

# Vehículos Espaciales y Misiles

## Tema 2: Cinemática y Dinámica de la Actitud

### Parte I: Cinemática

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

8 de marzo de 2015



## La actitud de un vehículo

- La actitud de un vehículo es su orientación respecto a un cierto sistema de referencia.
- Si el vehículo es un sólido rígido, es suficiente conocer la orientación de un s.d.r. fijo al vehículo (los ejes cuerpo).
- El conjunto de rotaciones entre dos ejes se llama  $SO(3)$  o grupo especial ortogonal de dimensión 3.
- En aeronaves, los ángulos de Euler (cabeceo, guiñada y alabeo) son la representación clásica. Para vehículos hay muchas alternativas, que también pueden ser aplicados a aeronaves, con diferentes ventajas e inconvenientes.
- Estudiaremos varias representaciones diferentes de  $SO(3)$ :
  - Matriz de cosenos directores.
  - Ángulos de Euler.
  - Ángulo y eje de Euler.
  - Vector de rotación.
  - Cuaterniones.
  - Parámetros de Rodrigues (vector de Gibbs).
  - Parámetros de Rodrigues modificados.



## Características de las representaciones de $SO(3)$

- Cada representación tiene sus ventajas y desventajas, que serán comentadas.
- Cada representación de actitud viene definida por  $n$  parámetros.
  - Si  $n = 3$  se dice de la representación que es mínima (ya que 3 son los grados de libertad del problema).
  - Si  $n > 3$  existirán  $3 - n$  ligaduras sobre los parámetros. Las representaciones mínimas siempre tienen algún tipo de singularidades.
- Si dos combinaciones de parámetros representan la misma actitud se dice que la representación tiene ambigüedades. El conjunto de parámetros que habría que eliminar para evitar ambigüedades a veces se llama “shadow set” o conjunto sombra.
- Veremos como pasar de una representación a otra y como componer actitudes (pasar por sistemas de referencia intermedios) en cada caso.



## Matriz de cosenos directores (DCM) I

- Dado un sistema de referencia  $S$  (determinado por una base de vectores unitarios  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ) y otro  $S'$  (determinado por una base de vectores unitarios  $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ ), la orientación de  $S$  respecto a  $S'$  está totalmente determinada por la matriz de cambio de base  $C_S^{S'}$ , que para un vector genérico  $\vec{v}$  permite cambiar de base:  $\vec{v}^{S'} = C_S^{S'} \vec{v}^S$ . Denotemos:

$$C_S^{S'} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

- Obsérvese:  $\vec{e}_x^{S'} = C_S^{S'} \vec{e}_x^S = C_S^{S'} [1 \ 0 \ 0]^T = [c_{11} \ c_{21} \ c_{31}]^T$ .
- Luego:  $\vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x = (\vec{e}_{x'}^{S'})^T \vec{e}_x^{S'} = [1 \ 0 \ 0][c_{11} \ c_{21} \ c_{31}]^T = c_{11}$ .
- Igualmente:

$$\begin{aligned} c_{21} &= \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x, & c_{31} &= \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x \\ c_{12} &= \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y, & c_{22} &= \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y, & c_{32} &= \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y \\ c_{13} &= \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z, & c_{23} &= \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z, & c_{33} &= \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$



## Matriz de cosenos directores (DCM) II

- Por tanto:

$$C_S^{S'} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que razonando igualmente:

$$C_S^S = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x \\ \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix} = (C_S^{S'})^T$$

- Y por tanto, puesto que  $C_S^S = (C_S^{S'})^{-1}$ , obtenemos que  $C_S^S$  es ortogonal, es decir:  $(C_S^{S'})^{-1} = (C_S^{S'})^T$ . También se justifica el nombre “matriz de cosenos directores”.
- Otra propiedad es  $\det(C_S^S) = 1$ . Esto se debe a que  $1 = \det(\text{Id}) = \det((C_S^S)(C_S^S)^{-1}) = \det((C_S^S)(C_S^S)^T) = (\det(C_S^S))^2$ . Por tanto  $\det(C_S^S) = \pm 1$ . El signo + corresponde a los sistemas de referencia que son triedros “a derechas”, que son los utilizados en la práctica.



## Matriz de cosenos directores (DCM) III

- Es una representación de la actitud con 9 parámetros. Estos parámetros son dependientes entre sí, es decir, las entradas de la matriz  $C$  no pueden ser cualesquiera (la matriz ha de ser ortogonal y con determinante  $+1$ ). En particular debe haber 6 ligaduras que determinan que la matriz sea ortogonal.
- Supongamos que la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $C_{S_1}^{S_2}$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $C_{S_2}^{S_3}$ . La actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3} C_{S_1}^{S_2}$ . Por tanto la “composición” de actitudes viene dada por un simple producto matricial.



## Ángulos de Euler I

- En general una actitud se puede describir mediante tres rotaciones, en ejes no consecutivos.
- Por ejemplo, la rotación clásica de aeronaves:

$$n \xrightarrow[\substack{\psi \\ z^n}]{} S \xrightarrow[\substack{\theta \\ y^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\varphi \\ x^{S'}}]{} BFS$$

- Existen otras posibilidades, más aplicadas a vehículos espaciales:

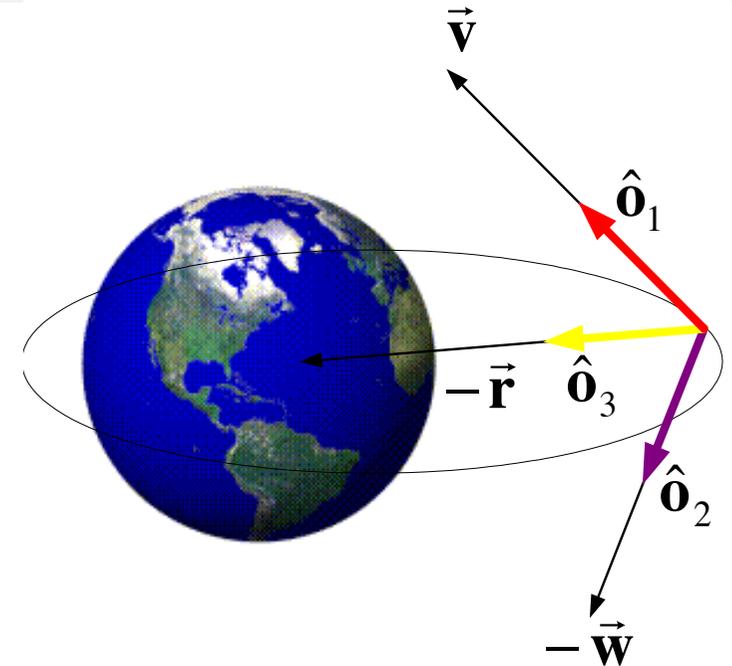
$$n \xrightarrow[\substack{\theta_1 \\ x^n}]{} S \xrightarrow[\substack{\theta_2 \\ y^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\theta_3 \\ z^{S'}}]{} BFS \quad n \xrightarrow[\substack{\Omega \\ z^n}]{} S \xrightarrow[\substack{i \\ x^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\omega \\ z^{S'}}]{} BFS$$

- Existen hasta 12 posibles secuencias de ángulos de Euler para representar la actitud.
- El número de parámetros de cada secuencia es siempre 3.
- Se puede obtener la DCM a partir de los ángulos de Euler mediante multiplicación de matrices de rotación elementales. Por ejemplo:  $C_n^b(\psi, \theta, \varphi) = C_{S'}^b(\varphi) C_S^{S'}(\theta) C_n^S(\psi)$ .



