

# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 1: Introducción a la Dinámica y Control de la Actitud y al Sistema de Control y Estimación de actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

23 de febrero de 2017



# Introducción I

- La mayor parte de los vehículos espaciales tienen instrumentos o antenas que deben apuntar en una dirección. Por ejemplo:
  - Telescopios espaciales (Hubble).
  - Los satélites de comunicación deben orientar sus antenas.
  - Los paneles solares deben maximizar su exposición al Sol.
  - Las cámaras de fotografía deben apuntar a una localización.
  - Los radiadores deben estar orientados al espacio profundo.
  - Las toberas propulsivas de un vehículo espacial deben estar correctamente alineadas.
  - Otros instrumentos o sensores científicos.
- Además existen otro tipo de requisitos:
  - Telescopios espaciales (Hubble).
  - Seguimiento de objetivos.
  - Direcciones prohibidas (p.ej. la dirección del Sol para óptica sensible).
- La **orientación** de un vehículo espacial (respecto a otro sistema de referencia de interés, p.ej. inercial o los ejes órbita) se denomina **actitud**.

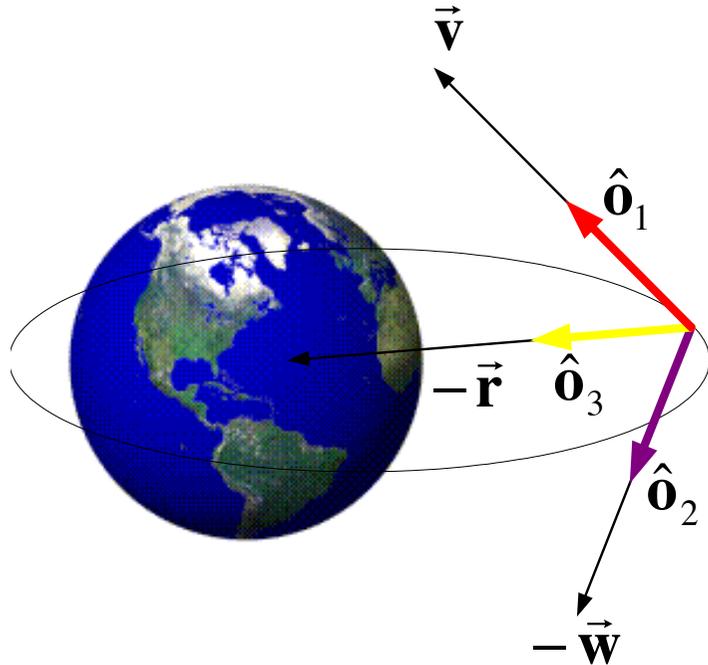


## Introducción II

- El subsistema encargado de **conocer y controlar** la actitud, es el Sistema de Determinación y Control de Actitud, en inglés ADCS (Attitude Determination and Control System) cuyas funciones básicas son:
  - Determinar la actitud actual o instantánea, a partir de las medidas de los sensores y el conocimiento de la actitud previo (**problema de estimación**).
  - Emplear los actuadores disponibles para estabilizar la actitud y corregir posibles desviaciones respecto a una actitud deseada (**problema de control**).
- Otras funciones posibles:
  - Generar maniobras de actitud, por ejemplo, para pasar de una actitud inicial a una final deseada (**problema de transferencia de actitud**)
  - Seguir un objetivo (**problema de seguimiento o tracking**).



# Representación y Cinemática de la Actitud



- Bajo la hipótesis de sólido rígido, la actitud queda determinada especificando la orientación de los ejes cuerpo respecto a otros ejes de interés.
- Por ejemplo, los ejes órbita tal como se muestra en la figura, cuya definición depende de la órbita concreta.
- La relación entre dos sistemas de referencia se puede representar de varias formas, usando matrices, ángulos de Euler u otros objetos matemáticos.
- La **cinemática de la actitud** son un conjunto de relaciones (en forma de ecuaciones diferenciales) entre la velocidad angular del vehículo,  $\vec{\omega}$ , y su actitud, representada mediante cualquiera de los métodos que se verán.

