

Maniobras óptimas de actitud básicas en torno a un eje de simetría

En estas notas se pretende responder al siguiente problema: dada una actitud inicial A (dada por el cuaternión q_0) una actitud final B (dada por el cuaternión q_1), se pretende rotar el vehículo desde la actitud A hasta la B, de forma que al principio y al final de la maniobra el vehículo se encuentre en reposo (velocidad angular nula).

En primer lugar, usando los conceptos aprendidos de “interpolación” de actitudes, podemos obtener el giro más corto para llegar de A a B. Para ello, calculamos el cuaternión de rotación entre A y B: $q_R = q_0^* \star q_1$, y de dicho cuaternión obtenemos el eje y ángulo de Euler, $\vec{e}$ y θ_F . Por tanto para pasar de A a B hay que girar un ángulo θ_F en torno al eje $\vec{e}$. Por tanto la velocidad angular la definimos como $\vec{\omega} = \omega(t)\vec{e}$, ya que el eje es fijo durante la maniobra. La parte final del problema se reduce a encontrar $\omega(t)$. Sea θ el ángulo girado en torno al eje, supongamos que el tiempo de maniobra es T , que se puede ejercer un par M en el eje encontrado y que la inercia en dicho eje es I . Para simplificar consideremos que se trata de un eje de simetría. Por tanto, la dinámica del problema es

$$\dot{\theta} = \omega, \quad I\dot{\omega} = M$$

y las condiciones establecidas en el enunciado son:

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(T) = \theta_F, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(T) = 0$$

Este problema se resolverá para dos casos básicos, extremos entre sí:

1. Realizar la maniobra en el tiempo mínimo. Por tanto T es una incógnita, lo denotamos por T_{min} . El dato necesario es el par máximo aplicable (M_{max}), que debe ser positivo, y el par mínimo aplicable (M_{min}), que debe ser negativo.
2. Realizar la maniobra con mínima energía, es decir minimizar $\int_0^T M^2(\tau)d\tau$. En este caso T es dato, y suponemos que el par no está limitado para simplificar el problema.

1. Maniobra de tiempo mínimo con pares máximo/mínimo simétricos

Partimos inicialmente de la base de que $M_{min} = -M_{max}$. Intuitivamente, la maniobra requerirá aplicar durante la mitad del tiempo el par máximo, y durante el resto del tiempo el par mínimo.

Por tanto el valor del par y de la velocidad angular es:

$$M(t) = \begin{cases} M_{max}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ -M_{max}, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$
$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{M_{max}}{I}t, & 0 \leq t \leq T/2 \\ \frac{M_{max}}{I}T/2 - \frac{M_{max}}{I}(t - T/2), & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Integrando la velocidad angular para hallar el ángulo:

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{M_{max}}{I} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ \frac{M_{max}}{I} \frac{(T/2)^2}{2} + \frac{M_{max}}{I} T/2 (t - T/2) - \frac{M_{max}}{I} \frac{(t - T/2)^2}{2}, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Finalmente, en $t = T$, el ángulo será:

$$\begin{aligned} \theta_F &= \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2}{8} + \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2}{4} - \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2}{8} \\ &= \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2}{4} \end{aligned}$$

Despejando el tiempo:

$$T_{min} = \sqrt{\frac{4I\theta_F}{M_{max}}}$$

Esta maniobra se puede ver en la figura 1. De hecho es posible calcular el tiempo gráficamente: la integral de la velocidad angular, es decir, el área bajo la curva, debe ser el ángulo total girado. Por tanto usando el área de un triángulo es posible deducir rápidamente la fórmula anterior.

