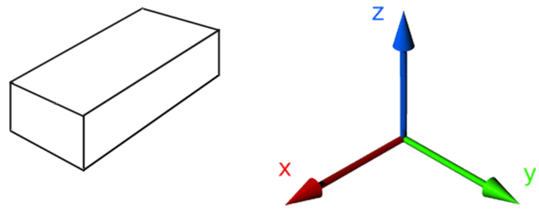
Dinámica de Vehículos Espaciales **Duración**: 2 horas

Master en Ingeniería Aeronáutica	N^oDNI	____________	Curso 14/15
Escuela Superior de Ingenieros	1^{er}Apellido	____________	8/05/15
	2^{do}Apellido	____________	
Universidad de Sevilla	Nombre	____________	**Cuestiones**

Puntuación total: 10 puntos.

1. (**1.5 puntos**) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

    a) Describir al menos dos posiciones estables del sólido de la figura si se encuentra en una órbita circular en torno a la Tierra:

    b) El sólido de la figura anterior tiene inercias, en ejes principales, $I = 100\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ (mayor), $I = 60\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ (intermedia), $I = 40\ \mathrm{kg \cdot m^2}$(menor), y se encuentra girando inicialmente con una velocidad angular $\omega_x = 5$ r.p.m., $\omega_y = 20$ r.p.m., $\omega_z = 0$ r.p.m.. Ignorando el efecto del gradiente gravitatorio en la dinámica, ¿es posible predecir cuál será la velocidad de giro cuando transcurra un tiempo suficientemente largo? En caso afirmativo, calcular dicha velocidad.

    c) ¿Cuál es la diferencia (desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista de la dinámica de la actitud) entre cuerpos prolatos y oblatos?

    d) ¿Qué es la rigidez giroscópica? ¿Qué factores contribuyen a ella?

2. (**4.5 puntos**) Responder a las siguientes preguntas sobre cinemática de actitud

    a) Definir esquemáticamente la secuencia de ángulos de Euler 2-1-3, denotando el primer giro como θ_2, el segundo como θ_1 y el tercero como θ_3. Deducir de forma razonada las ecuaciones diferenciales cinemáticas (no es necesario invertir la matriz en el último paso, se puede dejar indicada). ¿Cuál es la singularidad o singularidades de esta secuencia?

    b) Supongamos que un cuerpo tiene una actitud inicial, descrita usando la secuencia estudiada en el anterior apartado y dada por $(\theta_2 = 60^o, \theta_1 = 90^o, \theta_3 = 0^o)$, y se desea que llegue a una actitud final dada por $(\theta_2 = 0^o, \theta_1 = 0^o, \theta_3 = 120^o)$. Encontrar el eje de giro y ángulo a rotar en torno a dicho eje, que permite realizar esta maniobra.

    c) Suponiendo que la inercia de un vehículo en torno al eje de giro sea $I = 25\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ y que los pares máximos y mínimos que se pueden ejercer en torno a dicho eje son $M_{max} = 10\ \mathrm{N \cdot m}$, $M_{min} = -10\ \mathrm{N \cdot m}$, encontrar el tiempo mínimo T que permite realizar el giro con la condición adicional de que $\vec{\omega}(0) = \vec{\omega}(T) = \vec{0}\ \mathrm{rad/s}$, es decir, la velocidad angular deberá ser nula al principio y al final de la maniobra. Escribir el valor de la velocidad angular $\vec{\omega}(t)$ (en ejes cuerpo) durante la maniobra. (Nota: es necesaria realizar la deducción de este tiempo mínimo).

