

Vehículos Espaciales y Misiles

Ingenieros Aeronáuticos	N ^o DNI _____	EXAMEN EJEMPLO
Escuela Superior de Ingenieros	1 ^{er} Apellido _____	
Universidad de Sevilla	2 ^{do} Apellido _____	
	Nombre _____	Test y cuestiones

Algunas preguntas de test.

Una sola respuesta correcta por pregunta. Las respuestas incorrectas restan 1/2 del valor de la pregunta.

1. La actitud estable de un cuerpo rígido en órbita circular es:
 - a) Con el eje intermedio apuntando a la Tierra y el eje menor perpendicular a la órbita.
 - b) Con el eje intermedio apuntando a la Tierra y el eje mayor perpendicular a la órbita.
 - c) Con el eje intermedio en la dirección de la órbita y el eje mayor perpendicular a la órbita.
2. Sea un satélite rotando en torno a su eje intermedio a una velocidad angular n y con un volante de inercia girando a cierta velocidad también en torno a dicho eje. La rotación del satélite:
 - a) Es siempre estable.
 - b) Es siempre inestable.
 - c) Puede ser estable o inestable dependiendo de la inercia del volante y su velocidad.
3. Un satélite con disipación de energía y matriz de inercia en ejes cuerpo principales tal que $I_1 = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_2 = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_3 = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ se encuentra rotando a una velocidad angular cuyo valor expresado en dichos ejes es $\omega = [2, 0, -8]^T \text{ rad/s}$. Transcurrido un periodo de tiempo suficientemente largo, su velocidad se estabiliza en cierto valor. ¿Cuál de los siguientes valores podría ser dicho resultado final?
 - a) $\omega = [0, 1, 0]^T \text{ rad/s}$
 - b) $\omega = [0, -2, 0]^T \text{ rad/s}$
 - c) $\omega = [0, -6, 0]^T \text{ rad/s}$
4. Para una esfera maciza en órbita a 1000 kilómetros de altitud, ¿cuál de los siguientes acabados superficiales provocaría que la esfera se encontrara a mayor temperatura?
 - a) Pintura de oro.
 - b) Pintura negra.
 - c) Pintura blanca.
5. Dada una cierta actitud:
 - a) Existe un único cuaternión q que representa dicha actitud.
 - b) Existe un único cuaternión q , con $\|q\| = 1$ que representa dicha actitud.
 - c) Existen dos cuaterniones q_1 y q_2 , con $\|q_1\| = \|q_2\| = 1$, que representan dicha actitud.
6. ¿Cuál de los siguientes sistemas de potencia sería más recomendable elegir como primario en una misión a Júpiter?
 - a) RTG.
 - b) Paneles solares.
 - c) Células de combustible.
7. ¿Cuál es el mecanismo de transmisión de calor dominante para un vehículo espacial en órbita?
 - a) Conducción.
 - b) Convección.
 - c) Radiación.
8. ¿Se puede utilizar el GPS para determinar la actitud de un vehículo espacial?
 - a) Sí, pero sólo para vehículos en LEO.
 - b) No.
 - c) Sí, para vehículos en altitudes desde LEO hasta GEO.

Algunas cuestiones ejemplo.

1. Se tienen tres sistemas de referencia, A, B y C. La actitud de B con respecto a A viene dada por el cuaternión q_1 . La actitud de C con respecto a A viene dada por el cuaternión q_2 .
 - a) Encontrar el cuaternión que describe la actitud de C respecto a B.
 - b) Encontrar el ángulo θ y eje de Euler $\vec{e}$ que transforma el sistema de referencia B en el C.
 - c) Los ejes cuerpos de un satélite coinciden en el instante t_0 con B y se desea que en el instante t_1 coincidan con C. Encontrar una velocidad angular $\vec{\omega}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ tal que provoque la rotación deseada en el satélite.

Recordatorio: dado un ángulo de Euler θ y un eje de Euler $\vec{e}$ el cuaternión que representa dicha rotación viene dado por $q_0 = \cos \theta/2$ (parte escalar) y $\vec{q} = \sin \theta/2 \vec{e}$ (parte vectorial).

2. Sea un satélite rígido con momentos de inercia I_i (en ejes principales) tales que $I_1 = I_2 = I > I_3$ y con un volante de inercia (de inercia I_R) rotando con velocidad angular ω_R en torno al eje menor del satélite (de forma que lo estabiliza). Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 - I_R \omega_R \omega_2 + M_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + I_R \omega_R \omega_1 + M_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_3, \end{aligned}$$

Supongamos que repentinamente el satélite sufre un momento perturbador constante en su eje 1 ($M_1 = \text{cte.}$, $M_2 = M_3 = 0$).

Resolver las ecuaciones del movimiento, partiendo de una condición inicial en la velocidad angular nula. Comentar el efecto del volante de inercia.

Ingenieros Aeronáuticos	Nº DNI _____	Curso 13/14
Escuela Superior de Ingenieros	1 ^{er} Apellido _____	13/06/14
	2 ^{do} Apellido _____	
Universidad de Sevilla	Nombre _____	Examen final

Instrucciones: Escribir en el recuadro PRIMER PARCIAL o FINAL

Primer parcial: Realizar las preguntas 1-6 del test (25 %) y las cuestiones 1,2,3 (25 % cada una).

Final: Realizar todo el test (30 %) y las cuestiones 1,2,4,5 (70 % en total, con igual peso cada cuestión).

Cuestiones.

1. Un vehículo posee un magnetómetro y un sensor solar digital de aspecto solar. Supongamos que en un cierto instante se sabe que en ejes inerciales el campo magnético tiene la dirección $\vec{v}_M^I$ y el Sol $\vec{v}_S^I$, pero los sensores miden, respectivamente $\vec{v}_M^B$ y $\vec{v}_S^B$, donde los valores de estos vectores son:

$$\vec{v}_M^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_S^I = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_M^B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_S^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si se desea que el vehículo llegue a una actitud final dada en la secuencia 1-2-1 por $(\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = -60^\circ, \theta_3 = 0^\circ)$ en diez minutos, encontrar de la forma más precisa posible una velocidad angular $\vec{\omega}(t)$ (en ejes cuerpo) que sea capaz de realizar el giro y con la condición adicional de que la velocidad angular inicial y final sean nulas (parta del reposo y termine en reposo).

