Dinámica de Vehículos Espaciales

Tema 3: Determinación de actitud. Sensores

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla rvazquez1@us.es

23 de febrero de 2017

Determinación de la actitud

- La determinación (estática) de actitud require del uso de sensores de actitud y algoritmos apropiados a los sensores disponibles.
- Los sensores de determinación de actitud, en general son sensores que determinan un vector $\vec{v}$ en los ejes cuerpo, es decir, $\vec{v}^B$ (en realidad lo determinan en los "ejes sensor", pero la transformación a ejes cuerpo es conocida). Además dicho vector se supone conocido en los ejes de referencia (inerciales u órbita), es decir, $\vec{v}^N$ es conocido. Es necesario tener dos o más medidas simultáneas para poder resolver el problema sólo con este tipo de sensores.
- Más adelante veremos sensores que miden la velocidad angular $\vec{\omega}^B$ para la estimación dinámica de la actitud.

Estimación a partir de observaciones

- En primer lugar consideramos el caso de que tenemos n (2 o más) sensores que determinan un vector $\vec{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, en los ejes cuerpo, es decir, $\vec{v}_i^B$, que es conocido en los ejes de referencia (inerciales u órbita), es decir, $\vec{v}_i^N$ es conocido. Puesto que sólo importan las direcciones de los vectores, los consideramos unitarios.
- Por tanto tenemos n ecuaciones de la forma $\vec{v}_i^B = C_N^B \vec{v}_i^N$ y tenemos que "despejar" la matriz C_N^B.
- Para simplificar notación escribamos $\vec{W}_i = \vec{v}_i^B$, $\vec{V}_i = \vec{v}_i^N$, $A = C_N^B$. Por tanto tenemos n ecuaciones $\vec{W}_i = A\vec{V}_i$ y es necesario calcular A.
- En general estos vectores pueden contener errores.
- En el caso de tener 2 vectores, se puede usar un método sencillo llamado método TRIAD. También veremos métodos más generales que sirve para $n \geq 2$.

Método TRIAD

- Partimos de las dos ecuaciones $\vec{W}_1 = A\vec{V}_1$ y $\vec{W}_2 = A\vec{V}_2$
- Definamos los siguientes vectores: $\vec{r}_1 = \vec{V}_1$, $\vec{r}_2 = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2|}$, y $\vec{r}_3 = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{V}_1 \times \vec{r}_2|}$. Similarmente: $\vec{s}_1 = \vec{W}_1$, $\vec{s}_2 = \frac{\vec{W}_1 \times \vec{W}_2}{|\vec{W}_1 \times \vec{W}_2|}$, y $\vec{s}_3 = \frac{\vec{W}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{W}_1 \times \vec{s}_2|}$. Está claro que se cumplirá, por construcción: $\vec{s}_1 = A\vec{r}_1$, $\vec{s}_2 = A\vec{r}_2$, y $\vec{s}_3 = A\vec{r}_3$.
- Construimos ahora las matrices $M_{ref} = [\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3]$ y $M_{obs} = [\vec{s}_1\ \vec{s}_2\ \vec{s}_3]$. Se cumple $M_{obs} = AM_{ref}$. Además las columnas de la matriz M_{ref} son, por construcción, ortornormales, luego M_{ref} es invertible y además ortogonal. Por tanto: $A = M_{obs}M_{ref}^T$.
- Obsérvese que el método no es simétrico, sino que da más "peso" a la medida número 1. Por tanto habrá que usar como primera medida la más "fiable". En la práctica no se obtendrá la matriz exacta por los errores en los sensores.

Problema de Wahba

- Ahora tenemos n medidas cumpliendo $\vec{W}_i = A\vec{V}_i$. Planteamos el problema como un problema de mínimos cuadrados.
- Formulamos la función $L(A) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i |\vec{W}_i - A\vec{V}_i|^2$, donde a_i son los pesos que se le da a cada medida (cumpliendo $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$) y planteamos el objetivo matemático de encontrar A (ortogonal) tal que $L(A)$ sea mínimo. En la literatura esto se conoce como el **"Problema de Wahba"**.
- Puesto que, operando:

$$|\vec{W}_i - A\vec{V}_i|^2 = (\vec{W}_i - A\vec{V}_i)^T(\vec{W}_i - A\vec{V}_i) = 2 - 2\vec{W}_i{}^T A\vec{V}_i,$$

tenemos que:

$$L(A) = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i{}^T A\vec{V}_i = 1 - g(A),$$

donde $g(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i{}^T A\vec{V}_i$. Minimizar $L(A)$ equivale a maximizar $g(A)$.

Método q de Davenport

- Escribiendo A en función de q con la ecuación de Euler-Rodrigues $A = (q_0^2 - \vec{q}^T\vec{q})\mathrm{I} + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_0\vec{q}^\times$ se llega a

$$g(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T (q_0^2 - \vec{q}^T\vec{q})\vec{V}_i + 2\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T \vec{q}\vec{q}^T\vec{V}_i - 2\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{q}^\times \vec{V}_i$$

- Desarrollemos cada término para intentar llegar a una forma bilineal $g(q) = q^T K q$:
  - Empezando por el segundo término:

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T \vec{q}\vec{q}^T\vec{V}_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{q}^T \vec{W}_i \vec{V}_i^T \vec{q} = 2\vec{q}^T B\vec{q} = \vec{q}^T (B + B^T)\,\vec{q}$$

    donde $B = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T$.
  - El primer término se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T (q_0^2 - \vec{q}^T\vec{q})\vec{V}_i = (q_0^2 - \vec{q}^T\vec{q}) \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i = q_0\sigma q_0 - \vec{q}^T(\sigma\mathrm{I})\vec{q}$$

    donde $\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i = \mathrm{Tr}(B)$.