3. (**2.5 puntos**) Sea un satélite rígido sin pares externos y con velocidad angular $\vec{\omega} = [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]^T$, donde ω_i son las componentes de la velocidad angular del satélite en ejes cuerpo, y con momentos de inercia I_i (en ejes principales). Además se tiene que $I_1 > I_2 > I_3$.

    a) Enunciar y justificar la regla del eje mayor cuando existe disipación de energía.

    b) ¿Sería posible estabilizar el vehículo (con disipación de energía) rotando en torno al **eje intermedio**, si se añade un volante de inercia con inercia I_R y velocidad angular ω_R que se puede suponer constante? Encontrar las condiciones que se deben verificar, y encontrar la velocidad que debe tener el volante en un caso en el que se tenga $I_1 = 100\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, $I_2 = 60\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, $I_3 = 40\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, $I_R = 5\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, $n = 20$ r.p.m. (en torno al eje intermedio). Para resolver el problema se recuerda el siguiente resultado matemático:

Teorema: Sea $F(x,y,z)$ una función a minimizar sujeta a la restricción $G(x,y,z) = 0$. Sea $L(x,y,z) = F(x,y,z) + \lambda G(x,y,z)$ el Lagrangiano del sistema de forma que x^*, y^*, z^*, λ^* es un punto crítico (que hace las primeras derivadas parciales de L cero) donde se quiere investigar si hay un mínimo. Si se cumplen las condiciones:

- $\frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) \neq 0$
- $\mathrm{Det}(H_3(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$
- $\mathrm{Det}(H_4(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$

entonces se tiene un mínimo en el punto crítico, donde H_3 y H_4 son las matrices:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$

4. (**1.5 puntos**) Para un vehículo espacial en órbita cuyo centro de gravedad se encuentra a una distancia $\vec{R}_c$ de un cuerpo masivo (con parámetro gravitatorio μ), y sabiendo que el tensor de inercia del vehículo es $\mathcal{I}$, encontrar razonadamente una expresión lo más exacta posible del par $\vec{M}$ (respecto al centro de gravedad del vehículo) debido al gradiente gravitatorio experimentado por el vehículo (no es necesario expresar $\vec{M}$ en ninguna base, simplemente encontrar una fórmula vectorial). Puede ser útil recordar las siguientes expresiones:

   - Si $|\vec{B}| \lll |\vec{A}|$, se cumple $|\vec{A}+\vec{B}|^n \approx |\vec{A}|^n + n|\vec{A}|^{n-2}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$.
   - Ley de gravitación universal para un cuerpo de masa m a distancia $\vec{r}$ de un cuerpo masivo con parámetro gravitatorio μ: $\vec{F} = -\frac{\mu m}{r^3}\vec{r}$, donde $r = |\vec{r}|$.
   - Definición del tensor de inercia: $\mathcal{I} = \int_V \left([\vec{\rho}^T\vec{\rho}]\mathrm{Id} - \vec{\rho}\vec{\rho}^T\right) dm$ donde $\vec{\rho}$ es la distancia de cada partícula de masa dm al centro de gravedad del vehículo (integral extendida al volumen completo V del vehículo).

Master en Ingeniería Aeronáutica	N$^{\text{o}}$DNI ______	Curso 14/15
Escuela Superior de Ingenieros	1$^{\text{er}}$Apellido ______	8/06/15
	2$^{\text{do}}$Apellido ______	
Universidad de Sevilla	Nombre ______	**Cuestiones**

Puntuación total: 10 puntos.

1. (**1,5 puntos**) Responder brevemente a las siguientes preguntas:

   a) Para una misión de observación de la Tierra de alta precisión que requiere maniobras rápidas, ¿qué sistema de control de actitud sería más apropiado? ¿Qué tipo de actuadores? ¿Qué tipo de sensores?

   b) Para una misión interplanetaria que se encuentre en la fase heliocéntrica (en el sistema solar viajando entre planetas), ¿qué sistema de control de actitud sería más apropiado? ¿Qué tipo de actuadores? ¿Qué tipo de sensores?

   c) Supongamos que para dos cuerpos celestiales de referencia (conocidos su declinación y ascensión recta) se sabe el ángulo que forman con un cierto eje de un vehículo del cual se desea determinar su orientación (declinación y ascensión recta). Explicar un procedimiento que permita determinar la actitud, y comentar el efecto de la geometría relativa entre los cuerpos y el eje en el error de dicha determinación.