Se recuerdan las siguientes relaciones que **pueden** ser útiles: $q_0 = \frac{\sqrt{1+\text{Tr}(C)}}{2}$, $\vec{q}^\times = \frac{1}{4q_0} (C^T - C)$.

2. Bajo una hipótesis de pequeños ángulos, las ecuaciones de Euler se pueden suponer desacopladas, de forma que las ecuaciones controladas para un eje se reducen a:

$$I\ddot{\theta} = u$$

Como el actuador es propulsivo, los únicos posibles valores de u para todo instante de tiempo son $u \in \{u_{\min}, 0, u_{\max}\}$. Supongamos para simplificar que $u_{\min} = -u_{\max}$ y que se empieza en una condición inicial $\theta(0) = \theta_0 > 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

- Si se quiere llegar al origen consumiendo el menor combustible posible, en un tiempo T , ¿cuál es la secuencia óptima de control que lo logra? ¿durante cuánto tiempo están activos los actuadores?
 - ¿Cuál sería el valor mínimo posible del tiempo en función de $u_{\max}$, I y θ_0 ?
 - Para el caso de que $I = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $u = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\theta_0 = 5^\circ$, ¿cuál sería el tiempo mínimo? ¿cuánto tiempo estarían activos los actuadores si el objetivo es llegar en un tiempo doble del tiempo mínimo gastando el menor combustible posible?
3. Cuando un vehículo en órbita circular de radio R en torno a la Tierra está sometido al gradiente gravitatorio, las ecuaciones de Euler que verifica la velocidad angular en ejes cuerpo son

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= [\omega_2 \omega_3 - 3n^2 c \theta_1 c^2 \theta_2 s \theta_1] (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= [\omega_1 \omega_3 + 3n^2 c \theta_1 c \theta_2 s \theta_2] (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= [\omega_2 \omega_1 + 3n^2 s \theta_1 c \theta_2 s \theta_2] (I_1 - I_2) \end{aligned}$$

donde $n = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R^3}}$, θ_1 es la guiñada, θ_2 el cabeceo y θ_3 el balance en ejes órbita, y las ecuaciones cinemáticas son

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c \theta_2} \begin{bmatrix} c \theta_2 & s \theta_2 s \theta_1 & s \theta_2 c \theta_1 \\ 0 & c \theta_1 c \theta_2 & -s \theta_1 c \theta_2 \\ 0 & s \theta_1 & c \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \frac{n}{c \theta_2} \begin{bmatrix} s \theta_3 \\ c \theta_2 c \theta_3 \\ s \theta_2 s \theta_3 \end{bmatrix}$$

- Encontrar al menos dos equilibrios del sistema (velocidad angular+ángulos en ejes órbita).

- b) Estudiar la estabilidad de uno de los equilibrios. ¿Qué relación deben cumplir las inercias para que el equilibrio sea estable?
4. Con las definiciones usuales, las ecuaciones del P3CCR adimensionales linealizadas en torno a un punto de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\delta x'' - 2\delta y' - \delta x &= -\frac{\mu_1 \delta x}{(r_1^*)^3} - \frac{\mu_2 \delta x}{(r_2^*)^3} + 3\frac{\mu_1(x^* + \rho)\vec{r}_1^* \cdot \delta \vec{r}}{(r_1^*)^5} + 3\frac{\mu_2(x^* - 1 + \rho)\vec{r}_2^* \cdot \delta \vec{r}}{(r_2^*)^5} \\ \delta y'' + 2\delta x' - \delta y &= -\frac{\mu_1 \delta y}{(r_1^*)^3} - \frac{\mu_2 \delta y}{(r_2^*)^3} + 3\frac{\mu_1 y^* \vec{r}_1^* \cdot \delta \vec{r}}{(r_1^*)^5} + 3\frac{\mu_2 y^* \vec{r}_2^* \cdot \delta \vec{r}}{(r_2^*)^5} \\ \delta z'' &= -\frac{\mu_1 \delta z}{(r_1^*)^3} - \frac{\mu_2 \delta z}{(r_2^*)^3} + 3\frac{\mu_1 z^* \vec{r}_1^* \cdot \delta \vec{r}}{(r_1^*)^5} + 3\frac{\mu_2 z^* \vec{r}_2^* \cdot \delta \vec{r}}{(r_2^*)^5}\end{aligned}$$

- a) Encontrar justificadamente condiciones para la estabilidad de los puntos de Lagrange.
- b) Aplicar al caso Tierra($\oplus$)-Luna, para el cual $\mu_{\oplus} = 398600,4 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $\mu_{\text{L}} = 4902,8 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $D = 384400 \text{ km}$, y se sabe que los puntos L1, L2, L3 se encuentran, respectivamente, a 326400 km, 449100 km y 381600 km de la Tierra, en la dirección apropiada (la posición de los puntos L4 y L5 se puede deducir fácilmente). En los casos inestables, ¿cómo de “rápida” o “lenta” es la inestabilidad? (usar el tiempo doble, el tiempo que tardaría una condición inicial en duplicarse).
5. Un vehículo espacial se encuentra en las proximidades de una estación espacial que orbita la Tierra siguiendo una órbita circular con un radio de 7000 kilómetros. La posición del vehículo espacial, en el sistema de referencia LVLH, es $\vec{r}_0 = [0,1 \ 0,2 \ 0]^T [\text{km}]$ y su velocidad inicial $\vec{v}_0 = [0 \ -0,001 \ 0]^T [\text{km/s}]$. Recordando que la solución de las ecuaciones HCW es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3C & 0 & 0 & \frac{S}{n} & \frac{2(1-C)}{n} & 0 \\ 6S-6nt & 1 & 0 & \frac{2C-2}{n} & \frac{4S-3nt}{n} & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & \frac{S}{n} \\ 3nS & 0 & 0 & C & 2S & 0 \\ 6nC-6n & 0 & 0 & -2S & 4C-3 & 0 \\ 0 & 0 & -Sn & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}$$

donde se ha escrito $C = \cos nt$, $S = \sin nt$, siendo $n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R^3}}$, se pide:

- a) Describir la maniobra $\Delta \vec{v}$ más económica (de menor módulo) que de forma instantánea llevaría al vehículo a una órbita periódica en torno al blanco. ¿Cuál es el periodo de la órbita?
- b) Dibujar de forma justificada en el plano x-y dicha órbita periódica, marcando el sentido en el que se recorre.

