1. Notas Filtro de Kalman para Sistemas continuos-discretos

Se considera un sistema continuo-discreto como aquel cuya evolución es continua en el tiempo (representada por ecuaciones diferenciales ordinarias) pero del cual se obtienen medidas cada cierto intervalo temporal (por lo cual el proceso de medida se representa en tiempo discreto). Estos sistemas son típicos en ingeniería (y más concretamente en navegación), donde muchos procesos (trayectorias) están representados por ecuaciones diferenciales continuas, pero se tienen sistemas de medida con ancho de banda limitado.

1.1. Caso lineal

El modelo general para el caso lineal es:

$$\dot{x} = F(t)x + B(t)u + G(t)w, \tag{1}$$

donde x es el estado, u la variable de entrada al sistema (supuesta conocida para el problema de estimación, que para el caso de la navegación inercial va a representar las medidas de los giróscopos), y w es una perturbación, modelada como ruido blanco, es decir: $E[w(t)] = 0$, $E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$, donde $E[\cdot]$ representa la esperanza matemática y δ es la delta de Dirac. En principio, estado, entrada y perturbación podrían ser de diferente dimensión. En la ecuación, F, B y G son matrices de la dimensión adecuada.

El modelo de medida es

$$y_k = H_k x_k + v_k, \tag{2}$$

donde el subíndice k se refiere al instante de tiempo discreto t_k en el cual se realiza la medida (es decir, para $t \in [t_k, t_{k+1}]$ no se realiza medida alguna). La variable y_k representa el valor de la medida en el instante k, $x_k = x(t_k)$, H_k es una matriz de dimensión adecuada, y v_k es ruido blanco discreto, es decir, $E[v_k] = 0$, $E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}$.

Además se tiene que el ruido de medida es independiente del ruido del sistema, es decir, $E[v_k w(t)] = 0$ para todo k y todo t.

1.2. Caso no lineal

El modelo no lineal se escribiría, en general, como:

$$\dot{x} = f(x, u, t) + G(t)w(t), \tag{3}$$

donde x es el estado, u representa la entrada al sistema y w es una perturbación, modelada como ruido blanco, es decir: $E[w(t)] = 0$, $E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$, donde $E[\cdot]$ representa la esperanza matemática y δ es la delta de Dirac. En principio, estado, entrada y perturbación podrían ser de diferente dimensión. En la ecuación, f es una función y G es una matriz, de la dimensión adecuada.

El modelo de medida es

$$y_k = h(x_k, t_k) + v_k, \tag{4}$$

donde el subíndice k se refiere al instante de tiempo discreto t_k en el cual se realiza la medida (es decir, para $t \in [t_k, t_{k+1}]$ no se realiza medida alguna). La variable y_k representa el valor de la medida en el instante k, $x_k = x(t_k)$, h es una función no lineal de la dimensión adecuada, y v_k es ruido blanco discreto, es decir, $E[v_k] = 0$, $E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}$.

2. Estimación del estado del sistema

En esta Sección explicaremos como usar el modelo del sistema, el conocimiento de $u(t)$ y las medidas y_k para obtener una estimación de $x(t)$ que denotaremos como $\hat{x}(t)$. Obtener esta estimación es difícil debido a la presencia de los ruidos en sistema y en medidas.

Se presupone que el modelo es conocido, es decir, las matrices y funciones en los modelos anteriores son conocidos. Si no fuera así, todo lo que no estuviera incluido se podría suponer englobado en el ruido blanco que entra al sistema (aumentando su covarianza).

También es necesario conocer una estimación de la condición inicial de x, $x(0)$, que denotaremos $\hat{x}_0$, tal vez a partir de una medida en t_0 (por ello se supondrá que desde el tiempo inicial a la primera medida transcurre cierto tiempo). Se debe tener que $E[\hat{x}_0] = x(0)$, y se conocerá una estimación de lo “buena” que es dicha estimación, en el sentido de que conoceremos la covarianza del error $P_0 = E[(x(0) - \hat{x}_0)(x(0) - \hat{x}_0)^T]$ (puede ser 0).Se supondrá $\hat{x}_0$ independiente de los ruidos que entran al sistema.