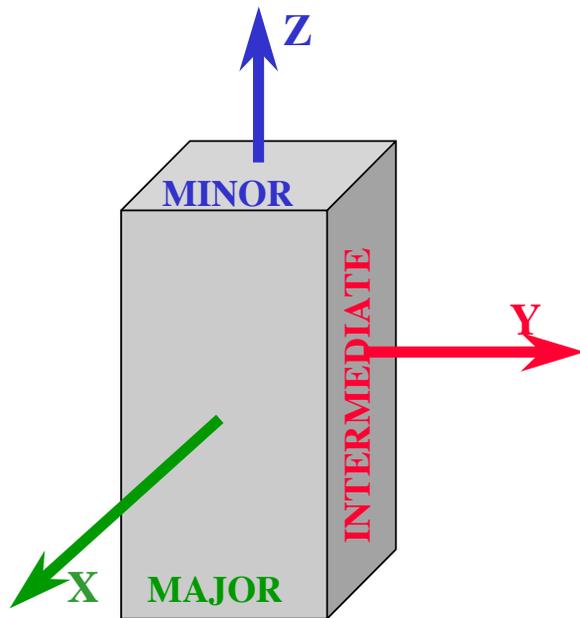


# Dinámica de la Actitud

- La **dinámica de la actitud** relaciona la velocidad angular del vehículo con los momentos de las fuerzas que actúan en él, y se basa en el teorema del momento cinético; las ecuaciones diferenciales resultantes se denominan **Ecuaciones de Euler**.
- El movimiento de un sólido en rotación libre (sin momentos) es la solución más simple de estas ecuaciones (analítica en el caso axilsimétrico); se trata de una precesión del eje de rotación alrededor de un eje fijo.
- Un sólido que se encuentra en rotación y se somete a un momento constante no reacciona de una forma “intuitiva” sino que sufre perturbaciones en su rotación inicial, provocándose movimientos de precesión y nutación.
- Esta resistencia a momentos perturbadores se denomina **rigidez giroscópica**. Es la base de funcionamiento de las peonzas.



## Estabilidad de sólidos en rotación



- Para el sólido de la figura,  $I_1 = I_x$ ,  $I_2 = I_y$ ,  $I_3 = I_z$  son los momentos principales de inercia (dada la forma del sólido). Además  $I_1 > I_2 > I_3$  por las dimensiones aparentes en la figura, luego el eje x es el eje mayor de inercia, el y el eje intermedio, y el z el eje menor de inercia.
- Se demuestra que si el sólido rota alrededor del eje mayor o del eje menor, estas rotaciones son estables (realmente son neutralmente estables: cuando la rotación es perturbada, la perturbación no crece).
- Sin embargo si la rotación es alrededor del eje intermedio, dicha rotación es inestable (una perturbación se amplificaría y el eje instantáneo de rotación se alejaría del eje intermedio).
- Estos resultados cambian en presencia de disipación de energía (que siempre existe): **El eje menor es inestable si existe disipación de energía** (Regla del Eje Mayor).



# Sputnik vs. Explorer I



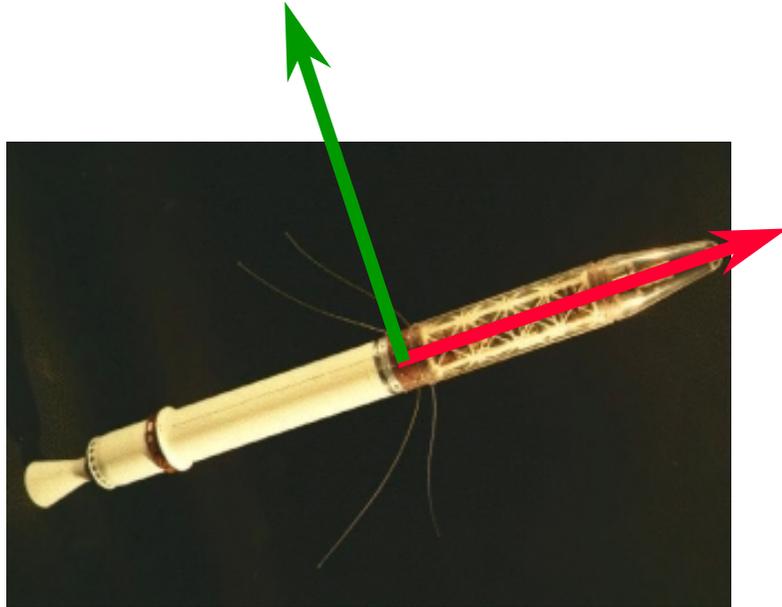
- El Sputnik fue lanzado en 1957
- El satélite estaba estabilizado por rotación en torno a su eje mayor.
- Los ingenieros de la NASA no eran conscientes de este hecho, ni de la regla del eje mayor (que no se puede deducir con un modelo de sólido rígido).



