Dinámica de Vehículos Espaciales

Tema 4: Cinemática de la Actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

29 de marzo de 2016

Ecuaciones Diferenciales Cinemáticas de la Actitud

- Para el caso de la posición, las ecuaciones cinemáticas relacionan el vector posición con el vector velocidad, mientras que las ecuaciones dinámicas relacionan el vector velocidad con el vector fuerza.
- Para el caso de la actitud, las ecuaciones diferenciales cinemáticas (EDC) relacionan la representación de la actitud (DCM, ángulos de Euler, cuaterniones) con la velocidad angular $\vec{\omega}$. Típicamente estas ecuaciones son no-lineales.
- En el sistema de navegación inercial, los giróscopos nos darán $\vec{\omega}$, y habrá que utilizar las EDC, es decir, integrar las ecuaciones, para calcular la actitud.
- Por tanto es importante conocer las diferentes EDC para las diferentes representaciones, para ver cuál es la más ventajosa desde un punto de vista computacional.

DCM para ángulos pequeños I

- Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia A y B, relacionados de la siguiente forma:

$$A \xrightarrow[x^A]{d\theta_1} S_1 \xrightarrow[y^{S_1}]{d\theta_2} S_2 \xrightarrow[z^{S_2}]{d\theta_3} B$$

  donde suponemos que $d\theta_i$ son ángulos pequeños, de forma que podemos aproximar $\cos d\theta_i \simeq 1$ y $\operatorname{sen} d\theta_i \simeq d\theta_i$.
- Si escribimos las matrices de rotación teniendo en cuenta la aproximación anterior, obtenemos:

$$C_A^{S_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta_1 \\ 0 & -d\theta_1 & 1 \end{bmatrix},\ C_{S_1}^{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ d\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C_{S_2}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_3 & 0 \\ -d\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Si escribimos $C_A^B = C_{S_2}^B C_{S_1}^{S_2} C_A^{S_1}$ y despreciamos todos los productos dobles de ángulos, es decir, $d\theta_i d\theta_j \simeq 0$, obtenemos:

$$C_A^B = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_3 & -d\theta_2 \\ -d\theta_3 & 1 & d\theta_1 \\ d\theta_2 & -d\theta_1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Id} - \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_3 & d\theta_2 \\ d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ -d\theta_2 & d\theta_1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Id} - d\vec{\theta}^{\times},$$

DCM para ángulos pequeños II

- En la anterior transparencia, se ha definido $d\vec{\theta} = [d\theta_1\ d\theta_2\ d\theta_3]^T$ y la matriz

$$d\vec{\theta}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_3 & d\theta_2 \\ d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ -d\theta_2 & d\theta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

  que es la matriz antisimétrica que se emplea para efectuar el producto vectorial.
- Obsérvese que bajo estas hipótesis (ángulos pequeños) no importa el orden de las rotaciones y los ángulos se suman. Pero no se pueden usar ángulos de Euler en los que se repitan ejes, ya que quedaría sin definir una de las rotaciones y otras dos se sumarían.

EDC para la DCM I

- Supongamos que quiero calcular la actitud de B respecto a A, mediante la DCM $C_A^B(t)$, sabiendo que B gira con respecto a A con una velocidad angular $\vec{\omega}_{B/A}^B$.
- Por definición: $\frac{d}{dt} C_A^B = \frac{C_A^B(t+dt) - C_A^B(t)}{dt}$
- Suponiendo A fijo, entonces podemos imaginar que es B quien se mueve en el tiempo, y por tanto podríamos escribir $B = B(t)$ y por tanto $C_A^B(t) = C_A^{B(t)}$.
- Usando este razonamiento, $C_A^B(t+dt) = C_A^{B(t+dt)} = C_{B(t)}^{B(t+dt)} C_A^{B(t)}$. Por tanto:

$$A \longrightarrow B(t) \longrightarrow B(t+dt)$$

- En el tiempo dt, el sistema de referencia B habrá girado respecto a sí mismo un ángulo muy pequeño en cada eje; por lo que hemos visto en la anterior transparencia, por tanto, $C_{B(t)}^{B(t+dt)} = \mathrm{Id} - \left(d\vec{\theta}^B\right)^\times$, donde $d\vec{\theta}^B$ es como antes.

