

Dinámica de Vehículos Espaciales

Tema 4: Estimación de actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

15 de mayo de 2015



Estimación de la actitud

- La estimación/determinación de actitud requiere del uso de modelos cinemáticos, sensores de actitud y algoritmos apropiados a los sensores disponibles.
- La mayor parte de los sensores de actitud se pueden clasificar, a grandes rasgos, en dos tipos:
 - Sensores que determinan un vector $\vec{v}$ en los ejes cuerpo, es decir, $\vec{v}^B$ (en realidad lo determinan en los “ejes sensor”, pero la transformación a ejes cuerpo es conocida). Además dicho vector se supone conocido en los ejes de referencia (inerciales u órbita), es decir, $\vec{v}^N$ es conocido. Es necesario tener dos o más medidas simultáneas para poder resolver el problema sólo con este tipo de sensores.
 - Sensores que miden la velocidad angular $\vec{\omega}^B$ con respecto al sistema de referencia inercial. Se recupera la actitud usando esta medida para integrar las ecuaciones diferenciales cinemáticas, pero los errores se acumulan generando una cierta deriva: es necesario complementar con alguna medida del tipo anterior.



Estimación a partir de observaciones

- En primer lugar consideramos el caso de que tenemos n (2 o más) sensores que determinan un vector $\vec{v}_i$, $i = 1, \dots, n$, en los ejes cuerpo, es decir, $\vec{v}_i^B$, que es conocido en los ejes de referencia (inerciales u órbita), es decir, $\vec{v}_i^N$ es conocido. Puesto que sólo importan las direcciones de los vectores, los consideramos unitarios.
- Por tanto tenemos n ecuaciones de la forma $\vec{v}_i^B = C_N^B \vec{v}_i^N$ y tenemos que “despejar” la matriz C_N^B .
- Para simplificar notación escribamos $\vec{W}_i = \vec{v}_i^B$, $\vec{V}_i = \vec{v}_i^N$, $A = C_N^B$. Por tanto tenemos n ecuaciones $\vec{W}_i = A \vec{V}_i$ y es necesario resolver A .
- En general estos vectores pueden contener errores.
- En el caso de tener 2 vectores, se puede usar un método sencillo llamado método TRIAD. También veremos métodos más generales que sirve para $n \geq 2$.



Método TRIAD

- Partimos de las dos ecuaciones $\vec{W}_1 = A\vec{V}_1$ y $\vec{W}_2 = A\vec{V}_2$
- Definamos los siguientes vectores: $\vec{r}_1 = \vec{V}_1$, $\vec{r}_2 = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2|}$, y $\vec{r}_3 = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{V}_1 \times \vec{r}_2|}$. Similarmente: $\vec{s}_1 = \vec{W}_1$, $\vec{s}_2 = \frac{\vec{W}_1 \times \vec{W}_2}{|\vec{W}_1 \times \vec{W}_2|}$, y $\vec{s}_3 = \frac{\vec{W}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{W}_1 \times \vec{s}_2|}$. Está claro que se cumplirá, por construcción: $\vec{s}_1 = A\vec{r}_1$, $\vec{s}_2 = A\vec{r}_2$, y $\vec{s}_3 = A\vec{r}_3$.
- Construimos ahora las matrices $M_{ref} = [\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3]$ y $M_{obs} = [\vec{s}_1 \ \vec{s}_2 \ \vec{s}_3]$. Se cumple $M_{obs} = AM_{ref}$. Además las columnas de la matriz M_{ref} son, por construcción, ortonormales, luego M_{ref} es invertible y además ortogonal. Por tanto: $A = M_{obs}M_{ref}^T$.
- Obsérvese que el método no es simétrico, sino que da más “peso” a la medida número 1. Por tanto habrá que usar como primera medida la más “fiable”. En la práctica no se obtendrá la matriz exacta por los errores en los sensores.



Problema de Wahba

- Ahora tenemos n medidas cumpliendo $\vec{W}_i = A\vec{V}_i$. Planteamos el problema como un problema de mínimos cuadrados.
- Formulamos la función $L(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |\vec{W}_i - A\vec{V}_i|^2$, donde a_i son los pesos que se le da a cada medida (cumpliendo $\sum_{i=1}^n a_i = 1$) y planteamos el objetivo matemático de encontrar A (ortogonal) tal que $L(A)$ sea mínimo. En la literatura esto se conoce como el "**Problema de Wahba**".
- Puesto que, operando:

$$|\vec{W}_i - A\vec{V}_i|^2 = (\vec{W}_i - A\vec{V}_i)^T (\vec{W}_i - A\vec{V}_i) = 2 - 2\vec{W}_i^T A\vec{V}_i,$$

tenemos que:

$$L(A) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T A\vec{V}_i = 1 - g(A),$$

donde $g(A) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T A\vec{V}_i$. Minimizar $L(A)$ equivale a maximizar $g(A)$.



Método q de Davenport

- Escribiendo A en función de q con la ecuación de Euler-Rodrigues $A = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q})I + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_0\vec{q}^\times$ se llega a

$$g(A) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \vec{V}_i + 2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{q} \vec{q}^T \vec{V}_i - 2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{q}^\times \vec{V}_i$$

- Desarrollemos cada término para intentar llegar a una forma bilineal $g(q) = q^T K q$:

- Empezando por el segundo término:

$$2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{q} \vec{q}^T \vec{V}_i = 2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{q}^T \vec{W}_i \vec{V}_i^T \vec{q} = 2 \vec{q}^T B \vec{q} = \vec{q}^T (B + B^T) \vec{q}$$

donde $B = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T$.

- El primer término se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \vec{V}_i = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i = q_0 \sigma q_0 - \vec{q}^T (\sigma I) \vec{q}$$

donde $\sigma = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i = \text{Tr}(B)$.



Método q de Davenport

- Finalmente, el último término se puede escribir:

$$-2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{q}^\times \vec{V}_i = 2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{V}_i^\times \vec{q} = 2q_0 \vec{z}^T \vec{q} = q_0 \vec{z}^T \vec{q} + \vec{q}^T \vec{z} q_0$$

donde $\vec{z}^T = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i^\times$, luego $\vec{z} = - \sum_{i=1}^n a_i \vec{V}_i^\times \vec{W}_i$.

- Se tiene que $(\vec{a}^\times \vec{b})^\times = \vec{b} \vec{a}^T - \vec{a} \vec{b}^T$, lo que se demuestra usando la identidad de $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. Observemos que

$$\vec{z}^\times = - \sum_{i=1}^n a_i (\vec{V}_i^\times \vec{W}_i)^\times = \sum_{i=1}^n a_i \vec{V}_i \vec{W}_i^T - \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T = B^T - B$$



Método q de Davenport

- Luego se ha llegado a:

$$g(q) = q^T K q$$

donde la matriz K se escribe completamente a partir de $B = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma &= \text{Tr}(B), \\ S &= B + B^T, \\ \vec{z}^\times &= B^T - B\end{aligned}$$

siendo K una matriz 4×4 igual a:

$$K = \begin{bmatrix} \sigma & \vec{z}^T \\ \vec{z} & S - \sigma \text{Id} \end{bmatrix}$$



Método q de Davenport

- Por tanto el problema se reduce a encontrar q (cuaternión válido de actitud, es decir, de norma 1) tal que $g(q) = q^T K q$ sea máximo.
- Problema de maximización con restricciones ($q^T q = 1$). Usamos multiplicadores de Lagrange, escribiendo:

$$H = q^T K q - \lambda(q^T q - 1)$$

- Tomando derivada respecto a q e igualando a cero:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 2q^T K - 2\lambda q^T = 0 \quad \longrightarrow \quad Kq = \lambda q,$$

- Por tanto λ debe ser un autovalor de K y q el autovector asociado (de módulo 1). ¿Cuál? Sustituyendo en $g(q)$:

$$g(q) = q^T K q = q^T \lambda q = \lambda$$

- Por tanto, el cuaternión solución del problema será el autovector (de módulo 1) asociado al mayor autovalor!