Solución a las cuestiones 1,2,4,5

1. En primer lugar calculamos la actitud inicial. Del tema 1 sabemos que el magnetómetro es un sensor menos preciso que un sensor digital de aspecto solar. Vamos a utilizar el método TRIAD ya que no se proporcionan las matrices para el método Q, utilizando la segunda medida en primer lugar. Tendríamos:

$$\vec{r}_1 = \vec{v}_S^I = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{v}_M^I}{|\vec{r}_1 \times \vec{v}_M^I|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Igualmente

$$\vec{s}_1 = \vec{v}_S^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \frac{\vec{s}_1 \times \vec{v}_M^B}{|\vec{s}_1 \times \vec{v}_M^B|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_3 = \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$M_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad M_{obs} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

llegando a:

$$A = M_{obs} M_{ref}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que esta matriz transforma las referencias en las observaciones sin error. Además se puede constatar que esta matriz representa un giro de -30° en torno al eje x. Puesto que la actitud deseada consta primero de un giro de 30° en torno al eje x y luego de un giro de -60° en torno al eje y, está claro que para pasar de una a

otra, necesitaremos un giro de 60° en torno al eje x y luego de un giro de -60° en torno al eje y (si no se ve claro también se puede hacer con los métodos de siempre). El cuaternión que representa esta secuencia es:

$$q_{rot} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto el ángulo de Euler es $\theta = 2 \arccos \frac{3}{4} = 82,82^\circ$, como $\sin^2 \theta/2 + \cos^2 \theta/2 = 1$, se tiene $\sin^2 \theta/2 = 1 - 9/16 = 7/16$, luego $\sin \theta/2 = \sqrt{7}/4$, y $\vec{e} = \frac{\vec{q}}{\sin \theta/2} = \frac{1}{4} \frac{4}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} \sqrt{21} \\ -\sqrt{21} \\ -\sqrt{7} \end{bmatrix}$.

Finalmente, la velocidad angular pedida será, pues:

$$\vec{\omega} = \frac{6\theta}{T^3} t(T-t) \vec{e} = 3,4416 \cdot 10^{-6} t \left(1 - \frac{t}{600}\right) \begin{bmatrix} \sqrt{21} \\ -\sqrt{21} \\ -\sqrt{7} \end{bmatrix} \text{ rad/s}$$

Hay otras posibilidades, siempre que la dirección vaya de acuerdo al eje de Euler, se cumpla que $\vec{\omega}(0) = \vec{\omega}(T) = \vec{0}$ y que la integral del módulo de la velocidad angular entre 0 y T sea igual a θ , se trata de una solución válida.

2. Recordemos que bajo estas condiciones (ecuaciones desacopladas) la solución que obtenemos es $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \frac{u}{I}(t-t_0)$ y $\theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t-t_0) + \frac{u}{2I}(t-t_0)^2$. Si no hubiera propulsión entonces la solución es $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ y $\theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t-t_0)$. Si hubiera, se puede eliminar el tiempo, $t - t_0 = \frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\frac{u}{I}}$, y obtenemos

$$\theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0 \frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\frac{u}{I}} + \frac{u}{2I} \left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\frac{u}{I}} \right)^2 = \theta_0 + \frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\frac{u}{I}} \left(\dot{\theta}_0 + \frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{2} \right) = \theta_0 + \frac{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2}{2 \frac{u}{I}}$$

Si queremos llegar al origen en un tiempo T gastando el menor combustible, y en las condiciones del enunciado, en primer lugar habrá que aplicar el control mínimo hasta llegar a un cierto valor de $\dot{\theta} = -\delta$ (rama 1, durante un tiempo t_1), luego dejar que el ángulo disminuya lentamente sin control (rama 2, durante un tiempo t_2), y finalmente aplicar el control máximo hasta llegar al origen (rama 3, durante un tiempo t_3). Llamando θ_1 al valor del ángulo al final de la rama 1, y θ_2 al valor del ángulo al final de la rama 2, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 - \frac{\delta^2}{2 \frac{u_{max}}{I}}, \\ t_1 &= \frac{\delta}{\frac{u_{max}}{I}}, \\ \theta_2 &= \theta_1 - \delta t_2, \\ 0 &= \theta_2 - \frac{\delta^2}{2 \frac{u_{max}}{I}}, \\ t_3 &= \frac{\delta}{\frac{u_{max}}{I}}, \end{aligned}$$

Como $T = t_1 + t_2 + t_3$, obtenemos:

$$T = \frac{\delta}{\frac{u_{max}}{I}} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\delta} + \frac{\delta}{\frac{u_{max}}{I}} = \frac{2\delta}{\frac{u_{max}}{I}} + \frac{\theta_0 - \frac{\delta^2}{2 \frac{u_{max}}{I}} - \frac{\delta^2}{2 \frac{u_{max}}{I}}}{\delta} = \frac{2\delta}{\frac{u_{max}}{I}} + \frac{\theta_0}{\delta} - \frac{\delta}{\frac{u_{max}}{I}} = \frac{\delta}{\frac{u_{max}}{I}} + \frac{\theta_0}{\delta}$$

De esta ecuación se despejaría el valor de δ necesario para llevar a cabo la maniobra, ya que todo lo demás es conocido. El tiempo que los actuadores están activos es $t_1 + t_3$, es decir:

$$t_1 + t_3 = \frac{2\delta}{\frac{u_{max}}{I}}$$

La maniobra de tiempo mínimo se da cuando $t_2 = 0$, es decir, en ningún momento se apagan los actuadores. De la expresión que obtuvimos de t_2 :

$$t_2 = \frac{\theta_0 - \frac{\delta^2}{2 \frac{u_{max}}{I}} - \frac{\delta^2}{2 \frac{u_{max}}{I}}}{\delta} = 0 \rightarrow \theta_0 - \frac{\delta^2}{\frac{u_{max}}{I}} = 0 \rightarrow \delta = \sqrt{\theta_0 \frac{u_{max}}{I}}$$

y por tanto el tiempo mínimo es:

$$T_{min} = t_1 + t_3 = \frac{2\delta}{\frac{u_{max}}{I}} = 2\sqrt{\frac{\theta_0}{\frac{u_{max}}{I}}}$$