Método q de Davenport

- Finalmente, el último término se puede escribir:

$$-2\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{q}^{\times} \vec{V}_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{V}_i^{\times} \vec{q} = 2q_0 \vec{z}^T \vec{q} = q_0 \vec{z}^T \vec{q} + \vec{q}^T \vec{z} q_0$$

  donde $\vec{z}^T = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i^{\times}$, luego $\vec{z} = -\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{V}_i^{\times} \vec{W}_i$.
- Se tiene que $(\vec{a}^{\times}\vec{b})^{\times} = \vec{b}\vec{a}^T - \vec{a}\vec{b}^T$, lo que se demuestra usando la identidad de $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. Observemos que

$$\vec{z}^{\times} = -\sum_{i=1}^{n} a_i (\vec{V}_i^{\times} \vec{W}_i)^{\times} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{V}_i \vec{W}_i^T - \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T = B^T - B$$

Método q de Davenport

- Luego se ha llegado a:

$$g(q) = q^T K q$$

donde la matriz K se escribe completamente a partir de $B = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathrm{Tr}(B), \\ S &= B + B^T, \\ \vec{z}^{\times} &= B^T - B \end{aligned}$$

siendo K una matriz 4×4 igual a:

$$K = \begin{bmatrix} \sigma & \vec{z}^T \\ \vec{z} & S - \sigma \mathrm{Id} \end{bmatrix}$$

Método q de Davenport

- Por tanto el problema se reduce a encontrar q (cuaternión válido de actitud, es decir, de norma 1) tal que $g(q) = q^T K q$ sea máximo.
- Problema de maximización con restricciones ($q^T q = 1$). Usamos multiplicadores de Lagrange, escribiendo:

$$H = q^T K q - \lambda(q^T q - 1)$$

- Tomando derivada respecto a q e igualando a cero:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 2q^T K - 2\lambda q^T = 0 \quad \longrightarrow \quad Kq = \lambda q,$$

- Por tanto λ debe ser un autovalor de K y q el autovector asociado (de módulo 1). ¿Cuál? Sustituyendo en $g(q)$:

$$g(q) = q^T K q = q^T \lambda q = \lambda$$

- Por tanto, el cuaternión solución del problema será el autovector (de módulo 1) asociado al mayor autovalor!

Método QUEST

- Si bien el método q de Davenport reduce el problema a uno de autovalores y autovectores, este problema algebraico puede ser problemático en un computador a bordo de un satélite.
- En 1978 se desarrolló el método QUEST (QUaternion ESTimator) que evita este cálculo.
- El problema de encontrar $Kq = \lambda q$ se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \sigma & \vec{z}^T \\ \vec{z} & S - \sigma \mathrm{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix}$$

- Es decir, dos ecuaciones:

$$\sigma q_0 + \vec{z}^T \vec{q} = \lambda q_0, \quad q_0 \vec{z} + S\vec{q} - \sigma \vec{q} = \lambda \vec{q}$$

- Recordando el vector de Gibbs $\vec{g} = \frac{\vec{q}}{q_0}$, la 2ª ecuación queda:

$$\vec{z} + [S - (\sigma + \lambda)\mathrm{I}]\,\vec{g} = 0$$

- Luego $\vec{g} = [(\sigma + \lambda)\mathrm{I} - S]^{-1}\,\vec{z}$ (pero no conocemos λ, el máximo autovalor)

Método QUEST

- Una primera forma de resolver el problema es suponer $\lambda \approx 1$ (si las medidas son exactas este es el valor que se obtiene). En tal caso: $\vec{g} = [(1+\sigma)\mathrm{I} - S]^{-1}\,\vec{z}$
- Si esto no es una buena aproximación, se puede encontrar una expresión explícita para el autovalor máximo, resolviendo la ecuación característica de la matriz K. Se obtiene:

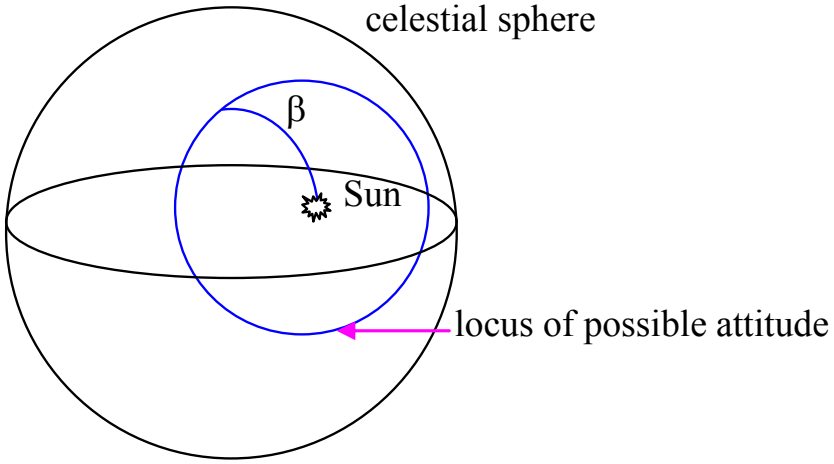
$$\lambda^4 - (a+b)\lambda^2 - c\lambda + (ab + c\sigma - d) = 0$$

- Donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} a &= \sigma - \mathrm{Tr}[\mathrm{adj}(S)], \\ b &= \sigma - \vec{z}^T\vec{z}, \\ c &= \det[S] + \vec{z}^T S\vec{z}, \\ d &= \vec{z}^T S^2 \vec{z}. \end{aligned}$$

