Dinámica de Vehículos Espaciales

Tema 2: Representación de la Actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

8 de marzo de 2016

La actitud de un vehículo

- La actitud de un vehículo es su orientación respecto a un cierto sistema de referencia.
- Si el vehículo es un sólido rígido, es suficiente conocer la orientación de un s.d.r. fijo al vehículo (los ejes cuerpo).
- El conjunto de rotaciones entre dos ejes se llama SO(3) o grupo especial ortogonal de dimensión 3.
- En aeronaves, los ángulos de Euler (cabeceo, guiñada y alabeo) son la representación clásica. Para vehículos hay muchas alternativas, que también pueden ser aplicados a aeronaves, con diferentes ventajas e inconvenientes.
- Estudiaremos varias representaciones diferentes de SO(3):
  - Matriz de cosenos directores.
  - Ángulos de Euler.
  - Ángulo y eje de Euler.
  - Vector de rotación.
  - Cuaterniones.
  - Parámetros de Rodrigues (vector de Gibbs).
  - Parámetros de Rodrigues modificados.

Características de las representaciones de SO(3)

- Cada representación tiene sus ventajas y desventajas, que serán comentadas.
- Cada representación de actitud viene definida por n parámetros.
    - Si $n = 3$ se dice de la representación que es mínima (ya que 3 son los grados de libertad del problema).
    - Si $n > 3$ existirán $3 - n$ ligaduras sobre los parámetros. Las representaciones mínimas siempre tienen algún tipo de singularidades.
- Si dos combinaciones de parámetros representan la misma actitud se dice que la representación tiene ambigüedades. El conjunto de parámetros que habría que eliminar para evitar ambigüedades a veces se llama "shadow set" o conjunto sombra.
- Veremos como pasar de una representación a otra y como componer actitudes (pasar por sistemas de referencia intermedios) en cada caso.

Características de las representaciones de SO(3)

- Otro aspecto interesante es la capacidad de generar “caminos” suaves de actitud, es decir un conjunto continuo de giros que nos lleve de una actitud a otra.
- Finalmente, se habla de las interpretaciones pasiva y activa de las transformaciones entre sistemas de referencia.
- La interpretación pasiva (conocida también como “alias”) consiste en considerar que los vectores se transforman a raíz de que los sistemas de referencia lo hacen, pero en un sentido opuesto. Por ejemplo si las direcciones x-y giran 45º, el vector gira 45º en el sentido opuesto.
- La interpretación activa (conocida com “alibi”) consiste en considerar que son los propios vectores los que se transforman.
- Nosotros siempre consideraremos la interpretación pasiva.

Matriz de cosenos directores (DCM) I

- Dado un sistema de referencia S (determinado por una base de vectores unitarios $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ y otro S' (determinado por una base de vectores unitarios $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$, la orientación de S respecto a S' está totalmente determinada por la matriz de cambio de base $C_S^{S'}$, que para un vector genérico $\vec{v}$ permite cambiar de base: $\vec{v}^{S'} = C_S^{S'} \vec{v}^S$. Denotemos:

$$C_S^{S'} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

- Obsérvese: $\vec{e}_x^{S'} = C_S^{S'} e_x^S = C_S^{S'} [1\ 0\ 0]^T = [c_{11}\ c_{21}\ c_{31}]^T$.
- Luego: $\vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x = (\vec{e}_{x'}^{S'})^T \vec{e}_x^{S'} = [1\ 0\ 0][c_{11}\ c_{21}\ c_{31}]^T = c_{11}$.
- Igualmente:

$$\begin{aligned} c_{21} &= \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x, \quad c_{31} = \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x \\ c_{12} &= \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y, \quad c_{22} = \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y, \quad c_{32} = \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y \\ c_{13} &= \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z, \quad c_{23} = \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z, \quad c_{32} = \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Matriz de cosenos directores (DCM) II

- Por tanto:

$$C_S^{S'} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que razonando igualmente:

$$C_{S'}^{S} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x \\ \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix} = (C_S^{S'})^T$$

- Y por tanto, puesto que $C_{S'}^{S} = (C_S^{S'})^{-1}$, obtenemos que $C_{S'}^{S}$ es ortogonal, es decir: $(C_S^{S'})^{-1} = (C_S^{S'})^T$. También se justifica el nombre "matriz de cosenos directores".
- Otra propiedad es $\det(C_{S'}^{S}) = 1$. Esto se debe a que $1 = \det(\mathrm{Id}) = \det((C_{S'}^{S})(C_{S'}^{S})^{-1}) = \det((C_{S'}^{S})(C_{S'}^{S})^T) = \left(\det(C_{S'}^{S})\right)^2$. Por tanto $\det(C_{S'}^{S}) = \pm 1$. El signo $+$ corresponde a los sistemas de referencia que son triedros "a derechas", que son los utilizados en la práctica.