Con los datos del enunciado, $T_{min} = 1,8683$ s. Si usamos el doble del tiempo mínimo, entonces tenemos que despejar δ de la ecuación $2T_{min} = \frac{\delta}{\frac{u_{max}}{I}} + \frac{\theta_0}{\delta}$, que transformamos en $\delta^2 \frac{1}{\frac{u_{max}}{I}} - 2T_{min}\delta + \theta_0 = 0$, luego

$$\delta = \left(T_{min} \pm \sqrt{T_{min}^2 - \frac{\theta_0}{\frac{u_{max}}{I}}} \right) \frac{u_{max}}{I} = \left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{\frac{u_{max}}{I}}} \pm \sqrt{3\frac{\theta_0}{\frac{u_{max}}{I}}} \right) \frac{u_{max}}{I} = (2 \pm \sqrt{3})\sqrt{\theta_0 \frac{u_{max}}{I}}$$

Las dos soluciones que se obtienen son 0,3486 rad/s y 0,025 rad/s. Se puede comprobar que la primera solución no es correcta, ya que el tiempo de propulsión saldría $t_1 + t_3 = \frac{2\delta}{\frac{u_{max}}{I}} = 6,9727$ s es superior al tiempo establecido para la maniobra (2 veces el tiempo mínimo). La otra solución es la correcta, dando un tiempo de maniobra igual a $t_1 + t_3 = 0,5$ s, lo cual si tiene sentido.

3. Cuestión teórica.

- La primera parte de la cuestión es teórica, luego sólo se explica en detalle el segundo apartado. Tras todos los pasos de la primera parte se deduce que la condición es, para los puntos colineales, que $\sigma^2 \in [8/9, 1]$, donde $\sigma^2 = \frac{\mu_1}{(r_1^*)^3} + \frac{\mu_2}{(r_2^*)^3}$. Para los no colineales, la condición es $|2\mu_1 - 1| > \sqrt{23/27}$ (hay otras formas equivalentes). Todos estos valores son adimensionales. Calculamos algunas de las constantes adimensionales: $\mu_1 = \frac{\mu_{\oplus}}{\mu_{\oplus} + \mu_{\zeta}} = 0,9878$, y por tanto $|2\mu_1 - 1| = 0,9757 > 0,9230 = \sqrt{23/27}$, luego los puntos L4 y L5 son matemáticamente estables (marginalmente). Por otro lado, $\mu_2 = 1 - \mu_1 = 0,0122$. Para todos los puntos colineales, r_1^* es la distancia a la Tierra dividida por la distancia Tierra-Luna. Por tanto, para el punto L1, $r_1^*(L1) = \frac{326400}{384400} = 0,8491$. Luego $r_2^*(L1) = 1 - r_1^*(L1) = 0,1509$. Igualmente, para el punto L2, $r_1^*(L2) = \frac{449100}{384400} = 1,1683$. Luego $r_2^*(L2) = r_1^*(L1) - 1 = 0,1683$. Finalmente, para el punto L3, $r_1^*(L3) = \frac{381600}{384400} = 0,9927$. Luego $r_2^*(L3) = 1 + r_1^*(L1) = 1,9927$. Por lo que encontramos $\sigma^2(L1) = 5,1508$, $\sigma^2(L2) = 3,1677$, $\sigma^2(L3) = 1,0113$. Ninguno de estos números está dentro del margen para la estabilidad, por lo que son claramente inestables.
- Sabemos que la única condición necesaria para que una órbita sea periódica es que $x_0 = -\frac{\dot{y}_0}{2n}$, o lo que es lo mismo, $\dot{y}_0 = -2nx_0$. Por tanto, la maniobra más pequeña que nos llevará instantáneamente a una órbita periódica lo único que debe hacer es manipular la velocidad $\dot{y}$ para que se ajuste al anterior valor. Puesto $\dot{y}_0^- = -0,001$ km/s y necesitamos $\dot{y}_0^+ = -2nx_0 = -0,00022$ km/s, donde se ha calculado $n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r^3}} = 0,0011$ rad/s, obtenemos $\Delta\vec{V} = [0 \ 0,00078 \ 0]^T$ km/s. Esa maniobra de forma instantánea cancelará los términos inestables, quedando sólo senos y cosenos con frecuencia n , y por tanto una órbita periódica con periodo $T = \frac{2\pi}{n} = 5828,5$ s = 97,15 min. Para dibujar la órbita resultante en el plano $x-y$, sustituimos las condiciones iniciales distintas de cero y recordamos que tras la maniobra $\dot{y}_0^+ = -2nx_0$, obteniendo:

$$\begin{aligned} x &= (4 - 3C)x_0 + \frac{2(1 - C)}{n}(-2nx_0) = x_0 \cos nt \\ y &= 6Sx_0 + y_0 + \frac{4S}{n}(-2nx_0) = -2x_0 \sin nt + y_0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{(y-y_0)^2}{4x_0^2} = 1$. Por tanto se trata de una elipse con sus semiejes alineados con los ejes x e y , centrada en $x = 0, y = y_0$, de semiejes x_0 en la dirección x (menor) y $2x_0$ en la dirección y (mayor).