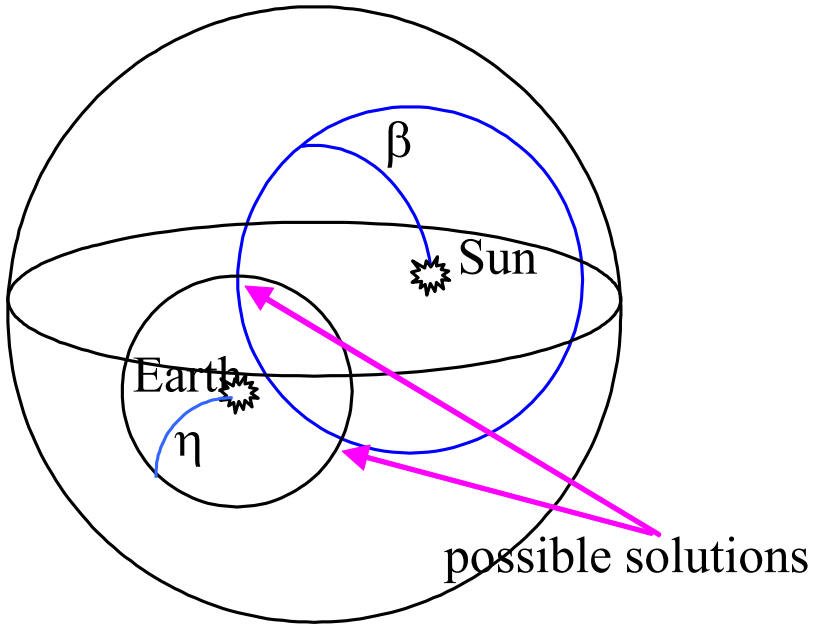
Determinación geométrica de la actitud

- En algunos casos sólo interesa determinar la orientación (inercial) de una dirección del vehículo (por ejemplo, donde se ubica un instrumento o una antena, o el eje de giro).
- En tal caso sería suficiente tener dos sensores que nos permitan estimar el ángulo entre la dirección de interés y astros de referencia (por ejemplo, el sol o la Tierra). Gráficamente, se puede representar considerando la "esfera celeste" en torno al vehículo, encontrando el lugar geométrico de las posibles orientaciones de la dirección.



Determinación geométrica de la actitud

- Con dos cuerpos, existirá una ambigüedad que usualmente puede ser resuelta si se conocía aproximadamente la actitud anterior.



Determinación geométrica de la actitud

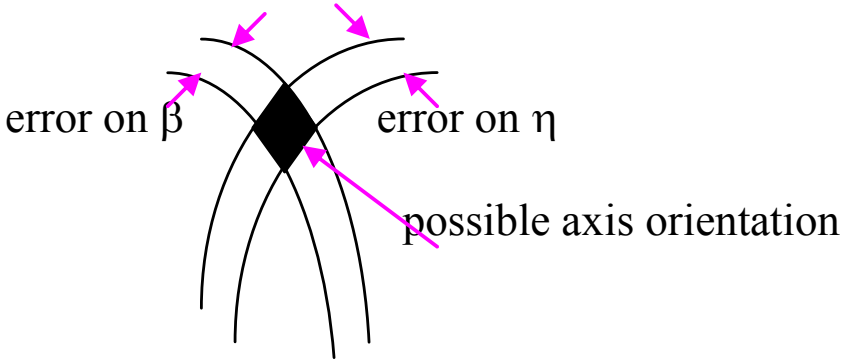
- Si bien el problema se puede resolver geométricamente, es sencillo plantear su resolución analítica usando la trigonometría esférica (distancias ortodrómicas).
- Sea AR_1, δ_1 y AR_2, δ_2 las ascensiones rectas y declinaciones de los dos cuerpos de referencia, y β y η los ángulos formados con cada uno de ellos. Si AR y δ es la ascensión recta y declinación hacia la que apunta la dirección de medida, se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_1 + \cos\delta\cos\delta_1\cos(AR - AR_1) \\ \cos\eta &= \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_2 + \cos\delta\cos\delta_2\cos(AR - AR_2) \end{aligned}$$

- Se trata de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo δ y AR se resuelve el problema.

Determinación geométrica de la actitud

- En la práctica existirán errores en ambas medidas, por lo que existirá una región de posibles direcciones:



- Cuanto "menos ortogonal" sea la intersección entre las dos circunferencias esféricas, mayor es la región de incertidumbre. Esto depende de la situación geométrica y no tanto de la precisión de los sensores.
- Por tanto, es importante elegir cuidadosamente las direcciones de referencia, de acuerdo a la geometría.

Sensores

- Existen tres tipos fundamentales de sensores, de acuerdo al fenómeno físico en el que se basan:
  - Ópticos: detectan la dirección relativa de un cuerpo planetario o estelar.
  - Mecánicos: miden la velocidad angular del vehículo respecto a un sistema de referencia inercial. Se usa en estimación dinámica.
  - Magnéticos: sólo se pueden usar en la proximidad (LEO) de planetas con un campo magnético de intensidad suficiente (p.ej. la Tierra).
- Aunque no es técnicamente sencillo, está demostrado que es posible usar el sistema GPS para altitudes desde LEO hasta GEO. Su uso se basa en usar varias antenas receptoras, deduciéndose la actitud de la diferencia en la señal recibida en ambas.
- Típicamente se mezclan varios tipos de sensores mediante un Filtro de Kalman o similar.

Sensores

- Precisión de algunos sensores:

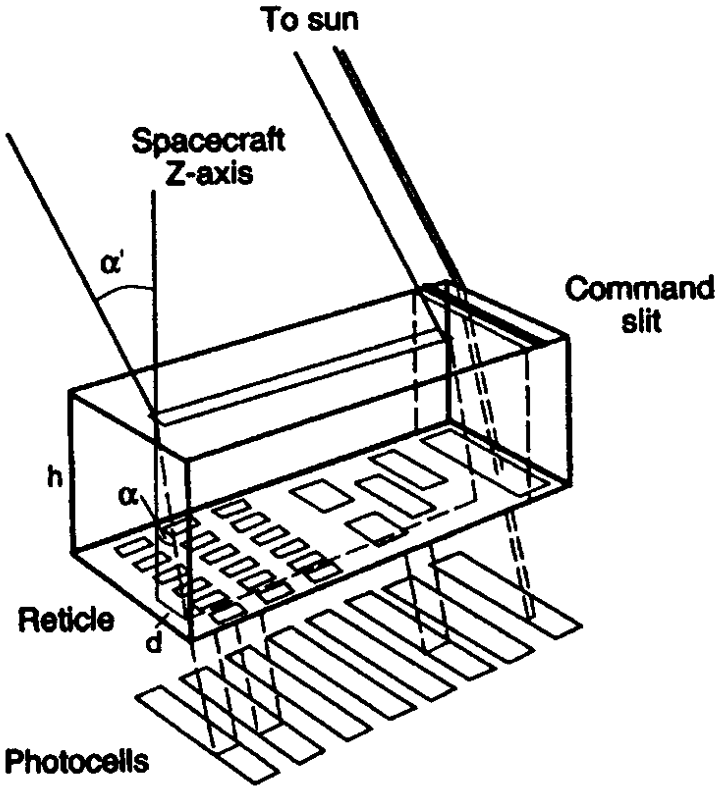
Table 9.3 Potential accuracies of reference sensors

Reference object	Potential accuracy
Stars	1 arc second
Sun	1 arc minute
Earth (horizon)	6 arc minutes
RF beacon	1 arc minute
Magnetometer	30 arc minutes
Narstar Global Positioning System (GPS)	6 arc minutes

Sensores Ópticos

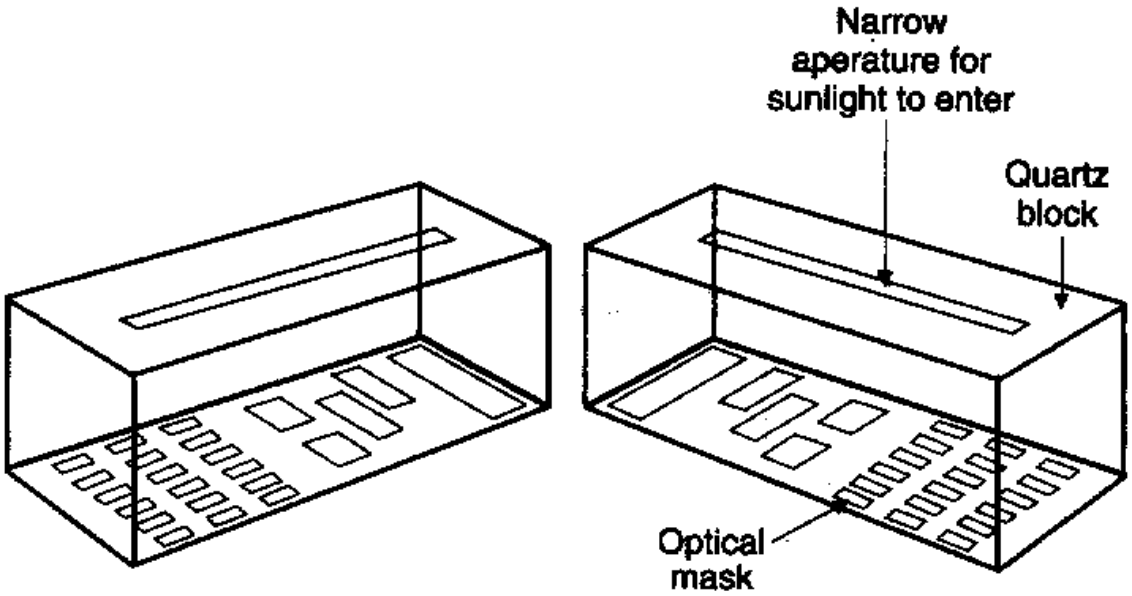
- Un sensor óptico trata de deducir la dirección (respecto al sistema de ejes en el que se encuentra montado, es decir, ejes cuerpo) de un cuerpo planetario o estelar de referencia.
- Típicamente estos cuerpos serán el Sol, la Tierra o una estrella.
- Si bien en general determinan una dirección (es decir dos ángulos), en algunos casos de sensores más sencillo se encuentra un único ángulo.
- Un sólido rígido tiene tres grados de libertad en su actitud, y puesto que típicamente se obtendrán bastantes medidas, el problema de la estimación estará sobre-determinado. Para resolverlo se emplean métodos estadísticos y/o filtros de estimación (p.ej. el Filtro de Kalman, si también se usan giróscopos).

Sensores de radiación solar



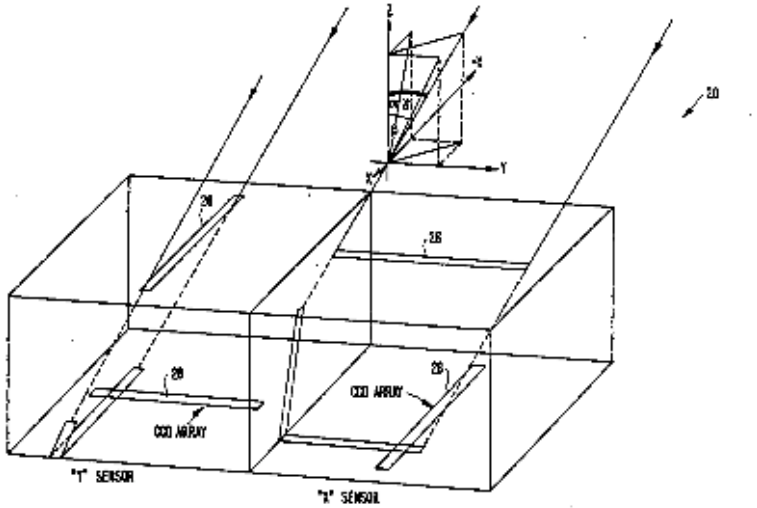
- Sensores de radiación solar: determinan la dirección en la que se encuentra el Sol.
- Consisten en una "cámara oscura", fija al vehículo, y provista de una pequeña ranura de entrada con una retícula de detectores fotoeléctricos al fondo de la cámara.
- Según los detectores de la retícula que se activen, se puede calcular el ángulo de incidencia.