Matriz de cosenos directores (DCM) III

- Es una representación de la actitud con 9 parámetros. Estos parámetros son dependientes entre sí, es decir, las entradas de la matriz C no pueden ser cualesquiera (la matriz ha de ser ortogonal y con determinante $+1$). En particular debe haber 6 ligaduras que determinan que la matriz sea ortogonal.
- Supongamos que la actitud de S_2 respecto a S_1 viene dada por $C_{S_1}^{S_2}$ y que la actitud de S_3 respecto a S_2 viene dada por $C_{S_2}^{S_3}$. La actitud de S_3 respecto a S_1 viene dada por $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3} C_{S_1}^{S_2}$. Por tanto la "composición" de actitudes viene dada por un simple producto matricial.

Ángulos de Euler I

- En general una actitud se puede describir mediante tres rotaciones, en ejes no consecutivos.
- Por ejemplo, la rotación clásica de aeronaves:

$$n \xrightarrow[z^n]{\psi} S \xrightarrow[y^S]{\theta} S' \xrightarrow[x^{S'}]{\varphi} BFS$$

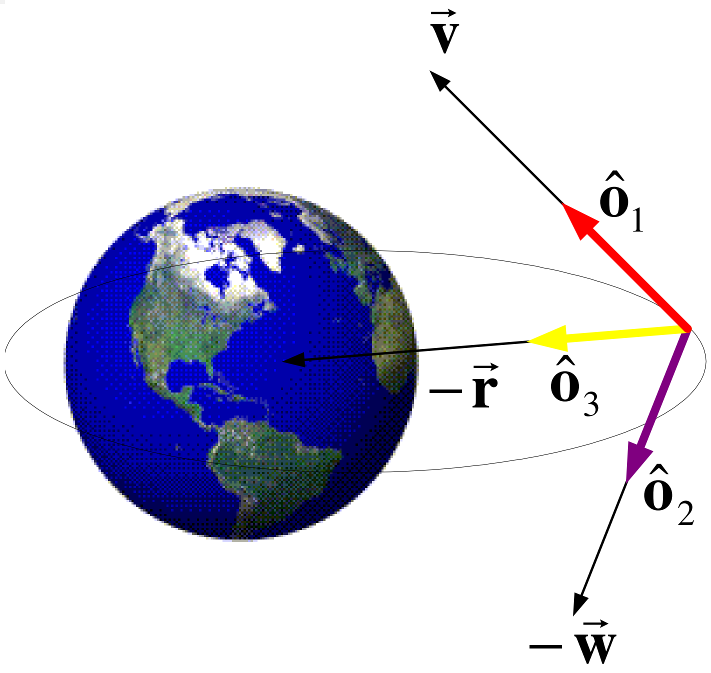
- Existen otras posibilidades, más aplicadas a vehículos espaciales:

$$n \xrightarrow[x^n]{\theta_1} S \xrightarrow[y^S]{\theta_2} S' \xrightarrow[z^{S'}]{\theta_3} BFS \qquad n \xrightarrow[z^n]{\Omega} S \xrightarrow[x^S]{i} S' \xrightarrow[z^{S'}]{\omega} BFS$$

- Existen hasta 12 posibles secuencias de ángulos de Euler para representar la actitud.
- El número de parámetros de cada secuencia es siempre 3.
- Se puede obtener la DCM a partir de los ángulos de Euler mediante multiplicación de matricies de rotación elementales. Por ejemplo: $C_n^b(\psi, \theta, \varphi) = C_{S'}^b(\varphi) C_S^{S'}(\theta) C_n^S(\psi)$.

Ángulos de Euler II

- En la figura, los ángulos de Euler clásicamente usados en aeronaves, respecto a ejes órbita.
  - Primero, un giro alrededor del eje 3 (amarillo). Se denomina "guiñada" (yaw).
  - En segundo lugar, un giro alrededor del eje 2 resultante (violeta). Se denomina "cabeceo" (pitch).
  - En tercer lugar, un giro alrededor del eje 1 resultante (rojo). Se denomina "balance" (roll).