Matemáticamente, definamos la covarianza del error de estimación como $P(t) = E[(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T]$. El objetivo será hallar $\hat{x}(t)$ tal que $P(t)$ sea lo menor posible, es decir, buscar la mejor estimación posible desde el punto de vista de la covarianza del error. Obsérvese que la covarianza es una matriz, simétrica y definida semipositiva.

2.1. Caso lineal

En primer lugar consideremos el modelo lineal continuo-discreto.

2.1.1. Estimación sin medidas

Supongamos en primer lugar que NO tenemos medidas. Sin embargo sí tenemos acceso a $u(t)$. En tal caso se puede realizar una estimación de la siguiente forma:

- En primer lugar se estima $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$. Por tanto inicialmente $P(0) = P_0$.
- Por otro lado se estima $\hat{x}(t)$ usando el observador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x} + B(t)u. \tag{5}$$

- Para estudiar el valor de la covarianza, definamos $\delta x = x - \hat{x}$, el error de estimación. Por tanto $P(t) = E[\delta x \delta x^T]$. Se tiene:

$$\delta \dot{x}(t) = \dot{x} - \dot{\hat{x}}(t) = F(t)\delta x + G(t)w(t). \tag{6}$$

  De la teoría de procesos gaussianos, se obtiene una ecuación para $P(t)$:

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + G(t)Q(t)G^T(t). \tag{7}$$

  Se puede demostrar que la ecuación (7) implica que $P(t)$ siempre crece. Lo que implica que la estimación se degrada cada vez más y por tanto este procedimiento no es muy bueno.

2.1.2. Estimación sólo con medidas

Si el número de medidas (dimensión del vector y) de la ecuación

$$y_k = H_k x_k + v_k \tag{8}$$

es mayor que el número de estados (dimensión del vector x) entonces es posible que se pueda obtener una estimación de x_k (por ejemplo mediante mínimos cuadrados); en caso contrario, de al menos parte de x_k. Incluso aunque se pudiera obtener dicha estimación, no sabríamos que sucedería con x en los instantes de tiempo entre medidas y habría que interpolar. Por tanto, especialmente si las medidas son lentas, este procedimiento no es demasiado bueno.

2.1.3. Filtro de Kalman para sistemas lineales continuos-discretos (KF)

La idea del filtro de Kalman es, conocido $u(t)$ y una estimación $\hat{x}(0)$ de $x(0)$, intentar reconstruir $x(t)$ con ayuda de las medidas y_k y del conocimiento del modelo.

Entre medidas, se utiliza el procedimiento descrito en la Sección 2.1.1; cuando llega una medida, se utiliza la nueva información para actualizar la información, ponderando el error de medida con el error que tenía la estimación antes de la medida.

Puesto que las medidas son "instantáneas", para diferenciar en el instante k antes y después de medir, llamaremos a $\hat{x}_k^-$ la estimación antes de la medida (también llamada "a priori") y a $\hat{x}_k^+$ la estimación después de la medida (también llamada "a posteriori"). De forma similar con otras variables.

El algoritmo del filtro de Kalman será como sigue:

- **Inicialización:** En primer lugar se estima $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$. Por tanto inicialmente $P(0) = P_0$.
- **Fase de propagación:** Mientras no haya medidas, se estima $\hat{x}(t)$ usando el observador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x} + B(t)u. \tag{9}$$

- Como antes, la covarianza del error $P(t)$ evoluciona siguiendo la ecuación

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + G(t)Q(t)G^T(t). \tag{10}$$

- **Fase de medida:** Supongamos que estamos en el instante de tiempo t_k en el cual obtenemos una medida y_k de acuerdo al modelo de medida del sistema. Partimos de la estimación anterior justo antes de la medida, $\hat{x}_k^- = \hat{x}(t_k^-)$, y de la covarianza del error justo antes de la medida, $P_k^- = P(t_k^-)$. Usando la medida, se *actualiza* la estimación de la siguiente forma:
$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-), \tag{11}$$
donde K_k es la ganancia de Kalman (cuya definición se da más abajo).