Sensores de radiación solar



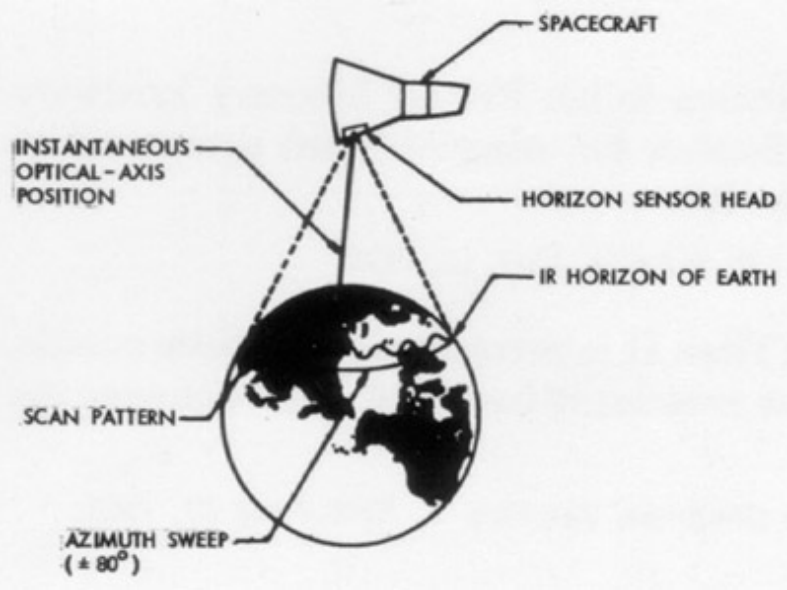
- Un sensor es capaz de determinar un ángulo relativo, para calcular los dos ángulos de una dirección es necesario usar una configuración con dos sensores perpendiculares.
- La precisión máxima es igual al diámetro angular del sol (0.5 grados en LEO).

Sensores digitales de aspecto solar



- Sensores digitales de aspecto solar (DSADs): son similares a los sensores de radiación solar, pero mejoran su precisión.
- Usan una celda de sensores fotoeléctricos más sensibles, capaces de determinar además del ángulo, la intensidad de la radiación incidente.
- Una vez conocida la dirección y ángulo de máxima intensidad, se puede calcular la dirección en la que se encuentra el centroide del Sol, con gran precisión.
- Se obtiene una precisión de segundos de arco.

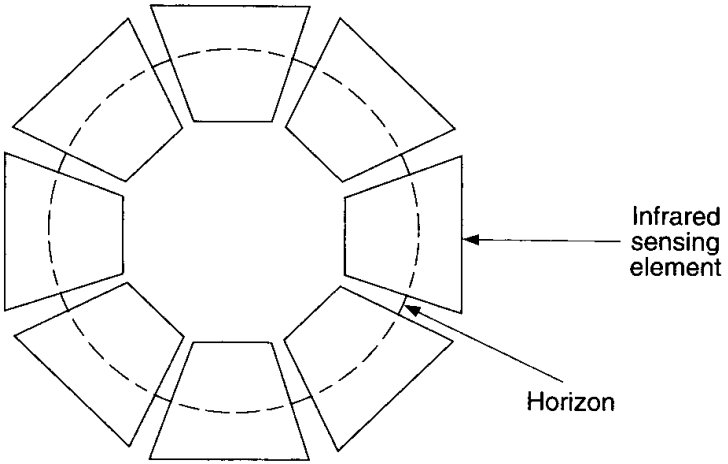
Sensores de horizonte terrestre



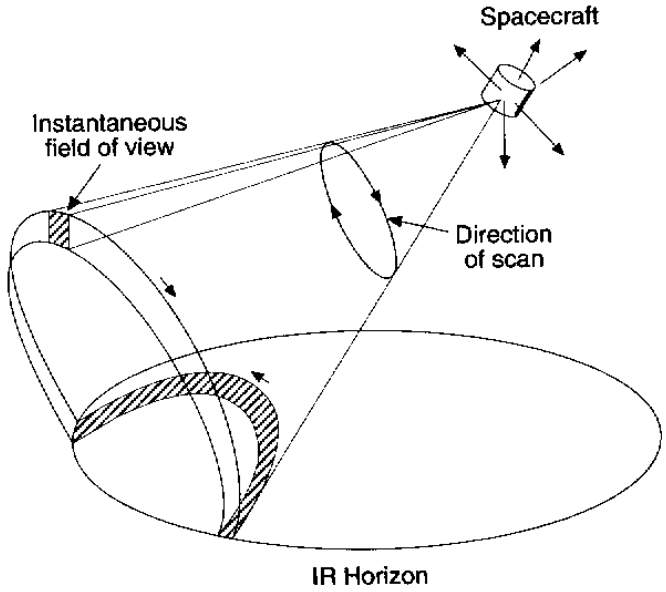
- Sensores de horizonte terrestre: determinan la dirección en la que se encuentra la Tierra.
- Se basan en que la Tierra refleja la radiación solar en el espectro infrarrojo.
- Su precisión está limitada en parte por la imprecisión de la linea de horizonte.

- Existen dos tipos de sensores de horizonte terrestre:
  - Estáticos: detectan el "dibujo" del horizonte terrestre.
  - De barrido: en continua rotación, encuentran cuando empieza y cuando acaba el horizonte.