- Esta secuencia se denomina (3,2,1). Las otras secuencias en la anterior diapositiva son la (1,2,3) y la (3,1,3).
- La secuencia elegida depende de los ángulos de interés.
- Otras secuencias posibles: (1,2,1), (1,3,1), (1,3,2), (2,1,2), (2,1,3), (2,3,1), (2,3,2), (3,1,2), (3,2,3).

Ángulos de Euler III

- Como ya vimos, para el caso (ψ, θ, φ):

$$C_n^b = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\varphi s\psi + s\varphi s\theta c\psi & c\varphi c\psi + s\varphi s\theta s\psi & s\varphi c\theta \\ s\varphi s\psi + c\varphi s\theta c\psi & -s\varphi c\psi + c\varphi s\theta s\psi & c\varphi c\theta \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que $(180^o + \psi, 180^o - \theta, 180^o + \varphi)$ es la misma actitud que (ψ, θ, φ). Por ello se suelen limitar los ángulos, típicamente $\theta \in [-90^o, 90^o]$.

$$n \xrightarrow[z^n]{\psi} S \xrightarrow[y^S]{\theta} S' \xrightarrow[x^{S'}]{\varphi} BFS$$

- Para obtener los ángulos de la DCM:
  1. $\theta = -\operatorname{arc\,sen} c_{13}$.
  2. Con $\cos\psi = c_{11}/\cos\theta$, $\operatorname{sen}\psi = c_{12}/\cos\theta$, obtener ψ.
  3. Con $\operatorname{sen}\varphi = c_{23}/\cos\theta$, $\cos\varphi = c_{33}/\cos\theta$, obtener φ.
- Para otros ángulos de Euler, se obtienen relaciones similares.

Ángulos de Euler IV

- Su mayor ventaja es su significado físico.
- No obstante, hay que tener cuidado a la hora de componer dos actitudes.
- Supongamos que la actitud de S_2 respecto a S_1 viene dada por $(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$ y que la actitud de S_3 respecto a S_2 viene dada por $(\psi_2, \theta_2, \varphi_2)$. Denotemos como $(\psi_3, \theta_3, \varphi_3)$ la actitud de S_3 respecto a S_1. En general: $\psi_3 \neq \psi_1 + \psi_2$, $\theta_3 \neq \theta_1 + \theta_2$, $\varphi_3 \neq \varphi_1 + \varphi_2$.
- Para obtener $(\psi_3, \theta_3, \varphi_3)$ hay que calcular los ángulos de Euler a partir de $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3}(\psi_2, \theta_2, \varphi_2) C_{S_1}^{S_2}(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$.
- Por tanto es complicado operar con ángulos de Euler.

Ángulo y eje de Euler I

- Teorema de Euler: "el movimiento más general posible de un sólido con un punto fijo es una rotación alrededor de un único eje".
- Nota: De momento consideramos la actitud en un instante de tiempo concreto, es decir, no estudiamos cuando hay una rotación que cambia con el tiempo.
- Denominemos a un vector unitario en la dirección de dicho eje (Eje de Euler) como $\vec{e}_{S/S'}$ y a la magnitud de la rotación (Ángulo de Euler) como θ.
- Por tanto $\|\vec{e}_{S/S'}\| = 1$ y si escribimos $\vec{e}^{S'}_{S/S'} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$, se tiene que $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$.
- Dado un vector $\vec{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ definimos el operador $\vec{v}^{\times}$ como:

$$\vec{v}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ángulo y eje de Euler II

- El operador $\vec{v}^{\times}$ sirve para escribir fácilmente el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$, para cualquier vector $\vec{w}$, en un sistema de referencia dado S: $(\vec{v} \times \vec{w})^S = \left(\vec{v}^S\right)^{\times} \vec{w}^S$.
- Por tanto la actitud con el ángulo y eje de Euler queda representada con los parámetros $(\vec{e}^{S'}_{S/S'}, \theta)$. ¿Cómo se puede pasar de estos parámetros a la DCM y viceversa?
- Se tiene que
$$C_S^{S'} = \cos\theta \mathrm{Id} + (1-\cos\theta)\vec{e}^{S'}_{S/S'}(\vec{e}^{S'}_{S/S'})^T - \operatorname{sen}\theta \left(\vec{e}^{S'}_{S/S'}\right)^{\times}.$$
Ésta es la llamada fórmula de Euler-Rodrigues. La demostraremos más adelante
- Por otro lado, dada $C_S^{S'}$, y calculando por un lado $\mathrm{Tr}(C_S^{S'})$ y por otro $(C_S^{S'})^T - C_S^{S'}$, se obtiene:
$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\mathrm{Tr}(C_S^{S'})-1}{2} \\ \left(\vec{e}^{S'}_{S/S'}\right)^{\times} &= \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta}\left((C_S^{S'})^T - C_S^{S'}\right) \end{aligned}$$