Método QUEST

- Si bien el método q de Davenport reduce el problema a uno de autovalores y autovectores, este problema algebraico puede ser problemático en un computador a bordo de un satélite.
- En 1978 se desarrolló el método QUEST (QUaternion ESTimator) que evita este cálculo.
- El problema de encontrar $Kq = \lambda q$ se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \sigma & \vec{z}^T \\ \vec{z} & S - \sigma \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix}$$

- Es decir, dos ecuaciones:

$$\sigma q_0 + \vec{z}^T \vec{q} = \lambda q_0, \quad q_0 \vec{z} + S \vec{q} - \sigma \vec{q} = \lambda \vec{q}$$

- Recordando el vector de Gibbs $\vec{g} = \frac{\vec{q}}{q_0}$, la 2ª ecuación queda:

$$\vec{z} + [S - (\sigma + \lambda)\text{I}] \vec{g} = 0$$

- Luego $\vec{g} = [(\sigma + \lambda)\text{I} - S]^{-1} \vec{z}$ (pero no conocemos λ , el máximo autovalor)



Método QUEST

- Una primera forma de resolver el problema es suponer $\lambda \approx 1$ (si las medidas son exactas este es el valor que se obtiene). En tal caso: $\vec{g} = [(1 + \sigma)\mathbf{I} - \mathbf{S}]^{-1} \vec{z}$
- Si esto no es una buena aproximación, se puede encontrar una expresión explícita para el autovalor máximo, resolviendo la ecuación característica de la matriz K . Se obtiene:

$$\lambda^4 - (a + b)\lambda^2 - c\lambda + (ab + c\sigma - d) = 0$$

- Donde los coeficientes son:

$$a = \sigma - \text{Tr}[\text{adj}(\mathbf{S})],$$

$$b = \sigma - \vec{z}^T \vec{z},$$

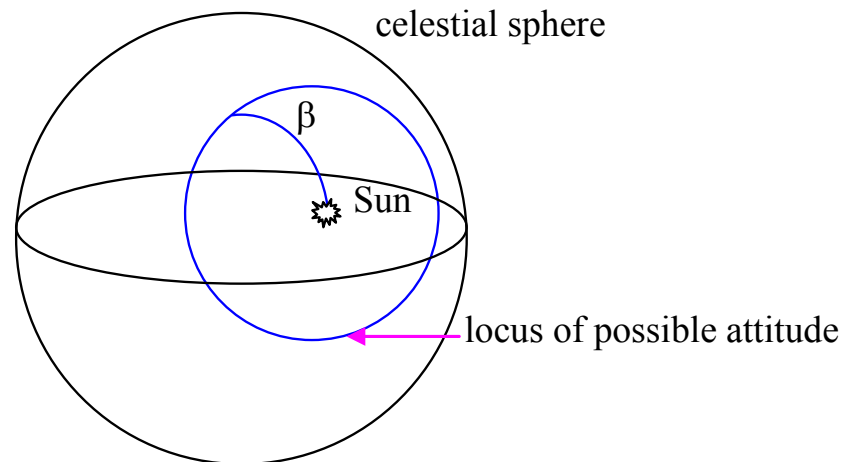
$$c = \det[\mathbf{S}] + \vec{z}^T \mathbf{S} \vec{z},$$

$$d = \vec{z}^T \mathbf{S}^2 \vec{z}.$$



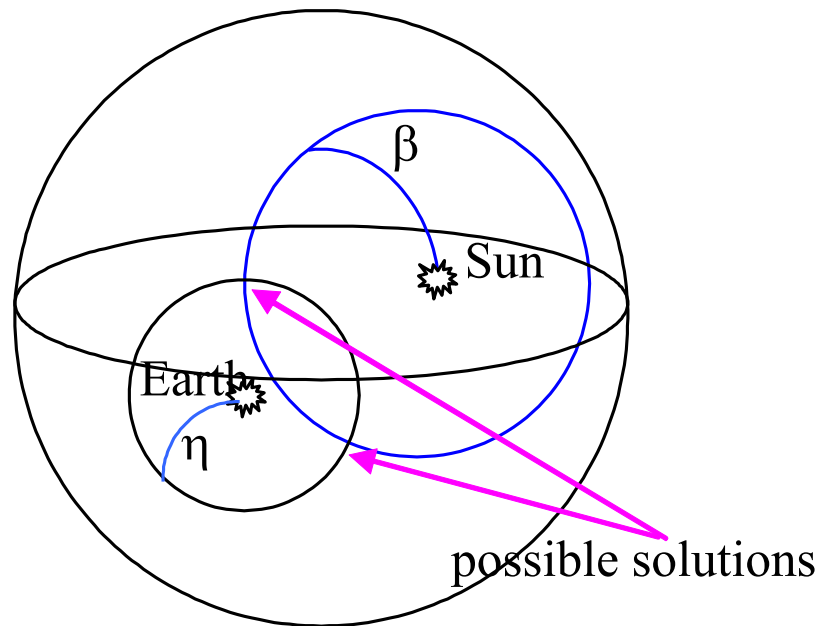
Determinación geométrica de la actitud

- En algunos casos sólo interesa determinar la orientación (inercial) de una dirección del vehículo (por ejemplo, donde se ubica un instrumento o una antena, o el eje de giro).
- En tal caso sería suficiente tener dos sensores que nos permitan estimar el ángulo entre la dirección de interés y astros de referencia (por ejemplo, el sol o la Tierra).
Gráficamente, se puede representar considerando la “esfera celeste” en torno al vehículo, encontrando el lugar geométrico de las posibles orientaciones de la dirección.



Determinación geométrica de la actitud

- Con dos cuerpos, existirá una ambigüedad que usualmente puede ser resuelta si se conocía aproximadamente la actitud anterior.



Determinación geométrica de la actitud

- Si bien el problema se puede resolver geométricamente, es sencillo plantear su resolución analítica usando la trigonometría esférica (distancias ortodrómicas).
- Sea AR_1 , δ_1 y AR_2 , δ_2 las ascensiones rectas y declinaciones de los dos cuerpos de referencia, y β y η los ángulos formados con cada uno de ellos. Si AR y δ es la ascensión recta y declinación hacia la que apunta la dirección de medida, se tiene que:

$$\cos \beta = \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos(AR - AR_1)$$

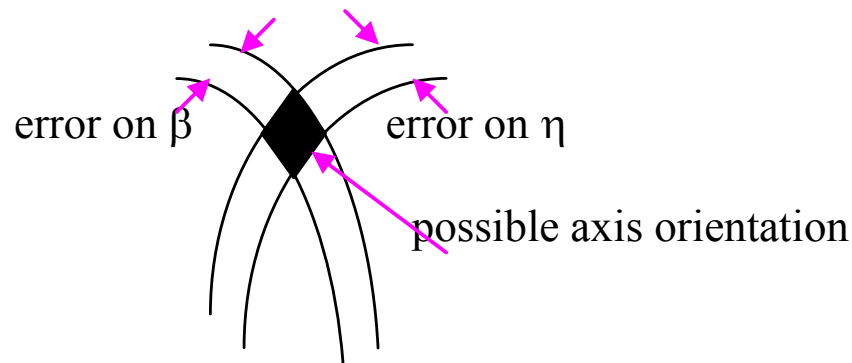
$$\cos \eta = \sin \delta \sin \delta_2 + \cos \delta \cos \delta_2 \cos(AR - AR_2)$$

- Se trata de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo δ y AR se resuelve el problema.



Determinación geométrica de la actitud

- En la práctica existirán errores en ambas medidas, por lo que existirá una región de posibles direcciones:



- Cuanto “menos ortogonal” sea la intersección entre las dos circunferencias esféricas, mayor es la región de incertidumbre. Esto depende de la situación geométrica y no tanto de la precisión de los sensores.
- Por tanto, es importante elegir cuidadosamente las direcciones de referencia, de acuerdo a la geometría.

Ejemplo 1-D: propagación del error de un giróscopo

- Cuando uno tiene medidas de giróscopos, es necesario integrar las ecuaciones diferenciales cinemáticas.
- Para entender el filtro de Kalman a nivel conceptual, vamos a ejemplificarlo en el caso más sencillo: un único grado de libertad de giro. Por tanto hay un sólo ángulo θ , cuya ecuación diferencial cinemática es

$$\dot{\theta} = \omega$$

- Un giróscopo proporcionará una medida de ω que denotamos por $\hat{\omega}$. En realidad no será exactamente ω , sino que estará contaminado por un cierto ruido blanco ν :

$$\omega = \hat{\omega} + \nu$$

- Si intentamos estimar θ (denotamos a la estimación $\hat{\theta}$) directamente de $\hat{\omega}$, tendremos:

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega}$$



Ejemplo 1-D: propagación del error de un giróscopo

- El error de estimación $\delta\theta = \theta - \hat{\theta}$ será el siguiente:

$$\dot{\delta\theta} = \omega - \hat{\omega} = \nu$$

- Suponiendo ν ruido blanco (unidimensional) de varianza Q y $\delta\theta(0) \approx N(0, P_0)$, encontramos (usando la teoría de procesos expuesta en las primeras transparencias) que el error es un proceso estocástico gaussiano, $\delta\theta \approx N(m, P)$, donde:

$$\dot{m} = 0 \longrightarrow m = \delta\theta_0 = 0,$$

y

$$\dot{P} = \sigma_\nu^2 \longrightarrow P = P_0 + Qt$$

- Por tanto, aunque la media del error permanece fija en cero, la varianza del error crece linealmente con el tiempo y eventualmente se dispara, siendo por tanto este estimador inútil a medio plazo.