Ingenieros Aeronáuticos	Nº DNI _____	Curso 13/14
Escuela Superior de Ingenieros	1 ^{er} Apellido _____	11/04/14
	2 ^{do} Apellido _____	
Universidad de Sevilla	Nombre _____	Cuestiones

Puntuación total: 10 puntos.**1. (1.5 puntos)** Responder a las siguientes cuestiones teóricas

a) Definir brevemente los siguientes conceptos (máximo 4 líneas para cada concepto):

- 1) Sistema de Control de Reacción.
- 2) Disipador de nutación.
- 3) Giróscopos de control de momento (CMG).
- 4) Cuerpo prolato.
- 5) Rigidez giroscópica.

b) Describir brevemente pero con precisión qué métodos, actuadores y sensores sería razonable utilizar para ADCS (determinación y control de la actitud) en las siguientes misiones:

- 1) Un pequeño satélite de bajo coste en órbita baja con forma de cubo (CubeSat).
- 2) Un satélite cartográfico en órbita heliosíncrona (baja) que requiere altas precisiones y maniobras rápidas.
- 3) Una sonda interplanetaria durante la fase heliocéntrica de su trayectoria.
- 4) Un satélite geoestacionario para observación del clima terrestre, sin requisitos estrictos de precisión, que no requiere maniobras, y cuya vida se pretende maximizar.
- 5) Un vehículo lanzador en la fase final del lanzamiento (desde capas muy elevadas de la atmósfera hasta desplegar la carga útil en órbita baja).

2. (2.5 puntos) Responder a las siguientes preguntas sobre cinemática de actitud

a) Definir esquemáticamente la secuencia de ángulos de Euler 2-3-2, denotando el primer giro como θ_1 , el segundo como θ_2 y el tercero como θ_3 . Deducir de forma razonada las ecuaciones diferenciales cinemáticas (no es necesario invertir la matriz en el último paso, se puede dejar indicada). ¿Cuál es la singularidad o singularidades de esta secuencia?

b) Supongamos que un cuerpo tiene una actitud inicial, descrita usando la secuencia estudiada en el anterior apartado y dada por $(\theta_1 = 60^\circ, \theta_2 = 90^\circ, \theta_3 = 0^\circ)$, y se desea que llegue a una actitud final dada por $(\theta_1 = 180^\circ, \theta_2 = -60^\circ, \theta_3 = 0^\circ)$. Suponiendo que se desea realizar esta transición en un periodo T de diez minutos, encontrar una velocidad angular $\vec{\omega}(t)$ (en ejes cuerpo) que sea capaz de realizar el giro y con la condición adicional de que $\vec{\omega}(0) = \vec{\omega}(T) = \vec{0}$, es decir, la velocidad angular deberá ser nula al principio y al final de la maniobra.

c) Recordando las ecuaciones de Euler

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = M_3$$

y suponiendo momentos de inercia I_1, I_2, I_3 diferentes entre sí y que se puede ejercer el par $\vec{M} = [M_1 \ M_2 \ M_3]^T$ que se desee, ¿qué par $\vec{M}$ serviría para llevar a cabo la maniobra descrita? ¿Cómo habría que modificar el apartado anterior para que los pares sean nulos al principio y al final de la maniobra, es decir $\vec{M}(0) = \vec{M}(T) = \vec{0}$?

3. (2 puntos) Sea un satélite rígido sin pares externos y con velocidad angular $\vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$, donde ω_i son las componentes de la velocidad angular del satélite en ejes cuerpo, y con momentos de inercia I_i (en ejes principales). Además se tiene que $I_1 > I_2 > I_3$.

- a) Enunciar y justificar la regla del eje mayor cuando existe disipación de energía.
- b) ¿Sería posible estabilizar el vehículo (con disipación de energía) rotando en torno al **eje intermedio**, si se añade un volante de inercia con inercia I_R y velocidad angular ω_R que se puede suponer constante? Encontrar las condiciones que se deben verificar. Para ello se recable el siguiente resultado matemático:

Teorema: Sea $F(x, y, z)$ una función a minimizar sujeta a la restricción $G(x, y, z) = 0$. Sea $L(x, y, z) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$ el Lagrangiano del sistema de forma que x^*, y^*, z^*, λ^* es un punto crítico (que hace las primeras derivadas parciales de L cero) donde se quiere investigar si hay un mínimo. Si se cumplen las condiciones:

- $\frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) \neq 0$
- $\text{Det}(H_3(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$
- $\text{Det}(H_4(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$

entonces se tiene un mínimo en el punto crítico, donde H_3 y H_4 son las matrices:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$

4. (1 punto) Para un vehículo espacial en órbita cuyo centro de gravedad se encuentra a una distancia $\vec{R}_c$ de un cuerpo masivo (con parámetro gravitatorio μ), y sabiendo que el tensor de inercia del vehículo es $\mathcal{I}$, encontrar razonadamente una expresión lo más exacta posible del par $\vec{M}$ (respecto al centro de gravedad del vehículo) debido al gradiente gravitatorio experimentado por el vehículo (no es necesario expresar $\vec{M}$ en ninguna base, simplemente encontrar una fórmula vectorial). Puede ser útil recordar las siguientes expresiones:

- Si $|\vec{B}| \ll |\vec{A}|$, se cumple $|\vec{A} + \vec{B}|^n \approx |\vec{A}|^n + n|\vec{A}|^{n-2}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.
- Ley de gravitación universal para un cuerpo de masa m a distancia $\vec{r}$ de un cuerpo masivo con parámetro gravitatorio μ : $\vec{F} = -\frac{\mu m}{r^3} \vec{r}$, donde $r = |\vec{r}|$.
- Definición del tensor de inercia: $\mathcal{I} = \int_V ([\vec{\rho}^T \vec{\rho}] \text{Id} - \vec{\rho} \vec{\rho}^T) dm$ donde $\vec{\rho}$ es la distancia de cada partícula de masa dm al centro de gravedad del vehículo (integral extendida al volumen completo V del vehículo).

5. (1 punto) Describir la formulación del algoritmo Q (cuántas medidas son necesarias, qué función de coste se emplea, etc...). Una vez formulado, no es necesario describir los pasos intermedios, sino que se puede usar el hecho de que, expresando la actitud como un cuaternión q y tras realizar diversas manipulaciones algebraicas, se llega a una formulación $J = q^T K q$, donde K es una matriz 4x4 que depende de las medidas y los pesos elegidos para ponderarlas entre sí, y J es una función de coste que hay que maximizar. Supuesta conocida K , concluir la pregunta **de forma razonada** encontrando el cuaternión de actitud que maximiza J .