Sensores de horizonte terrestre

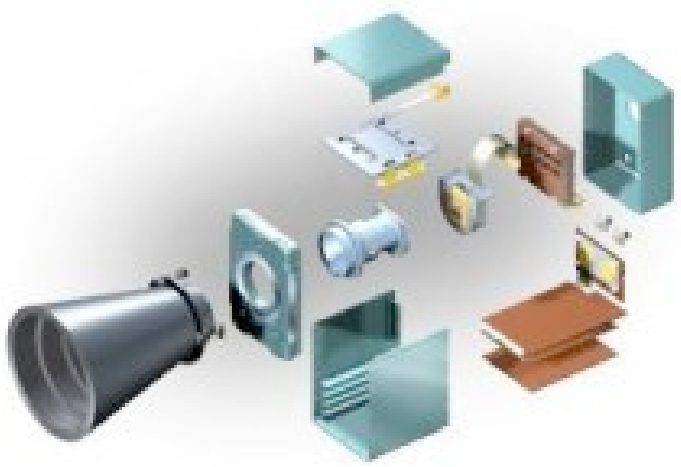


- Sensor de tipo estático.
- Complejo en órbitas excéntricas.
- Su precisión va de 0.1 grados (LEO) a 0.01 grados (GEO).



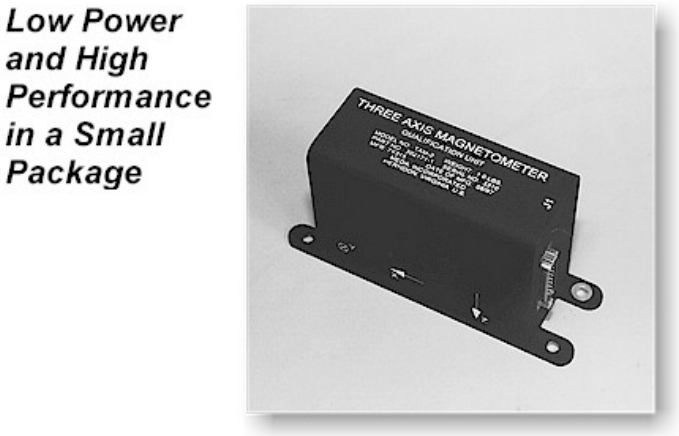
- Sensor de tipo barrido.
- Se calcula el ancho del horizonte en base a cuando aparece y desaparece la señal.
- Precisión variable (minutos de arco o menos).

Sensores de estrellas



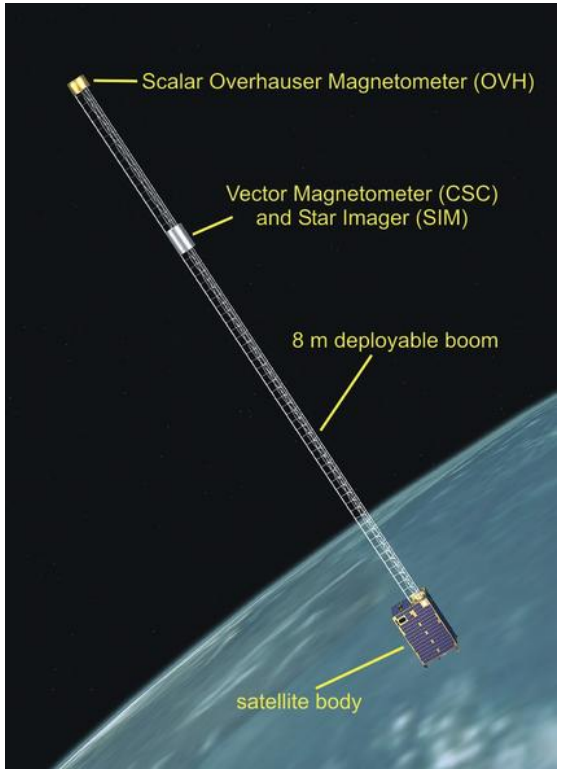
- Sensores de estrellas: determinan la dirección en base a las estrellas. Los más precisos.
- Los star trackers o rastreadores encuentran una estrella concreta, que siguen.
- Las star cameras buscan grupos de estrellas, cuyas posiciones son comparadas con mapas estelares para determinar la actitud.
- Puesto que la intensidad de radiación emitida por una estrella suele ser baja, requieren dispositivos muy sensibles o bien amplificadores.
- No son útiles en vehículos estabilizados por rotación, puesto que a velocidades angulares grandes dejan de ser efectivos.

Sensores magnéticos (magnetómetros)



- Un magnetómetro mide el vector campo magnético en el sistema de referencia ejes cuerpos.
- Se compara con el campo magnético teórico en los ejes fijos de la Tierra, para hallar la actitud.
- No muy precisos por la irregularidad del campo magnético terrestre.

- Satélite Ørsted, medidas precisas del campo magnético terrestre.
- "Boom" (mástil) de 8 metros para minimizar las interferencias del propio satélite en el magnetómetro.

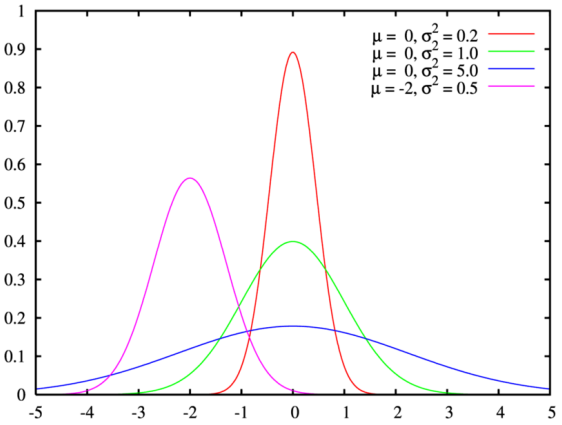


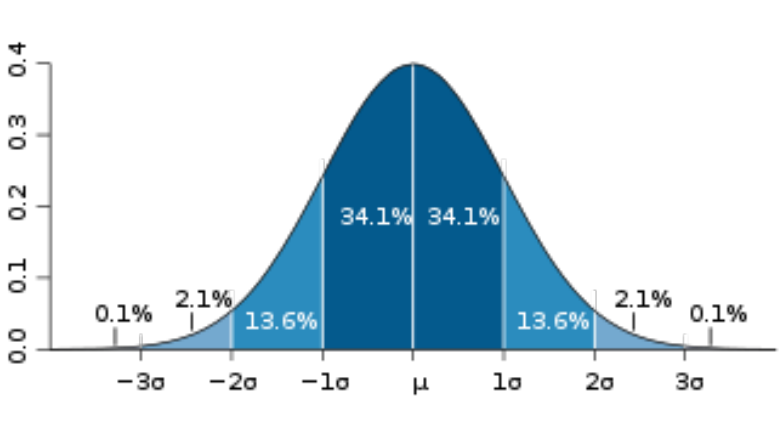
Variables aleatorias continuas unidimensionales