## Ángulos de Euler II

- En la figura, los ángulos de Euler clásicamente usados en aeronaves, respecto a ejes órbita.
  - Primero, un giro alrededor del eje 3 (amarillo). Se denomina “guiñada” (yaw).
  - En segundo lugar, un giro alrededor del eje 2 resultante (violeta). Se denomina “cabeceo” (pitch).
  - En tercer lugar, un giro alrededor del eje 1 resultante (rojo). Se denomina “balance” (roll).
- Esta secuencia se denomina (3,2,1). Las otras secuencias en la anterior diapositiva son la (1,2,3) y la (3,1,3).
- La secuencia elegida depende de los ángulos de interés.



- Otras secuencias posibles:  
(1,2,1), (1,3,1), (1,3,2),  
(2,1,2), (2,1,3), (2,3,1),  
(2,3,2), (3,1,2), (3,2,3).



## Ángulos de Euler III

- Como ya vimos, para el caso  $(\psi, \theta, \varphi)$ :

$$C_n^b = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\varphi s\psi + s\varphi s\theta c\psi & c\varphi c\psi + s\varphi s\theta s\psi & s\varphi c\theta \\ s\varphi s\psi + c\varphi s\theta c\psi & -s\varphi c\psi + c\varphi s\theta s\psi & c\varphi c\theta \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que  $(180^\circ + \psi, 180^\circ - \theta, 180^\circ + \varphi)$  es la misma actitud que  $(\psi, \theta, \varphi)$ . Por ello se suelen limitar los ángulos, típicamente  $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ .

$$n \xrightarrow[\underset{z^n}{\psi}]{\theta} S \xrightarrow[\underset{y^S}{\theta}]{\varphi} S' \xrightarrow[\underset{x^{S'}}{\varphi}]{} BFS$$

- Para obtener los ángulos de la DCM:
  - 1  $\theta = -\arcsin c_{13}$ .
  - 2 Con  $\cos \psi = c_{11} / \cos \theta$ ,  $\sin \psi = c_{12} / \cos \theta$ , obtener  $\psi$ .
  - 3 Con  $\sin \varphi = c_{23} / \cos \theta$ ,  $\cos \varphi = c_{33} / \cos \theta$ , obtener  $\varphi$ .
- Para otros ángulos de Euler, se obtienen relaciones similares.



## Ángulos de Euler IV

- Su mayor ventaja es su significado físico.
- No obstante, hay que tener cuidado a la hora de componer dos actitudes.
- Supongamos que la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $(\psi_2, \theta_2, \varphi_2)$ . Denotemos como  $(\psi_3, \theta_3, \varphi_3)$  la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$ . En general:  $\psi_3 \neq \psi_1 + \psi_2$ ,  $\theta_3 \neq \theta_1 + \theta_2$ ,  $\varphi_3 \neq \varphi_1 + \varphi_2$ .
- Para obtener  $(\psi_3, \theta_3, \varphi_3)$  hay que calcular los ángulos de Euler a partir de  $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3}(\psi_2, \theta_2, \varphi_2)C_{S_1}^{S_2}(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$ .
- Por tanto es complicado operar con ángulos de Euler.



## Ángulo y eje de Euler I

- Teorema de Euler: “el movimiento más general posible de un sólido con un punto fijo es una rotación alrededor de un único eje”.
- **Nota:** De momento consideramos la actitud en un instante de tiempo concreto, es decir, no estudiamos cuando hay una rotación que cambia con el tiempo.
- Denominemos a un vector unitario en la dirección de dicho eje (**Eje de Euler**) como  $\vec{e}_{S/S'}$  y a la magnitud de la rotación (**Ángulo de Euler**) como  $\theta$ .
- Por tanto  $\|\vec{e}_{S/S'}\| = 1$  y si escribimos  $\vec{e}_{S/S'} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$ , se tiene que  $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$ .
- Dado un vector  $\vec{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  definimos el operador  $\vec{v}^\times$  como:

$$\vec{v}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$



## Ángulo y eje de Euler II

- El operador  $\vec{v}^\times$  sirve para escribir fácilmente el producto vectorial  $\vec{v} \times \vec{w}$ , para cualquier vector  $\vec{w}$ , en un sistema de referencia dado  $S$ :  $(\vec{v} \times \vec{w})^S = (\vec{v}^S)^\times \vec{w}^S$ .
- Por tanto la actitud con el ángulo y eje de Euler queda representada con los parámetros  $(\vec{e}_{S/S'}^{S'}, \theta)$ . ¿Cómo se puede pasar de estos parámetros a la DCM y viceversa?

- Se tiene que

$$C_S^{S'} = \cos \theta \text{Id} + (1 - \cos \theta) \vec{e}_{S/S'}^{S'} (\vec{e}_{S/S'}^{S'})^T - \sin \theta \left( \vec{e}_{S/S'}^{S'} \right)^\times.$$

Ésta es la llamada fórmula de Euler-Rodrigues. La demostraremos más adelante

- Por otro lado, dada  $C_S^{S'}$ , y calculando por un lado  $\text{Tr}(C_S^{S'})$  y por otro  $(C_S^{S'})^T - C_S^{S'}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{Tr}(C_S^{S'}) - 1}{2} \\ \left( \vec{e}_{S/S'}^{S'} \right)^\times &= \frac{1}{2 \sin \theta} \left( (C_S^{S'})^T - C_S^{S'} \right) \end{aligned}$$



## Ángulo y eje de Euler III

- Otra relación entre el ángulo y el eje de Euler y la matriz de cosenos directores viene dada por las propiedades algebraicas de la DCM.
- En particular al ser la DCM ortogonal se puede demostrar que siempre tiene el autovalor 1. Si  $C$  es la DCM, entonces el autovector asociado al autovalor 1 es el eje de Euler  $\vec{e}$  ya que  $C\vec{e} = \vec{e}$ .
- Por otro lado los otros dos autovalores de la DCM serán  $e^{i\theta}$ ,  $e^{-i\theta}$ .
- Esta es otra forma de obtener el ángulo y eje de Euler, simplemente calculando los autovalores y autovectores de la DCM.