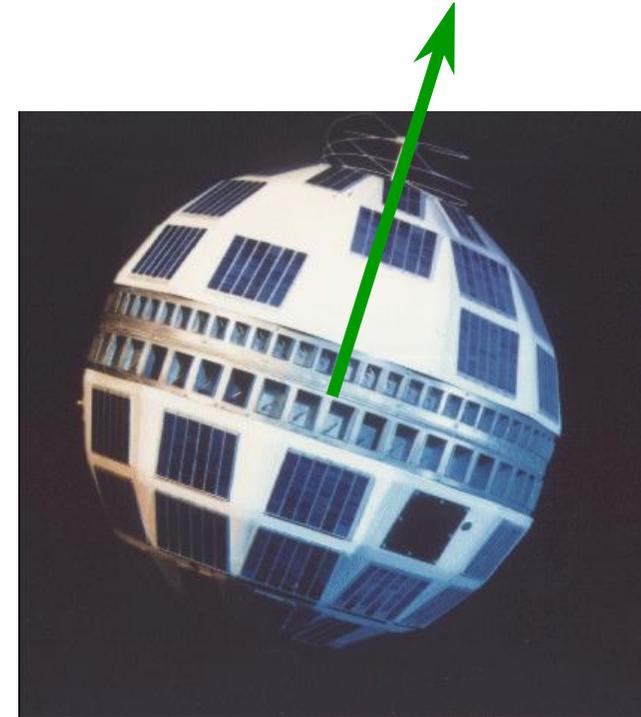
- El Explorer I fue lanzado en 1958, “estabilizado” por rotación en torno a su eje menor.



## Sputnik vs. Explorer II



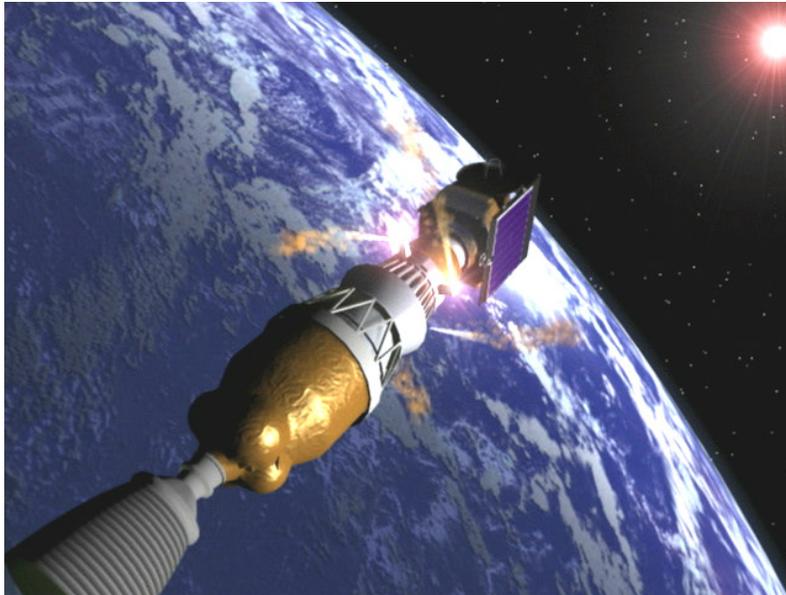
- La estabilización en torno al eje menor (rojo) no funcionó.
- En pocas horas el Explorer 1 empezó a girar en torno a su eje mayor (verde) con un movimiento bastante caótico, imposibilitando su misión.