Medida externa

- Supongamos que se tiene una medida externa adicional del ángulo. Suponemos que cada ciertos instantes discretos $t = t_k$ se realiza una medida del ángulo $\hat{\theta}(t_k)$, que llamamos $\hat{\theta}_k^{med}$ con algún otro dispositivo (que también tendrá un cierto error asociado, de forma que $\theta_k = \hat{\theta}_k^{med} + \epsilon$, donde ϵ es ruido blanco, de varianza R).
- Como el tiempo entre medidas puede ser grande, no es buena idea decir $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_k^{med}$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$.
- Otra idea es resetear el estimador de las anteriores transparencias cuando se llega a $t = t_k$, es decir, combinar las medidas de la siguiente forma:
$$\hat{\theta} = \hat{\omega}, \quad \hat{\theta}(t_k) = \hat{\theta}_k^{med}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$
- Por tanto cada nueva medida externa se reinicia la condición inicial de la ecuación diferencial y se vuelve a integrar.
- Es fácil ver que el error obtenido de esta forma sería $\delta\theta \approx N(m, P)$, con $m = 0$ y $\dot{P} = Q$, para $t \in [t_k, t_{k+1})$, con $P(t_k) = R$, luego $P = R + Q(t - t_k)$.



Filtro de Kalman

- Con la anterior forma que el error sería máximo justo antes de una medida, obteniendo $P = R + Q(t_{k+1} - t_k)$ en dicho instante.
- El problema es que se ha despreciado la estimación que daba la ecuación diferencial, cuando entre t_k y t_{k+1} no ha dado tiempo a que se el error crezca demasiado. La idea del filtro de Kalman es combinar la estimación de la ecuación diferencial justo antes de la medida externa, con la medida externa, de forma que la covarianza del error sea mínima.
- A la estimación justo antes de la medida se le llama estimación a priori $\hat{\theta}_k^-$.
- La estimación después de la medida (estimación a posteriori), se denota $\hat{\theta}_k^+$ y se calcula como:

$$\hat{\theta}_k^+ = \hat{\theta}_k^- + K(\hat{\theta}_k^{med} - \hat{\theta}_k^-)$$

donde K es la ganancia de Kalman y el paréntesis es la diferencia entre la estimación que se tenía y la medida externa.



Filtro de Kalman

- K se calcula para minimizar la covarianza del error a posteriori.
- La covarianza a priori será P_k^- .
- A posteriori, calculando la covarianza de la ecuación de θ_k^+ :

$$P_k^+ = (1 - K)^2 P_k^- + K^2 R$$

- Derivando con respecto a K e igualando a cero:

$$0 = -2(1 - K)P_k^- + 2KR, \text{ luego } K = \frac{P_k^-}{P_k^- + R}.$$

- Por tanto la covarianza a posterior será, sustituyendo K :

$$P_k^+ = \frac{P_k^- R}{P_k^- + R}$$

- Se ve fácilmente que P_k^+ es menor que R y menor que P_k^- (recordar que ambas son positivas): por tanto se ha conseguido mejorar tanto la estimación anterior como la que se tenía de la medida!



Filtro de Kalman

- Resumiendo el algoritmo:
- Para $t \in [t_k, t_{k+1})$, se integra usando la medida de los giróscopos, partiendo de la última estimación a posteriori:

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega}, \quad \theta(t_k) = \theta_k^+,$$

- También se propaga la covarianza del error:

$$\dot{P} = Q, \quad P(t_k) = P_k^+,$$

- Al llegar a $t = t_{k+1}$, se obtiene de estas ecuaciones $\theta_{k+1}^- = \theta(t_{k+1})$ y P_{k+1}^- , y se obtiene una medida externa $\hat{\theta}_{k+1}^{med}$. Aplicamos el filtro de Kalman:

$$\hat{\theta}_{k+1}^+ = \hat{\theta}_{k+1}^- + K(\hat{\theta}_{k+1}^{med} - \hat{\theta}_{k+1}^-),$$

donde $K = \frac{P_{k+1}^-}{P_{k+1}^- + R}$, y también obtenemos $P_{k+1}^+ = \frac{P_{k+1}^- R}{P_{k+1}^- + R}$.

- Repetimos y volvemos a integrar las ecuaciones diferenciales hasta la nueva medida en $t = t_{k+2}$.



Filtro de Kalman: casos extremos

- Si la medida del giróscopo es muy mala, es decir, Q es muy grande, entonces $P_k^- \rightarrow \infty$, y se puede ver que $P_k^+ \rightarrow R$, $K \rightarrow 1$, y por tanto $\theta_k^+ = \theta_k$ (es decir se coge la medida del sensor externo despreciando el resultado de integrar la ecuación diferencial).
- Si la medida del sensor externo es muy mala, es decir, R es muy grande, entonces se puede ver que $P_k^+ \rightarrow P_k^-$, $K \rightarrow 0$, y por tanto $\theta_k^+ = \theta_k^-$ (es decir se coge la estimación resultado de integrar la ecuación diferencial despreciando la medida del sensor externo).
- Si resulta que $P_k^- = R$, es decir, la estimación a priori tiene el mismo error que es sensor externo, entonces se puede ver que $P_k^+ = R/2$, $K \rightarrow 1/2$, y por tanto $\theta_k^+ = \frac{\theta_k + \theta_k^-}{2}$ (es decir se toma la media entre la estimación resultado de integrar la ecuación diferencial y la medida del sensor externo).



Filtro de Kalman: otras consideraciones

- Se ha simplificado considerablemente el Filtro de Kalman al considerar un caso 1-D que es lineal. El caso N-D es similar pero más complejo ya que implica diversos productos e inversiones matriciales. No obstante conceptualmente es lo mismo: se integra la ecuación diferencial con los giróscopos y al obtener una medida externa se aplica el algoritmo de Kalman para ponderar entre la estimación a priori y la medida.
- Para aplicar el filtro de Kalman es suficiente una medida, pero cuantas más se tenga, mejor será el resultado.
- Si el sistema es no lineal hay que empezar por linealizarlo; el filtro resultante se denomina Filtro Extendido de Kalman. Para estimación de actitud esto es necesario ya que las ecuaciones diferenciales cinemáticas son siempre no-lineales.
- Para aeronaves y misiles se usa filtrado de Kalman para integrar las medidas de la IMU (giróscopos y acelerómetros) con medidas externas (GPS, antenas, magnetómetros) y así obtener no sólo la actitud sino también la posición.



Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Vamos a desarrollar ahora el algoritmo del Filtro de Kalman en 3D para el siguiente caso:
 - 1 Se tienen giróscopos en los 3 ejes, de forma que se tiene una estimación de la velocidad angular $\hat{\vec{\omega}}_{B/N}^B$, que contendrá error, de forma que $\vec{\omega}_{B/N}^B = \hat{\vec{\omega}}_{B/N}^B + \vec{v}$, donde $\vec{v}$ es ruido blanco de covarianza Q . Estas medidas se suponen continuas.
 - 2 Cada cierto tiempo se obtienen medidas de n direcciones en ejes cuerpo $\hat{\vec{v}}_i^B$, de forma que $\vec{v}_i^B = C_N^B \vec{v}_i^N$ y $\vec{v}_i^B = \hat{\vec{v}}_i^B + \vec{\epsilon}_i$ para $i = 1, \dots, n$. $\vec{\epsilon}_i$ es ruido blanco de covarianza R_i .
- Se podrían realizar estimaciones con los giróscopos o con las medidas por separado. Con las medidas ya lo hemos visto (algoritmo Q) pero sólo se podría hacer si hubiera dos o más medidas tomadas a la vez.
- Con los giróscopos, la estimación sería $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} q \star q_{\hat{\vec{\omega}}}$.



Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Si uno usa $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \dot{q} \star q_{\hat{\omega}}$, ¿cuál es el error de estimación sabiendo que $\hat{\omega}$ está corrompida con ruido blanco de covarianza Q ?
- No podemos aplicar la teoría general porque la ecuación es no-lineal!
- Recordamos los conceptos de cuaternión linealizado y ecuación cinemática linealizada: $\dot{q} = \hat{q} \star \delta q$, con

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{a}} \approx \vec{v} + \vec{a} \times \hat{\omega} = -\hat{\omega}^\times \vec{a} + \vec{v}.$$

- Por tanto con el cuaternión de error podemos estimar cuanto error se está cometiendo, estudiando su covarianza P , la cual evolucionará de acuerdo con la teoría que hemos planteado antes:

$$\dot{P} = -\hat{\omega}^\times P + P \hat{\omega}^\times + Q, \quad P(0) = P_0$$



Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Esta covarianza crece sin límite, lo cuál sólo podemos remediarlo tomando medidas. Si en un cierto instante tomamos n medidas, ¿cómo actualizamos el cuaternión estimado $\hat{q}$?
- Una posibilidad sería descartar totalmente lo obtenido con los giróscopos, de forma que se resetea la estimación a un nuevo valor (sólo posible si se tienen dos o más medidas), usando el algoritmo Q. En tal caso la nueva covarianza sería la estudiada con el algoritmo Q.
- Una mejor idea sería aprovechar la estimación que ya teníamos y combinarlas de acuerdo al filtro de Kalman. Para ello hay que linealizar el proceso de medida. Del tema anterior,
 $q_{\vec{v}_i^B} = q^* \star q_{\vec{v}_i^N} \star q$, luego tenemos que $q_{\vec{v}_i^N} = q \star q_{\vec{v}_i^B} \star q^*$ y
 $\vec{v}_i^B = \hat{\vec{v}}_i^B + \vec{\epsilon}_i$. Introduciendo el cuaternión de error:

$$q_{\vec{v}_i^N} = \hat{q} \star \delta q \star q_{\vec{v}_i^B} \star \delta q^* \star \hat{q}^* \approx \hat{q} \star \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v}_i^B \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 1 \\ -\vec{a}/2 \end{bmatrix} \star \hat{q}^*$$



Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Desarrollando a primer orden en $\vec{a}$:

$$\begin{aligned}
 q_{\vec{v}_i^N} &\approx \hat{q} \star \begin{bmatrix} -\vec{v}_i^B \cdot \vec{a}/2 \\ \vec{v}_i^B + \vec{a}/2 \times \vec{v}_i^B \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 1 \\ -\vec{a}/2 \end{bmatrix} \star \hat{q}^* \\
 &= \hat{q} \star \begin{bmatrix} -\vec{v}_i^B \cdot \vec{a}/2 + \vec{a}/2 \cdot (\vec{v}_i^B + \vec{a}/2 \times \vec{v}_i^B) \\ (\vec{v}_i^B \cdot \vec{a}/2)\vec{a}/2 + \vec{v}_i^B + \vec{a}/2 \times \vec{v}_i^B - (\vec{v}_i^B + \vec{a}/2 \times \vec{v}_i^B) \times \vec{a}/2 \end{bmatrix} \star \hat{q}^* \\
 &= \hat{q} \star \begin{bmatrix} 0 \\ (\vec{v}_i^B \cdot \vec{a}/2)\vec{a}/2 + \vec{v}_i^B + \vec{a} \times \vec{v}_i^B + \vec{a}/2 \times (\vec{a}/2 \times \vec{v}_i^B) \end{bmatrix} \star \hat{q}^* \\
 &\approx \hat{q} \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v}_i^B + \vec{a} \times \vec{v}_i^B \end{bmatrix} \star \hat{q}^*
 \end{aligned}$$

- Llamamos $\vec{z}_i$ a la discrepancia entre lo medido y lo esperado, es decir, $\vec{z}_i = \hat{\vec{v}}_i^B - \hat{C}_N^B \vec{v}_i^N$. Expresándolo con cuaterniones, será la parte vectorial de:

$$q_{\hat{\vec{v}}_i^B} - \hat{q}^* \star q_{\vec{v}_i^N} \star \hat{q} \approx q_{\hat{\vec{v}}_i^B} - \hat{q}^* \star \hat{q} \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v}_i^B + \vec{a} \times \vec{v}_i^B \end{bmatrix} \star \hat{q}^* \star \hat{q} \approx -q_{\vec{\epsilon}_i} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{\vec{v}}_i^B) \times \vec{a} \end{bmatrix}$$

- Por tanto tendremos n medidas del error de la forma $\vec{z}_i = H_i \vec{a} - \vec{\epsilon}_i$, donde $H_i = (\hat{\vec{v}}_i^B)^\times$. (NOTA: se tomarán sólo dos filas para evitar problemas de invertibilidad). La covarianza de esta medida será R_i .



Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Llamemos al instante antes de la medida con el superíndice $-$ y el posterior con $+$. De la integración teníamos por un lado $\hat{q}^-$ con error a^- cuya media es $E[\vec{a}^-] = 0$ y covarianza P^- .
- Con las medidas, supuestas independientes, formamos
$$\vec{z} = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_n \end{bmatrix}$$
- Usando las medidas, escribimos $\vec{a}^+ = \vec{a}^- + K(\vec{z} - H\vec{a}^-)$, pero puesto que en media $\vec{a}^- = 0$, simplemente tendremos: $\vec{a}^+ = K\vec{z}$, donde K es la ganancia de Kalman.
- La ganancia de Kalman (óptima) se calcula como $K = P^- H^T (H P^- H^T + R)^{-1}$. La covarianza se actualiza también como $P^+ = P^- - K H P^-$.
- Con $\vec{a}^+$ corregimos $\hat{q}:\hat{q}^+ = \hat{q}^- \star \delta q = \hat{q}^- \star \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a}^+ \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}^+\|^2}}$
- Este procedimiento se itera, integrando con los giróscopos y actualizando cada vez que hay medidas.



Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Resumiendo el algoritmo. Datos iniciales: $\hat{q}_0$, P_0 , Q , R . En todo momento se tienen medidas de la velocidad angular $\hat{\omega}$. Ocasionalmente se tienen medidas $\vec{z}$.

- 1 Comenzar integrando las ecuaciones hasta que haya una medida, de forma que se estiman $\hat{q}$ y P :

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \hat{q} \star \hat{\omega}, \quad \hat{q}(0) = q_0,$$

$$\dot{P} = -\hat{\omega}^\times P + P \hat{\omega}^\times + Q, \quad P(0) = P_0$$

- 2 Cuando en el instante t_k llegan una o más medidas, llamar $\hat{q}^- = \hat{q}(t_k)$ y $P^- = P(t_k)$. Calcular $\vec{z}$, H , R . Calcular $K = P^- H^T (H P^- H^T + R)^{-1}$. Calcular $\vec{a}^+ = K \vec{z}$. Actualizar $\hat{q}^+ = \hat{q}^- \star \delta q = \hat{q}^- \star \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a}^+ \end{bmatrix}$, $P^+ = P^- - K H P^-$.
- 3 Continuar integrando las ecuaciones a partir de las estimaciones actualizadas hasta que haya más medidas:

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \hat{q} \star \hat{\omega}, \quad \hat{q}(t_k) = q^+,$$

$$\dot{P} = -\hat{\omega}^\times P + P \hat{\omega}^\times + Q, \quad P(t_k) = P^+$$

- 4 Cuando haya nuevas medidas, iterar a partir de 2.



Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Consideraciones adicionales:
 - Conviene renormalizar los cuaterniones estimados $\hat{q}(t)$ si el módulo se aleja de la unidad.
 - Igualmente, la matriz de covarianzas $P(t)$ debe ser simétrica en todo momento. Se puede "simetrizar" forzando $P = 1/2(P + P^T)$, o se puede simplemente calcular sólo la "mitad" de la matriz e imponer que la otra mitad es la traspuesta.
 - La ganancia de Kalman es óptima, pero está calculada para el problema linealizado. Si la estimación no está suficientemente cerca de la realidad, el filtro puede diverger.
 - Se pueden (y se deben) incluir los sesgos (bias) de los giróscopos en el estimador.
 - En la práctica es difícil conocer bien las matrices Q y R .
- Existen muchos otros algoritmos de filtrado, con sus ventajas e inconvenientes. El MEKF tiene la ventaja de ser sencillo en su uso y flexible a cualquier número de medidas, pero no es necesariamente el más preciso.