- Igualmente se actualiza la covarianza del error como
$$P_k^+ = (I - K_kH_k)P_k^-, \tag{12}$$
donde I es la identidad de orden adecuado.

- **Ganancia de Kalman:** La ganancia de Kalman se calcula como
$$K_k = P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} \tag{13}$$
y es la que pondera la "calidad" de la estimación antes de la medida con la "calidad" de la medida.

- Estos pasos (excepto la inicialización) se iteran. Mientras no haya medida, se propaga la estimación y la covarianza del error. Cuando haya una medida, se calcula la ganancia de Kalman y se actualiza la estimación y la covarianza del error.

Este algoritmo garantiza (supuestas todas las hipótesis de partida verdaderas) que la covarianza del error $P(t)$ es la menor posible, por lo que la estimación $\hat{x}(t)$ es óptima.

2.1.4. Demostración de la expresión de la ganancia de Kalman

Pasemos ahora a demostrar las ecuaciones (13) y (12) a partir de (11). Para ello, usemos la definición de covarianza:

$$\begin{aligned}
P_k^+ &= E[(x_k - \hat{x}^+)(x_k - \hat{x}^+)^T] \\
&= E[(x_k - \hat{x}_k^- - K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^- - K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))^T] \\
&= E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] - E[(K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^-)^T] \\
&\quad - E[(x_k - \hat{x}_k^-)(K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))^T] + E[(K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))(K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))^T] \\
&= P_k^- - 2E[(K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^-)^T] + E[(K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))(K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-))^T].
\end{aligned} \tag{14}$$

Aquí se ha usado la definición de covarianza tanto de P_k^+ como de P_k^-. Sustituyendo ahora la medida $y_k = H_kx_k + v_k$:

$$\begin{aligned}
P_k^+ &= P_k^- - E[(K_kH_k(x_k - \hat{x}_k^-) + K_kv_k)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] \\
&\quad - E[(x_k - \hat{x}_k^-)(K_kH_k(x_k - \hat{x}_k^-) + K_kv_k)^T] \\
&\quad + E[(K_kH_k(x_k - \hat{x}_k^-) + K_kv_k)(K_kH_k(x_k - \hat{x}_k^-) + K_kv_k)^T] \\
&= P_k^- - K_kH_kP_k^- - P_k^-H_k^TK_k^T + K_kH_kP_k^-H_k^TK_k^T + K_kR_kK_k^T \\
&= P_k^- - K_kH_kP_k^- - P_k^-H_k^TK_k^T + K_k(H_kP_k^-H_k^T + R_k)K_k^T,
\end{aligned} \tag{15}$$

donde se ha usado la independencia del ruido blanco con la covarianza del error de estimación, y la definición de la covarianza del ruido blanco.

Una buena medida de la magnitud de la covarianza a posteriori es la traza de P_k^+

Para minimizar la traza de covarianza a posteriori, es necesario derivarla respecto a la matrix K_k. Se recuerdan los siguientes resultados: $\frac{\partial}{\partial A}\mathrm{Tr}[AB] = B$, $\frac{\partial}{\partial A}\mathrm{Tr}[BA^T] = B^T$, $\frac{\partial}{\partial A}\mathrm{Tr}[ABA^T] = (B + B^T)A^T$.

Por tanto:

$$\frac{\partial \mathrm{Tr}[P_k^+]}{\partial K_k} = -2H_kP_k^- + 2H_kP_k^-H_k^TK_k^T + 2R_kK_k^T, \tag{16}$$

E igualando a cero la derivada, obtenemos la ganancia de Kalman:

$$K_k^T = (H_kP_k^-H_k^T + R_k)^{-1}H_kP_k^- \to K_k^T = P_k^-H_k^T(H_kP_k^-H_k^T + R_k)^{-1} \tag{17}$$

Sustituyendo parcialmente el valor hallado en (15), sólo la K_k que premultiplica el paréntesis, encontramos:

$$\begin{aligned}
P_k^+ &= P_k^- - K_kH_kP_k^- - P_k^-H_k^TK_k^T + P_k^-H_k^TK_k^T \\
&= (\mathrm{I} - K_kH_k)P_k^-,
\end{aligned} \tag{18}$$

que es la expresión buscada (se puede sustituir el valor de K_k pero no resulta especialmente esclarecedora).