## Ángulo y eje de Euler IV

- Por tanto se representa la actitud con cuatro parámetros: tres componentes de un vector unitario y un ángulo. Estos parámetros tienen un claro significado físico.
- Obsérvese que la actitud dada por  $(\vec{e}_{S/S'}, \theta)$  y por  $(-\vec{e}_{S/S'}, 360^\circ - \theta)$  es exactamente la misma. Para evitar ésta ambigüedad, se restringe  $\theta$  al intervalo  $[0, 180^\circ)$ .
- La actitud inversa (la de  $S$  respecto a  $S'$ ) vendrá dada por  $(-\vec{e}_{S'/S}, \theta)$ . Nota: Obsérvese que  $e_{S'/S}^S = e_{S/S'}^{S'}$ .
- Finalmente si la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $(\vec{e}_{S_1/S_2}^{S_2}, \theta_1)$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $(\vec{e}_{S_2/S_3}^{S_3}, \theta_2)$ , si denotamos como  $(\vec{e}_{S_1/S_3}^{S_3}, \theta_3)$  la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$ , viene dada por:

$$\cos \theta_3 = -\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\vec{e}_{S_1/S_2} \cdot \vec{e}_{S_2/S_3})$$

$$\vec{e}_{S_1/S_3}^{S_3} = \frac{1}{\sin \theta_3} \left( \sin \theta_1 \cos \theta_2 \vec{e}_{S_1/S_2} + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \vec{e}_{S_2/S_3} + \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\vec{e}_{S_1/S_2} \times \vec{e}_{S_2/S_3}) \right)$$



## Vector de rotación

- Una representación de actitud mínima se puede obtener combinando el eje y el ángulo de Euler en un único vector  $\vec{\theta} = \theta \vec{e}$ .
- Esta representación es útil porque físicamente representaría la velocidad angular que habría que mantener constante durante un segundo para pasar de la actitud identidad a la actitud actual.
- Por otro lado para giros “grandes” la representación no es muy adecuada; por ejemplo un giro de  $0^\circ$  y uno de  $360^\circ$  físicamente son iguales pero para el primero  $\vec{\theta} = \vec{0}$  y para el segundo no está bien definido.
- Por tanto es una representación que se reserva para análisis teóricos o para ángulos pequeños.



## Cuaterniones

- Los cuaterniones son una creación de Hamilton (siglo XIX), que los consideraba su mayor invento; pensó serían como el “lenguaje universal” de la física. Pero fueron sustituidos pronto por los vectores (Gibbs) y las matrices (Cayley).
- Recordemos que un número complejo  $z$  es como un “vector 2-D”, que se puede escribir como  $z = x + iy$ . Los números complejos de módulo 1 se pueden usar para representar una rotación 2-D, ya que si  $|z| = 1$ , se puede escribir  $z = e^{i\theta}$ , y en tal caso representa una rotación 2-D de ángulo  $\theta$ .
- Los cuaterniones son una extensión de los números complejos a “4 dimensiones”. Escribimos un cuaternión  $q$  como:  
$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3.$$
- En ocasiones  $q_0$  se denomina la “parte escalar” de  $q$  y se define  $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  como la “parte vectorial” de  $q$ . Algunos autores (y STK) escriben  $q_4$  (al final del vector) en vez de  $q_0$ .



# Álgebra de cuaterniones I

- Para poder entender los cuaterniones es importante conocer su álgebra, es decir, como se opera con cuaterniones.
- **Suma:** la suma es componente a componente, es decir, dado  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  y  $q' = q'_0 + iq'_1 + jq'_2 + kq'_3$ , se tiene que  $q'' = q + q' = q''_0 + iq''_1 + jq''_2 + kq''_3$  viene dado por las fórmulas:  
$$q''_0 = q_0 + q'_0, q''_1 = q_1 + q'_1, q''_2 = q_2 + q'_2, q''_3 = q_3 + q'_3.$$
- **Producto:** el producto es componente a componente, conociendo las siguientes reglas de multiplicación:  
$$i \star i = -1, i \star j = k, i \star k = -j, j \star i = -k, j \star j = -1, \\ j \star k = i, k \star i = j, k \star j = -i, k \star k = -1.$$
- Se tiene la fórmula de Hamilton:  $i \star j \star k = -1$ .
- Obsérvese que en general  $q \star q' \neq q' \star q$ : La multiplicación no es conmutativa!



## Álgebra de cuaterniones II

- **Forma matricial del producto:** Es posible escribir el producto  $q'' = q' \star q$  en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} q''_0 \\ q''_1 \\ q''_2 \\ q''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_0 & -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 \\ q'_1 & q'_0 & -q'_3 & q'_2 \\ q'_2 & q'_3 & q'_0 & -q'_1 \\ q'_3 & -q'_2 & q'_1 & q'_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- **Forma “vectorial” del producto:**  $q''_0 = q'_0 q_0 - \vec{q}'^T \vec{q}$ ,  
 $\vec{q}'' = q_0 \vec{q}' + q'_0 \vec{q} + \vec{q}' \times \vec{q}$ .
- **Conjugado:** Como para los números complejos, dado  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  se define el conjugado de  $q$  como  $q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ .
- **Módulo:** Se define el módulo de  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  como  $|q|^2 = q \star q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ . Propiedad:  $|q \star q'| = |q||q'|$ .
- **División:** Se define la división usando el conjugado:  
 $q' / q = q' / q \star q^* / q^* = (q' \star q^*) / |q|^2$ .



## Representación de la actitud mediante cuaterniones I

- Dada la actitud representada mediante el eje y ángulo de Euler,  $\vec{e}$  y  $\theta$ , se “codifica” dicha actitud en forma de cuaterniones mediante:

$$q_0 = \cos \theta/2, \quad \vec{q} = \sin \theta/2 \vec{e}.$$

- Obsérvese que si un cuaternión  $q$  representa una actitud, entonces  $|q| = 1$ .

- Recordemos el operador  $\vec{q}^\times$ :  $\vec{q}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$

- Para pasar de la DCM  $C$  a cuaterniones, se utilizan las fórmulas:  $q_0 = \frac{\sqrt{1+\text{Tr}(C)}}{2}$  y  $\vec{q}^\times = \frac{1}{4q_0} (C^T - C)$ .