6. (2 puntos) Describir el mecanismo yo-yo y su utilidad. Describir las hipótesis habitualmente utilizadas para estudiar la dinámica del mecanismo. Recordando que la energía cinética inicial es $T_0 = \frac{1}{2} m R^2 K n_0^2$ y el módulo del momento cinético inicial es $\Gamma_0 = m R^2 K n_0$, donde $K = 1 + \frac{I_3}{m R^2}$, I_3 el momento inercia en torno al eje de simetría del vehículo, R el radio del vehículo en el plano perpendicular al eje de simetría, m la masa y n_0 la velocidad angular inicial, y que cuando se desenrolla un ángulo ϕ de cable del mecanismo se obtiene que $T = \frac{m R^2}{2} (K n^2 + (\dot{\phi} + n)^2 \phi^2)$ y $\Gamma = m R^2 (K n + (n + \dot{\phi}) \phi^2)$, donde n es la velocidad angular del vehículo, deducir de forma razonada el valor de $\dot{\phi}$, los posibles valores finales de la velocidad angular, y la longitud de cable que es necesario desenrollar para obtener dichos valores de velocidad angular, así como el tiempo final t_f que se tarda en alcanzar la velocidad deseada.

Partiendo de los resultados anteriores, expresar la velocidad angular del vehículo como función del tiempo, $n(t)$. Calcular la aceleración angular $\alpha(t) = \dot{n}$. Encontrar la tensión en los cables T relacionando la aceleración angular con el par que los cables transmiten al vehículo.

En particular, para un vehículo tal que $I_3 = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m = 4 \text{ kg}$, $R = 1 \text{ m}$, $n_0 = 75 \text{ rpm}$, ¿qué longitud de cable será necesaria para detener totalmente el vehículo y cuánto tiempo se tardará en hacerlo? ¿Cuál será la tensión máxima que los cables tendrán que soportar?

Solución

1. Cuestión teórica.

- a) Las respuestas se obtienen directas de teoría.
- b) Existen varias posibles respuestas válidas, pero las siguientes serían correctas:
 - 1) Un pequeño satélite de bajo coste en órbita baja con forma de cubo (CubeSat). Estabilización por momentos magnéticos. Serían necesarios magnetopares y magnetómetro. Como sensores adicionales se sugieren giróscopos electrónicos de bajo coste.
 - 2) Un satélite cartográfico en órbita heliosíncrona (baja) que requiere altas precisiones y maniobras rápidas. Debe estar estabilizado en sus tres ejes. Para conseguir maniobras rápidas y precisas se sugiere el uso de CMGs (control moment gyros). Como sensores se podrían usar sensores digitales de aspecto solar y star trackers. El uso de magnetopares adicionales sería recomendable puesto que permitiría eliminar momento cinético acumulado sin necesidad de usar combustible.
 - 3) Una sonda interplanetaria durante la fase heliocéntrica de su trayectoria. Sistema estabilizado por rotación, sin mayores requisitos, rotando en torno al eje mayor. Se podría instalar un disipador de nutación para aumentar la estabilidad del sistema. Para detener la rotación se puede utilizar propulsión o un sistema yo-yo. Para maniobrar la posición del eje de giro, maniobras de “coning”, para lo cual sería necesario tener toberas y un sistema RCS asociado. Serían necesarios sensores precisos (por ejemplo star trackers) para adquirir la actitud una vez llegado al destino, pero durante la fase heliocéntrica es suficiente con tener giróscopos de bajo coste y sensores de radiación solar.
 - 4) Un satélite geoestacionario para observación del clima terrestre, sin requisitos estrictos de precisión, que no requiere maniobras, y cuya vida se pretende maximizar. Estabilización por gradientes gravitatorios. El uso de mástiles desplegados permitiría aumentar la diferencia entre las inercias de los ejes aumentando el efecto del gradiente gravitatorio. Adicionalmente se puede instalar un volante de inercia para mejorar la estabilidad en guiñada. Como sensores típicamente se usarían sensores de radiación solar, de horizonte terrestre, y giróscopos electrónicos.
 - 5) Un vehículo lanzador en la fase final del lanzamiento (desde capas muy elevadas de la atmósfera hasta desplegar la carga útil en órbita baja). Estabilizado por rotación en torno al eje menor. Sin necesidad de actuadores o sensores adicionales ya que es una fase muy corta, aunque el vehículo lanzador típicamente tendrá un sistema de navegación inercial, GPS, y toberas.

2. Cinemática de actitud:

- a) Pregunta teórica. La singularidad se encuentra en $\theta_2 = 0^\circ, 180^\circ$.
- b) Para responder esta pregunta, llamemos q_0 a la actitud inicial y q_1 a la actitud final. Llamemos q_R a la actitud entre el perfil inicial y el final, como se vio en teoría $q_R = q_0^* \star q_1$. Calculando estos cuaterniones:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) \star \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + i\sqrt{2} + j\sqrt{2} + k\sqrt{6}) \\
 q_1 &= j \star \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - k\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (j\sqrt{3} - i) \\
 q_R &= \frac{1}{8} (\sqrt{6} - i\sqrt{2} - j\sqrt{2} - k\sqrt{6}) \star (j\sqrt{3} - i) \\
 &= \frac{1}{8} ((\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{18} - \sqrt{6}) + j(\sqrt{18} + \sqrt{6}) + k(-\sqrt{6} - \sqrt{2})) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{8} ((\sqrt{3} - 1) + i(3 - \sqrt{3}) + j(3 + \sqrt{3}) + k(-\sqrt{3} - 1))
 \end{aligned}$$

Observando el cuaternión de rotación, para obtener la velocidad angular hay que extraer el eje y ángulo de Euler. Puesto que la parte escalar es $q_{R0} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{8} = \cos \theta/2$, obtenemos $\theta = 165,13^\circ$. Por tanto:

$$\vec{e} = \frac{1}{\sin \theta/2} \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,226 \\ 0,8436 \\ -0,4871 \end{bmatrix}$$