- Sea una variable aleatoria $X \in \mathbb{R}$ continua.
- Recordemos que la función de distribución $F(x)$ es la probabilidad de que $X \leq x$, que se escribe como $F(x) = P(X \leq x)$.
- La función de distribución se calcula mediante la función de densidad $f(x)$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$.
- Se define el operador esperanza matemática actuando sobre la función $g(x)$ como $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)dy$. Se trata de un operador lineal, de forma que $E[\alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X)] = \alpha_1 E[g_1(X)] + \alpha_2 E[g_2(X)]$. Los dos casos importantes son:
  - Media: $m(X) = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$.
  - Varianza: $V(X) = E[(X - m(X))^2] = E[X^2] - (E[X])^2$.
  - Desviación típica σ, la raíz cuadrada de la varianza, $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Distribución normal o gaussiana I

- Es la distribución más usada en estadística. Se escribe $X \sim N(m, \sigma^2)$ y su función de densidad es $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{Exp}\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.
- Intervalos de confianza: si $X \sim N(m, \sigma^2)$:
  - Intervalo 1-σ: $P(X \in [m-\sigma, m+\sigma]) = 68{,}3\,\%$.
  - Intervalo 2-σ: $P(X \in [m-2\sigma, m+2\sigma]) = 95{,}45\,\%$.
  - Intervalo 3-σ: $P(X \in [m-3\sigma, m+3\sigma]) = 99{,}74\,\%$.





Distribución normal o gaussiana II

- El teorema central del límite dice que la suma de variables aleatorias (con cualquier tipo de distribución) tiende en media a la normal. Puesto que los errores a gran escala provienen de la suma y acumulación de muchos errores a pequeña escala, esto justifica el uso de la normal como modelo para errores.
- Una propiedad importante de la normal es que la suma de normales es de nuevo normal, es decir, si $X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(m_y, \sigma_y^2)$ y son independientes, entonces si $Z = X + Y$ se tiene que $Z \sim N(m_x + m_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$.
- Por tanto $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$, es decir, la desviación típica de la suma de errores es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones típicas de los errores.
- Esta regla, conocida como Root-Sum-of-Squares (RSS) es muy importante.

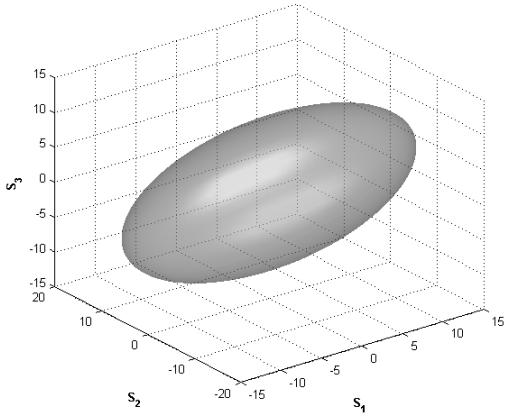
Variables aleatorias continuas multidimensionales

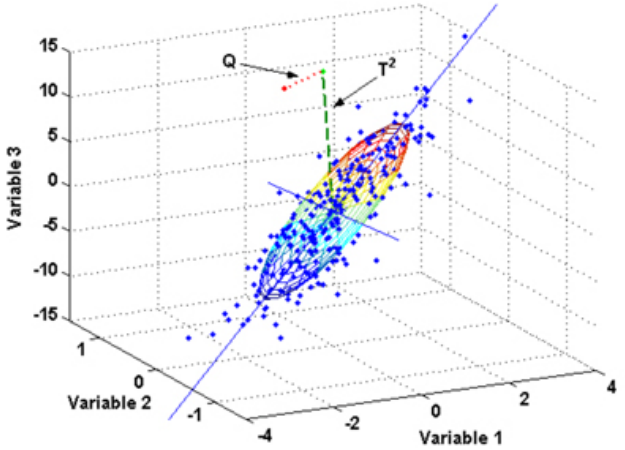
- Sea una variable aleatoria $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ continua multidimensional.
- Cada componente de $\vec{X}$ sigue una distribución unidimensional.
- Como en el caso unidimensional, se define una función de distribución conjunta, que se calcula mediante la función de densidad $f(\vec{x})$.
- Igualmente $E[g(\vec{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{y}) f(\vec{y}) dy$. Los dos casos importantes son:
  - Media: $\vec{m}(\vec{X}) = E[\vec{X}] = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{y} f(\vec{y}) dy$.
  - Covarianza: $Cov(\vec{X}) = E[(\vec{X} - m(\vec{X}))(\vec{X} - m(\vec{X}))^T] = \Sigma$. Es una matriz simétrica y definida positiva. Los valores de la diagonal representan la varianza de cada componente de $\vec{X}$, y los otros valores la correlación entre dos componentes de $\vec{X}$. Se tiene $\Sigma = E[(\vec{X}\vec{X}^T] - m(\vec{X})m(\vec{X})^T$.
- Por ejemplo, para $n = 3$ y escribiendo $\vec{X} = [X, Y, Z]$:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & E[(X - m_x)(Y - m_y)] & E[(X - m_x)(Z - m_z)] \\ E[(X - m_x)(Y - m_y)] & \sigma_y^2 & E[(Y - m_y)(Z - m_z)] \\ E[(X - m_x)(Z - m_z)] & E[(Y - m_y)(Z - m_z)] & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

Distribución normal multivariante I

- Se escribe $\vec{X} \sim N_n(\vec{m}, \Sigma)$ y su función de densidad es $f(\vec{x}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(\Sigma)(2\pi)^{n/2}} \mathrm{Exp}\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{m})\right)$.
- Los intervalos de confianza son ahora regiones de $\mathbb{R}^n$, definidos por $P(\vec{X} \in \Omega) = P_\Omega$.
- La forma de estas regiones de confianza es de elipsoides, descritos por la ecuación $(\vec{x}-\vec{m})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{m}) = d^2$, donde d depende de P_Ω. Cuanto mayores sean los valores de los autovalores de Σ, mayor será el elipsoide. Las direcciones de los ejes del elipsoide vendrán dados por los autovectores de Σ.