- Para pasar de cuaterniones a DCM se utiliza la fórmula de Euler-Rodrigues para cuaterniones:

$$C = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \text{Id} + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_0\vec{q}^\times.$$

- También se puede girar un vector  $\vec{v}$  sin calcular la matriz

$$C \text{ usando la fórmula: } \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v}' \end{bmatrix} = q^* \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix} \star q$$



## Representación de la actitud mediante cuaterniones II

- Fórmula de Euler-Rodrigues en forma matricial:

$$C(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

- Los cuaterniones son una representación de la actitud que requiere 4 parámetros, con la relación  $|q| = 1$ .
- Existe un problema de ambigüedad:  $q$  y  $-q$  representan la misma actitud, ya que si  $q$  corresponde a  $(\vec{e}, \theta)$ , entonces  $-q$  corresponde a  $(-\vec{e}, 360 - \theta)$ .
- Tienen la desventaja de ser una representación matemática sin sentido físico.
- Para pasar de la DCM a cuaterniones y viceversa no es necesario usar fórmulas trigonométricas.
- Si  $q_{S'S}$  representa la actitud de  $S'$  respecto a  $S$  y  $q_{S''S'}$  representa la actitud de  $S''$  respecto a  $S'$ , entonces  $q_{S''S}$ , la actitud de  $S''$  respecto a  $S$ , se calcula como  $q_{S''S} = q_{S'S} \star q_{S''S'}$  (al revés que la DCM).



## Cálculo de cuaterniones dados los ángulos de Euler

- Obsérvese que:
  - A los ángulos de Euler  $(\psi, 0, 0)$  les corresponde el cuaternión  $q_\psi = \cos \psi/2 + k \sin \psi/2$ .
  - A los ángulos de Euler  $(0, \theta, 0)$  les corresponde el cuaternión  $q_\theta = \cos \theta/2 + j \sin \theta/2$ .
  - A los ángulos de Euler  $(0, 0, \varphi)$  les corresponde el cuaternión  $q_\varphi = \cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2$ .
- Por tanto, a los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  les corresponderá el cuaternión  $q = q_\psi \star q_\theta \star q_\varphi$ .
- Realizando el producto, se obtiene:

$$\begin{aligned} q = & (\cos \psi/2 \cos \theta/2 \cos \varphi/2 + \sin \psi/2 \sin \theta/2 \sin \varphi/2) \\ & + i (\cos \psi/2 \cos \theta/2 \sin \varphi/2 - \sin \psi/2 \sin \theta/2 \cos \varphi/2) \\ & + j (\cos \psi/2 \sin \theta/2 \cos \varphi/2 + \sin \psi/2 \cos \theta/2 \sin \varphi/2) \\ & + k (\sin \psi/2 \cos \theta/2 \cos \varphi/2 - \cos \psi/2 \sin \theta/2 \sin \varphi/2). \end{aligned}$$



## Cuaterniones: camino más corto e interpolación

- Dados dos cuaterniones  $q_0$  y  $q_1$  que representan dos actitudes diferentes, ¿se puede construir un “cuaternión de interpolación” continuo  $q(s)$  de forma que  $q(0) = q_0$  y  $q(1) = q_1$ ?
- La forma de hacerlo es encontrar el cuaternión  $q_2$  que representa la actitud entre  $q_0$  y  $q_1$ :  $q_2 = \frac{1}{q_0} \star q_1 = q_0^* q_1$ . Este cuaternión estará representado por un ángulo  $\theta$  y eje de Euler  $\vec{e}$  de forma que  $q_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta/2 \\ \text{sen } \theta/2 \vec{e} \end{bmatrix}$ .
- La solución del problema es formar el cuaternión  $q(s)$  como el producto de  $q_0$  y otro cuaternión con eje  $\vec{e}$  y ángulo  $s\theta$ , de forma que cuando  $s = 0$  es el cuaternión unidad (y por tanto el producto es  $q_0$ ) y cuando  $s = 1$  es  $q_2$ , de forma que el producto es  $q_1$ :

$$q(s) = q_0 \star \begin{bmatrix} \cos(s\theta/2) \\ \text{sen}(s\theta/2)\vec{e} \end{bmatrix}$$



## Parámetros de Rodrigues I

- La representación mediante parámetros de Rodrigues (PR, también llamada vector de Gibbs) se consigue a partir del cuaternión, definiendo  $\vec{g} = \frac{\vec{q}}{q_0}$ , obviamente sólo válido si  $q_0 > 0$  ( $\theta < 180^\circ$ ). Para recuperar el cuaternión a partir del vector de Gibbs:

$$\|\vec{g}\|^2 = \frac{\|\vec{q}\|^2}{q_0^2} = \frac{1 - q_0^2}{q_0^2}$$

Luego  $q_0 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \|\vec{g}\|^2}}$ . Y por tanto:

$$q = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \|\vec{g}\|^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

- En términos del eje y ángulo de Euler,  $\vec{g} = \vec{e} \tan \frac{\theta}{2}$ .



## Parámetros de Rodrigues II

- La relación con la matriz de actitud es:

$$C = \text{Id} + 2 \frac{\vec{g}^\times \vec{g}^\times - \vec{g}^\times}{1 + \|\vec{g}\|^2} = (\text{Id} - \vec{g}^\times)(\text{Id} + \vec{g}^\times)^{-1} = (\text{Id} + \vec{g}^\times)^{-1}(\text{Id} - \vec{g}^\times)$$

- Por otro lado, como  $q_0 = \frac{\sqrt{1 + \text{Tr}(C)}}{2}$  y  $\vec{q}^\times = \frac{1}{4q_0} (C^T - C)$ , tendremos:

$$\vec{g}^\times = \frac{q^\times}{q_0} = \frac{1}{4q_0^2} (C^T - C) = \frac{C^T - C}{1 + \text{Tr}(C)}$$

- La composición de actitudes sigue una regla simple. Si  $\vec{g}_{S'S}$  representa la actitud de  $S'$  respecto a  $S$  y  $\vec{g}_{S''S'}$  representa la actitud de  $S''$  respecto a  $S'$ , entonces  $\vec{g}_{S''S}$ , la actitud de  $S''$  respecto a  $S$ , se calcula como:

$$\vec{g}_{S''S} = \frac{\vec{g}_{S''S'} + \vec{g}_{S'S} - \vec{g}_{S''S'} \times \vec{g}_{S'S}}{1 - \vec{g}_{S'S} \cdot \vec{g}_{S''S'}}$$



## Parámetros de Rodrigues modificados

- La representación mediante parámetros de Rodrigues modificados (PRM) es muy reciente (1962) pero también muy popular. Similarmente a los PR se consigue a partir del cuaternión, definiendo  $\vec{p} = \frac{\vec{q}}{1+q_0}$ . Para recuperar el cuaternión a partir del vector de Gibbs:

$$\|\vec{p}\|^2 = \frac{\|\vec{q}\|^2}{(1+q_0)^2} = \frac{1-q_0^2}{(1+q_0)^2} = \frac{1-q_0}{1+q_0}$$

Luego  $q_0 = \frac{1-\|\vec{p}\|^2}{1+\|\vec{p}\|^2}$ . Y por tanto:

$$q = \frac{1}{1+\|\vec{p}\|^2} \begin{bmatrix} 1 - \|\vec{p}\|^2 \\ 2\vec{p} \end{bmatrix}$$

- En términos del eje y ángulo de Euler,  $\vec{p} = \vec{e} \tan \frac{\theta}{4}$ .