2. Maniobra de mínima energía

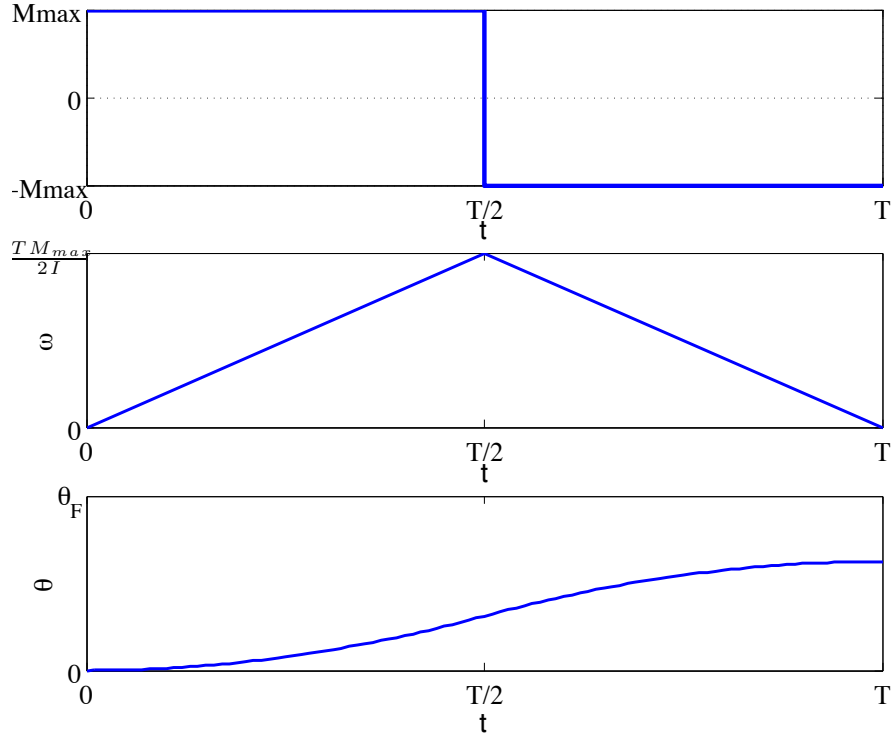


Figura 1: Maniobra de tiempo mínimo con pares máximo y mínimo simétricos entre sí.

Si no hay restricciones, se puede deducir del cálculo de variaciones que el par que minimiza la energía total consumida es lineal, de forma que la velocidad angular es cuadrática: $\omega(t) = A + Bt + Ct^2$. De las restricciones $\omega(0) = \omega(T) = 0$ obtenemos:

$$A = 0, B = -CT$$

Por tanto la velocidad angular es $\omega(t) = Ct(t - T)$. Finalmente, integrando la ecuación diferencial de θ obtenemos:

$$\theta_F = \int_0^T \omega(\tau) d\tau = C \int_0^T t(t - T) dt = C \left(\frac{T^3}{3} - \frac{T^3}{2} \right) = -C \frac{T^3}{6}$$

de donde $C = -\frac{6\theta_F}{T^3}$, obteniendo finalmente:

$$\omega(t) = \frac{6\theta_F}{T^3} t(T - t)$$

Podemos calcular igualmente el par y ángulo girado en el tiempo:

$$M(t) = \frac{6I\theta_F}{T^3} (T - 2t), \quad \theta(t) = \frac{\theta_F}{T^3} t^2 (3T - 2t)$$

Esta maniobra se puede ver en la figura 2.

Nota: Maniobra de tiempo mínimo con pares desiguales

Intuitivamente, la maniobra requerirá aplicar durante una fracción α de T el par máximo, y durante el resto del tiempo (una fracción $(1 - \alpha)$ de T) el par mínimo. Para calcular α , es necesario aplicar el hecho de que la velocidad angular debe ser cero al final de la maniobra.