Ángulo y eje de Euler III

- Otra relación entre el ángulo y el eje de Euler y la matriz de cosenos directores viene dada por las propiedades algebraicas de la DCM.
- En particular al ser la DCM ortogonal se puede demostrar que siempre tiene el autovalor 1. Si C es la DCM, entonces el autovector asociado al autovalor 1 es el eje de Euler $\vec{e}$ ya que $C\vec{e} = \vec{e}$.
- Por otro lado los otros dos autovalores de la DCM serán $\mathrm{e}^{i\theta}$, $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
- Esta es otra forma de obtener el ángulo y eje de Euler, simplemente calculando los autovalores y autovectores de la DCM.

Ángulo y eje de Euler IV

- Por tanto se representa la actitud con cuatro parámetros: tres componentes de un vector unitario y un ángulo. Estos parámetros tienen un claro significado físico.
- Obsérvese que la actitud dada por $(\vec{e}^{S'}_{S/S'}, \theta)$ y por $(-\vec{e}^{S'}_{S/S'}, 360^{\mathrm{o}} - \theta)$ es exactamente la misma. Para evitar ésta ambigüedad, se restringe θ al intervalo $[0, 180^{\mathrm{o}})$.
- La actitud inversa (la de S respecto a S') vendrá dada por $(-\vec{e}^{S}_{S'/S}, \theta)$. Nota: Obsérvese que $e^{S}_{S'/S} = e^{S'}_{S/S'}$.
- Finalmente si la actitud de S_2 respecto a S_1 viene dada por $(\vec{e}^{S_2}_{S_1/S_2}, \theta_1)$ y que la actitud de S_3 respecto a S_2 viene dada por $(\vec{e}^{S_3}_{S_2/S_3}, \theta_2)$, si denotamos como $(\vec{e}^{S_3}_{S_1/S_3}, \theta_3)$ la actitud de S_3 respecto a S_1, viene dada por:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_3 &= -\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2(\vec{e}_{S_1/S_2}\cdot\vec{e}_{S_2/S_3}) \\
e^{S_3}_{S_1/S_3} &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_3}\left(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2\vec{e}_{S_1/S_2} + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\vec{e}_{S_2/S_3} + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2(\vec{e}_{S_1/S_2}\times\vec{e}_{S_2/S_3})\right)
\end{aligned}
$$

Vector de rotación

- Una representación de actitud mínima se puede obtener combinando el eje y el ángulo de Euler en un único vector $\vec{\theta} = \theta \vec{e}$.
- Esta representación es útil porque físicamente representaría la velocidad angular que habría que mantener constante durante un segundo para pasar de la actitud identidad a la actitud actual.
- Por otro lado para giros "grandes" la representación no es muy adecuada; por ejemplo un giro de 0º y uno de 360º físicamente son iguales pero para el primero $\vec{\theta} = \vec{0}$ y para el segundo no está bien definido.
- Por tanto es una representación que se reserva para análisis teóricos o para ángulos pequeños.

Cuaterniones

- Los cuaterniones son una creación de Hamilton (siglo XIX), que los consideraba su mayor invento; pensó serían como el "lenguaje universal" de la física. Pero fueron sustituidos pronto por los vectores (Gibbs) y las matrices (Cayley).
- Recordemos que un número complejo z es como un "vector 2-D", que se puede escribir como $z = x + iy$. Los números complejos de módulo 1 se pueden usar para representar una rotación 2-D, ya que si $|z| = 1$, se puede escribir $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, y en tal caso representa una rotación 2-D de ángulo θ.
- Los cuaterniones son una extensión de los números complejos a "4 dimensiones". Escribimos un cuaternión q como: $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$.
- En ocasiones q_0 se denomina la "parte escalar" de q y se define $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ como la "parte vectorial" de q. Algunos autores (y STK) escriben q_4 (al final del vector) en vez de q_0.