Distribución normal multivariante II

- Tomando un ejemplo aeronáutico clásico en navegación aérea, si por ejemplo describimos el error en posición de un avión en ejes cuerpo, $\delta\vec{r}^b = [\delta x\ \delta y\ \delta z]^T$, como una normal multivariante con $n = 3$, de media cero (centrada en el avión) y con matriz de covarianzas:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

- Entonces podemos asimilar el movimiento del avión al movimiento del elipsoide, que representa una región de incertidumbre donde se puede encontrar el avión con gran probabilidad.
- Se verifica que si $\vec{X} \sim N_n(\vec{m}_x, \Sigma_x)$ e $\vec{Y} \sim N_n(\vec{m}_y, \Sigma_y)$ y son independientes, entonces si $\vec{Z} = \vec{X} + \vec{Y}$ resulta $\vec{Z} \sim N_n(\vec{m}_x + \vec{m}_y, \Sigma_x + \Sigma_y)$.
- Igualmente $A\vec{X} + \vec{b}$ donde A y b son no-aleatorios verifica que $A\vec{X} + \vec{b} \sim N_n(A\vec{m}_x + \vec{b}, A\Sigma_x A^T)$.

Matrices de covarianza de los métodos q y TRIAD

- Para el método TRIAD, la matriz C_N^B obtenida contendrá errores. La forma de modelar estos errores es usando un vector "de ángulos pequeños". Denotando $\hat{C}_N^B$ a la matriz estimada, realmente $\hat{C}_N^B = C_n^{\hat{b}}$, donde se tiene que:

$$N \longrightarrow \hat{B} \xrightarrow[x^b]{\delta\phi_x} S_1 \xrightarrow[y^{S_1}]{\delta\phi_y} S_2 \xrightarrow[z^{S_2}]{\delta\phi_z} B$$

- Se tiene entonces $C_N^B = C_{\hat{B}}^B C_N^{\hat{B}}$, por analogía con las definiciones anteriores definimos $\delta C_N^B = C_N^B - \hat{C}_N^B = C_{\hat{B}}^B \hat{C}_N^B - \hat{C}_N^B = (C_{\hat{B}}^B - \mathrm{Id})\hat{C}_N^B$.
- Suponiendo que los errores $\delta\vec{\phi} = [\delta\phi_x \ \delta\phi_y \ \delta\phi_z]^T$ son pequeños, se vio que $C_B^{\hat{B}} = \mathrm{Id} - \delta\vec{\phi}^{\times}$.
- Por tanto, la relación entre la "matriz de error" δC_N^B y $\delta\vec{\phi}$ es $\delta C_N^B = (\mathrm{Id} - \delta\vec{\phi}^{\times} - \mathrm{Id})\hat{C}_N^B = -\delta\vec{\phi}^{\times}\hat{C}_N^B$.Y se tiene $C_N^B = (\mathrm{Id} - \delta\vec{\phi}^{\times})\hat{C}_N^B$.

Matrices de covarianza de los métodos q y TRIAD

- Para el método TRIAD, modelamos el error desconocido $\delta\vec{\phi}$ como una normal multivariante con media cero y covarianza $P_{\phi\phi}$. Se demuestra la siguiente relación:

$$P_{\phi\phi} = \sigma_1^2 \mathrm{Id} + \frac{1}{|\vec{W}_1 \times \vec{W}_2|^2}\left((\sigma_2^2 - \sigma_1^2) W_1 W_1^T + \sigma_1^2 (W_1^T W_2)(W_1 W_2^T + W_2 W_1^T)\right)$$

  donde σ_1 representa el error (desviación típica) de la primera medida y σ_2 el error de la segunda medida. Se observa la mayor influencia del error de la primera variable.

- En el caso del algoritmo Q, puesto que se calcula un error, el error vendrá dado por un cuaternión de error δq, de forma que $\hat{q} = q \star \delta q$, tal como se definió en el tema 3:

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

Matrices de covarianza de los métodos q y TRIAD

- Por tanto es ahora $\vec{a}$ quien representa el error de actitud (a través del cuaternión de error) y por tanto $\vec{a}$ sería una normal multivariante de media 0 y covarianza P_a.
- En el algoritmo q cada medida tendrá su error representado por su varianza σ_i^2. El error final dependerá de los pesos elegidos en el algoritmo y en general, se demuestra que

$$P_a = \frac{1}{4}\left[\mathrm{Id} - \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i \vec{W}_i^T\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 \left[\mathrm{Id} - \vec{W}_i \vec{W}_i^T\right]\right]\left[\mathrm{Id} - \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i \vec{W}_i^T\right]^{-1}$$

- Una elección de a_i sería hacerla proporcional al inverso de la varianza σ_i^2. Como los a_i tienen que sumar 1, se podría elegir

$$a_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

llegando a

$$P_a = \frac{1}{4}\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2}}\left[\mathrm{Id} - \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i \vec{W}_i^T\right]^{-1}$$

- Nota: Si $\left[\mathrm{Id} - \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{W}_i \vec{W}_i^T\right]$ no es invertible el problema no tiene solución única por el algoritmo q.