- El Telstar I (el primer satélite de comunicaciones) fue lanzado en 1962.
- Estaba estabilizado por rotación en torno a su eje mayor, girando a 200 RPM.



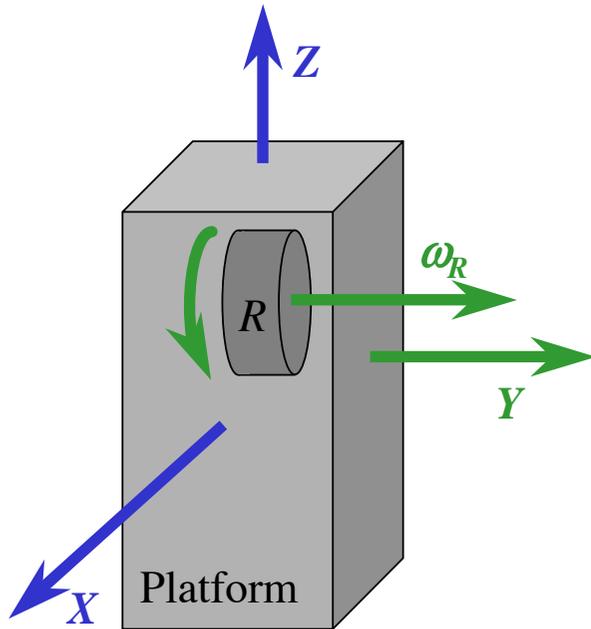
## Regla del Eje Mayor: Excepciones



- El eje menor es inestable, pero el tiempo característico de la inestabilidad es lento (horas).
- Típicamente se estabiliza por rotación en torno al eje menor en las últimas etapas de los vehículos lanzadores, antes de encender dichas etapas.
- Esta rotación causa rigidez giroscópica, que disminuye mucho los errores causados por una alineación no perfecta entre la dirección deseada de propulsión y la fuerza propulsiva real.
- Tras el encendido, dicha rotación se detiene, por ejemplo con un mecanismo yo-yo, o se permite que la propia dinámica la transfiera a una rotación en torno al eje mayor.
- Ejemplo: Mars Odissey.



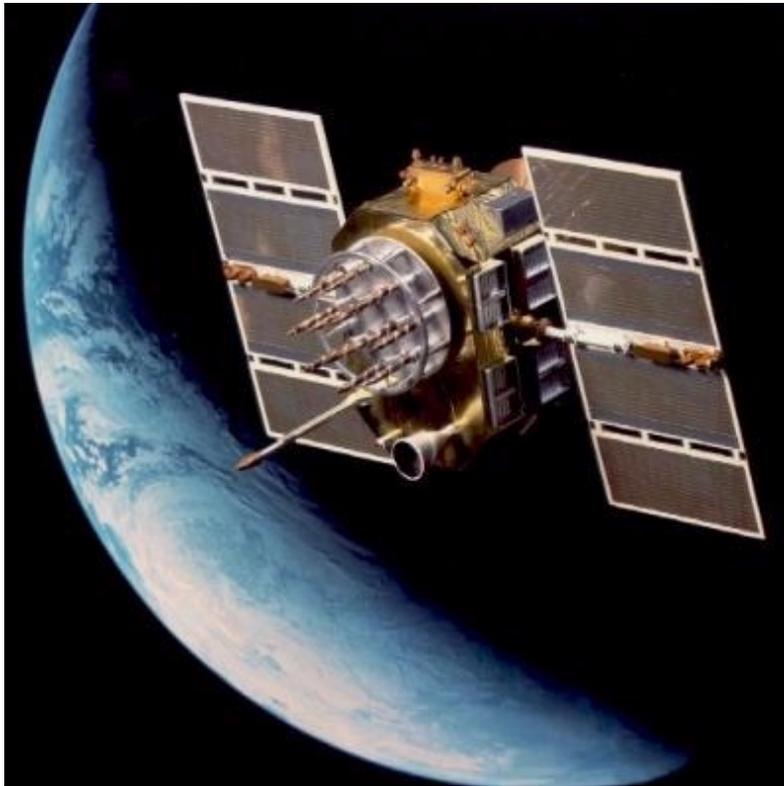
## Efecto de una rueda en la dinámica rotacional