Tras un tiempo αT aplicando el par máximo, se tendría $\omega(\alpha T) = \frac{M_{max}}{I} \alpha T$. Si ahora aplicamos el par mínimo durante un tiempo $(1 - \alpha)T$, encontramos que:

$$\omega(T) = \omega(\alpha T) + \frac{M_{min}}{I} (1 - \alpha)T = \frac{M_{max}}{I} \alpha T + \frac{M_{min}}{I} (1 - \alpha)T = \frac{T}{I} (\alpha M_{max} + (1 - \alpha) M_{min})$$

como esta cantidad debe ser cero, T o I no juegan ningún papel y encontramos, despejando α :

$$\alpha = \frac{-M_{min}}{M_{max} - M_{min}}$$

Como M_{max} es positivo y M_{min} es negativo α está bien definida. Obsérvese que si $M_{min} = -M_{max}$ obtenemos $\alpha = 1/2$ como era de esperar.

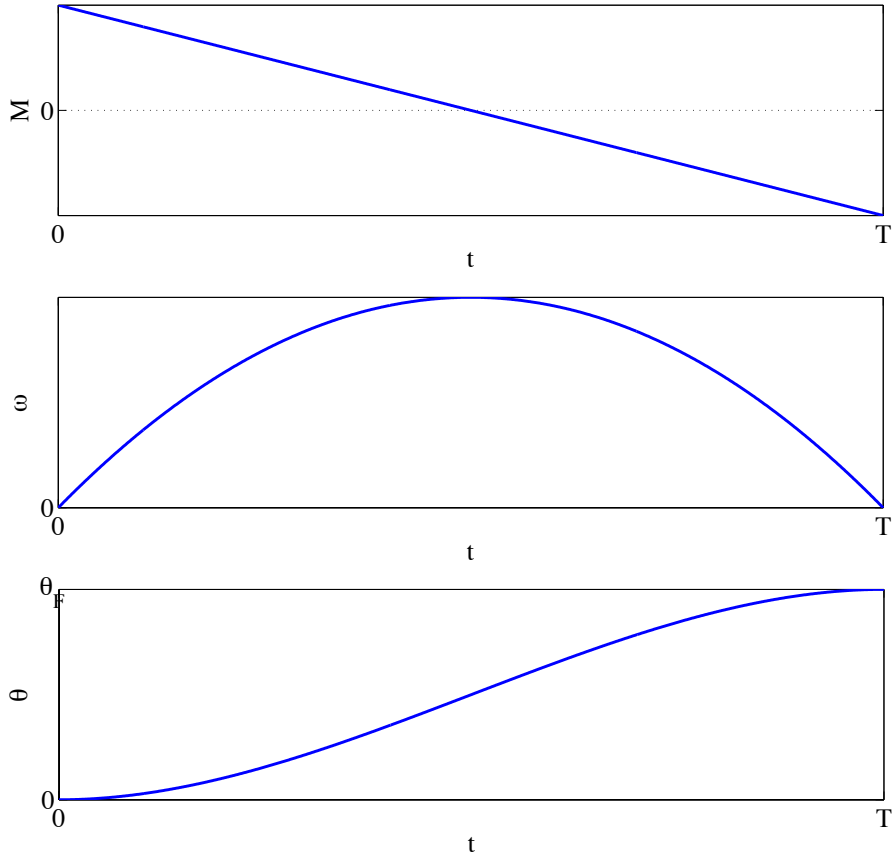


Figura 2: Maniobra de energía mínima en tiempo T .

Por tanto el valor del par y de la velocidad angular es:

$$M(t) = \begin{cases} M_{max}, & 0 \leq t \leq \alpha T \\ M_{min}, & \alpha T \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{M_{max}}{I} t, & 0 \leq t \leq \alpha T \\ \frac{M_{max}}{I} \alpha T + \frac{M_{min}}{I} (t - \alpha T), & \alpha T \leq t \leq T \end{cases}$$

Integrando la velocidad angular para hallar el ángulo:

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{M_{max}}{I} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \alpha T \\ \frac{M_{max}}{I} \frac{(\alpha T)^2}{2} + \frac{M_{max}}{I} \alpha T (t - \alpha T) + \frac{M_{min}}{I} \frac{(t - \alpha T)^2}{2}, & \alpha T \leq t \leq T \end{cases}$$