Como velocidad angular elegimos

$$\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0,226 \\ 0,8436 \\ -0,4871 \end{bmatrix} \omega(t)$$

donde $\omega(t)$ debe verificar: $\omega(0) = \omega(T) = 0$, $\int_0^T \omega(\tau) d\tau = \theta$. Tomamos por ejemplo una función parabólica $\omega(t) = Ct(T-t)$ que verifica las restricciones inicial y final, e integrando, obtenemos $C\left(\frac{T^3}{2} - \frac{T^3}{3}\right) = \theta$, de donde $\omega(t) = t(T-t)\frac{6\theta}{T^3}$, luego:

$$\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0,226 \\ 0,8436 \\ -0,4871 \end{bmatrix} t(T-t)\frac{6\theta}{T^3}$$

c) Para obtener el par simplemente sustituimos las componentes, encontrando:

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 e_1 \dot{\omega} + (I_3 - I_2) \omega^2 e_2 e_3, \\ M_2 &= I_2 e_2 \dot{\omega} + (I_3 - I_2) \omega^2 e_3 e_1, \\ M_3 &= I_3 e_3 \dot{\omega} + (I_3 - I_2) \omega^2 e_1 e_2, \end{aligned}$$

así por ejemplo $M_1 = I_1 e_1 (T-2t)\frac{6\theta}{T^3} + (I_3 - I_2) e_2 e_3 t^2 (T-t)^2 \frac{36\theta^2}{T^6}$. Para que el par fuera cero al principio y al final, escogemos la misma función $\omega(t)$ pero elevada al cuadrado, es decir, $\omega(t) = Ct^2(T-t)^2$, de esa forma su derivada es también cero al principio y al final. Calculando la integral obtenemos ahora $CT^5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \theta$, de donde $\omega(t) = t^2(T-t)^2 \frac{30\theta}{T^5}$, luego:

$$\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0,226 \\ 0,8436 \\ -0,4871 \end{bmatrix} t^2(T-t)^2 \frac{30\theta}{T^5}$$

y calculando por ejemplo $M_1 = I_1 e_1 2t(T-t)(T-2t)\frac{30\theta}{T^5} + (I_3 - I_2) e_2 e_3 t^4 (T-t)^4 \frac{900\theta^2}{T^{10}}$. Se verifica claramente que es cero al principio y al final de la maniobra.

3. Pregunta teórica, la segunda parte es exactamente igual que en teoría pero hay que sustituir el eje 3 por el 2.
4. Pregunta teórica, es necesario explicar bien por qué se cancelan las integrales que lo hacen.
5. Pregunta teórica.
6. La primera parte es teórica, llegando (con los pasos explicados en teoría) a $\dot{\phi} = n_0$, y la ecuación $\phi = \sqrt{K \frac{n_0 - n}{n_0 + n}}$. Resolviendo para ϕ : $\phi(t) = n_0 t$. Para obtener $n = 0$ necesitamos desenrollar una cantidad de cable tal que $\phi = \sqrt{K}$, lo que tardará un tiempo $t = \frac{\sqrt{K}}{n_0}$. Por otro lado despejando n en la segunda ecuación:

$$n(t) = \frac{K - \phi^2(t)}{K + \phi^2(t)} n_0 = \frac{K - n_0^2 t^2}{K + n_0^2 t^2} n_0$$

Por tanto:

$$\alpha(t) = \dot{n}(t) = \frac{-2n_0^2 t (K + n_0^2 t^2) - 2n_0^2 t (K - n_0^2 t^2)}{(K + n_0^2 t^2)^2} n_0 = \frac{-4n_0^3 t K}{(K + n_0^2 t^2)^2}$$

Teniendo en cuenta que $n = \omega_3$ en las ecuaciones de Euler y que las otras velocidades angulares son cero, encontraríamos $I_3 \dot{n} = M_3$, donde M_3 es el par ejercido en el eje 3 por los cables. Puesto que el par es el brazo por la fuerza (al ser esta tangente), obtendríamos $I_3 \dot{n} = -2RT$, de donde:

$$T = I_3 \frac{2n_0^3 t K}{R(K + n_0^2 t^2)^2}$$

El par máximo se encuentra derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dT}{dt} = I_3 \frac{2n_0^3 K (K + n_0^2 t^2)^2 - 4n_0^2 t (K + n_0^2 t^2) 2n_0^3 t K}{R(K + n_0^2 t^2)^4} = 2I_3 n_0^3 K \frac{K - 3n_0^2 t^2}{R(K + n_0^2 t^2)^3}$$

Igualando a cero, obtenemos que el tiempo en el que se produce el mínimo es tal que $K - n_0^2 t^2 = 0$, es decir, $t = \frac{\sqrt{K}}{n_0 \sqrt{3}}$, lo que sucede antes de que el cable esté totalmente desenrollado. Por tanto:

$$T_{max} = I_3 \frac{2n_0^3 \frac{\sqrt{K}}{n_0 \sqrt{3}} K}{R(K + n_0^2 \frac{K}{3n_0^2})^2} = I_3 \frac{2n_0^2 \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{3}}}{RK(1 + \frac{1}{3})^2} = \frac{3\sqrt{3} I_3 n_0^2}{8R\sqrt{K}}$$

En particular, con los datos del problema, $K = 1 + \frac{I_3}{mR^2} = 51$, la longitud de cable es $l = R\sqrt{K} = 7,14$ m, el tiempo sería $t = 0,9$ s, y la tensión máxima sería $T_{max} = 1122$ N.

Ingenieros Aeronáuticos	N ^o DNI _____	Curso 11/12
Escuela Superior de Ingenieros	1 ^{er} Apellido _____	21/06/12
	2 ^{do} Apellido _____	
Universidad de Sevilla	Nombre _____	Test y cuestiones

Test—Valor total:30 %.

Una sola respuesta correcta por pregunta. Las respuestas incorrectas restan 1/2 del valor de la pregunta.