- Una rueda, volante de inercia o rotor situada en el interior o exterior del vehículo y que se encuentre en rotación, produce un efecto de estabilización al proporcionar rigidez giroscópica al conjunto.
- Además, con una rueda se puede estabilizar el eje intermedio, o el menor, incluso en presencia de disipación de energía.
- Además se pueden provocar rotaciones (maniobras) por reacción: si la rueda se acelera en un sentido, en ausencia de momentos externos el vehículo ha de girar en sentido contrario debido a que el momento cinético total no puede cambiar.
- El ejemplo más extremo de este principio es un CMG (giróscopo de control de momentos); consiste en una rueda de alta inercia y gran velocidad fija pero ejes móviles.



## Ejemplos de Vehículos Espaciales con volantes de inercia



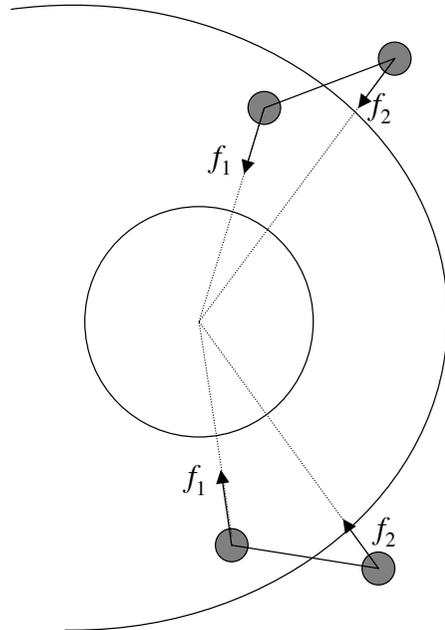
- Satélite Navstar (GPS).
- 4 volantes de inercia girando a varias miles de RPM.
- Sistema auxiliar: RCS (hidrazina).



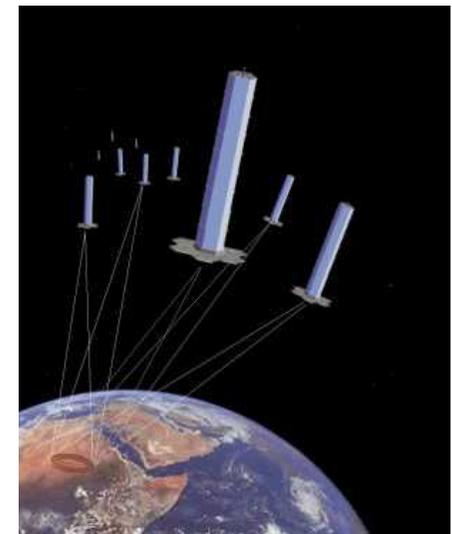
- Satélites DSP (Defense Support Program), son parte del sistema de alerta temprana de USA. Posee sensores infrarojos.
- Estabilizado por rotación con un volante de inercia.



# Gradiente gravitatorio ( $G^2$ )



- La forma y distribución másica no esférica de un vehículo espacial lo somete al llamado momento gravitatorio, mientras circula en su órbita, ya que  $F = \mu m / r^2$ .
- Por tanto existe una “fuerza restauradora”, que tiende a hacer girar al vehículo como un péndulo, en torno a su posición de equilibrio.
- El “ $G^2$ ” se puede aprovechar para estabilización; no obstante apenas proporciona estabilidad en guiñada. Por ello a veces se combina con un volante de inercia.
- La Luna está “estabilizada” por  $G^2$ .
- El satélite Polar BEAR, estabilizado por gravedad, invirtió su posición de equilibrio.