## Parámetros de Rodrigues modificados II

- La relación con la matriz de actitud es:

$$C = \text{Id} + \frac{8\vec{p}^\times \vec{p}^\times - 4(1 - \|\vec{p}\|^2)\vec{p}^\times}{(1 + \|\vec{p}\|^2)^2} = [(\text{Id} - \vec{p}^\times)(\text{Id} + \vec{p}^\times)^{-1}]^2$$

- Como  $q$  y  $-q$  representan la misma actitud, también lo hacen  $\vec{p} = \frac{\vec{q}}{1+q_0}$  y  $\vec{p}' = \frac{-\vec{q}}{1-q_0}$ . ¿Cuál es la relación entre ambos?

$$\|\vec{p}\|^2 = \frac{1 - q_0}{1 + q_0} = \frac{1}{\|\vec{p}'\|^2}$$

- Luego  $\vec{p}$  y  $\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|^2}$  representan la misma actitud. Por tanto limitando  $\|\vec{p}\| \leq 1$  evitamos la falta de ambigüedad.
- La composición de actitudes sigue una regla no tan simple como para los PR.  $\vec{p}_{S'S}$  representa la actitud de  $S'$  respecto a  $S$  y  $\vec{p}_{S''S'}$  representa la actitud de  $S''$  respecto a  $S'$ , entonces  $\vec{p}_{S''S}$ , la actitud de  $S''$  respecto a  $S$ , se calcula como:

$$\vec{p}_{S''S} = \frac{(1 - \|\vec{p}_{S'S}\|^2)\vec{p}_{S''S'} + (1 - \|\vec{p}_{S''S'}\|^2)\vec{p}_{S'S} - 2\vec{p}_{S''S'} \times \vec{p}_{S'S}}{1 + \|\vec{p}_{S'S}\|^2\|\vec{p}_{S''S'}\|^2 - 2\vec{p}_{S'S} \cdot \vec{p}_{S''S'}}$$



## Cuaternión de error

- Para linealizar ecuaciones de actitud con cuaterniones en torno a un valor  $\bar{q}$ , la formulación clásica “aditiva”  $q = \bar{q} + \delta q$  no funciona, porque aunque  $\bar{q}$  y  $\delta q$  tengan módulo unidad, la suma no tiene por qué tenerlo.
- Se utiliza una formulación “multiplicativa” donde  $q = \bar{q} \star \delta q$ , y donde  $\delta q$  es el llamado cuaternión de error que debe estar “cerca” del cuaternión unidad  $q = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .
- $\delta q$  tiene 4 componentes pero realmente sólo 3 grados de libertad; estos se codifican en un vector  $\vec{a}$  “pequeño” (equivalente a  $2\vec{g}$ ):

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que  $\delta q(\vec{a})$  tiene módulo unidad. Si es necesario linealizar la anterior expresión se obtiene:

$$\delta q(\vec{a}) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix}$$



## Ecuaciones Diferenciales Cinemáticas de la Actitud

- Para el caso de la posición, las ecuaciones cinemáticas relacionan el vector posición con el vector velocidad, mientras que las ecuaciones dinámicas relacionan el vector velocidad con el vector fuerza.
- Para el caso de la actitud, las ecuaciones diferenciales cinemáticas (EDC) relacionan la representación de la actitud (DCM, ángulos de Euler, cuaterniones) con la velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Típicamente estas ecuaciones son no-lineales.
- En el sistema de navegación inercial, los giróscopos nos darán  $\vec{\omega}$ , y habrá que utilizar las EDC, es decir, integrar las ecuaciones, para calcular la actitud.
- Por tanto es importante conocer las diferentes EDC para las diferentes representaciones, para ver cuál es la más ventajosa desde un punto de vista computacional.



## DCM para ángulos pequeños I

- Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia  $A$  y  $B$ , relacionados de la siguiente forma:

$$A \xrightarrow[x^A]{d\theta_1} S_1 \xrightarrow[y^{S_1}]{d\theta_2} S_2 \xrightarrow[z^{S_2}]{d\theta_3} B$$

donde suponemos que  $d\theta_i$  son ángulos pequeños, de forma que podemos aproximar  $\cos d\theta_i \simeq 1$  y  $\sin d\theta_i \simeq d\theta_i$ .

- Si escribimos las matrices de rotación teniendo en cuenta la aproximación anterior, obtenemos:

$$C_A^{S_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta_1 \\ 0 & -d\theta_1 & 1 \end{bmatrix}, C_{S_1}^{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ d\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{S_2}^B = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_3 & 0 \\ -d\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Si escribimos  $C_A^B = C_{S_2}^B C_{S_1}^{S_2} C_A^{S_1}$  y despreciamos todos los productos dobles de ángulos, es decir,  $d\theta_i d\theta_j \simeq 0$ , obtenemos:

$$C_A^B = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_3 & -d\theta_2 \\ -d\theta_3 & 1 & d\theta_1 \\ d\theta_2 & -d\theta_1 & 1 \end{bmatrix} = \text{Id} - \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_3 & d\theta_2 \\ d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ -d\theta_2 & d\theta_1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Id} - d\vec{\theta}^\times,$$



## DCM para ángulos pequeños II

- En la anterior transparencia, se ha definido  $d\vec{\theta} = [d\theta_1 \ d\theta_2 \ d\theta_3]^T$  y la matriz

$$d\vec{\theta}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_3 & d\theta_2 \\ d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ -d\theta_2 & d\theta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

que es la matriz antisimétrica que se emplea para efectuar el producto vectorial.

- Obsérvese que bajo estas hipótesis (ángulos pequeños) no importa el orden de las rotaciones y los ángulos se suman. Pero no se pueden usar ángulos de Euler en los que se repitan ejes, ya que quedaría sin definir una de las rotaciones y otras dos se sumarían.