EDC para la DCM II

- Siguiendo el razonamiento: $\frac{d}{dt} C_A^B = \frac{C_A^B(t+dt) - C_A^B(t)}{dt} = \frac{C_{B(t)}^{B(t+dt)} C_A^B(t) - C_A^B(t)}{dt} = \frac{(\mathrm{Id} - \left(d\vec{\theta}^B\right)^\times) C_A^B(t) - C_A^B(t)}{dt} = -\frac{\left(d\vec{\theta}^B\right)^\times}{dt} C_A^B(t)$
- La matriz $\frac{\left(d\vec{\theta}^B\right)^\times}{dt}$ se escribiría

$$\frac{\left(d\vec{\theta}^B\right)^\times}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d\theta_3}{dt} & \frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{d\theta_3}{dt} & 0 & -\frac{d\theta_1}{dt} \\ -\frac{d\theta_2}{dt} & \frac{d\theta_1}{dt} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\vec{\omega}_{B/A}^B = [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^T$ ya que $d\vec{\theta}^B$ representaba el ángulo girado por B en un dt, y por definición de velocidad angular. Se tiene entonces:

$$\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

- Por tanto: $\frac{d}{dt} C_A^B = \dot{C}_A^B = -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B$.

EDC para la DCM III

- Otra variación: trasponiendo ambos miembros de $\dot{C}_A^B = -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B$ llegamos a $\dot{C}_B^A = C_B^A \left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times$
- En general, la EDC es una ecuación diferencial matricial, que habrá que resolver componente a componente: nueve ecuaciones diferenciales acopladas.
- El principal problema de resolver numéricamente esta ecuación es garantizar que la matriz resultante de integrar sea ortogonal. Obsérvese que en teoría la ecuación diferencial respeta la ortogonalidad: $I = (C_A^B)(C_A^B)^T$, derivando:

$$\left[\frac{d}{dt}(C_A^B)\right](C_A^B)^T + C_A^B \frac{d}{dt}(C_A^B)^T$$
$$= -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B (C_A^B)^T + C_A^B C_B^A \left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times$$
$$= -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times + \left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times = 0$$

EDC para la DCM III

- Sin embargo los errores numéricos en la integración pueden desviar a la DCM resultante de la ortogonalidad.
- Existen algoritmos para encontrar la matriz ortogonal "más próxima" a una matriz dada.
- Por ejemplo, dada M, encontrar una matriz próxima que sea ortogonal:

$$Q = M(M^T M)^{-1/2}$$

- El problema con la fórmula anterior es que requiere calcular una raíz cuadrada matricial, lo que no siempre es sencillo.
- El método iterativo $Q_0 = M$,

$$Q_{k+1} = 2M(Q_k^{-1} M + M^T Q_k)^{-1}$$

converge a la misma matriz cuando $k \to \infty$, si M es próximo a una matriz ortogonal (y por tanto invertible).
- Obviamente si M es muy próxima a una matriz ortogonal el método iterativo convergerá muy rápido.

Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues I

- Supongamos que se parte de la actitud identidad y se impone un giro con velocidad angular constante $\vec{\omega}$, donde $\vec{\theta} = \theta\vec{e}$, siendo $\vec{e}$ un vector unitario, durante una unidad de tiempo. La actitud resultante debería ser la descrita por el eje y ángulo de Euler $(\vec{e}, \theta)$.
- La actitud final será la solución en $t = 1$ de la ecuación diferencial $\dot{C} = -\vec{\theta}^{\times} C$ con condición inicial $C(0) = \mathrm{Id}$. Recordemos que la solución de esta ecuación diferencial matricial es la "matriz exponencial":

$$C(t) = C(0)\mathrm{Exp}(-\vec{\theta}^{\times} t) = C(0)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\vec{\theta}^{\times} t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n \theta^n (\vec{e}^{\times})^n}{n!}$$