TechSat 21

## Sistemas estabilizados en tres ejes

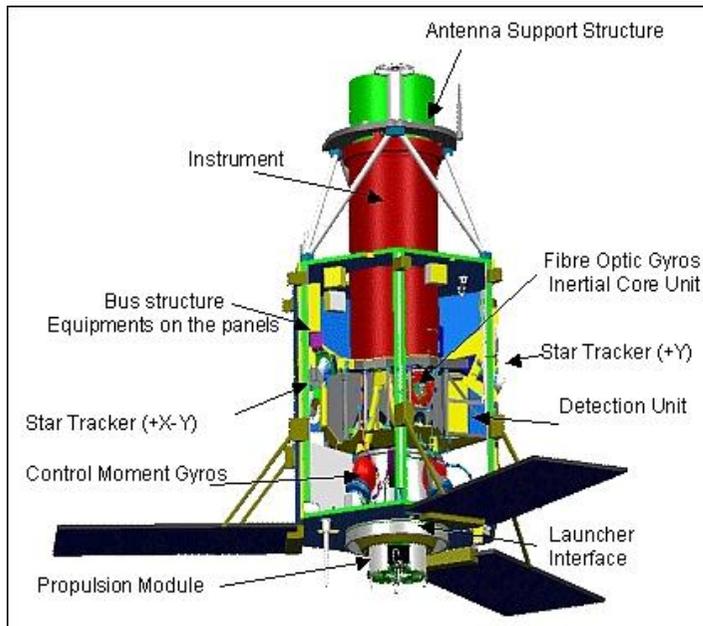
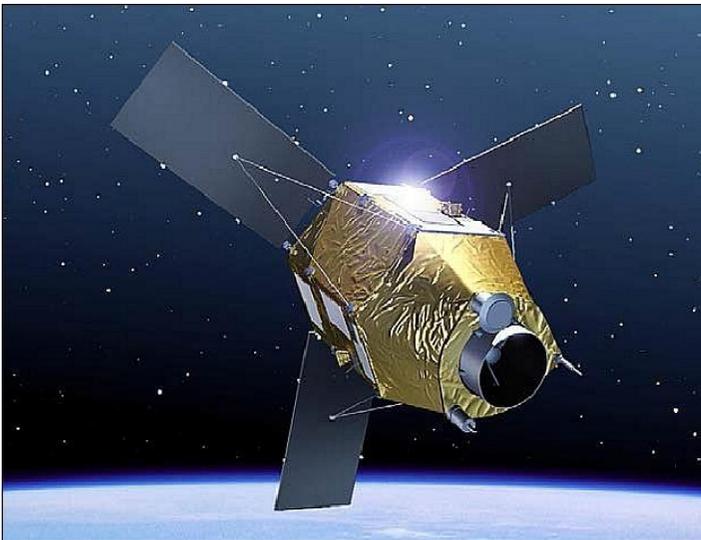
- Los satélites que tienen un sistema ADCS que controla totalmente su actitud se denominan estabilizados en tres ejes.



- Por ejemplo, el sistema de control de actitud del telescopio Hubble es uno de los sistemas más precisos jamás construidos por el hombre.
- El telescopio principal tiene que ser capaz de mantener su posición respecto a un blanco con una precisión de 0.007 segundos de arco (el ancho de un cabello humano visto a 1.5 km de distancia).
- Un golfista con esa precisión (y la fuerza necesaria) sería capaz de realizar un “hoyo en uno” en un campo de golf en Málaga efectuando la salida desde Moscú, 19 de cada 20 veces!
- El Hubble realiza su control de actitud en tres ejes empleando ruedas de reacción y volantes de inercia.



# Satélites ágiles



- Los satélites de observación de la Tierra tienen requisitos importantes de control de actitud.
- Los llamados “satélites ágiles” están preparados para adquirir múltiples imágenes o incluso 3D (tomadas dos veces desde ángulos distintos).
- Por ejemplo la constelación Pleiades (2 satélites del CNES, agencia espacial francesa) tiene capacidad de obtener imágenes con resolución  $< 1$  m. en cualquier punto de la Tierra!
- Para sacar partido a la óptica es necesaria una enorme precisión en el control/determinación de actitud, pero también velocidad en las maniobras; esto se consigue con los CMG (control moment gyros), star trackers y FOG de alta resolución.



# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 2: Representación de la Actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

21 de febrero de 2018



## La actitud de un vehículo

- La actitud de un vehículo es su orientación respecto a un cierto sistema de referencia.
- Si el vehículo es un sólido rígido, es suficiente conocer la orientación de un s.d.r. fijo al vehículo (los ejes cuerpo).
- El conjunto de rotaciones entre dos ejes se llama  $SO(3)$  o grupo especial ortogonal de dimensión 3.
- En aeronaves, los ángulos de Euler (cabeceo, guiñada y alabeo) son la representación clásica. Para vehículos hay muchas alternativas, que también pueden ser aplicados a aeronaves, con diferentes ventajas e inconvenientes.
- Estudiaremos varias representaciones diferentes de  $SO(3)$ :
  - Matriz de cosenos directores.
  - Ángulos de Euler.
  - Ángulo y eje de Euler.
  - Vector de rotación.
  - Cuaterniones.
  - Parámetros de Rodrigues (vector de Gibbs).
  - Parámetros de Rodrigues modificados.



## Características de las representaciones de $SO(3)$

- Cada representación tiene sus ventajas y desventajas, que serán comentadas.
- Cada representación de actitud viene definida por  $n$  parámetros.
  - Si  $n = 3$  se dice de la representación que es mínima (ya que 3 son los grados de libertad del problema).
  - Si  $n > 3$  existirán  $n - 3$  ligaduras sobre los parámetros. Las representaciones mínimas siempre tienen algún tipo de singularidades.
- Si dos combinaciones de parámetros representan la misma actitud se dice que la representación tiene ambigüedades. El conjunto de parámetros que habría que eliminar para evitar ambigüedades a veces se llama “shadow set” o conjunto sombra.
- Veremos como pasar de una representación a otra y como componer actitudes (pasar por sistemas de referencia intermedios) en cada caso.



## Características de las representaciones de $SO(3)$

- Otro aspecto interesante es la capacidad de generar “camino” suaves de actitud, es decir un conjunto continuo de giros que nos lleve de una actitud a otra.
- Finalmente, se habla de las interpretaciones pasiva y activa de las transformaciones entre sistemas de referencia.
- La interpretación pasiva (conocida también como “alias”) consiste en considerar que los vectores se transforman a raíz de que los sistemas de referencia lo hacen, pero en un sentido opuesto. Por ejemplo si las direcciones x-y giran  $45^\circ$ , el vector gira  $45^\circ$  en el sentido opuesto.
- La interpretación activa (conocida como “alibi”) consiste en considerar que son los propios vectores los que se transforman.
- Nosotros siempre consideraremos la interpretación pasiva.



## Matriz de cosenos directores (DCM) I

- Dado un sistema de referencia  $S$  (determinado por una base de vectores unitarios  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ) y otro  $S'$  (determinado por una base de vectores unitarios  $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ ), la orientación de  $S'$  respecto a  $S$  está totalmente determinada por la matriz de cambio de base  $C_S^{S'}$ , que para un vector genérico  $\vec{v}$  permite cambiar de base:  $\vec{v}^{S'} = C_S^{S'} \vec{v}^S$ . Denotemos:

$$C_S^{S'} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

- Obsérvese:  $\vec{e}_x^{S'} = C_S^{S'} \vec{e}_x^S = C_S^{S'} [1 \ 0 \ 0]^T = [c_{11} \ c_{21} \ c_{31}]^T$ .
- Luego:  $\vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x = (\vec{e}_{x'}^{S'})^T \vec{e}_x^{S'} = [1 \ 0 \ 0][c_{11} \ c_{21} \ c_{31}]^T = c_{11}$ .
- Igualmente:

$$\begin{aligned} c_{21} &= \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x, & c_{31} &= \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x \\ c_{12} &= \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y, & c_{22} &= \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y, & c_{32} &= \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y \\ c_{13} &= \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z, & c_{23} &= \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z, & c_{33} &= \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$



## Matriz de cosenos directores (DCM) II

- Por tanto:

$$C_S^{S'} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que razonando igualmente:

$$C_S^S = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_x \\ \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_{z'} \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix} = (C_S^{S'})^T$$

- Y por tanto, puesto que  $C_S^S = (C_S^{S'})^{-1}$ , obtenemos que  $C_S^S$  es ortogonal, es decir:  $(C_S^{S'})^{-1} = (C_S^{S'})^T$ . También se justifica el nombre “matriz de cosenos directores”.
- Otra propiedad es  $\det(C_S^S) = 1$ . Esto se debe a que  $1 = \det(\text{Id}) = \det((C_S^S)(C_S^S)^{-1}) = \det((C_S^S)(C_S^S)^T) = (\det(C_S^S))^2$ . Por tanto  $\det(C_S^S) = \pm 1$ . El signo + corresponde a los sistemas de referencia que son triedros “a derechas”, que son los utilizados en la práctica.