2. (**2 puntos**) Sea un vehículo que gira en torno a un único eje, en el cual tiene un giróscopo midiendo la velocidad angular, del que se sabe que su ARW (ruido blanco de medida) es $0{,}3\ ^{\text{o}}/\sqrt{\text{h}}$. Se tiene una estimación del ángulo inicial $\hat{\theta}_0 = 15^{\text{o}}$ con un error tal que $\sigma_{\theta_0} = 0{,}5^{\text{o}}$. El giróscopo indica que, entre $t = 0$ y $t = 15$ minutos la velocidad angular es $0{,}1^{\text{o}}/\text{s}$ y que, entre $t = 15$ minutos y $t = 30$ minutos, la velocidad angular es cero. Estimar el ángulo $\theta(t)$ para t variando entre 0 y 30 minutos, y cuantificar estadísticamente (desviación típica) el error de dicha estimación, en base a los datos del problema.

   Supongamos que además, en los instante $t = 10, 20, 30$ minutos se dispone de otra medida de $\theta^{med} = 64{,}8^{\text{o}}, 104{,}8^{\text{o}}$, $104{,}9^{\text{o}}$ respectivamente, con un error de medida que tiene una desviación típica $0{,}3^{\text{o}}$. Aplicando un filtro de Kalman 1-D, encontrar la mejor estimación posible del ángulo θ para t entre 0 y 30 minutos, teniendo ahora en cuenta las medidas, y cuantificar el error resultante.

   Para este problema se recuerda que:

   - La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.
   - La covarianza de una combinación lineal de variables aleatorias gausianas $A\vec{X} + B\vec{Y}$, donde $\vec{X}$ tiene convarianza Σ_X e $\vec{Y}$ tiene covarianza Σ_Y, es $A\Sigma_X A^T + B\Sigma_Y B^T$.
   - La covarianza $P(t)$ de un proceso que evoluciona en el tiempo siguiendo la ecuación diferencial $\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + C\vec{\epsilon}$, donde $\vec{\epsilon}$ es ruido blanco gausiano de covarianza Q y $\vec{X}(0)$ tiene covarianza P_0, viene dada por $\dot{P} = AP + PA^T + CQC^T$, con $P(0) = P_0$.

3. (**2 puntos**) Un vehículo posee un magnetómetro y un sensor solar digital de aspecto solar. Supongamos que en un cierto instante se sabe que en ejes inerciales el campo magnético tiene la dirección $\vec{v}_M^I$ y el Sol $\vec{v}_S^I$, pero los sensores miden, respectivamente $\vec{v}_M^B$ y $\vec{v}_S^B$, donde los valores de estos vectores son:

$$\vec{v}_M^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_S^I = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_M^B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_S^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Partiendo de las observaciones, obtener la actitud con la mayor precisión posible usando el método TRIAD.

   Posteriormente,plantear el método q, para el que se recuerda que de $B = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T$, siendo a_i los pesos, $\vec{W}_i$ las medidas, $\vec{V}_i$ las referencias, se obtiene

$$\sigma \quad = \quad \text{Tr}(B), \quad S = B + B^T, \quad \vec{z}^{\times} = B^T - B, \quad K = \begin{bmatrix} \sigma & \vec{z}^T \\ \vec{z} & S - \sigma\text{Id} \end{bmatrix}$$

(continúa en la siguiente página)