- Esta serie es sumable, pero hay que calcular las potencias de $\vec{e}^{\times}$. Obsérvese que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, expresado matricialmente: $\vec{a}^{\times}\vec{b}^{\times}\vec{c} = \vec{b}\vec{a}^T\vec{c} - \vec{a}^T\vec{b}\vec{c} = (\vec{b}\vec{a}^T - \vec{a}^T\vec{b}\mathrm{Id})\vec{c}$. Luego $(\vec{e}^{\times})^2 = \vec{e}\vec{e}^T - \vec{e}^T\vec{e}\mathrm{Id} = \vec{e}\vec{e}^T - \mathrm{Id}$.

Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues II

- Observemos:

$$\begin{aligned}
(\vec{e}^{\times})^0 &= \mathrm{Id} \\
(\vec{e}^{\times})^1 &= (\vec{e}^{\times})^1 \\
(\vec{e}^{\times})^2 &= \vec{e}\vec{e}^T - \mathrm{Id} \\
(\vec{e}^{\times})^3 &= \vec{e}^{\times}(\vec{e}\vec{e}^T - \mathrm{Id}) = -\vec{e}^{\times} \\
(\vec{e}^{\times})^4 &= -(\vec{e}^{\times})^2 = -\vec{e}\vec{e}^T + \mathrm{Id} \\
&\dots
\end{aligned}$$

- Por tanto:

$$\begin{aligned}
(\vec{e}^{\times})^0 &= \mathrm{Id} \\
(\vec{e}^{\times})^{2k+1} &= (-1)^k \vec{e}^{\times}, \qquad k \geq 0 \\
(\vec{e}^{\times})^{2k} &= (-1)^k \left(\mathrm{Id} - \vec{e}\vec{e}^T\right), \qquad k \geq 1
\end{aligned}$$

Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues III

- Sustituyendo $t = 1$ y separando $n = 0$, n impar y n par de la serie, obtenemos:

$$C(1) = \mathrm{Id} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}(\vec{e}^{\times})^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k}(\vec{e}^{\times})^{2k}}{(2k)!}$$

- Sustituyendo los valores antes hallados:

$$C(1) = \mathrm{Id} - \vec{e}^{\times} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + (\mathrm{Id} - \vec{e}\vec{e}^T) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}(\vec{e}^{\times})^{2k}}{(2k)!}$$

- Reconociendo las series del seno y del coseno:

$$C(1) = \mathrm{Id} - \vec{e}^{\times} \operatorname{sen}\theta + (\mathrm{Id} - \vec{e}\vec{e}^T)(\cos\theta - 1)$$

- Operando, llegamos al resultado final:

$$C(1) = \mathrm{Id}\cos\theta - \vec{e}^{\times} \operatorname{sen}\theta + \vec{e}\vec{e}^T(1 - \cos\theta)$$

EDC para los ángulos de Euler I

- Partimos de la definición de los ángulos de Euler en el caso de aeronaves:

$$n \xrightarrow[z^n]{\psi} S \xrightarrow[y^S]{\theta} S' \xrightarrow[x^{S'}]{\varphi} b$$