Sensores

- Existen tres tipos fundamentales de sensores, de acuerdo al fenómeno físico en el que se basan:
 - Ópticos: detectan la **dirección relativa** de un cuerpo planetario o estelar.
 - Mecánicos: miden la velocidad angular del vehículo respecto a un sistema de referencia inercial.
 - Magnéticos: sólo se pueden usar en la proximidad (LEO) de planetas con un campo magnético de intensidad suficiente (p.ej. la Tierra).
- Aunque no es técnicamente sencillo, está demostrado que es posible usar el sistema GPS para altitudes desde LEO hasta GEO. Su uso se basa en usar varias antenas receptoras, deduciéndose la actitud de la diferencia en la señal recibida en ambas.
- Típicamente se mezclan varios tipos de sensores con varios anchos de banda y se obtiene la actitud de las medidas mediante un Filtro de Kalman o similar.



Sensores

■ Precisión de algunos sensores:

Table 9.3 Potential accuracies of reference sensors

Reference object	Potential accuracy
Stars	1 arc second
Sun	1 arc minute
Earth (horizon)	6 arc minutes
RF beacon	1 arc minute
Magnetometer	30 arc minutes
Narstar Global Positioning System (GPS)	6 arc minutes

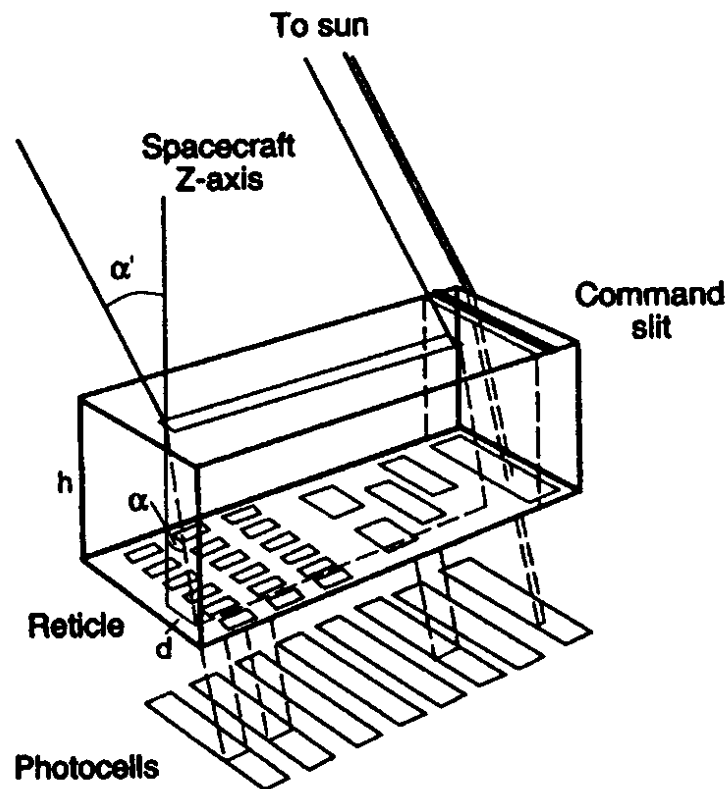


Sensores Ópticos

- Un sensor óptico trata de deducir la dirección (respecto al sistema de ejes en el que se encuentra montado, es decir, ejes cuerpo) de un cuerpo planetario o estelar de referencia.
- Típicamente estos cuerpos serán el Sol, la Tierra o una estrella.
- Si bien en general determinan una dirección (es decir dos ángulos), en algunos casos de sensores más sencillo se encuentra un único ángulo.
- Un sólido rígido tiene tres grados de libertad en su actitud, y puesto que típicamente se obtendrán bastantes medidas, el problema de la estimación estará sobre-determinado. Para resolverlo se emplean métodos estadísticos y/o filtros de estimación (p.ej. el **Filtro de Kalman**, si también se usan giróscopos).



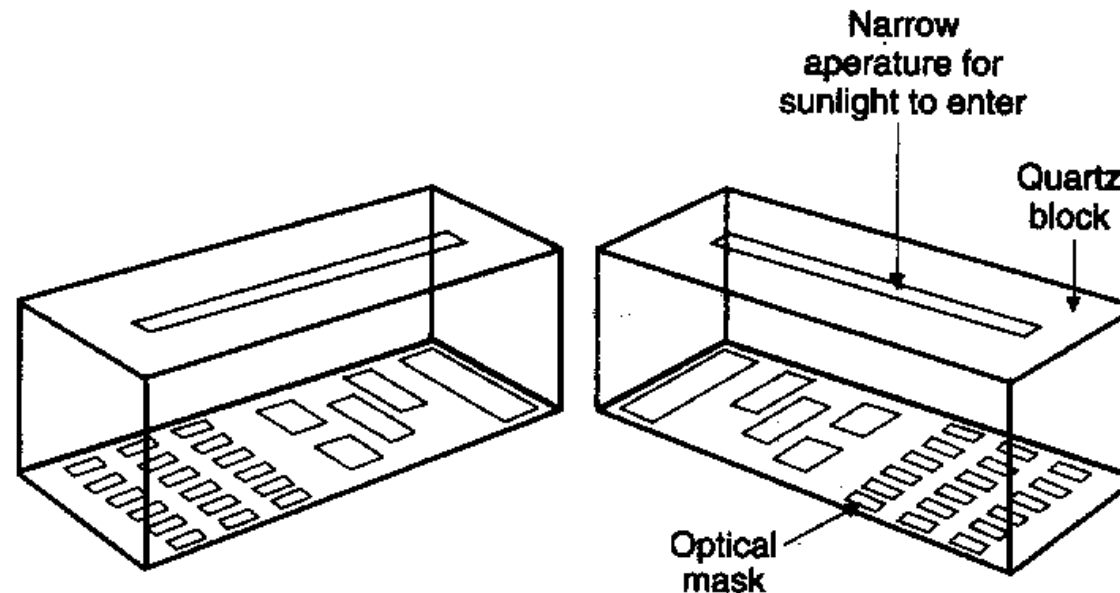
Sensores de radiación solar



- **Sensores de radiación solar:** determinan la dirección en la que se encuentra el Sol.
- Consisten en una “cámara oscura”, fija al vehículo, y provista de una pequeña ranura de entrada con una retícula de detectores fotoeléctricos al fondo de la cámara.
- Según los detectores de la retícula que se activen, se puede calcular el ángulo de incidencia.

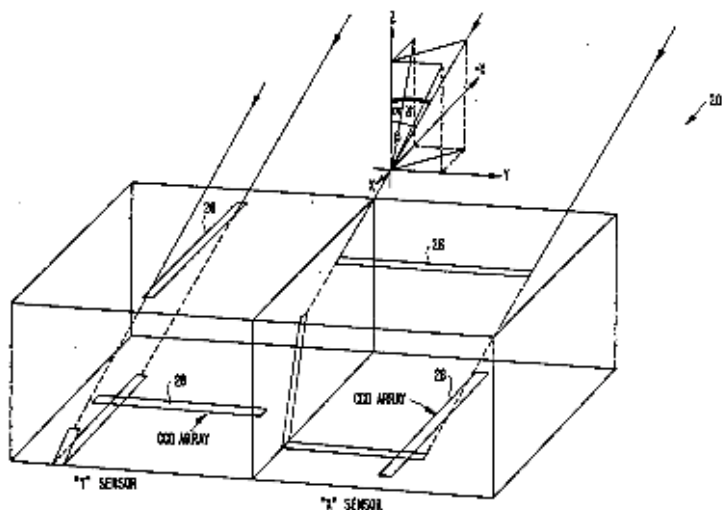


Sensores de radiación solar



- Un sensor es capaz de determinar un ángulo relativo, para calcular los dos ángulos de una dirección es necesario usar una configuración con dos sensores perpendiculares.
- La precisión máxima es igual al diámetro angular del sol (0.5 grados en LEO).