Álgebra de cuaterniones I

- Para poder entender los cuaterniones es importante conocer su álgebra, es decir, como se opera con cuaterniones.
- Suma: la suma es componente a componente, es decir, dado $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ y $q' = q_0' + iq_1' + jq_2' + kq_3'$, se tiene que $q'' = q + q' = q_0'' + iq_1'' + jq_2'' + kq_3''$ viene dado por las fórmulas:
  $q_0'' = q_0 + q_0'$, $q_1'' = q_1 + q_1'$, $q_2'' = q_2 + q_2'$, $q_3'' = q_3 + q_3'$.
- Producto: el producto es componente a componente, conociendo las siguientes reglas de multiplicación:
  $i \star i = -1$, $i \star j = k$, $i \star k = -j$, $j \star i = -k$, $j \star j = -1$, $j \star k = i$, $k \star i = j$, $k \star j = -i$, $k \star k = -1$.
- Se tiene la fórmula de Hamilton: $i \star j \star k = -1$.
- Obsérvese que en general $q \star q' \neq q' \star q$: La multiplicación no es conmutativa!

Álgebra de cuaterniones II

- Forma matricial del producto: Es posible escribir el producto $q'' = q' \star q$ en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} q_0'' \\ q_1'' \\ q_2'' \\ q_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0' & -q_1' & -q_2' & -q_3' \\ q_1' & q_0' & -q_3' & q_2' \\ q_2' & q_3' & q_0' & -q_1' \\ q_3' & -q_2' & q_1' & q_0' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- Forma "vectorial" del producto: $q_0'' = q_0' q_0 - \vec{q}'^T \vec{q}$, $\vec{q}'' = q_0 \vec{q}' + q_0' \vec{q} + \vec{q}' \times \vec{q}$.
- Conjugado: Como para los números complejos, dado $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ se define el conjugado de q como $q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$.
- Módulo: Se define el módulo de $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ como $|q|^2 = q \star q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$. Propiedad: $|q \star q'| = |q||q'|$.
- División: Se define la división usando el conjugado: $q'/q = q'/q \star q^*/q^* = (q' \star q^*)/|q|^2$.

Representación de la actitud mediante cuaterniones I

- Dada la actitud representada mediante el eje y ángulo de Euler, $\vec{e}$ y θ, se "codifica" dicha actitud en forma de cuaterniones mediante:
  $q_0 = \cos\theta/2$, $\vec{q} = \operatorname{sen}\theta/2\vec{e}$.
- Obsérvese que si un cuaternión q representa una actitud, entonces $|q| = 1$.
- Recordemos el operador $\vec{q}^{\times}$: $\vec{q}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$
- Para pasar de la DCM C a cuaterniones, se utilizan las fórmulas: $q_0 = \frac{\sqrt{1+\mathrm{Tr}(C)}}{2}$ y $\vec{q}^{\times} = \frac{1}{4q_0}\left(C^T - C\right)$.
- Para pasar de cuaterniones a DCM se utiliza la fórmula de Euler-Rodrigues para cuaterniones:
  $C = \left(q_0^2 - \vec{q}^T\vec{q}\right)\mathrm{Id} + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_0\vec{q}^{\times}$.
- También se puede girar un vector $\vec{v}$ sin calcular la matriz C usando la fórmula: $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v}' \end{bmatrix} = q^* \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix} \star q$

Representación de la actitud mediante cuaterniones II

- Fórmula de Euler-Rodrigues en forma matricial:

$$C(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

- Los cuaterniones son una representación de la actitud que requiere 4 parámetros, con la relación $|q| = 1$.
- Existe un problema de ambigüedad: q y $-q$ representan la misma actitud, ya que si q corresponde a $(\vec{e}, \theta)$, entonces $-q$ corresponde a $(-\vec{e}, 360 - \theta)$.
- Tienen la desventaja de ser una representación matemática sin sentido físico.
- Para pasar de la DCM a cuaterniones y viceversa no es necesario usar fórmulas trigonométricas.
- Si $q_{S'S}$ representa la actitud de S' respecto a S y $q_{S''S'}$ representa la actitud de S" respecto a S', entonces $q_{S''S}$, la actitud de S" respecto a S, se calcula como $q_{S''S} = q_{S'S} \star q_{S''S'}$ (al revés que la DCM).