- En las últimas etapas de los vehículos lanzadores, y para un vehículo lanzador típico, con forma fuselada y alargada (como un misil):
 - Se puede estabilizar el vehículo lanzador haciéndolo rotar en torno a su eje mayor.
 - Se puede estabilizar el vehículo lanzador haciéndolo rotar en torno a su eje menor.
 - Se emplea un mecanismo yo-yo para disminuir los errores causados por una alineación no perfecta entre la dirección deseada de propulsión y la fuerza propulsiva real.
- La actitud estable de un cuerpo rígido en órbita circular es:
 - Con el eje intermedio apuntando a la Tierra y el eje menor perpendicular a la órbita.
 - Con el eje intermedio apuntando a la Tierra y el eje mayor perpendicular a la órbita.
 - Con el eje intermedio en la dirección de la órbita y el eje mayor perpendicular a la órbita.
- Supongamos que tenemos n sensores independientes que calculan la dirección en la que se encuentra cierto objeto estelar (el Sol, estrellas, etc...). ¿Qué valor mínimo debe tener n para que una estimación de la actitud se pueda determinar?
 - 2.
 - 3.
 - Depende de la precisión de los sensores.
- Un satélite (sin partes móviles pero con disipación de energía debida a efectos de flexibilidad) con matriz de inercia en ejes cuerpo principales tal que $I_1 = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_2 = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_3 = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ se encuentra rotando a una velocidad angular cuyo valor expresado en dichos ejes es $\omega = [2, 0, -8]^T \text{ rad/s}$. Transcurrido un periodo de tiempo suficientemente largo, su velocidad se estabiliza en cierto valor. ¿Cuál de los siguientes valores podría ser dicho resultado final?
 - $\omega = [0, 1, 0]^T \text{ rad/s}$
 - $\omega = [0, -2, 0]^T \text{ rad/s}$
 - $\omega = [0, -6, 0]^T \text{ rad/s}$
- Para estimar la actitud de un satélite usando un filtro de Kalman es necesario al menos:
 - 3 giróscopos independientes y 1 sensor de dirección.
 - 3 giróscopos independientes y 2 sensores de dirección.
 - Al menos un giróscopo y un sensor.
- Dada una cierta actitud:
 - Existe un único cuaternión q que representa dicha actitud.
 - Existe un único cuaternión q , con $\|q\| = 1$ que representa dicha actitud.
 - Existen dos cuaterniones q_1 y q_2 , con $\|q_1\| = \|q_2\| = 1$, que representan dicha actitud.

7. ¿Qué superpotencia desarrolló inicialmente la tecnología de rendezvous espacial de forma manual?
- Estados Unidos.
 - La Unión Soviética.
 - Tanto Estados Unidos como la Unión Soviética.
8. Para una esfera maciza en órbita a 1000 kilómetros de altitud, ¿cuál de los siguientes acabados superficiales provocaría que la esfera se encontrara a mayor temperatura?
- Pintura de oro.
 - Pintura negra.
 - Pintura blanca.
9. ¿Cuál de los siguientes sistemas de potencia sería más recomendable elegir como primario en una misión a Júpiter?
- RTG.
 - Paneles solares.
 - Células de combustible.
10. ¿Qué sistema de potencia primario sería óptimo para una misión tripulada a la Luna, en la que se pretende permanecer en la Luna una semana y después regresar a la Tierra?
- Paneles solares.
 - Células de combustible.
 - RTG.
11. ¿Cuál es el mecanismo de transmisión de calor dominante para un vehículo espacial en órbita?
- Conducción.
 - Convección.
 - Radiación.
12. ¿En qué consiste un dispositivo del tipo heat pipes/pipe tubes?
- Un circuito de convección forzada con algún tipo de gas, como por ejemplo Freón.
 - Un circuito de convección con cambio de fase con algún tipo de líquido que se evapora y luego vuelve a condensar.
 - Un circuito con un sólido con capacidad de cambio de fase a temperaturas similares a las internas del satélite, como por ejemplo parafina.
13. El “baking out”:
- Es el proceso por el cual muchos materiales modifican su masa y/o sus propiedades debido a que los gases adsorbidos en capas exteriores son liberados.
 - Es el proceso por el cual en muchos materiales se produce abrasión, descamación o incluso soldadura, debido a que el oxígeno adsorbido en capas exteriores se libera.
 - Es un procedimiento de calentamiento al vacío que prepara los materiales para que sean más resistentes al vacío espacial.
14. ¿Cuál de los siguientes sistemas de estabilización de la actitud sería más recomendable para un satélite de larga vida (10 o más años) en órbita geoestacionaria?
- Estabilización por rotación.
 - Estabilización por gradiente gravitatorio.
 - Estabilización mediante volante de inercia.
15. ¿Se puede utilizar el GPS para determinar la actitud de un vehículo espacial?
- Sí, pero sólo para vehículos en LEO.
 - No.
 - Sí, para vehículos en altitudes desde LEO hasta GEO.

Cuestiones—Valor total:70 %.

1. Describir brevemente los diferentes sistemas de representación de actitud y explicar sus ventajas y desventajas.
2. Para el conjunto de ángulos de Euler 3-1-3, encontrar las ecuaciones diferenciales cinemáticas.
3. Dadas dos medidas independientes de sensores en el sistema de referencia B (ejes cuerpo), denotadas como $\vec{W}_1$ y $\vec{W}_2$, de dos direcciones conocidas en el sistema de referencia A (inercial), denotadas como $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, encontrar la matriz C_A^B mediante el algoritmo TRIAD.
4. Deducir las ecuaciones del movimiento relativo entre dos cuerpos, bajo las hipótesis habituales (ecuaciones HCW del problema de Rendezvous) que deberán ser descritas.
5. Deducir la expresión del par causado por el gradiente gravitatorio para un cuerpo en órbita circular, en función del tensor de inercia $\mathcal{I}$, el vector posición del centro de gravedad del cuerpo $\vec{R}_c$, y el parámetro gravitatorio μ .
6. Sea un satélite rígido con momentos de inercia I_i (en ejes principales) tales que $I_1 > I_3 > I > I_2$ y con un volante de inercia (de inercia I_R) rotando con velocidad angular ω_R en torno al eje intermedio del satélite (de forma que lo estabiliza). Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 - I_R \omega_R \omega_2 + M_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + I_R \omega_R \omega_1 + M_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_3, \end{aligned}$$

Estudiar la estabilidad del sistema libre ($M_1 = M_2 = M_3 = 0$) con y sin volante de inercia, rotando en torno al eje 3 con velocidad n . ¿A qué velocidad tendría que rotar el volante para estabilizar el sistema?