## EDC para la DCM I

- Supongamos que quiero calcular la actitud de  $B$  respecto a  $A$ , mediante la DCM  $C_A^B(t)$ , sabiendo que  $B$  gira con respecto a  $A$  con una velocidad angular  $\vec{\omega}_{B/A}^B$ .

- Por definición:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \frac{C_A^B(t+dt) - C_A^B(t)}{dt}$

- Suponiendo  $A$  fijo, entonces podemos imaginar que es  $B$  quien se mueve en el tiempo, y por tanto podríamos escribir  $B = B(t)$  y por tanto  $C_A^B(t) = C_A^{B(t)}$ .

- Usando este razonamiento,  
 $C_A^B(t + dt) = C_A^{B(t+dt)} = C_{B(t)}^{B(t+dt)} C_A^{B(t)}$ . Por tanto:

$$A \longrightarrow B(t) \longrightarrow B(t + dt)$$

- En el tiempo  $dt$ , el sistema de referencia  $B$  habrá girado respecto a sí mismo un ángulo muy pequeño en cada eje; por lo que hemos visto en la anterior transparencia, por tanto,

$$C_{B(t)}^{B(t+dt)} = \text{Id} - \left( d\vec{\theta}^B \right)^\times, \text{ donde } d\vec{\theta}^B \text{ es como antes.}$$



## EDC para la DCM II

- Siguiendo el razonamiento:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \frac{C_A^B(t+dt) - C_A^B(t)}{dt} = \frac{C_{B(t)}^{B(t+dt)} C_A^B(t) - C_A^B(t)}{dt} = \frac{(\text{Id} - (d\vec{\theta}^B)^\times) C_A^B(t) - C_A^B(t)}{dt} = -\frac{(d\vec{\theta}^B)^\times}{dt} C_A^B(t)$
- La matriz  $\frac{(d\vec{\theta}^B)^\times}{dt}$  se escribiría

$$\frac{(d\vec{\theta}^B)^\times}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d\theta_3}{dt} & \frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{d\theta_3}{dt} & 0 & -\frac{d\theta_1}{dt} \\ -\frac{d\theta_2}{dt} & \frac{d\theta_1}{dt} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\vec{\omega}_{B/A}^B = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  ya que  $d\vec{\theta}^B$  representaba el ángulo girado por  $B$  en un  $dt$ , y por definición de velocidad angular.

Se tiene entonces:

$$\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

- Por tanto:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \dot{C}_A^B = -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B$ .



## EDC para la DCM III

- Otra variación: trasponiendo ambos miembros de  $\dot{C}_A^B = -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B$  llegamos a  $\dot{C}_B^A = C_B^A \left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times$
- En general, la EDC es una ecuación diferencial matricial, que habrá que resolver componente a componente: nueve ecuaciones diferenciales acopladas.
- El principal problema de resolver numéricamente esta ecuación es garantizar que la matriz resultante de integrar sea ortogonal. Obsérvese que en teoría la ecuación diferencial respeta la ortogonalidad:  $I = (C_A^B)(C_A^B)^T$ , derivando:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d}{dt} (C_A^B) \right] (C_A^B)^T + C_A^B \frac{d}{dt} (C_A^B)^T \\ &= -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B (C_A^B)^T + C_A^B C_B^A \left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times \\ &= -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times + \left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times = 0 \end{aligned}$$



## EDC para la DCM III

- Sin embargo los errores numéricos en la integración pueden desviar a la DCM resultante de la ortogonalidad.
- Existen algoritmos para encontrar la matriz ortogonal “más próxima” a una matriz dada.
- Por ejemplo, dada  $M$ , encontrar una matriz próxima que sea ortogonal:

$$Q = M(M^T M)^{-1/2}$$

- El problema con la fórmula anterior es que requiere calcular una raíz cuadrada matricial, lo que no siempre es sencillo.
- El método iterativo  $Q_0 = M$ ,

$$Q_{k+1} = 2M(Q_k^{-1}M + M^T Q_k)^{-1}$$

converge a la misma matriz cuando  $k \rightarrow \infty$ , si  $M$  es próximo a una matriz ortogonal (y por tanto invertible).

- Obviamente si  $M$  es muy próxima a una matriz ortogonal el método iterativo convergerá muy rápido.



## Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues I

- Supongamos que se parte de la actitud identidad y se impone un giro con velocidad angular constante  $\vec{\omega}$ , donde  $\vec{\theta} = \theta \vec{e}$ , siendo  $\vec{e}$  un vector unitario, durante una unidad de tiempo. La actitud resultante debería ser la descrita por el eje y ángulo de Euler  $(\vec{e}, \theta)$ .
- La actitud final será la solución en  $t = 1$  de la ecuación diferencial  $\dot{C} = -\vec{\theta}^\times C$  con condición inicial  $C(0) = \text{Id}$ . Recordemos que la solución de esta ecuación diferencial matricial es la "matriz exponencial":

$$C(t) = C(0)\text{Exp}(-\vec{\theta}^\times t) = C(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\vec{\theta}^\times t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n \theta^n (\vec{e}^\times)^n}{n!}$$

- Esta serie es sumable, pero hay que calcular las potencias de  $\vec{e}^\times$ . Obsérvese que  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ , expresado matricialmente:  $\vec{a}^\times \vec{b}^\times \vec{c} = \vec{b} \vec{a}^T \vec{c} - \vec{a}^T \vec{b} \vec{c} = (\vec{b} \vec{a}^T - \vec{a}^T \vec{b} \text{Id}) \vec{c}$ . Luego  $(\vec{e}^\times)^2 = \vec{e} \vec{e}^T - \vec{e}^T \vec{e} \text{Id} = \vec{e} \vec{e}^T - \text{Id}$ .



## Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues II

- Observemos:

$$\begin{aligned}(\vec{e}^\times)^0 &= \text{Id} \\(\vec{e}^\times)^1 &= (\vec{e}^\times)^1 \\(\vec{e}^\times)^2 &= \vec{e}\vec{e}^T - \text{Id} \\(\vec{e}^\times)^3 &= \vec{e}^\times (\vec{e}\vec{e}^T - \text{Id}) = -\vec{e}^\times \\(\vec{e}^\times)^4 &= -(\vec{e}^\times)^2 = -\vec{e}\vec{e}^T + \text{Id} \\&\dots\end{aligned}$$

- Por tanto:

$$\begin{aligned}(\vec{e}^\times)^0 &= \text{Id} \\(\vec{e}^\times)^{2k+1} &= (-1)^k \vec{e}^\times, \quad k \geq 0 \\(\vec{e}^\times)^{2k} &= (-1)^k \left( \text{Id} - \vec{e}\vec{e}^T \right), \quad k \geq 1\end{aligned}$$



## Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues III

- Sustituyendo  $t = 1$  y separando  $n = 0$ ,  $n$  impar y  $n$  par de la serie, obtenemos:

$$C(1) = \text{Id} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1} (\vec{e}^{\times})^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k} (\vec{e}^{\times})^{2k}}{(2k)!}$$

- Sustituyendo los valores antes hallados:

$$C(1) = \text{Id} - \vec{e}^{\times} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + (\text{Id} - \vec{e}\vec{e}^T) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k} (\vec{e}^{\times})^{2k}}{(2k)!}$$

- Reconociendo las series del seno y del coseno:

$$C(1) = \text{Id} - \vec{e}^{\times} \sin \theta + (\text{Id} - \vec{e}\vec{e}^T)(\cos \theta - 1)$$

- Operando, llegamos al resultado final:

$$C(1) = \text{Id} \cos \theta - \vec{e}^{\times} \sin \theta + \vec{e}\vec{e}^T (1 - \cos \theta)$$



## EDC para los ángulos de Euler I

- Partimos de la definición de los ángulos de Euler en el caso de aeronaves:

$$n \xrightarrow[z^n]{\psi} S \xrightarrow[y^S]{\theta} S' \xrightarrow[x^{S'}]{\varphi} b$$

- La velocidad angular tiene la propiedad de que

$$\vec{\omega}_{b/n} = \vec{\omega}_{b/S'} + \vec{\omega}_{S'/S} + \vec{\omega}_{S/n}.$$

- Si mecanizamos esta ecuación en b:

$$\vec{\omega}_{b/n}^b = \vec{\omega}_{b/S'}^b + \vec{\omega}_{S'/S}^b + \vec{\omega}_{S/n}^b$$

- Por otro lado está claro que:

$$\vec{\omega}_{b/S'}^b = [\dot{\varphi} \ 0 \ 0]^T, \quad \vec{\omega}_{S'/S}^{S'} = [0 \ \dot{\theta} \ 0]^T, \quad \vec{\omega}_{S/n}^S = [0 \ 0 \ \dot{\psi}]^T.$$

- Luego:  $\vec{\omega}_{b/n}^b = \vec{\omega}_{b/S'}^b + C_{S'}^b \vec{\omega}_{S'/S}^{S'} + C_S^b \vec{\omega}_{S/n}^S$  y puesto que

$$C_S^b = C_{S'}^b C_S^{S'}, \text{ podemos escribir:}$$

$$\vec{\omega}_{b/n}^b = \vec{\omega}_{b/S'}^b + C_{S'}^b \vec{\omega}_{S'/S}^{S'} + C_{S'}^b C_S^{S'} \vec{\omega}_{S/n}^S$$



## EDC para los ángulos de Euler II

- Desarrollando esta ecuación:

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega}_{b/n}^b &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c\varphi\dot{\theta} \\ -s\varphi\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s\theta\dot{\psi} \\ s\varphi c\theta\dot{\psi} \\ c\varphi c\theta\dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & s\varphi c\theta \\ 0 & -s\varphi & c\varphi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



## EDC para los ángulos de Euler III

- Obsérvese que lo que realmente se quiere es una expresión para las derivadas de los ángulos en función de  $\vec{\omega}_{b/n}^b = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ , y por tanto hay que invertir la matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & s\varphi c\theta \\ 0 & -s\varphi & c\varphi c\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c\theta} \begin{bmatrix} c\theta & s\theta s\varphi & s\theta c\varphi \\ 0 & c\varphi c\theta & -s\varphi c\theta \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que se trata de 3 ecuaciones diferenciales no lineales, con multitud de funciones trigonométricas.
- Posee una singularidad para  $\theta = \pm 90^\circ$ . En realidad los ángulos de Euler no están bien definidos para esta situación. Ésta singularidad es el motivo por el que no se suelen usar en sistemas de navegación inercial (aeronaves o vehículos).
- Lo mismo sucede para cualquier otro conjunto de ángulos de Euler; siempre existe una singularidad.



## EDC para el eje y ángulo de Euler

- La representación en forma de eje y ángulo de Euler,  $(\vec{e}_{b/n}^b, \theta)$ , tiene las siguientes EDC:
- Para el ángulo de Euler:  $\dot{\theta} = (\vec{e}_{b/n}^b)^T \vec{\omega}_{b/n}^b$
- Para el eje de Euler:

$$\dot{\vec{e}}_{b/n}^b = \frac{1}{2} \left[ \left( \vec{e}_{b/n}^b \right)^\times + \frac{1}{\tan \theta/2} \left( \text{Id} - \vec{e}_{b/n}^b (\vec{e}_{b/n}^b)^T \right) \right] \vec{\omega}_{b/n}^b$$

- Son cuatro ecuaciones diferenciales, no lineales.
- Poseen una singularidad para  $\theta = 0$ .
- Si la dirección de  $\vec{\omega}$  es constante e igual al eje  $\vec{e}$  inicial, entonces la actitud se reduce a  $\vec{e}(t) = \vec{e}(0)$  y  $\dot{\theta} = \|\vec{\omega}\|$ .
- En la práctica no se utilizan directamente; las usamos para hallar las EDC para los cuaterniones.



## EDC para cuaterniones I

- Recordemos la definición de cuaterniones en función de ángulo y eje de Euler:

$$q_0 = \cos \theta/2, \quad \vec{q} = \sin \theta/2 \vec{e}_{b/n}^b.$$

- Derivando en la ecuación de  $q_0$  y sustituyendo la EDC de  $\theta$ , obtenemos:

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \sin \theta/2 \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \sin \theta/2 (\vec{e}_{b/n}^b)^T \vec{\omega}_{b/n}^b = -\frac{1}{2} \vec{q}^T \vec{\omega}_{b/n}^b$$

- Derivando en la ecuación de  $\vec{q}$ :

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \cos \theta/2 \vec{e}_{b/n}^b \dot{\theta} + \sin \theta/2 \dot{\vec{e}}_{b/n}^b$$

- Sustituyendo las EDC de ángulo y eje de Euler:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \frac{1}{2} \cos \theta/2 \vec{e}_{b/n}^b (\vec{e}_{b/n}^b)^T \vec{\omega}_{b/n}^b \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \theta/2 \left[ \left( \vec{e}_{b/n}^b \right)^\times + \frac{1}{\tan \theta/2} \left( \text{Id} - \vec{e}_{b/n}^b (\vec{e}_{b/n}^b)^T \right) \right] \vec{\omega}_{b/n}^b \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{q}^\times + q_0 \text{Id} \right] \vec{\omega}_{b/n}^b \end{aligned}$$



## EDC para cuaterniones II

- Podemos escribir esta ecuación en forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

donde  $\vec{\omega}_{b/n}^b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ .

- Son cuatro ecuaciones diferenciales, bilineales, sin singularidades.
- Obsérvese la ausencia de singularidades y de funciones trigonométricas; se trata simplemente de una ecuación diferencial bilineal.
- Estas propiedades de las EDC son la razón más importante por la cual su uso es generalizado para representar la actitud de vehículos espaciales. Se realizan todos los cálculos mediante cuaterniones y si es necesario visualizarlos, se transforman a los ángulos de Euler más cómodos para la aplicación.



## EDC para cuaterniones III

- Recordando la definición matricial del producto de cuaterniones, si definimos un “cuaternión”  $q_\omega$  cuya parte escalar es cero y cuya parte vectorial es igual a los componentes de la velocidad angular, es decir:

$$q_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

podemos expresar la anterior ecuación como

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \star q_\omega$$

- Si se acumulan errores por imprecisiones numéricas se puede normalizar el cuaternión para que su módulo se mantenga en la unidad.



## Otras EDC

- Parámetros de Rodrigues:

$$\dot{\vec{g}} = \frac{1}{2} \left[ \text{Id} + \vec{g}^\times + \vec{g}\vec{g}^T \right] \vec{\omega}$$

- Parámetros de Rodrigues modificados:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{1 + \|\vec{p}\|^2}{4} \left[ \text{Id} + 2 \frac{\vec{p}^\times + \vec{p}^\times \vec{p}^\times}{1 + \|\vec{p}\|^2} \right] \vec{\omega}$$

- Vector de rotación:

$$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\theta} \times \vec{\omega} + \frac{1}{\theta} \left( 1 - \frac{\theta}{2 \tan \theta/2} \right) \vec{\theta} \times (\vec{\theta} \times \vec{\omega})$$



## Pasando de una actitud a otra

- Dados dos cuaterniones  $q_0$  y  $q_1$  que representan dos actitudes diferentes, ¿se puede construir una velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  de forma que  $q(t=0) = q_0$  y  $q(t=T) = q_1$ ?
- Como antes, la forma de hacerlo es encontrar el cuaternión  $q_2$  que representa la actitud entre  $q_0$  y  $q_1$ :  $q_2 = \frac{1}{q_0} \star q_1 = q_0^* q_1$ . Este cuaternión estará representado por un ángulo  $\theta_1$  y eje de Euler  $\vec{e}$  de forma que  $q_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1/2 \\ \text{sen } \theta_1/2 \vec{e} \end{bmatrix}$ .
- La velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  solución tiene la dirección de  $\vec{e}$  y representa el “giro más corto”. Llamemos a su módulo  $\omega(t)$ . Se tendrá  $\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$  y la actitud será:

$$q(t) = q_0 \star \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)/2) \\ \text{sen}(\theta(t)/2) \vec{e} \end{bmatrix}$$

- Cualquier  $\omega(t)$  tal que  $\int_0^T \omega(\tau) d\tau = \theta_1$  es solución.



## Pasando de una actitud a otra: solución óptima

- Para encontrar la mejor solución habría que plantear un problema de “control óptimo”. Por ejemplo podríamos considerar que para realizar el giro hay que aplicar un cierto par  $M$  de forma que  $\dot{\omega} = M$  (ojo: esta es una dinámica inventada).
- Un óptimo respecto al par a ejercer ( $\min \int_0^T M^2(\tau) d\tau$ ) y con velocidad angular inicial y final nulas ( $\omega(0) = \omega(T) = 0$ ) es  $\omega(t) = 6 \frac{t}{T^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \theta_1$ . De hecho este es el polinomio más sencillo que verifica las tres restricciones.
- Si lo que se quiere es llegar “lo más rápido posible” (minimizar el tiempo final  $T$ ): primero el máximo par admisible  $M_{max}$  y luego el mínimo par admisible  $M_{min}$ . Si  $M_{min} = -M_{max}$  la solución es  $T = \sqrt{\frac{\theta_1}{M_{max}}}$ .
- Si tenemos en cuenta la dinámica real del vehículo puede merecer la pena realizar la rotación por otro camino (depende de las inercias).



## Linealizando la EDC para cuaterniones I

- Supongamos que tenemos una velocidad angular de referencia  $\vec{\omega}_r$  que genera un cuaternión de referencia  $\bar{q}$ , de acuerdo a la EDC que acabamos de ver. Supongamos ahora que  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}$ , donde  $\delta\vec{\omega}$  es “pequeño”. ¿Cuál será el cuaternión resultante?
- Usamos el cuaternión de error de forma que  $q = \bar{q} \star \delta q$ , determinemos  $\delta q$ . Tomando derivada, se tiene:

$$\dot{q} = \dot{\bar{q}} \star \delta q + \bar{q} \star \dot{\delta q} = \frac{1}{2} q \star q_\omega$$

- Usando  $\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \bar{q} \star q_{\omega_r}$ :

$$\frac{1}{2} \bar{q} \star q_{\omega_r} \star \delta q + \bar{q} \star \dot{\delta q} = \frac{1}{2} \bar{q} \star \delta q \star q_\omega$$

- Multiplicamos por el inverso de  $\bar{q}$  a la izquierda y despejamos  $\dot{\delta q}$ , obteniendo:

$$\dot{\delta q} = \frac{1}{2} \delta q \star q_\omega - \frac{1}{2} q_{\omega_r} \star \delta q$$



## Linealizando la EDC para cuaterniones II

- Expresando  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}$  y recordando la expresión linealizada de un cuaternión pequeño  $\delta q$  en función del parámetro  $\vec{a}$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_r \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix}$$

- Recordemos:  $\begin{bmatrix} q'_0 \\ \vec{q}' \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_0 q_0 - \vec{q}'^T \vec{q} \\ q_0 \vec{q}' + q'_0 \vec{q} + \vec{q}' \times \vec{q} \end{bmatrix}$ . Por tanto:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\vec{a}^T / 2 (\vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}) + \vec{\omega}_r^T \vec{a} / 2 \\ \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega} + \vec{a} / 2 \times (\vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}) - \vec{\omega}_r - \vec{\omega}_r \times \vec{a} / 2 \end{bmatrix}$$

- Operando y teniendo en cuenta que  $\|\vec{a}\| \|\delta\vec{\omega}\| \approx 0$  al ser ambos términos pequeños:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_r \end{bmatrix}$$

- Es decir:  $\dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_r$ .