Cálculo de cuaterniones dados los ángulos de Euler

- Obsérvese que:
  - A los ángulos de Euler $(\psi, 0, 0)$ les corresponde el cuaternión $q_\psi = \cos\psi/2 + k \operatorname{sen}\psi/2$.
  - A los ángulos de Euler $(0, \theta, 0)$ les corresponde el cuaternión $q_\theta = \cos\theta/2 + j \operatorname{sen}\theta/2$.
  - A los ángulos de Euler $(0, 0, \varphi)$ les corresponde el cuaternión $q_\varphi = \cos\varphi/2 + i \operatorname{sen}\varphi/2$.
- Por tanto, a los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) les corresponderá el cuaternión $q = q_\psi \star q_\theta \star q_\varphi$.
- Realizando el producto, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
q \quad = \quad & (\cos\psi/2 \cos\theta/2 \cos\varphi/2 + \operatorname{sen}\psi/2 \operatorname{sen}\theta/2 \operatorname{sen}\varphi/2) \\
& + i\,(\cos\psi/2 \cos\theta/2 \operatorname{sen}\varphi/2 - \operatorname{sen}\psi/2 \operatorname{sen}\theta/2 \cos\varphi/2) \\
& + j\,(\cos\psi/2 \operatorname{sen}\theta/2 \cos\varphi/2 + \operatorname{sen}\psi/2 \cos\theta/2 \operatorname{sen}\varphi/2) \\
& + k\,(\operatorname{sen}\psi/2 \cos\theta/2 \cos\varphi/2 - \cos\psi/2 \operatorname{sen}\theta/2 \operatorname{sen}\varphi/2)\,.
\end{aligned}
$$

Cuaterniones: camino más corto e interpolación

- Dados dos cuaterniones q_0 y q_1 que representan dos actitudes diferentes, ¿se puede construir un "cuaternión de interpolación" continuo $q(s)$ de forma que $q(0) = q_0$ y $q(1) = q_1$?
- La forma de hacerlo es encontrar el cuaternión q_2 que representa la actitud entre q_0 y q_1: $q_2 = \frac{1}{q_0} \star q_1 = q_0^* q_1$. Este cuaternión estará representado por un ángulo θ y eje de Euler $\vec{e}$ de forma que $q_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta/2 \\ \operatorname{sen}\theta/2\vec{e} \end{bmatrix}$.
- La solución del problema es formar el cuaternión $q(s)$ como el producto de q_0 y otro cuaternión con eje $\vec{e}$ y ángulo $s\theta$, de forma que cuando $s = 0$ es el cuaternión unidad (y por tanto el producto es q_0) y cuando $s = 1$ es q_2, de forma que el producto es q_1:

$$q(s) = q_0 \star \begin{bmatrix} \cos(s\theta/2) \\ \operatorname{sen}(s\theta/2)\vec{e} \end{bmatrix}$$

Parámetros de Rodrigues I

- La representación mediante parámetros de Rodrigues (PR, también llamada vector de Gibbs) se consigue a partir del cuaternión, definiendo $\vec{g} = \frac{\vec{q}}{q_0}$, obviamente sólo válido si $q_0 > 0$ ($\theta < 180°$). Para recuperar el cuaternión a partir del vector de Gibbs:

$$\|\vec{g}\|^2 = \frac{\|\vec{q}\|^2}{q_0^2} = \frac{1 - q_0^2}{q_0^2}$$

Luego $q_0 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\|\vec{g}\|^2}}$. Y por tanto:

$$q = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \|\vec{g}\|^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

- En términos del eje y ángulo de Euler, $\vec{g} = \vec{e} \tan \frac{\theta}{2}$.

Parámetros de Rodrigues II

- La relación con la matriz de actitud es:

$$C = \mathrm{Id} + 2\frac{\vec{g}^{\times}\vec{g}^{\times} - \vec{g}^{\times}}{1 + \|\vec{g}\|^2} = (\mathrm{Id} - \vec{g}^{\times})(\mathrm{Id} + \vec{g}^{\times})^{-1} = (\mathrm{Id} + \vec{g}^{\times})^{-1}(\mathrm{Id} - \vec{g}^{\times})$$

- Por otro lado, como $q_0 = \frac{\sqrt{1+\mathrm{Tr}(C)}}{2}$ y $\vec{q}^{\times} = \frac{1}{4q_0}\left(C^T - C\right)$, tendremos:

$$\vec{g}^{\times} = \frac{q^{\times}}{q_0} = \frac{1}{4q_0^2}\left(C^T - C\right) = \frac{C^T - C}{1 + \mathrm{Tr}(C)}$$

