Dinámica de Vehículos Espaciales

Tema 5: Estimación dinámica de actitud. Giróscopos. Filtro de Kalman.

Rafael Vázquez Valenzuela

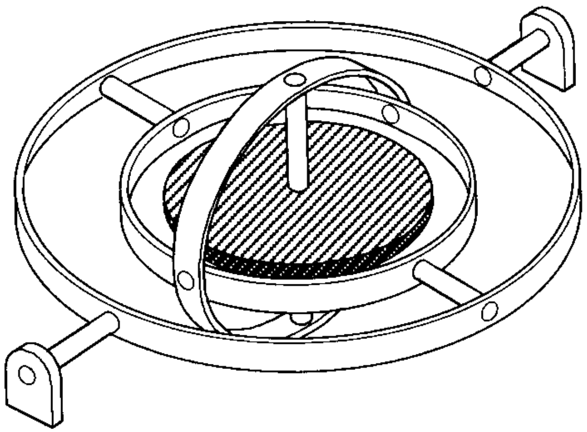
Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

23 de febrero de 2017

Estimación dinámica de la actitud

- La estimación dinámica de actitud (típicamente llamada simplemente estimación de actitud) require del uso de modelos cinemáticos, giróscopos y filtro de Kalman, así como sensores de dirección complementarios.
- Los giróscopos miden la velocidad angular $\vec{\omega}^B$ con respecto al sistema de referencia inercial. Se recupera la actitud usando esta medida para integrar las ecuaciones diferenciales cinemáticas, pero los errores se acumulan generando una cierta deriva: es necesario complementar con otro tipo de sensores.
- Para entender como se acumula el error es necesario modelarlo como un proceso estocástico (aleatorio) y utilizar las ecuaciones de propagación.

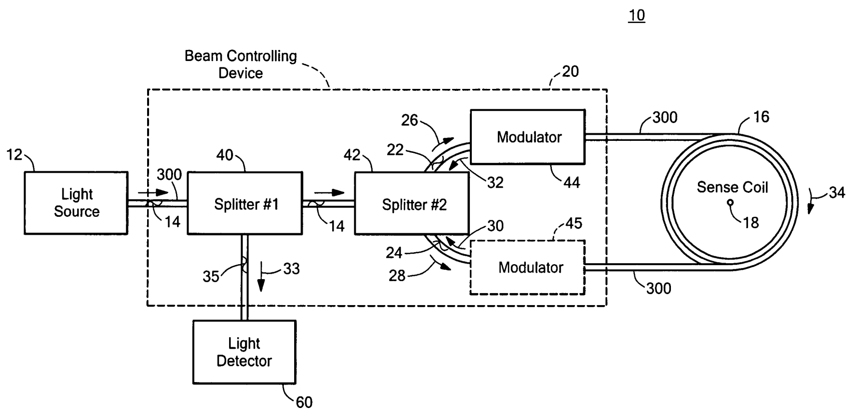
Sensores electromecánicos: giróscopos



- Giróscopos: Típicamente en configuración "strap-down" (fijos a los ejes cuerpo), los giróscopos miden la velocidad angular en un eje.
- Tres giróscopos en ejes perpendiculares podrán calcular todas las componentes de la velocidad angular.
- El principal problema de los giróscopos es que, aunque son capaces de realizar medidas de gran precisión (desde 1 grado por hora hasta 10 segundos de arco por hora), no proporcionan una medida angular, sino de velocidad angular.
- Dicha medida debe ser integrada en el tiempo (usando las ecuaciones diferenciales cinemáticas) para obtener la actitud.

Sensores mecánicos: giróscopos

- Inevitablemente pequeños errores se acumularan y provocarán un error de deriva en la medida.
- Por ese motivo, los sensores giroscópicos siempre se usan en combinación con otros sensores.
- No obstante son muy deseables por su elevado ancho de banda (bajo en el resto de los sensores).
- Giróscopos no mecánicos: en la actualidad se usan giróscopos ópticos (basados en principios de interferometría: RLG/FOG) y piezoélectricos (basados en sistemas electromecánicos MEMS, de bajo coste/precisión).



