{k} - \frac{\omega_2(kq_2 + c_2\omega_2)}{k} - \frac{\omega_3(kq_3 + c_3\omega_3)}{k} \\ &\quad + (q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3) \\ &= -\frac{c_1\omega_1^2 + c_2\omega_2^2 + c_3\omega_3^2}{k} \end{aligned}$$

- Ya no podemos aplicar Lyapunov directamente, sino que necesitamos La Salle. En primer lugar, el conjunto E es simplemente $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ para todo t .



Conjunto invariante

- Sustituyamos en el sistema $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ para todo t (lo que en particular implica que sus derivadas son nulas):

$$0 = 0 + u_1$$

$$0 = 0 + u_2$$

$$0 = 0 + u_3$$

$$\dot{q}_0 = 0$$

$$\dot{q}_1 = 0$$

$$\dot{q}_2 = 0$$

$$\dot{q}_3 = 0$$

- Luego el conjunto invariante verifica $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, y q constante.
- Por tanto, como $u_1 = -(kq_1 + c_1\omega_1)$, $u_2 = -(kq_2 + c_2\omega_2)$, $u_3 = -(kq_3 + c_3\omega_3)$, obtenemos $q_1 = q_2 = q_3 = 0$.



Conjunto invariante

- Finalmente, del hecho de que el cuaternión debe ser unitario, obtenemos $q_0 = \pm 1$. Al ser $q_0 = 1$ el origen de la función de Lyapunov, es el que se estabiliza. De hecho, se puede comprobar que $q_0 = -1$ es inestable (lo cual es un inconveniente al ser en realidad el mismo punto; se comprobará por simulación).
- Si se usa k negativo en la ley de control entonces $q_0 = -1$ se vuelve estable y $q_0 = 1$ inestable. Esto se comprueba modificando la función de Lyapunov a

$$V = -I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} - I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} - I_3 \frac{\omega_3^2}{2k} + (q_0 + 1)^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

- Si se fija $k = k_0 \cdot \text{sgn}(q_0)$ entonces se vuelve estable el equilibrio “más próximo”!
- Obsérvese que en la ley de control no aparecen las inercias: no es necesario conocerlas. Pero si es necesario conocer el estado ($\vec{\omega}$ y q) para poder aplicar la ley de control.



Sistema de control de reacción

- Si ahora tenemos toberas, éstas actúan como pares.
- Supongamos la estabilización de una actitud inicial inercial (velocidad angular cero). Si linealizamos y tomamos ángulos de Euler 1-2-3 en torno a dicha actitud inicial, combinando las ecuaciones cinemáticas y dinámicas linealizadas el sistema a controlar escrito en la forma típica de control resultaría:

$$\begin{aligned}I_1 \ddot{\theta}_1 &\approx u_1, \\I_2 \ddot{\theta}_2 &\approx u_2, \\I_3 \ddot{\theta}_3 &\approx u_3,\end{aligned}$$

- Deberíamos diseñar u_1 , u_2 y u_3 para estabilizar el sistema; los ejes son independientes entre sí. Los métodos clásicos de control no se pueden emplear en el caso de que se usen toberas, ya que éstas no pueden dar un valor variable, sino solamente un valor constante, en una u otra dirección, o cero. Es decir, las únicas posibilidades son $u = 0, u_{MAX}, u_{MIN}$, donde u_{MIN} sería un valor negativo (suponemos $u_{MIN} = -u_{MAX}$). Para diseñar leyes de control hay que usar técnicas de control óptimo.



Maniobras con toberas

- Consideremos sólo un eje, con la ecuación $\ddot{\alpha} = u$ (donde u se ha redefinido dividida por la inercia), con condiciones iniciales $\dot{\alpha}_0$ y α_0 . Integrando la ecuación diferencial obtenemos velocidad y posición:

$$\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0 = tu, \quad \alpha - \alpha_0 - t\dot{\alpha}_0 = \frac{t^2}{2}u$$

- Eliminando el tiempo:

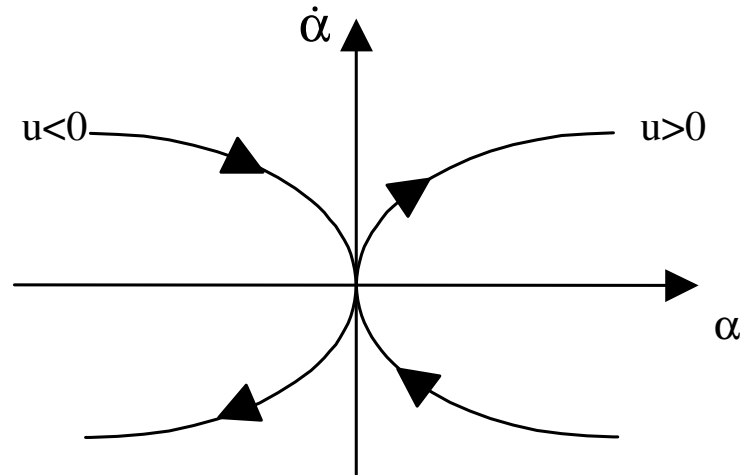
$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\dot{\alpha}_0(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0)}{u} + \frac{(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0)^2}{2u}$$

- Se trata de la ecuación de una parábola, cuya forma dependerá de las condiciones iniciales y de la elección del control ($u = 0, u_{MAX}, -u_{MAX}$). Si $u = 0$ obsérvese que no se puede eliminar el tiempo y se reduce a la recta $\alpha - \alpha_0 = t\dot{\alpha}_0$.

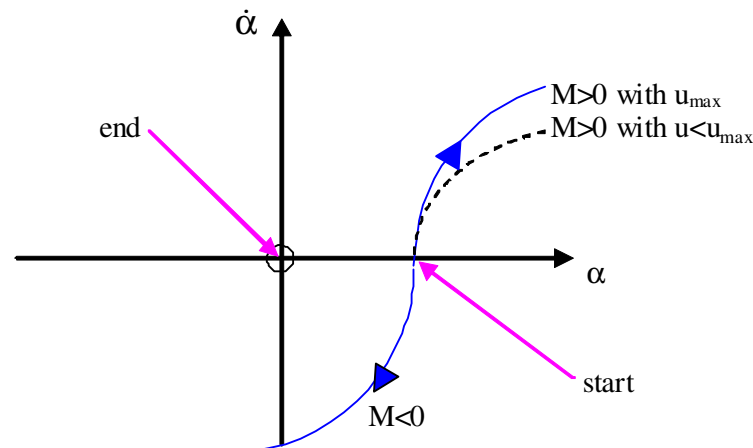


Maniobras con toberas

- Ejemplo de parábolas con condición inicial nula (las flechas indican la dirección que se sigue):

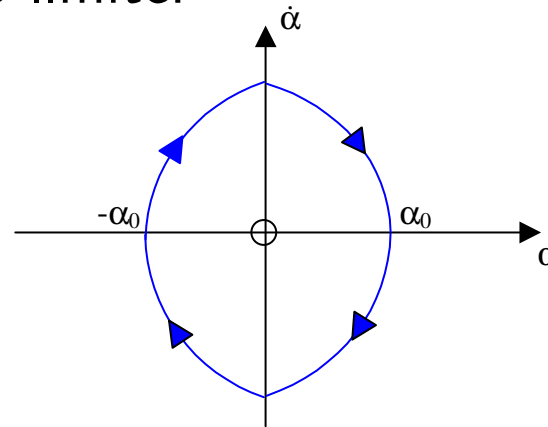


- Para ir de un punto a otro tendríamos que movernos por las parábolas:

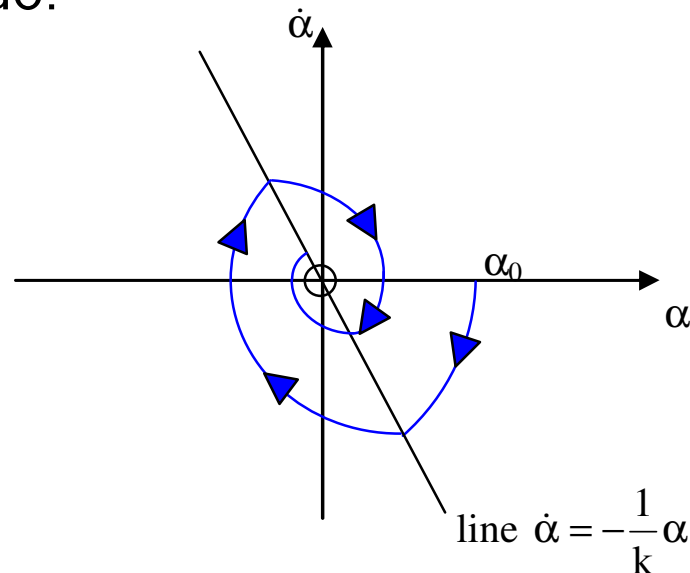


Maniobras con toberas

- Primera idea: usar una ley de control $u = -u_{MAX}\text{signo}(\alpha)$. El resultado es un ciclo límite:

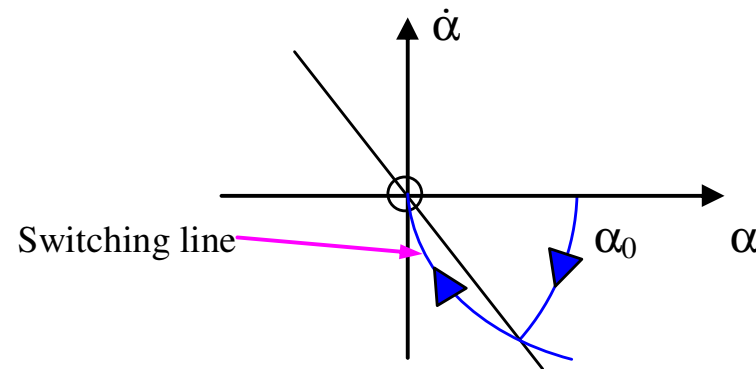


- Para evitar la oscilación: $u = -u_{MAX}\text{signo}(\alpha + k\dot{\alpha})$, con $k > 0$. El resultado:

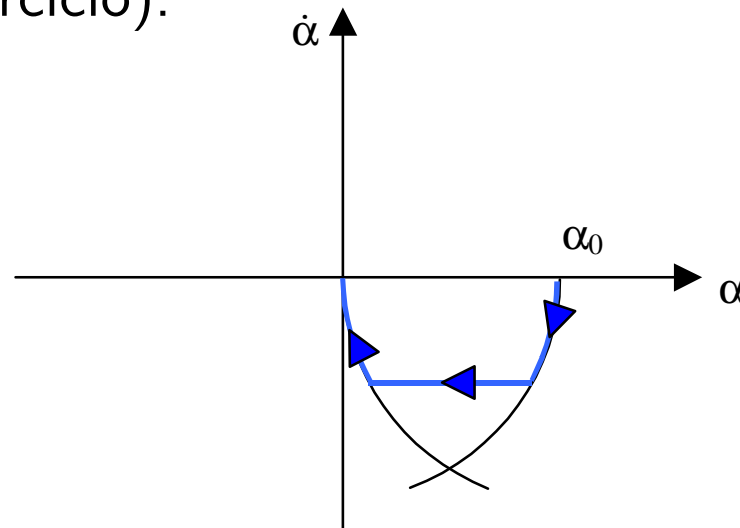


Maniobras con toberas

- Para llegar en un tiempo finito se puede usar $u = -u_{MAX}\text{signo}(\alpha - \frac{1}{2u_{MAX}}\dot{\alpha}|\dot{\alpha}|)$ (ejercicio). El resultado:



- Si fijamos un tiempo mínimo y queremos gastar el mínimo combustible (ejercicio):



Maniobras con toberas: consideraciones prácticas

- El procedimiento analítico estudiado no se podría emplear si no se pueden despreciar los términos no lineales (los acoplamientos hacen que haya que estudiar toda la dinámica simultáneamente). Es necesario usar cálculo de variaciones.
- Por otro lado, en la práctica, es suficiente con garantizar que las soluciones converjan siempre a un ciclo límite suficientemente próximo al origen (para evitar encender los propulsores con demasiada frecuencia). Para ello se usan zonas muertas e histéresis (Schmitt Trigger).