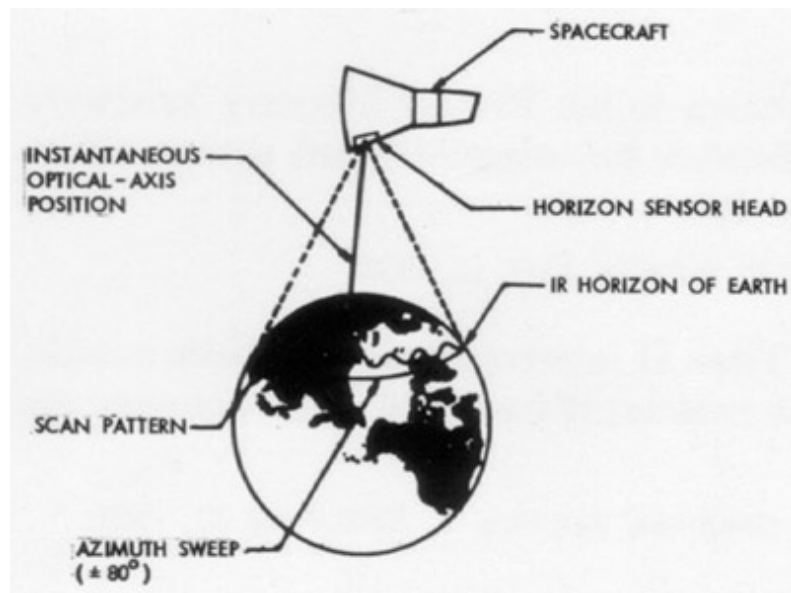
Sensores digitales de aspecto solar



- **Sensores digitales de aspecto solar** (DSADs): son similares a los sensores de radiación solar, pero mejoran su precisión.
- Usan una celda de sensores fotoeléctricos más sensibles, capaces de determinar además del ángulo, la intensidad de la radiación incidente.
- Una vez conocida la dirección y ángulo de máxima intensidad, se puede calcular la dirección en la que se encuentra el **centroide del Sol**, con gran precisión.
- Se obtiene una precisión de segundos de arco.

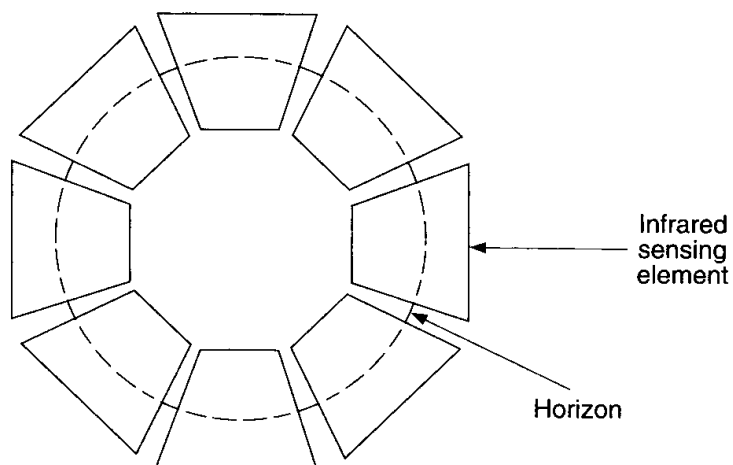


Sensores de horizonte terrestre

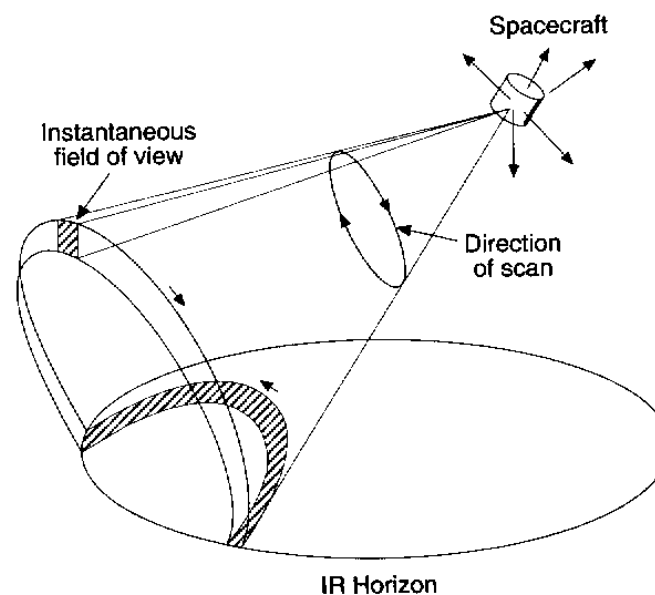


- **Sensores de horizonte terrestre:** determinan la dirección en la que se encuentra la Tierra.
- Se basan en que la Tierra refleja la radiación solar en el espectro infrarrojo.
- Su precisión está limitada en parte por la imprecisión de la línea de horizonte.
- Existen dos tipos de sensores de horizonte terrestre:
 - Estáticos: detectan el “dibujo” del horizonte terrestre.
 - De barrido: en continua rotación, encuentran cuando empieza y cuando acaba el horizonte.

Sensores de horizonte terrestre



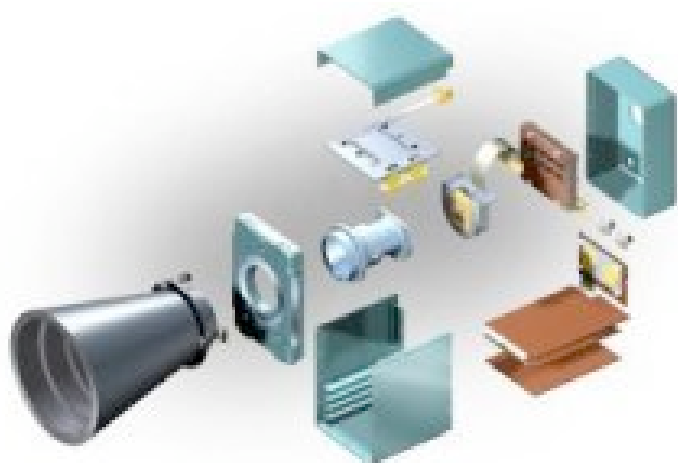
- Sensor de tipo estático.
- Complejo en órbitas excéntricas.
- Su precisión va de 0.1 grados (LEO) a 0.01 grados (GEO).



- Sensor de tipo barrido.
- Se calcula el ancho del horizonte en base a cuando aparece y desaparece la señal.
- Precisión variable (minutos de arco o menos).



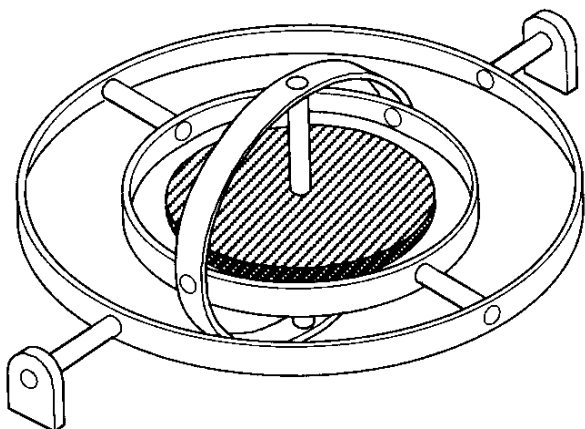
Sensores de estrellas



- **Sensores de estrellas:** determinan la dirección en base a las estrellas. Los más precisos.
- Los star trackers o rastreadores encuentran una estrella concreta, que siguen.
- Las star cameras buscan grupos de estrellas, cuyas posiciones son comparadas con mapas estelares para determinar la actitud.
- Puesto que la intensidad de radiación emitida por una estrella suele ser baja, requieren dispositivos muy sensibles o bien amplificadores.
- No son útiles en vehículos estabilizados por rotación, puesto que a velocidades angulares grandes dejan de ser efectivos.