2.2. Caso no lineal

Para el caso no lineal se pueden repetir las estrategias en las que no hay medidas o en las que sólo hay medidas sin fase de propagación. No obstante, será más complejo al ser las funciones no lineales, y para el caso sin medidas, no se podrá conocer con exactitud $P(t)$ ya que dejará de verificarse la ecuación (7).

Directamente pasamos a explicar como se usa el filtro de Kalman para el caso no lineal. Esta versión de filtro de Kalman se denomina "Filtro Extendido de Kalman".

2.2.1. Filtro Extendido de Kalman para sistemas no lineales (EKF)

El filtro extendido de Kalman se basa en la linealización de las ecuaciones del error. El procedimiento se basa en la siguiente idea.

Aproximemos el estado del sistema $x(t)$, como antes, con un valor $\hat{x}(t)$ obtienido de la integración de las ecuaciones del sistema ignorando el ruido, es decir:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t). \tag{19}$$

Por analogía con el caso lineal, sabemos que el error de esta aproximación crece, pero inicialmente será pequeño. Llamemos al error de la aproximación como $\delta x(t) = x(t) - \hat{x}$.

Si conociéramos el error $\delta x(t)$, entonces podríamos escribir $x(t) = \hat{x} + \delta x(t)$. ¡Conoceríamos perfectamente el estado! ¿Pero cómo calcular $\delta x(t)$? No es posible, por tanto habrá que *estimarlo*. Para ello se usará el filtro de Kalman. Lo que hace el EKF, pues, es *estimar el error* de la aproximación sin ruido, mediante un filtro de Kalman aplicado a las ecuaciones linealizadas del error!

Obsérvese que si quieremos calcular la dinámica del error, se tiene:

$$\delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = f(x,u,t) - f(\hat{x},u,t) + G(t)w(t) \approx \left.\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} \delta x + G(t)w(t), \tag{20}$$

una aproximación válida siempre que el error sea pequeño.

Igualmente, en una medida:

$$y_k = h(x_k, t_k) + v_k = h(\hat{x}_k + \delta x_k, t_k) + v_k \approx h(\hat{x}_k, t_k) + \left.\frac{\partial h(x,t_k)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_k} \delta x_k + v_k, \tag{21}$$

Definamos entonces $F(\hat{x}(t), t) = \left.\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}$, $\delta y_k = y_k - h(\hat{x}_k, t_k)$, $H_k(\hat{x}_k) = \left.\frac{\partial h(x,t_k)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_k}$. Se tendría el siguiente modelo lineal para el error:

Dinámica:

$$\delta\dot{x} = F(\hat{x}(t), t)\delta x + G(t)w(t). \tag{22}$$

Medida:

$$\delta y_k = H_k(\hat{x}_k)\delta x_k + v_k. \tag{23}$$

A este modelo se le puede aplicar el filtro de Kalman. Como se verá, se supondrá que $\hat{x}$, en media, es una estimación correcta del estado, mientras que δx, en media, es cero, pero contiene la covarianza que se quiere minimizar (ya que la covarianza de $\hat{x}$ no se puede calcular ni minimizar al ser el problema no lineal). El algoritmo del filtro de Kalman aplicado a δx trataría de calcular $\delta\hat{x}$, de la siguiente forma:

- **Inicialización:** Consideramos que inicialmente $\hat{x} = \hat{x}_0$ y que $\delta\hat{x} = 0$. Por otro lado, como antes, inicialmente $P(0) = P_0$.
- **Fase de propagación:** Mientras no haya medidas, por un lado se propaga la estimación :

  $$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t). \tag{24}$$

  mientras que por otro lado se "estima el error de estimación" $\delta\hat{x}(t)$ usando el observador de antes:

  $$\delta\dot{\hat{x}}(t) = F(\hat{x}(t), t)\delta\hat{x}. \tag{25}$$

  Como $\delta\hat{x}(0) = 0$, la ecuación de arriba resulta en que $\delta\hat{x} = 0$ para todo instante! Hasta que no haya una medida, no cambiará el valor de $\delta\hat{x}$. Por tanto la ecuación (25) realmente no hay que resolverla y se puede reemplazar por $\delta\hat{x} = 0$ (hasta que haya una medida).

- Como antes, la covarianza del error $P(t)$ sí que evoluciona, siguiendo la ecuación

$$\dot{P}(t) = F(\hat{x}(t), t)P(t) + P(t)F(\hat{x}(t), t)^T + G(t)Q(t)G^T(t). \tag{26}$$

- **Fase de medida:** Supongamos que estamos en el instante de tiempo t_k en el cual obtenemos una "medida" $\delta y_k = y_k - h(\hat{x}_k^-, t_k)$. Como antes, se *actualiza* la estimación $\delta\hat{x}$ de la siguiente forma:

$$\delta\hat{x}_k^+ = \delta\hat{x}_k^- + K_k(\hat{x}_k^-)(\delta y_k - H_k(\hat{x}_k^-)\delta\hat{x}_k^-), \tag{27}$$

  y teniendo en cuenta que el valor de $\delta\hat{x}_k^-$ es cero, y sustituyendo la fórmula de δy_k, llegamos a:

$$\delta\hat{x}_k^+ = K_k(y_k - h(\hat{x}_k^-, t_k)), \tag{28}$$

  donde $K_k(\hat{x}_k^-)$ es la ganancia de Kalman (cuya definición se da más abajo, se debe calcular previamente).

- Igualmente se actualiza la covarianza del error como antes:

$$P_k^+ = (I - K_k(\hat{x}_k^-)H_k(\hat{x}_k^-))P_k^-. \tag{29}$$

- **Ganancia de Kalman:** La ganancia de Kalman se calcula como antes:

$$K_k(\hat{x}_k^-) = P_k^- H_k(\hat{x}_k^-)^T \left(H_k(\hat{x}_k^-)P_k^- H_k(\hat{x}_k^-)^T + R_k\right)^{-1}. \tag{30}$$

- **Actualización de** $\hat{x}_k$: Otra diferencia importante del EKF es que ahora que se ha encontrado un valor $\delta\hat{x}_k^+$, este valor se traspasa a $\hat{x}_k^+$. Por tanto se hace: $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \delta\hat{x}_k^+$, y $\delta\hat{x}_k^+$ se vuelve a fijar a cero.

- Estos pasos (excepto la inicialización) se iteran. Mientras no haya medida, se propaga la estimación, la estimación del error de estimación, y la covarianza del error. Cuando haya una medida, se calcula la ganancia de Kalman y se actualiza la estimación del error de estimación y su covarianza; dicha actualización se "traspasa" a la estimación.

Obsérvese que, por tanto, $\delta\hat{x}$ no juega ningún papel (aparte de entender la formulación del filtro). Se puede por tanto eliminar y el algoritmo EKF quedaría como sigue:

- **Inicialización:** Fijamos $\hat{x} = \hat{x}_0$ y $P(0) = P_0$.

- **Fase de propagación:** Propagamos

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t). \tag{31}$$

  y la covarianza del error $P(t)$:

$$\dot{P}(t) = F(\hat{x}(t), t)P(t) + P(t)F(\hat{x}(t), t)^T + G(t)Q(t)G^T(t). \tag{32}$$

- **Fase de medida:** Primero calculamos la ganancia de Kalman:

$$K_k(\hat{x}_k^-) = P_k^- H_k(\hat{x}_k^-)^T \left(H_k(\hat{x}_k^-)P_k^- H_k(\hat{x}_k^-)^T + R_k\right)^{-1}. \tag{33}$$

  Actualizamos $\hat{x}_k^-$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - h(\hat{x}_k^-, t_k)), \tag{34}$$

  y la covarianza del error

$$P_k^+ = (I - K_k(\hat{x}_k^-)H_k(\hat{x}_k^-))P_k^-. \tag{35}$$

- Iteramos el procedimiento propagación/medida.