Finalmente, en $t = T$, el ángulo será:

$$\begin{aligned} \theta_F &= \frac{M_{max}}{I} \frac{(\alpha T)^2}{2} + \frac{M_{max}}{I} \alpha T (T - \alpha T) + \frac{M_{min}}{I} \frac{(T - \alpha T)^2}{2} \\ &= \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2 \alpha (2 - \alpha)}{2} + \frac{M_{min}}{I} \frac{T^2 (1 - \alpha)^2}{2} \\ &= \frac{T^2}{2I} (M_{max} \alpha (2 - \alpha) + M_{min} (1 - \alpha)^2) \\ &= \frac{T^2}{2I} \left(M_{max} \frac{-M_{min}}{M_{max} - M_{min}} \left(\frac{2M_{max} - M_{min}}{M_{max} - M_{min}} \right) + M_{min} \left(\frac{M_{max}}{M_{max} - M_{min}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{T^2}{2I} \frac{-M_{max} M_{min}}{(M_{max} - M_{min})^2} (2M_{max} - M_{min} - M_{max}) \\ &= \frac{T^2}{2I} \frac{-M_{max} M_{min}}{(M_{max} - M_{min})} \end{aligned}$$

Donde se ha sustituido el valor hallado de α .

Despejando el tiempo:

$$T_{min} = \sqrt{\frac{2I\theta_F(M_{max} - M_{min})}{-M_{max}M_{min}}}$$

Para el caso $M_{min} = -M_{max}$ corroboramos el resultado anterior obteniendo:

$$T_{min} = \sqrt{\frac{4I\theta_F}{M_{max}}}$$

Esta maniobra se puede ver en la figura 3. Las fórmulas obtenidas se pueden también conseguir de forma gráfica como en el caso de pares máximo y mínimo simétricos.

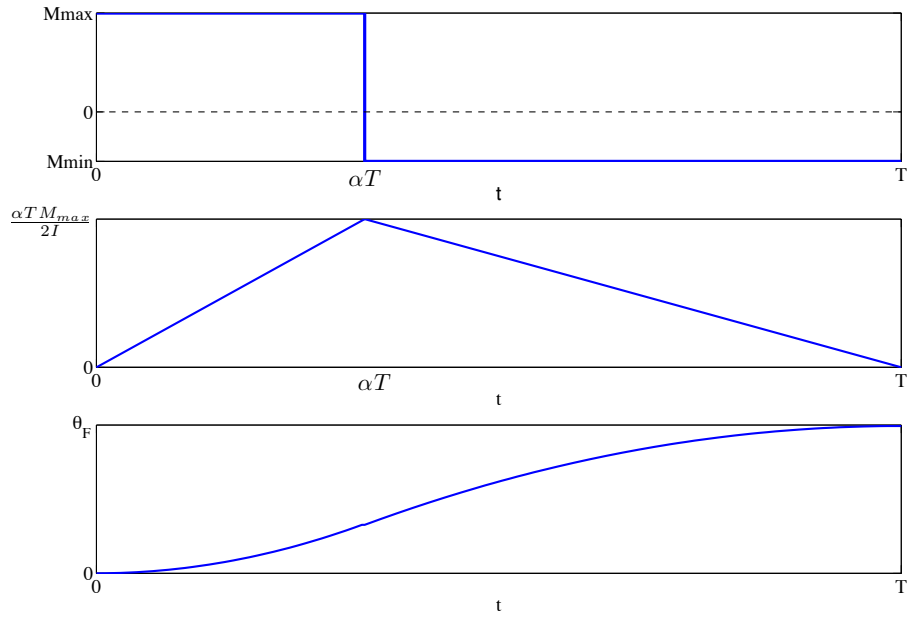


Figura 3: Maniobra de tiempo mínimo con pares máximo y mínimo asimétricos entre sí.