Sensores mecánicos: giróscopos

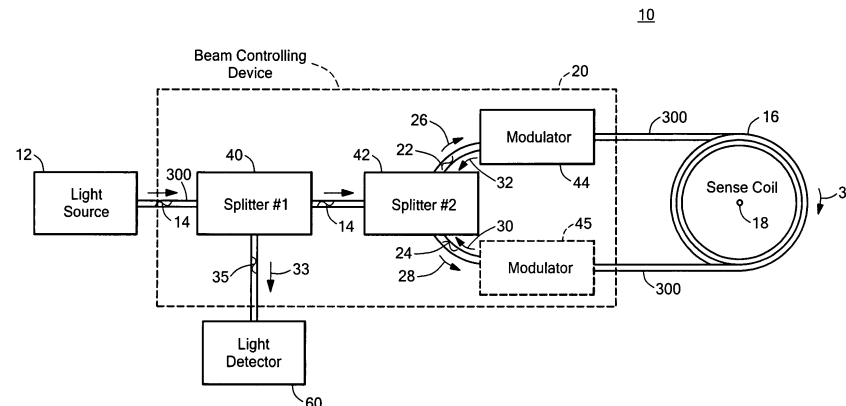


- **Giróscopos:** Típicamente en configuración “strap-down” (fijos a los ejes cuerpo), los giróscopos miden la velocidad angular en un eje.
- Tres giróscopos en ejes perpendiculares podrán calcular todas las componentes de la velocidad angular.
- El principal problema de los giróscopos es que, aunque son capaces de realizar medidas de gran precisión (desde 1 grado por hora hasta 10 segundos de arco por hora), no proporcionan una medida angular, sino de velocidad angular.
- Dicha medida debe ser integrada en el tiempo (usando las ecuaciones diferenciales cinemáticas) para obtener la actitud.



Sensores mecánicos: giróscopos

- Inevitablemente pequeños errores se acumularan y provocarán un error de deriva en la medida.
- Por ese motivo, los sensores giroscópicos siempre se usan en combinación con otros sensores.
- No obstante son muy deseables por su elevado ancho de banda (bajo en el resto de los sensores).
- Giróscopos no mecánicos: en la actualidad se usan giróscopos ópticos (basados en principios de interferometría: RLG/FOG) y piezoeléctricos (basados en sistemas electromecánicos MEMS, de bajo coste/precisión).



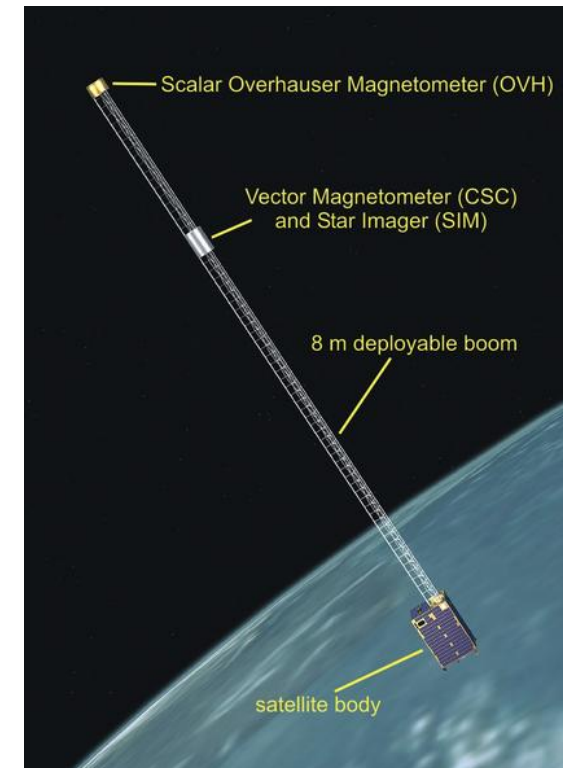
Sensores magnéticos (magnetómetros)

*Low Power
and High
Performance
in a Small
Package*



- Un magnetómetro mide el vector campo magnético en el sistema de referencia ejes cuerpos.
- Se compara con el campo magnético teórico en los ejes fijos de la Tierra, para hallar la actitud.
- No muy precisos por la irregularidad del campo magnético terrestre.

- Satélite Ørsted, medidas precisas del campo magnético terrestre.
- “Boom” (mástil) de 8 metros para minimizar las interferencias del propio satélite en el magnetómetro.



Descripción estadística del error

- Consideremos por ejemplo el caso del error de medida de un giróscopo: $\vec{\omega} = \hat{\vec{\omega}} + \delta\vec{\omega}$, donde $\delta\vec{\omega}$ son errores de medida y $\hat{\vec{\omega}}$ la medida obtenida.
- Una componente de $\delta\vec{\omega}$, por ejemplo $\delta\omega_1$, puede tener el siguiente aspecto:



- Es imposible conocer el valor con exactitud.
- Se observa que cambia con el tiempo.
- Por tanto, se representan sus propiedades usando la estadística.
- La teoría de procesos estocásticos nos permitirá analizar como el ruido de los sensores se propaga como error de estimación.



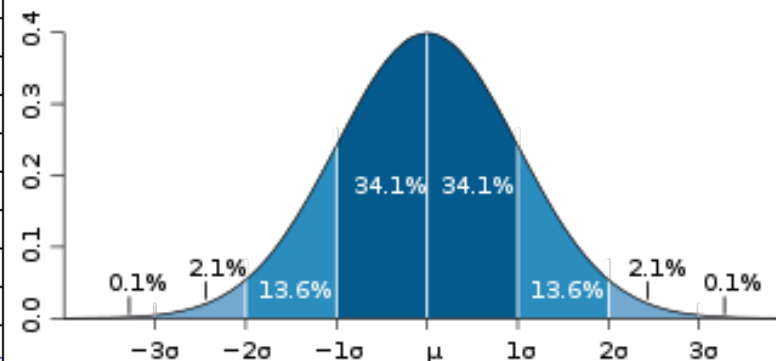
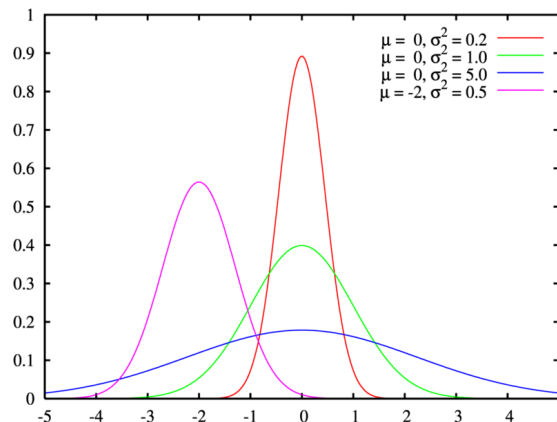
Variables aleatorias continuas unidimensionales

- Sea una variable aleatoria $X \in \mathbb{R}$ continua.
- Recordemos que la función de distribución $F(x)$ es la probabilidad de que $X \leq x$, que se escribe como $F(x) = P(X \leq x)$.
- La función de distribución se calcula mediante la función de densidad $f(x)$: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$.
- Se define el operador esperanza matemática actuando sobre la función $g(x)$ como $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)dy$. Se trata de un operador lineal, de forma que $E[\alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X)] = \alpha_1 E[g_1(X)] + \alpha_2 E[g_2(X)]$. Los dos casos importantes son:
 - Media: $m(X) = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$.
 - Varianza: $V(X) = E[(X - m(X))^2] = E[X^2] - (E[X])^2$.
 - Desviación típica σ , la raíz cuadrada de la varianza, $\sigma = \sqrt{V(X)}$.



Distribución normal o gaussiana I

- Es la distribución más usada en estadística. Se escribe $X \sim N(m, \sigma^2)$ y su función de densidad es
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{Exp} \left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right).$$
- Intervalos de confianza: si $X \sim N(m, \sigma^2)$:
 - Intervalo 1- σ : $P(X \in [m - \sigma, m + \sigma]) = 68,3 \%$.
 - Intervalo 2- σ : $P(X \in [m - 2\sigma, m + 2\sigma]) = 95,45 \%$.
 - Intervalo 3- σ : $P(X \in [m - 3\sigma, m + 3\sigma]) = 99,74 \%$.



Distribución normal o gaussiana II

- El **teorema central del límite** dice que la suma de variables aleatorias (con cualquier tipo de distribución) tiende en media a la normal. Puesto que los errores a gran escala provienen de la suma y acumulación de muchos errores a pequeña escala, esto justifica el uso de la normal como modelo para errores.
- Una propiedad importante de la normal es que la suma de normales es de nuevo normal, es decir, si $X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(m_y, \sigma_y^2)$ y son independientes, entonces si $Z = X + Y$ se tiene que $Z \sim N(m_x + m_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$.
- Por tanto $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$, es decir, la desviación típica de la suma de errores es **la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones típicas de los errores**.
- Esta regla, conocida como Root-Sum-of-Squares (RSS) es muy importante.