- La composición de actitudes sigue una regla simple.Si $\vec{g}_{S'S}$ representa la actitud de S' respecto a S y $\vec{g}_{S''S'}$ representa la actitud de S" respecto a S', entonces $\vec{g}_{S''S}$, la actitud de S" respecto a S, se calcula como:

$$\vec{g}_{S''S} = \frac{\vec{g}_{S''S'} + \vec{g}_{S'S} - \vec{g}_{S''S'} \times \vec{g}_{S'S}}{1 - \vec{g}_{S'S} \cdot \vec{g}_{S''S'}}$$

Parámetros de Rodrigues modificados

- La representación mediante parámetros de Rodrigues modificados (PRM) es muy reciente (1962) pero también muy popular. Similarmente a los PR se consigue a partir del cuaternión, definiendo $\vec{p} = \frac{\vec{q}}{1+q_0}$. Para recuperar el cuaternión a partir del vector de Gibbs:

$$||\vec{p}||^2 = \frac{||\vec{q}||^2}{(1+q_0)^2} = \frac{1-q_0^2}{(1+q_0)^2} = \frac{1-q_0}{1+q_0}$$

Luego $q_0 = \frac{1-||\vec{p}||^2}{1+||\vec{p}||^2}$. Y por tanto:

$$q = \frac{1}{1+||\vec{p}||^2} \begin{bmatrix} 1-||\vec{p}||^2 \\ 2\vec{p} \end{bmatrix}$$

- En términos del eje y ángulo de Euler, $\vec{p} = \vec{e} \tan\frac{\theta}{4}$.

Parámetros de Rodrigues modificados II

- La relación con la matriz de actitud es:

$$C = \mathrm{Id} + \frac{8\vec{p}^{\times}\vec{p}^{\times} - 4(1-\|\vec{p}\|^2)\vec{p}^{\times}}{(1+\|\vec{p}\|^2)^2} = \left[(\mathrm{Id}-\vec{p}^{\times})(\mathrm{Id}+\vec{p}^{\times})^{-1}\right]^2$$

- Como q y $-q$ representan la misma actitud, también lo hacen $\vec{p} = \frac{\vec{q}}{1+q_0}$ y $\vec{p}' = \frac{-\vec{q}}{1-q_0}$. ¿Cuál es la relación entre ambos?

$$\|\vec{p}\|^2 = \frac{1-q_0}{1+q_0} = \frac{1}{\|\vec{p}'\|^2}$$

- Luego $\vec{p}$ y $\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|^2}$ representan la misma actitud. Por tanto limitando $\|\vec{p}\| \leq 1$ evitamos la falta de ambigüedad.
- La composición de actitudes sigue una regla no tan simple como para los PR. $\vec{p}_{S'S}$ representa la actitud de S' respecto a S y $\vec{p}_{S''S'}$ representa la actitud de S" respecto a S', entonces $\vec{p}_{S''S}$, la actitud de S" respecto a S, se calcula como:

$$\vec{p}_{S''S} = \frac{(1-\|\vec{p}_{S'S}\|^2)\vec{p}_{S''S'} + (1-\|\vec{p}_{S''S'}\|^2)\vec{p}_{S'S} - 2\vec{p}_{S''S'} \times \vec{p}_{S'S}}{1+\|\vec{p}_{S'S}\|^2\|\vec{p}_{S''S'}\|^2 - 2\vec{p}_{S'S}\cdot\vec{p}_{S''S'}}$$

Cuaternión de error

- Para linealizar ecuaciones de actitud con cuaterniones en torno a un valor $\bar{q}$, la formulación clásica "aditiva" $q = \bar{q} + \delta q$ no funciona, porque aunque $\bar{q}$ y δq tengan módulo unidad, la suma no tiene por qué tenerlo.
- Se utiliza una formulación "multiplicativa" donde $q = \bar{q} \star \delta q$, y donde δq es el llamado cuaternión de error que debe estar "cerca" del cuaternión unidad $q = [1\ 0\ 0\ 0]^T$.
- δq tiene 4 componentes pero realmente sólo 3 grados de libertad; estos se codifican en un vector $\vec{a}$ "pequeño" (equivalente a $2\vec{g}$):

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que $\delta q(\vec{a})$ tiene módulo unidad. Si es necesario linealizar la anterior expresión se obtiene:

$$\delta q(\vec{a}) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix}$$