- La velocidad angular tiene la propiedad de que $\vec{\omega}_{b/n} = \vec{\omega}_{b/S'} + \vec{\omega}_{S'/S} + \vec{\omega}_{S/n}$.
- Si mecanizamos esta ecuación en b: $\vec{\omega}^b_{b/n} = \vec{\omega}^b_{b/S'} + \vec{\omega}^b_{S'/S} + \vec{\omega}^b_{S/n}$
- Por otro lado está claro que: $\vec{\omega}^b_{b/S'} = [\dot{\varphi}\ 0\ 0]^T$, $\vec{\omega}^{S'}_{S'/S} = [0\ \dot{\theta}\ 0]^T$, $\vec{\omega}^S_{S/n} = [0\ 0\ \dot{\psi}]^T$.
- Luego: $\vec{\omega}^b_{b/n} = \vec{\omega}^b_{b/S'} + C^b_{S'}\vec{\omega}^{S'}_{S'/S} + C^b_S\vec{\omega}^S_{S/n}$ y puesto que $C^b_S = C^b_{S'}C^{S'}_S$, podemos escribir: $\vec{\omega}^b_{b/n} = \vec{\omega}^b_{b/S'} + C^b_{S'}\vec{\omega}^{S'}_{S'/S} + C^b_{S'}C^{S'}_S\vec{\omega}^S_{S/n}$

EDC para los ángulos de Euler II

- Desarrollando esta ecuación:

$$
\begin{aligned}
\vec{\omega}^b_{b/n} &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi \\ 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi \\ 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\theta & 0 & -\mathrm{s}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{s}\theta & 0 & \mathrm{c}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{c}\varphi\dot{\theta} \\ -\mathrm{s}\varphi\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\theta\dot{\psi} \\ \mathrm{s}\varphi\mathrm{c}\theta\dot{\psi} \\ \mathrm{c}\varphi\mathrm{c}\theta\dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{s}\theta \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi\mathrm{c}\theta \\ 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi\mathrm{c}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

EDC para los ángulos de Euler III

- Obsérvese que lo que realmente se quiere es una expresión para las derivadas de los ángulos en función de $\vec{\omega}^b_{b/n} = [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^T$, y por tanto hay que invertir la matriz:

$$
\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{s}\theta \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi\mathrm{c}\theta \\ 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi\mathrm{c}\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{c}\theta} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\theta & \mathrm{s}\theta\mathrm{s}\varphi & \mathrm{s}\theta\mathrm{c}\varphi \\ 0 & \mathrm{c}\varphi\mathrm{c}\theta & -\mathrm{s}\varphi\mathrm{c}\theta \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}
$$

- Obsérvese que se trata de 3 ecuaciones diferenciales no lineales, con multitud de funciones trigonométricas.
- Posee una singularidad para $\theta = \pm 90^{\mathrm{o}}$. En realidad los ángulos de Euler no están bien definidos para esta situación. Ésta singularidad es el motivo por el que no se suelen usar en sistemas de navegación inercial (aeronaves o vehículos).
- Lo mismo sucede para cualquier otro conjunto de ángulos de Euler; siempre existe una singularidad.

EDC para el eje y ángulo de Euler

- La representación en forma de eje y ángulo de Euler, $(\vec{e}^b_{b/n}, \theta)$, tiene las siguientes EDC:
- Para el ángulo de Euler: $\dot{\theta} = (\vec{e}^b_{b/n})^T \vec{\omega}^b_{b/n}$
- Para el eje de Euler:

$$
\dot{\vec{e}}^b_{b/n} = \frac{1}{2}\left[\left(\vec{e}^b_{b/n}\right)^{\times} + \frac{1}{\tan\theta/2}\left(\mathrm{Id} - \vec{e}^b_{b/n}(\vec{e}^b_{b/n})^T\right)\right]\vec{\omega}^b_{b/n}
$$

- Son cuatro ecuaciones diferenciales, no lineales.
- Poseen una singularidad para $\theta = 0$.
- Si la dirección de $\vec{\omega}$ es constante e igual al eje $\vec{e}$ inicial, entonces la actitud se reduce a $\vec{e}(t) = \vec{e}(0)$ y $\dot{\theta} = \|\vec{\omega}\|$.
- En la práctica no se utilizan directamente; las usamos para hallar las EDC para los cuaterniones.