Variables aleatorias continuas multidimensionales

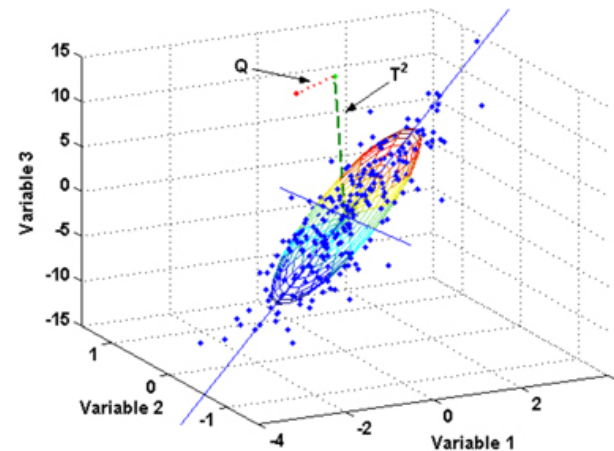
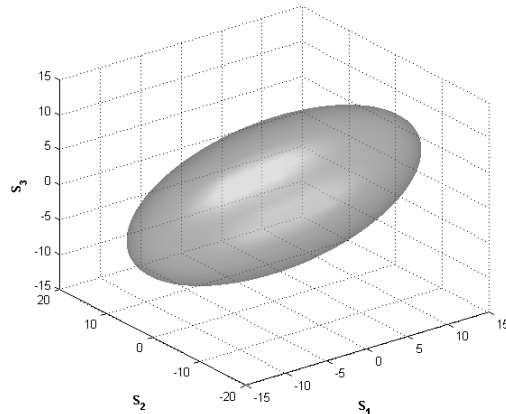
- Sea una variable aleatoria $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ continua multidimensional.
- Cada componente de $\vec{X}$ sigue una distribución unidimensional.
- Como en el caso unidimensional, se define una función de distribución conjunta, que se calcula mediante la función de densidad $f(\vec{x})$.
- Igualmente $E[g(\vec{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{y})f(\vec{y})d\vec{y}$. Los dos casos importantes son:
 - Media: $\vec{m}(\vec{X}) = E[\vec{X}] = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{y}f(\vec{y})d\vec{y}$.
 - Covarianza: $\text{Cov}(\vec{X}) = E[(\vec{X} - m(\vec{X}))(\vec{X} - m(\vec{X}))^T] = \Sigma$. Es una matriz simétrica y definida positiva. Los valores de la diagonal representan la varianza de cada componente de $\vec{X}$, y los otros valores la correlación entre dos componentes de $\vec{X}$. Se tiene $\Sigma = E[(\vec{X}\vec{X}^T] - m(\vec{X})m(\vec{X})^T$.
- Por ejemplo, para $n = 3$ y escribiendo $\vec{X} = [X, Y, Z]$:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & E[(X - m_x)(Y - m_y)] & E[(X - m_x)(Z - m_z)] \\ E[(X - m_x)(Y - m_y)] & \sigma_y^2 & E[(Y - m_y)(Z - m_z)] \\ E[(X - m_x)(Z - m_z)] & E[(Y - m_y)(Z - m_z)] & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$



Distribución normal multivariante I

- Se escribe $\vec{X} \sim N_n(\vec{m}, \Sigma)$ y su función de densidad es $f(\vec{x}) = \frac{1}{\text{Det}(\Sigma)(2\pi)^{n/2}} \text{Exp} \left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{m})^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{m}) \right)$.
- Los intervalos de confianza son ahora regiones de $\mathbb{R}^n$, definidos por $P(\vec{X} \in \Omega) = P_\Omega$.
- La forma de estas regiones de confianza es de elipsoides, descritos por la ecuación $(\vec{x} - \vec{m})^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{m}) = d^2$, donde d depende de P_Ω . Cuanto mayores sean los valores de los autovalores de Σ , mayor será el elipsoide. Las direcciones de los ejes del elipsoide vendrán dados por los autovectores de Σ .



Distribución normal multivariante II

- Tomando un ejemplo aeronáutico clásico en navegación aérea, si por ejemplo describimos el error en posición de un avión en ejes cuerpo, $\delta \vec{r}^b = [\delta x \ \delta y \ \delta z]^T$, como una normal multivariante con $n = 3$, de media cero (centrada en el avión) y con matriz de covarianzas:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

- Entonces podemos asimilar el movimiento del avión al movimiento del elipsoide, que representa una región de incertidumbre donde se puede encontrar el avión con gran probabilidad.
- Se verifica que si $\vec{X} \sim N_n(\vec{m}_x, \Sigma_x)$ e $\vec{Y} \sim N_n(\vec{m}_y, \Sigma_y)$ y son independientes, entonces si $\vec{Z} = \vec{X} + \vec{Y}$ resulta $\vec{Z} \sim N_n(\vec{m}_x + \vec{m}_y, \Sigma_x + \Sigma_y)$.
- Igualmente $A\vec{X} + \vec{b}$ donde A y b son no-aleatorios verifica que $A\vec{X} + \vec{b} \sim N_n(A\vec{m}_x + \vec{b}, A\Sigma_x A^T)$.



Procesos estocásticos.

- Un proceso estocástico o variable estocástica no es sino una variable aleatoria $\vec{X}(t)$ que cambia con el tiempo. Los errores de navegación serán este tipo de variables.
- Por tanto la media y la covarianza también varían con el tiempo: $\vec{m}(t)$, $\Sigma(t)$.
- Para un proceso, se define la autocorrelación como $R(t, \tau) = E[\vec{X}(t)\vec{X}(\tau)^T]$. La autocorrelación permite conocer hasta que punto la historia pasada de $\vec{X}$ influye en su valor actual.
- **Proceso gaussiano:** Un proceso gaussiano verifica $\vec{X}(t) \sim N_n(\vec{m}(t), \Sigma(t))$, es decir, se distribuye como una normal multivariante cuya media y covarianza varían con el tiempo.



Ruido blanco.

- **Ruido blanco:** Se define como ruido blanco un proceso $\vec{\nu}(t)$ que verifica:
 - $E[\vec{\nu}(t)] = \vec{0}$.
 - $E[\vec{\nu}(t)\vec{\nu}(t)^T] = \sigma^2 \text{Id}$.
 - $R(t, \tau) = E[\vec{\nu}(t)\vec{\nu}(\tau)^T] = \delta(t - \tau)\sigma^2 \text{Id}$, donde $\delta(x)$ vale 1 si $x = 0$ y 0 en cualquier otro caso.
- La última condición quiere decir que el valor del ruido blanco en un instante es independiente de su valor en cualquier instante anterior.
- **Ruido blanco gaussiano:** Es un proceso que cumple las condiciones anteriores, y además es gaussiano.
- Un buen modelo para las fuentes de error de sensores es $\delta\vec{\epsilon}(t) = \vec{b} + D\vec{\nu}$, donde $\vec{\nu}$ es ruido blanco gaussiano. El valor de $\vec{b}$ será la media del error (sesgo, llamado bias en inglés).



Propagación del error. Caso continuo.

- Consideremos una ecuación diferencial del tipo

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + D\vec{b},$$

donde $\vec{b}$ es ruido blanco gaussiano de covarianza $\sigma^2 \text{Id}$, y la condición inicial es también gaussiana, es decir, $\vec{x}_0 \sim N_n(\vec{m}_0(t), P_0(t))$. Entonces se tiene que $\vec{x}$ es un proceso gaussiano, $\vec{x} \sim N_n(\vec{m}(t), P(t))$, con media y covarianza evolucionando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{m}} &= A\vec{m}, \\ \dot{P} &= AP + PA^T + \sigma^2 DD^T, \\ \vec{m}(0) &= \vec{m}_0, \\ P(0) &= P_0\end{aligned}$$



Propagación del error. Caso discreto.

- Consideremos una ecuación discreta del tipo

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k + D\vec{b}_k,$$

donde $\vec{b}_k$ es ruido blanco gaussiano de covarianza $\sigma^2 \text{Id}$, y la condición inicial es también gaussiana, es decir, $\vec{x}_0 \sim N_n(\vec{m}_0(t), P_0(t))$. Entonces se tiene que $\vec{x}_k$ es un proceso gaussiano, $\vec{x}_k \sim N_n(\vec{m}_k(t), P_k(t))$, con media y covarianza evolucionando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\vec{m}_{k+1} &= A\vec{m}_k, \\ P_{k+1} &= AP_kA^T + \sigma^2 DD^T,\end{aligned}$$