Procesos estocásticos.

- Un proceso estocástico o variable estocástica no es sino una variable aleatoria $\vec{X}(t)$ que cambia con el tiempo. Los errores de navegación serán este tipo de variables.
- Por tanto la media y la covarianza también varían con el tiempo: $\vec{m}(t)$, $\Sigma(t)$.
- Para un proceso, se define la autocorrelación como $R(t,\tau) = E[\vec{X}(t)\vec{X}(\tau)^T]$. La autocorrelación permite conocer hasta que punto la historia pasada de $\vec{X}$ influye en su valor actual.
- Proceso gaussiano: Un proceso gaussiano verifica $\vec{X}(t) \sim N_n(\vec{m}(t), \Sigma(t))$, es decir, se distribuye como una normal multivariante cuya media y covarianza varían con el tiempo.

Ruido blanco.

- Ruido blanco: Se define como ruido blanco un proceso $\vec{\nu}(t)$ que verifica:
  - $E[\vec{\nu}(t)] = \vec{0}$.
  - $E[\vec{\nu}(t)\vec{\nu}(t)^T] = \sigma^2 \mathrm{Id}$.
  - $R(t,\tau) = E[\vec{\nu}(t)\vec{\nu}(\tau)^T] = \delta(t-\tau)\sigma^2 \mathrm{Id}$, donde $\delta(x)$ vale 1 si $x = 0$ y 0 en cualquier otro caso.
- La última condición quiere decir que el valor del ruido blanco en un instante es independiente de su valor en cualquier instante anterior.
- Ruido blanco gaussiano: Es un proceso que cumple las condiciones anteriores, y además es gaussiano.
- Un buen modelo para las fuentes de error de sensores es $\delta\vec{\epsilon}(t) = \vec{b} + D\vec{\nu}$, donde $\vec{\nu}$ es ruido blanco gaussiano. El valor de $\vec{b}$ será la media del error (sesgo, llamado bias en inglés).

Propagación del error. Caso continuo.

- Consideremos una ecuación diferencial del tipo

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + D\vec{b},$$

donde $\vec{b}$ es ruido blanco gaussiano de covarianza $\sigma^2\mathrm{Id}$, y la condición inicial es también gaussiana, es decir, $\vec{x}_0 \sim N_n(\vec{m}_0(t), P_0(t))$. Entonces se tiene que $\vec{x}$ es un proceso gaussiano, $\vec{x} \sim N_n(\vec{m}(t), P(t))$, con media y covarianza evolucionando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{m}} &= A\vec{m}, \\ \dot{P} &= AP + PA^T + \sigma^2 DD^T, \\ \vec{m}(0) &= \vec{m}_0, \\ P(0) &= P_0 \end{aligned}$$

Propagación del error. Caso discreto.

- Consideremos una ecuación discreta del tipo

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k + D\vec{b}_k,$$

donde $\vec{b}_k$ es ruido blanco gaussiano de covarianza $\sigma^2\mathrm{Id}$, y la condición inicial es también gaussiana, es decir, $\vec{x}_0 \sim N_n(\vec{m}_0(t), P_0(t))$. Entonces se tiene que $\vec{x}_k$ es un proceso gaussiano, $\vec{x}_k \sim N_n(\vec{m}_k(t), P_k(t))$, con media y covarianza evolucionando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_{k+1} &= A\vec{m}_k, \\
P_{k+1} &= AP_kA^T + \sigma^2 DD^T,
\end{aligned}$$

Ejemplo 1-D: propagación del error de un giróscopo

- Cuando uno tiene medidas de giróscopos, es necesario integrar las ecuaciones diferenciales cinemáticas.
- Para entender el filtro de Kalman a nivel conceptual, vamos a ejemplificarlo en el caso más sencillo: un único grado de libertad de giro. Por tanto hay un sólo ángulo θ, cuya ecuación diferencial cinemática es

$$\dot{\theta} = \omega$$

- Un giróscopo proporcionará una medida de ω que denotamos por $\hat{\omega}$. En realidad no será exactamente ω, sino que estará contaminado por un cierto ruido (que modelamos como ruido blanco) ν:

$$\omega = \hat{\omega} + \nu$$

- Si intentamos estimar θ (denotamos a la estimación $\hat{\theta}$) directamente de $\hat{\omega}$, tendremos:

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega}$$

Ejemplo 1-D: propagación del error de un giróscopo

- El error de estimación $\delta\theta = \theta - \hat{\theta}$ verifica:

$$\delta\dot{\theta} = \omega - \hat{\omega} = \nu$$

- Suponiendo ν ruido blanco (unidimensional) de varianza Q y $\delta\theta(0) \approx N(0, P_0)$, encontramos (usando la teoría de procesos expuesta en las primeras transparencias) que el error es un proceso estocástico gaussiano, $\delta\theta \approx N(m, P)$, donde:

$$\dot{m} = 0 \longrightarrow m = \delta\theta_0 = 0,$$

  y

$$\dot{P} = \sigma_\nu^2 \longrightarrow P = P_0 + Qt$$

- Por tanto, aunque la media del error permanece fija en cero, la varianza del error crece linealmente con el tiempo y eventualmente se dispara, siendo por tanto este estimador inútil a medio plazo.

Medida externa

- Supongamos que se tiene una medida externa adicional del ángulo. Suponemos que cada ciertos instantes discretos $t = t_k$ se realiza una medida del ángulo $\hat{\theta}(t_k)$, que llamamos $\hat{\theta}_k^{med}$ con algún otro dispositivo (que también tendrá un cierto error asociado, de forma que $\theta_k = \hat{\theta}_k^{med} + \epsilon$, donde ϵ es ruido blanco, de varianza R.
- Como el tiempo entre medidas puede ser grande, no es buena idea decir $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_k^{med}$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$.
- Otra idea es resetear el estimador de las anteriores transparencias cuando se llega a $t = t_k$, es decir, combinar las medidas de la siguiente forma:
$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega}, \quad \hat{\theta}(t_k) = \hat{\theta}_k^{med}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$
- Por tanto cada nueva medida externa se reinicia la condición inicial de la ecuación diferencial y se vuelve a integrar.
- Es fácil ver que el error obtenido de esta forma sería $\delta\theta \approx N(m, P)$, con $m = 0$ y $\dot{P} = Q$, para $t \in [t_k, t_{k+1})$, con $P(t_k) = R$, luego $P = R + Q(t - t_k)$.

Filtro de Kalman

- Con la anterior forma que el error sería máximo justo antes de una medida, obteniendo $P = R + Q(t_{k+1} - t_k)$ en dicho instante.
- El problema es que se ha despreciado la estimación que daba la ecuación diferencial, cuando entre t_k y t_{k+1} no ha dado tiempo a que se el error crezca demasiado. La idea del filtro de Kalman es combinar la estimación de la ecuación diferencial justo antes de la medida externa, con la medida externa, de forma que la covarianza del error sea mínima.
- A la estimación justo antes de la medida se le llama estimación a priori $\hat{\theta}_k^-$.
- La estimación después de la medida (estimación a posteriori), se denota $\hat{\theta}_k^+$ y se calcula como:

$$\hat{\theta}_k^+ = \hat{\theta}_k^- + K(\hat{\theta}_k^{med} - \hat{\theta}_k^-)$$

donde K es la ganancia de Kalman y el paréntesis es la diferencia entre la estimación que se tenía y la medida externa.

Filtro de Kalman

- K se calcula para minimizar la covarianza del error a posteriori.
- La covarianza a priori será P_k^-.
- A posteriori, calculando la covarianza de la ecuación de θ_k^+:
$$P_k^+ = (1-K)^2 P_k^- + K^2 R$$
- Derivando con respecto a K e igualando a cero: $0 = -2(1-K)P_k^- + 2KR$, luego $K = \frac{P_k^-}{P_k^- + R}$.
- Por tanto la covarianza a posterior será, sustituyendo K:
$$P_k^+ = \frac{P_k^- R}{P_k^- + R}$$
- Se ve fácilmente que P_k^+ es menor que R y menor que P_k^- (recordar que ambas son positivas): por tanto se ha conseguido mejorar tanto la estimación anterior como la que se tenía de la medida!