EDC para cuaterniones I

- Recordemos la definición de cuaterniones en función de ángulo y eje de Euler:
  $q_0 = \cos\theta/2$, $\vec{q} = \operatorname{sen}\theta/2\,\vec{e}^b_{b/n}$.
- Derivando en la ecuación de q_0 y sustituyendo la EDC de θ, obtenemos:
  $\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta/2\,\dot{\theta} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta/2(\vec{e}^b_{b/n})^T\vec{\omega}^b_{b/n} = -\frac{1}{2}\vec{q}^T\vec{\omega}^b_{b/n}$
- Derivando en la ecuación de $\vec{q}$:

$$
\dot{\vec{q}} = \frac{1}{2}\cos\theta/2\,\vec{e}^b_{b/n}\dot{\theta} + \operatorname{sen}\theta/2\,\dot{\vec{e}}^b_{b/n}
$$

- Sustituyendo las EDC de ángulo y eje de Euler:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{q}} &= \frac{1}{2}\cos\theta/2\,\vec{e}^b_{b/n}(\vec{e}^b_{b/n})^T\vec{\omega}^b_{b/n} \\
&\quad + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta/2\left[\left(\vec{e}^b_{b/n}\right)^{\times} + \frac{1}{\tan\theta/2}\left(\mathrm{Id} - \vec{e}^b_{b/n}(\vec{e}^b_{b/n})^T\right)\right]\vec{\omega}^b_{b/n} \\
&= \frac{1}{2}\left[q^{\times} + q_0\mathrm{Id}\right]\vec{\omega}^b_{b/n}
\end{aligned}
$$

EDC para cuaterniones II

- Podemos escribir esta ecuación en forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

  donde $\vec{\omega}^b_{b/n} = [\omega_x \; \omega_y \; \omega_z]^T$.
- Son cuatro ecuaciones diferenciales, bilineales, sin singularidades.
- Obsérvese la ausencia de singularidades y de funciones trigonométricas; se trata simplemente de una ecuación diferencial bilineal.
- Estas propiedades de las EDC son la razón más importante por la cual su uso es generalizado para representar la actitud de vehículos espaciales. Se realizan todos los cálculos mediante cuaterniones y si es necesario visualizarlos, se transforman a los ángulos de Euler más cómodos para la aplicación.

EDC para cuaterniones III

- Recordando la definición matricial del producto de cuaterniones, si definimos un "cuaternión" q_ω cuya parte escalar es cero y cuya parte vectorial es igual a los componentes de la velocidad angular, es decir:

$$q_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

  podemos expresar la anterior ecuación como

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \star q_\omega$$

- Si se acumulan errores por imprecisiones numéricas se puede normalizar el cuaternión para que su módulo se mantenga en la unidad.

Otras EDC

- Parámetros de Rodrigues:

$$\dot{\vec{g}} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Id} + \vec{g}^\times + \vec{g}\vec{g}^T\right]\vec{\omega}$$

- Parámetros de Rodrigues modificados:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{1 + \|\vec{p}\|^2}{4}\left[\mathrm{Id} + 2\frac{\vec{p}^\times + \vec{p}^\times\vec{p}^\times}{1 + \|\vec{p}\|^2}\right]\vec{\omega}$$

- Vector de rotación:

$$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\theta}\times\vec{\omega} + \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{\theta}{2\tan\theta/2}\right)\vec{\theta}\times(\vec{\theta}\times\vec{\omega})$$

Pasando de una actitud a otra

- Dados dos cuaterniones q_0 y q_1 que representan dos actitudes diferentes, ¿se puede construir una velocidad angular $\vec{\omega}(t)$ de forma que $q(t=0) = q_0$ y $q(t=T) = q_1$?
- Como antes, la forma de hacerlo es encontrar el cuaternión q_2 que representa la actitud entre q_0 y q_1: $q_2 = \frac{1}{q_0} \star q_1 = q_0^* q_1$. Este cuaternión estará representado por un ángulo θ_1 y eje de Euler $\vec{e}$ de forma que $q_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1/2 \\ \operatorname{sen}\theta_1/2\vec{e} \end{bmatrix}$.
- La velocidad angular $\vec{\omega}(t)$ solución tiene la dirección de $\vec{e}$ y representa el "giro más corto". Llamemos a su módulo $\omega(t)$. Se tendrá $\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau$ y la actitud será:

$$q(t) = q_0 \star \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)/2) \\ \operatorname{sen}(\theta(t)/2)\vec{e} \end{bmatrix}$$

- Cualquier $\omega(t)$ tal que $\int_0^T \omega(\tau)d\tau = \theta_1$ es solución.