4. (**2 puntos**) Describir el mecanismo yo-yo y su utilidad. Describir las hipótesis habitualmente utilizadas para estudiar la dinámica del mecanismo. Recordando que la energía cinética inicial es $T_0 = \frac{1}{2}mR^2Kn_0^2$ y el módulo del momento cinético inicial es $\Gamma_0 = mR^2Kn_0$, donde $K = 1 + \frac{I_3}{mR^2}$, I_3 el momento inercia en torno al eje de simetría del vehículo, R el radio del vehículo en el plano perpendicular al eje de simetría,m la masa y n_0 la velocidad angular inicial, y que cuando se desenrolla un ángulo ϕ de cable del mecanismo se obtiene que $T = \frac{mR^2}{2}\left(Kn^2 + (\dot{\phi}+n)^2\phi^2\right)$ y $\Gamma = mR^2(Kn + (n+\dot{\phi})\phi^2)$, donde n es la velocidad angular del vehículo, deducir de forma razonada el valor de $\dot{\phi}$, los posibles valores finales de la velocidad angular, y la longitud de cable que es necesario desenrollar para obtener dichos valores de velocidad angular, así como el tiempo final t_f que se tarda en alcanzar la velocidad deseada.

   Partiendo de los resultados anteriores, expresar la velocidad angular del vehículo como función del tiempo, $n(t)$. Calcular la aceleración angular $\alpha(t) = \dot{n}$. Encontrar la tensión en los cables T relacionando la aceleración angular con el par que los cables transmiten al vehículo.

   En particular, para un vehículo tal que $I_3 = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m = 5$ kg, $R = 1{,}5$ m, $n_0 = 60$ rpm, ¿qué longitud de cable será necesaria para detener totalmente el vehículo y cuánto tiempo se tardará en hacerlo? ¿Cuál será la tensión máxima que los cables tendrán que soportar?

5. (**2,5 puntos**) Sea el siguiente modelo de rotación con disipación de energía, que modela un satélite con un depósito perfectamente esférico de combustible viscoso, lleno, tal que el combustible (de inercia J y coeficiente de fricción $\Delta > 0$) tiene su propia velocidad angular $\vec{\sigma} = [\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3]^T$ relativa al satélite, e incorporando términos de control.

$$
\begin{aligned}
(I_1 - J)\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= \Delta\sigma_1 + u_1 \\
(I_2 - J)\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= \Delta\sigma_2 + u_2 \\
(I_3 - J)\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= \Delta\sigma_3 + u_3 \\
\dot{\sigma}_1 + \dot{\omega}_1 + \omega_2\sigma_3 - \omega_3\sigma_2 &= -\frac{\Delta\sigma_1}{J} \\
\dot{\sigma}_2 + \dot{\omega}_2 + \omega_3\sigma_1 - \omega_1\sigma_3 &= -\frac{\Delta\sigma_2}{J} \\
\dot{\sigma}_3 + \dot{\omega}_3 + \omega_1\sigma_2 - \omega_2\sigma_1 &= -\frac{\Delta\sigma_3}{J}
\end{aligned}
$$

   Usando la técnica de las funciones de Lyapunov, diseñar leyes de control para u_1, u_2, u_3 tales que el equilibrio $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ se demuestre globalmente asintóticamente estable (no se pide controlar la actitud, sólo la velocidad angular, por lo que no es necesario el Teorema de La Salle).

   Se recuerda que una función de Lyapunov es una función V regular (continua, diferenciable) que depende del estado (en este caso la velocidad angular y los σ's), tal que:

   - Es siempre positiva para cualquier valor de los estados, excepto cuando el estado es cero; para dicho valor es cero (es decir definida positiva).
   - La derivada con respecto al tiempo de V es definida negativa (es decir negativa para cualquier valor de los estados excepto cero, para el cual debe valer cero).

   Entonces se demuestra que el origen (valor cero del estado) es asintóticamente estable. Además si el límite de V cuando el estado tiende a infinito es infinito, este resultado es global.

   PISTA: Teniendo en cuenta la estructura de las tres ecuaciones adicionales, pensar como ampliar la función de Lyapunov que se vio en clase para la velocidad angular. Existe más de una solución al problema, si bien algunas soluciones resultarán en una ley de control más complicada, y se premiará el resultado más sencillo.