OBSERVACIÓN: No existe garantía matemática de que la estimación del EKF converja al valor real ni es ya óptimo. Pero es casi "lo mejor que se puede hacer" para el caso no lineal. Si la estimación inicial es buena y el ruido que le entra al sistema no es excesivo, se comporta bien.

Ejemplo (a desarrollar en clase): vehículo en un plano con dos acelerómetros y un giróscopo.

2.3. Filtro Extendido de Kalman Multiplicativo para las ecuaciones cinemáticas de la actitud expresadas en cuaterniones (MEKF)

En el caso de la estimación de la actitud, cuando dicha actitud está expresada mediante cuaterniones q, es necesario modificar el EKF.

En primer lugar, las ecuaciones diferenciales del sistema son:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

En estas ecuaciones, el vector de velocidades angulares $\vec{\omega}$ representa a las velocidades angulares reales; realmente, se tendrá conocimiento de las velocidades angulares medidas mediante giróscopos, cuya relación con la velocidad angular real representaremos como el modelo más simple posible con ruido y sesgo:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{gyro} + \vec{b} + \vec{\nu}_\omega, \tag{37}$$

donde $\vec{\nu}_\omega$ representa ruido blanco y $\vec{b}$ representa el sesgo, modelado por la ecuación diferencial $\dot{\vec{b}} = \vec{\nu}_b$, donde $\vec{\nu}_b$ es también ruido blanco y representa la deriva del sesgo. Obsérvese que también habrá que estimar el sesgo! Esta estimación se definirá como $\hat{\vec{b}}$, y a partir de esta estimación se tendrá que $\hat{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^{gyro} + \hat{\vec{b}}$. Para esta estimación necesitaríamos conocer una estimación de $\vec{b}$ en cero, $\hat{\vec{b}}_0$. Obsérvese también que $\dot{\hat{\vec{b}}} = 0$. También sería necesario conocer el valor inicial de la covarianza de dicha estimación, P_{b0}.

Por otro lado, el modelo de medida se basa en que en cada instante de medida k, se conocerán m vectores (unitarios) en el sistema de referencia inercial, $\vec{v}^I_{i,k}$, $i = 1, \ldots, m$, y se realizarán medidas de dichos vectores en el sistema de referencia ejes cuerpo $\vec{v}^B_{i,k}$ (también supuestos unitarios) que estarán corrompidas con ruido blanco, es decir, el modelo de medida será:

$$\vec{v}^B_{i,k} = C^B_I(q_k) v^I_{i,k} + \vec{\xi}_{i,k}, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{38}$$

donde $\vec{\xi}_{i,k}$ es ruido blanco asociado a la medida i en el instante k, y $C^B_I(q_k)$ es la matriz de actitud del vehículo, que representa la orientación de los ejes cuerpo respecto a los ejes inerciales, dependiendo de los cuaterniones en el instante k. Si $q_{4,k}$ es la parte escalar del cuaternión y $\vec{q}_k = [q_{1,k} q_{2,k} q_{3,k}]^T$ la parte vectorial se tiene que:

$$C^B_I(q_k) = (q^2_{4,k} - \|\vec{q}_k\|^2) I_3 - 2q_{4,k}\vec{q}_k^\times + 2\vec{q}_k\vec{q}_k^T, \tag{39}$$

donde I_3 es la identidad de orden 3 y el operador $\vec{q}^\times$ viene dado por la matriz

$$\vec{q}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Para aplicar el filtro de Kalman extendido, se utilizará la representación de error de cuaterniones explicada previamente. Por tanto, siguiendo la notación establecida anteriormente:

$$q = \hat{q} \otimes \delta q, \tag{41}$$

donde $\hat{q}$ es la estimación del cuaternión, δq el cuaternión de error, y $\otimes$ la multiplicación de cuaterniones. Para calcular $\hat{q}$ se usará la ecuación diferencial cinemática empleando las medidas de los giróscopos. Por tanto:

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Siguiendo el desarrollo tal como se hizo al deducir la dinámica del cuaternión de error, se llega a una ecuación para $\delta\dot{q}$:

$$\delta\dot{q} = \frac{1}{2}\left(\delta q \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\vec{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q\right). \tag{43}$$

Si representamos este cuaternión de error con los parámetros $\vec{a}$ tal como se hizo al deducir la dinámica del cuaternión de error, se tiene:

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}}\begin{bmatrix} \vec{a} \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\vec{a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

La dinámica de $\vec{a}$ se puede aproximar, siguiendo los mismos pasos que al deducir la dinámica del cuaternión de error, como:

$$\dot{\vec{a}} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}_3 & -\hat{\omega}_2 \\ -\hat{\omega}_3 & 0 & \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 & -\hat{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \vec{\nu}_\omega, \tag{45}$$

Por otro lado, en las medidas se tendrá:

$$\vec{v}^B_{i,k} = C^B_{B'}(\delta q) C^{B'}_I(\hat{q}_k) v^I_{i,k} + \vec{\xi}_{i,k}, \qquad i = 1, \dots, m \tag{46}$$

donde B' es el sistema de referencia al cual se refiere $\hat{q}_k$, que no será exactamente B debido a errores; dichos errores están codificados en δq. Utilizando la representación de δq mediante $\vec{a}$, podemos linealizar $C^B_{B'}(\delta q_k)$ obteniendo:

$$\begin{aligned} C^B_{B'}(\delta q_k) &= (\delta q^2_{4,k} - \|\vec{\delta} q_k\|^2) I_3 - 2\delta q_{4,k} \vec{\delta} q^\times_k + 2\vec{\delta} q_k \vec{\delta} q^T_k \\ &= \frac{1}{4 + \|\vec{a}_k\|^2} \left[(4 - \|\vec{a}_k\|^2) I_3 - 4\vec{a}^\times_k + 2\vec{a}_k \vec{a}^T_k \right] \\ &\approx I_3 - \vec{a}^\times_k \end{aligned} \tag{47}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de medida se llega a:

$$\begin{aligned} \vec{v}^B_{i,k} &\approx \left(I_3 - \vec{a}^\times_k \right) C^{B'}_I(\hat{q}_k) v^I_{i,k} + \vec{\xi}_{i,k}, \\ &= \vec{v}^{B'}_{i,k} - \vec{a}^\times_k \vec{v}^{B'}_{i,k} + \vec{\xi}_{i,k} \\ &= \vec{v}^{B'}_{i,k} + (\vec{v}^{B'}_{i,k})^\times \vec{a}_k + \vec{\xi}_{i,k}, \qquad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{48}$$

donde $\vec{v}^{B'}_{i,k} = C^{B'}_I(\hat{q}_k) v^I_{i,k}$.

Para el filtor de Kalman extendido, el "vector de estado"será:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \hat{\vec{b}} \end{bmatrix},$$

y la matriz de covarianzas:

$$P = \begin{bmatrix} P_a & P_c \\ P_c & P_b \end{bmatrix},$$

Usando la notación del filtro de Kalman extendido llamemos:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}_3 & -\hat{\omega}_2 \\ -\hat{\omega}_3 & 0 & \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 & -\hat{\omega}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{49}$$

y

$$H_k(\hat{q}_k) = \begin{bmatrix} (\vec{v}^{B'}_{1,k})^\times & \mathcal{O} \\ (\vec{v}^{B'}_{2,k})^\times & \mathcal{O} \\ \cdots & \\ (\vec{v}^{B'}_{m,k})^\times & \mathcal{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C^{B'}_I(\hat{q}_k) v^I_{1,k})^\times & \mathcal{O} \\ (C^{B'}_I(\hat{q}_k) v^I_{2,k})^\times & \mathcal{O} \\ \cdots & \\ (C^{B'}_I(\hat{q}_k) v^I_{m,k})^\times & \mathcal{O} \end{bmatrix}, \tag{50}$$

donde $\mathcal{O}$ es una matriz de ceros (3x).