Filtro de Kalman

- Resumiendo el algoritmo:
- Para $t \in [t_k, t_{k+1})$, se integra usando la medida de los giróscopos, partiendo de la última estimación a posteriori:

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega}, \quad \theta(t_k) = \theta_k^+,$$

- También se propaga la covarianza del error:

$$\dot{P} = Q, \quad P(t_k) = P_k^+,$$

- Al llegar a $t = t_{k+1}$, se obtiene de estas ecuaciones $\theta_{k+1}^- = \theta(t_{k+1})$ y P_{k+1}^-, y se obtiene una medida externa $\hat{\theta}_{k+1}^{med}$. Aplicamos el filtro de Kalman:

$$\hat{\theta}_{k+1}^+ = \hat{\theta}_{k+1}^- + K(\hat{\theta}_{k+1}^{med} - \hat{\theta}_{k+1}^-),$$

  donde $K = \frac{P_{k+1}^-}{P_{k+1}^- + R}$, y también obtenemos $P_{k+1}^+ = \frac{P_{k+1}^- R}{P_{k+1}^- + R}$.
- Repetimos y volvemos a integrar las ecuaciones diferenciales hasta la nueva medida en $t = t_{k+2}$.

Filtro de Kalman: casos extremos

- Si la medida del giróscopo es muy mala, es decir, Q es muy grande, entonces $P_k^- \to \infty$, y se puede ver que $P_k^+ \to R$, $K \to 1$, y por tanto $\theta_k^+ = \theta_k$ (es decir se coge la medida del sensor externo despreciando el resultado de integrar la ecuación diferencial).
- Si la medida del sensor externo es muy mala, es decir, R es muy grande, entonces se puede ver que $P_k^+ \to P_k^-$, $K \to 0$, y por tanto $\theta_k^+ = \theta_k^-$ (es decir se coge la estimación resultado de integrar la ecuación diferencial despreciando la medida del sensor externo).
- Si resulta que $P_k^- = R$, es decir, la estimación a priori tiene el mismo error que es sensor externo, entonces se puede ver que $P_k^+ = R/2$, $K \to 1/2$, y por tanto $\theta_k^+ = \frac{\theta_k + \theta_k^-}{2}$ (es decir se toma la media entre la estimación resultado de integrar la ecuación diferencial y la medida del sensor externo).

Filtro de Kalman: otras consideraciones

- Se ha simplificado considerablemente el Filtro de Kalman al considerar un caso 1-D que es lineal. El caso N-D es similar pero más complejo ya que implica diversos productos e inversiones matriciales. No obstante conceptualmente es lo mismo: se integra la ecuación diferencial con los giróscopos y al obtener una medida externa se aplica el algoritmo de Kalman para ponderar entre la estimación a priori y la medida.
- Para aplicar el filtro de Kalman es suficiente una medida, pero cuantas más se tenga, mejor será el resultado.
- Si el sistema es no lineal hay que empezar por linealizarlo; el filtro resultante se denomina Filtro Extendido de Kalman. Para estimación de actitud esto es necesario ya que las ecuaciones diferenciales cinemáticas son siempre no-lineales.
- Para aeronaves y misiles se usa filtrado de Kalman para integrar las medidas de la IMU (giróscopos y acelerómetros) con medidas externas (GPS, antenas, magnetómetros).

Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Vamos a desarrollar ahora el algoritmo del Filtro de Kalman en 3D para el siguiente caso:
  1. Se tienen giróscopos en los 3 ejes, de forma que se tiene una estimación de la velocidad angular $\hat{\vec{\omega}}^B_{B/N}$, que contendrá error, de forma que $\vec{\omega}^B_{B/N} = \hat{\vec{\omega}}^B_{B/N} + \vec{\nu}$, donde $\vec{\nu}$ es ruido blanco de covarianza Q. Estas medidas se suponen continuas.
  2. Cada cierto tiempo se obtienen medidas de n direcciones en ejes cuerpo $\hat{\vec{v}}_i^B$, de forma que $\vec{v}_i^B = C_N^B \vec{v}_i^N$ y $\vec{v}_i^B = \hat{\vec{v}}_i^B + \vec{\epsilon}_i$ para $i = 1, \ldots, n$. $\vec{\epsilon}_i$ es ruido blanco de covarianza R_i.
- Se podrían realizar estimaciones con los giróscopos o con las medidas por separado. Con las medidas ya lo hemos visto (algoritmo Q) pero sólo se podría hacer si hubiera dos o más medidas tomadas a la vez.
- Con los giróscopos, la estimación sería $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} q \star q_{\hat{\vec{\omega}}}$.

Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Si uno usa $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} q \star q_{\hat{\vec{\omega}}}$, ¿cuál es el error de estimación sabiendo que $\hat{\vec{\omega}}$ está corrompida con ruido blanco de covarianza Q?
- No podemos aplicar la teoría general porque la ecuación es no-lineal!
- Recordamos los conceptos de cuaternión linealizado y ecuación cinemática linealizada: $q = \hat{q} \star \delta q$, con

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{a}} \approx \vec{\nu} + \vec{a} \times \hat{\vec{\omega}} = -\hat{\vec{\omega}}^{\times} \vec{a} + \vec{\nu}.$$

- Por tanto con el cuaternión de error podemos estimar cuanto error se está cometiendo, estudiando su covarianza P, la cual evolucionará de acuerdo con la teoría que hemos planteado antes:

$$\dot{P} = -\hat{\vec{\omega}}^{\times} P + P \hat{\vec{\omega}}^{\times} + Q, \quad P(0) = P_0$$

Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Esta covarianza crece sin límite, lo cuál sólo podemos remediarlo tomando medidas. Si en un cierto instante tomamos n medidas, ¿cómo actualizamos el cuaternión estimado $\hat{q}$?
- Una posibilidad sería descartar totalmente lo obtenido con los giróscopos, de forma que se resetea la estimación a un nuevo valor (sólo posible si se tienen dos o más medidas), usando el algoritmo Q. En tal caso la nueva covarianza sería la estudiada con el algoritmo Q.
- Una mejor idea sería aprovechar la estimación que ya teníamos y combinarlas de acuerdo al filtro de Kalman. Para ello hay que linealizar el proceso de medida.
- Supongamos que tenemos n medidas $\vec{v}_i^B$ en ejes cuerpo de direcciones conocidas en ejes inerciales $\vec{v}_i^N$.

Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Partiendo del cuaternión estimado $\hat{q}$ puedo obtener la matriz $\hat{C}_N^B$.
- Llamamos $\vec{z}_i$ a la discrepancia entre lo medido y lo esperado, es decir, $\vec{z}_i = \hat{\vec{v}}_i^B - \hat{C}_N^B \vec{v}_i^N$. Si la estimación y la medida fueran perfectas entonces $\vec{z}_i = \vec{0}$.
- La medida no es perfecta, está contaminada con ruido: $\hat{\vec{v}}_i^B = \vec{v}_i^B - \vec{\epsilon}_i$.
- La estimación no es perfecta, sino que $\hat{C}_N^B = C_N^{\hat{B}} = C_B^{\hat{B}} C_N^B$.
- Por tanto, se tendrá $\vec{z}_i = \vec{v}_i^B - C_B^{\hat{B}} \vec{v}_i^B - \vec{\epsilon}_i$.
- Recordando que en función del cuaternión de error, $C_B^{\hat{B}} = I - \vec{a}^\times$, obtenemos $\vec{z}_i = -\vec{a}^\times \vec{v}_i^B - \vec{\epsilon}_i = (\vec{v}_i^B)^\times \vec{a} - \vec{\epsilon}_i$.
- Por tanto tendremos n medidas del error de la forma $\vec{z}_i = H_i \vec{a} - \vec{\epsilon}_i$, donde $H_i \approx (\hat{\vec{v}}_i^B)^\times$. (NOTA: se tomarán sólo dos filas para evitar problemas de invertibilidad). La covarianza de esta medida será R_i.

Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Llamemos al instante antes de la medida con el superíndice $-$ y el posterior con $+$. De la integración teníamos por un lado $\hat{q}^-$ con error a^- cuya media es $E[\vec{a}^-] = 0$ y covarianza P^-.
- Con las medidas, supuestas independientes, formamos

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_n \end{bmatrix}$$

- Usando las medidas, escribimos $\vec{a}^+ = \vec{a}^- + K(\vec{z} - H\vec{a}^-)$, pero puesto que en media $\vec{a}^- = 0$, simplemente tendremos: $\vec{a}^+ = K\vec{z}$, donde K es la ganancia de Kalman.
- La ganancia de Kalman (óptima) se calcula como $K = P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1}$. La covarianza se actualiza también como $P^+ = P^- - KHP^-$.
- Con $\vec{a}^+$ corregimos $\hat{q}$:$\hat{q}^+ = \hat{q}^- \star \delta q = \hat{q}^- \star \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a}^+ \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+\|\vec{a}^+\|^2}}$
- Este procedimiento se itera, integrando con los giróscopos y actualizando cada vez que hay medidas.

Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Resumen. Datos iniciales: $\hat{q}_0$, P_0, Q, R_i. Siempre se tienen medidas de $\hat{\vec{\omega}}$. Ocasionalmente se tienen medidas $\vec{z}_i$.
  1. Comenzar integrando las ecuaciones hasta que haya una medida, de forma que se estiman $\hat{q}$ y P:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2} q \star q_{\hat{\vec{\omega}}}, \quad q(0) = q_0, \\ \dot{P} &= -\hat{\vec{\omega}}^{\times} P + P \hat{\vec{\omega}}^{\times} + Q, \quad P(0) = P_0 \end{aligned}$$

  2. Cuando en el instante t_k llegan una o más medidas, llamar $\hat{q}^- = \hat{q}(t_k)$ y $P^- = P(t_k)$. Calcular $\vec{z}$, H, R. Calcular $K = P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1}$. Calcular $\vec{a}^+ = K\vec{z}$. Actualizar $\hat{q}^+ = \hat{q}^- \star \delta q = \hat{q}^- \star \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a}^+ \end{bmatrix}$, $P^+ = P^- - KHP^-$.
  3. Continuar integrando las ecuaciones a partir de las estimaciones actualizadas hasta que haya más medidas:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2} q \star q_{\hat{\vec{\omega}}}, \quad q(t_k) = q^+, \\ \dot{P} &= -\hat{\vec{\omega}}^{\times} P + P \hat{\vec{\omega}}^{\times} + Q, \quad P(t_k) = P^+ \end{aligned}$$

  4. Cuando haya nuevas medidas, iterar a partir de 2.

Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Consideraciones adicionales:
  - Conviene renormalizar los cuaterniones estimados $\hat{q}(t)$ si el módulo se alejara de la unidad.
  - Igualmente, la matriz de covarianzas $P(t)$ debe ser simétrica en todo momento. Se puede "simetrizar" forzando $P = 1/2(P + P^T)$, o se puede simplemente calcular sólo la "mitad" de la matriz e imponer que la otra mitad es la traspuesta.
  - La ganancia de Kalman es óptima, pero está calculada para el problema linealizado. Si la estimación no está suficientemente cerca de la realidad, el filtro puede diverger.
  - Se pueden (y se deben) incluir los sesgos (bias) de los giróscopos en el estimador.
  - En la práctica es difícil conocer bien las matrices Q y R.
- Existen muchos otros algoritmos de filtrado, con sus ventajas e inconvenientes. El MEKF tiene la ventaja de ser sencillo en su uso y flexible a cualquier número de medidas, pero no es necesariamente el más preciso.