Pasando de una actitud a otra: solución óptima

- Para encontrar la mejor solución habría que plantear un problema de "control óptimo". Por ejemplo podríamos considerar que para realizar el giro hay que aplicar un cierto par M de forma que $\dot{\omega} = M$ (ojo: esta es una dinámica inventada).
- Un óptimo respecto al par a ejercer ($\min \int_0^T M^2(\tau)d\tau$) y con velocidad angular inicial y final nulas ($\omega(0) = \omega(T) = 0$) es $\omega(t) = 6\frac{t}{T^2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)\theta_1$. De hecho este es el polinomio más sencillo que verifica las tres restricciones.
- Si lo que se quiere es llegar "lo más rápido posible" (minimizar el tiempo final T): primero el máximo par admisible M_{max} y luego el mínimo par admisible M_{min}. Si $M_{min} = -M_{max}$ la solución es $T = \sqrt{\frac{\theta_1}{M_{max}}}$.
- Si tenemos en cuenta la dinámica real del vehículo puede merecer la pena realizar la rotación por otro camino (depende de las inercias).

Linealizando la EDC para cuaterniones I

- Supongamos que tenemos una velocidad angular de referencia $\vec{\omega}_r$ que genera un cuaternión de referencia $\bar{q}$, de acuerdo a la EDC que acabamos de ver. Supongamos ahora que $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}$, donde $\delta\vec{\omega}$ es "pequeño". ¿Cuál será el cuaternión resultante?
- Usamos el cuaternión de error de forma que $q = \bar{q} \star \delta q$, determinemos δq. Tomando derivada, se tiene:

$$\dot{q} = \dot{\bar{q}} \star \delta q + \bar{q} \star \dot{\delta q} = \frac{1}{2} q \star q_\omega$$

- Usando $\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2}\bar{q} \star q_{\omega_r}$:

$$\frac{1}{2}\bar{q} \star q_{\omega_r} \star \delta q + \bar{q} \star \dot{\delta q} = \frac{1}{2}\bar{q} \star \delta q \star q_\omega$$

- Multiplicamos por el inverso de $\bar{q}$ a la izquierda y despejamos $\dot{\delta q}$, obteniendo:

$$\dot{\delta q} = \frac{1}{2}\delta q \star q_\omega - \frac{1}{2} q_{\omega_r} \star \delta q$$

Linealizando la EDC para cuaterniones II

- Expresando $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}$ y recordando la expresión linealizada de un cuaternión pequeño δq en función del parámetro $\vec{a}$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega} \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_r \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix}$$

- Recordemos: $\begin{bmatrix} q_0' \\ \vec{q}' \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0' q_0 - \vec{q}'^T \vec{q} \\ q_0 \vec{q}' + q_0' \vec{q} + \vec{q}' \times \vec{q} \end{bmatrix}$. Por tanto:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\vec{a}^T/2(\vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}) + \vec{\omega}_r^T \vec{a}/2 \\ \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega} + \vec{a}/2 \times (\vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}) - \vec{\omega}_r - \vec{\omega}_r \times \vec{a}/2 \end{bmatrix}$$

- Operando y teniendo en cuenta que $\|\vec{a}\|\|\delta\vec{\omega}\| \approx 0$ al ser ambos términos pequeños:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_r \end{bmatrix}$$

- Es decir: $\dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_r$.