Ya estamos en condiciones de escribir el algoritmo del filtro de Kalman:

- **Inicialización:** Fijamos $\hat{q} = \hat{q}_0$, $\hat{\vec{b}} = \hat{\vec{b}}_0$ y $P(0) = P_0$ en función de los valores iniciales estimados de la actitud, el sesgo de los giróscopos y la covarianza del error de estimación de actitud y de sesgo de giróscopos (la estimación de actitud y su error, por ejemplo, pueden ser obtenidos del algoritmo Q).
- **Fase de propagación:** Propagamos

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{51}$$

  donde $\hat{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^{gyro} + \hat{\vec{b}}$, y la covarianza del error $P(t)$:

$$\dot{P}(t) = F(\hat{\omega}) P(t) + P(t) F(\hat{\omega})^T + Q, \tag{52}$$

donde Q es:

$$Q = \begin{bmatrix} \vec{\nu}_\omega & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \vec{\nu}_b \end{bmatrix}.$$

- **Fase de medida:** Para cada medida i tendremos $\vec{v}_{i,k}^B$ (la medida) y $\vec{v}_{i,k}^I$ (el valor real). Calculamos para cada medida $\vec{v}_{i,k}^{B'} = C_I^{B'}(\hat{q}_k)v_{i,k}^I$. Obtenemos ahora

$$H_k(\hat{q}_k) = \begin{bmatrix} (\vec{v}_{1,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \\ (\vec{v}_{2,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \\ \cdots & \\ (\vec{v}_{m,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \end{bmatrix} \tag{53}$$

Se calcula entonces la ganancia de Kalman:

$$K_k(\hat{\delta}_k^-) = P_k^- H_k(\hat{\delta}_k^-)^T \left(H_k(\hat{\delta}_k^-) P_k^- H_k(\hat{\delta}_k^-)^T + R_k \right)^{-1}, \tag{54}$$

donde R_k será:

$$R_k = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(\vec{\xi}_{1,k}) \\ \mathrm{Cov}(\vec{\xi}_{2,k}) \\ \cdots \\ \mathrm{Cov}(\vec{\xi}_{m,k}) \end{bmatrix} \tag{55}$$

es decir una matriz conteniendo las covarianzas de los ruidos de medida. Formamos la matriz de los errores de medida:

$$\delta y_k = \begin{bmatrix} \vec{v}_{1,k}^B - \vec{v}_{1,k}^{B'} \\ \vec{v}_{2,k}^B - \vec{v}_{2,k}^{B'} \\ \cdots \\ \vec{v}_{m,k}^B - \vec{v}_{m,k}^{B'} \end{bmatrix} \tag{56}$$

Dividimos K_k en dos trozos:

$$K_k = \begin{bmatrix} K_k^a \\ K_k^b \end{bmatrix}.$$

Encontramos $\vec{a}$:

$$\vec{a} = K_k^a \delta y_k, \tag{57}$$

actualizamos $\hat{\vec{b}}$:

$$\hat{\vec{b}}^+ = \hat{\vec{b}}^- + K_k^b \delta y_k,$$

y la covarianza del error

$$P_k^+ = (I - K_k(\hat{q}_k^-) H_k(\hat{q}_k^-)) P_k^-. \tag{58}$$

Finalmente, actualizamos $\hat{q}_k$:

$$\hat{q}_k^+ = \delta q(\vec{a}) \otimes \hat{q}_k^- = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \delta q_k^-. \tag{59}$$

- Iteramos el procedimiento propagación/medida.

Este procedimiento suele funcionar bastante bien, permite tener en cuenta las covarianzas de la estimación inicial, giróscopos y medidas y permite variar el número de medidas en cada momento k de observación (simplemente variando la dimensión de las matrices).