## Matriz de cosenos directores (DCM) III

- Es una representación de la actitud con 9 parámetros. Estos parámetros son dependientes entre sí, es decir, las entradas de la matriz  $C$  no pueden ser cualesquiera (la matriz ha de ser ortogonal y con determinante  $+1$ ). En particular debe haber 6 ligaduras que determinan que la matriz sea ortogonal.
- Supongamos que la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $C_{S_1}^{S_2}$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $C_{S_2}^{S_3}$ . La actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3} C_{S_1}^{S_2}$ . Por tanto la “composición” de actitudes viene dada por un simple producto matricial.



# Ángulos de Euler I

- En general una actitud se puede describir mediante tres rotaciones, en ejes no consecutivos.
- Por ejemplo, la rotación clásica de aeronaves:

$$n \xrightarrow[\substack{\psi \\ z^n}]{} S \xrightarrow[\substack{\theta \\ y^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\varphi \\ x^{S'}}]{} BFS$$

- Existen otras posibilidades, más aplicadas a vehículos espaciales:

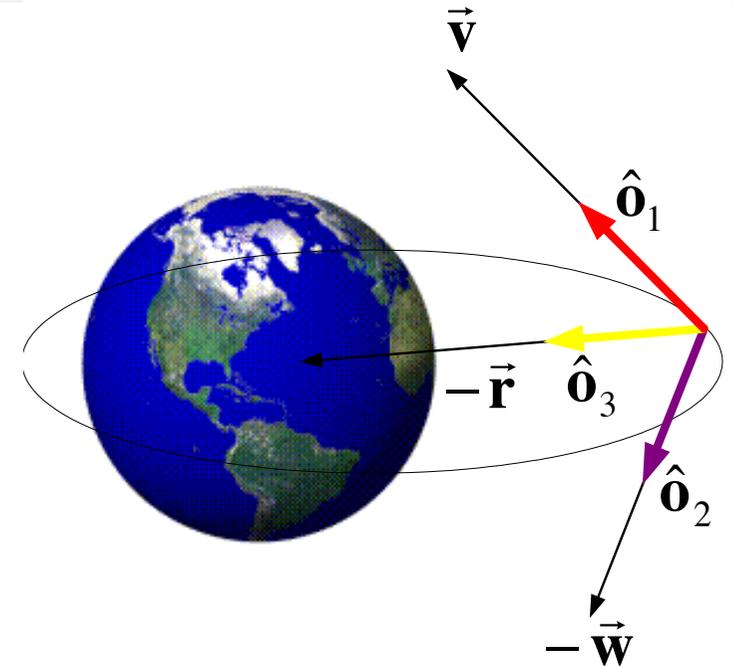
$$n \xrightarrow[\substack{\theta_1 \\ x^n}]{} S \xrightarrow[\substack{\theta_2 \\ y^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\theta_3 \\ z^{S'}}]{} BFS \quad n \xrightarrow[\substack{\Omega \\ z^n}]{} S \xrightarrow[\substack{i \\ x^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\omega \\ z^{S'}}]{} BFS$$

- Existen hasta 12 posibles secuencias de ángulos de Euler para representar la actitud.
- El número de parámetros de cada secuencia es siempre 3.
- Se puede obtener la DCM a partir de los ángulos de Euler mediante multiplicación de matrices de rotación elementales. Por ejemplo:  $C_n^b(\psi, \theta, \varphi) = C_{S'}^b(\varphi) C_S^{S'}(\theta) C_n^S(\psi)$ .



## Ángulos de Euler II

- En la figura, los ángulos de Euler clásicamente usados en aeronaves, respecto a ejes órbita.
  - Primero, un giro alrededor del eje 3 (amarillo). Se denomina “guiñada” (yaw).
  - En segundo lugar, un giro alrededor del eje 2 resultante (violeta). Se denomina “cabeceo” (pitch).
  - En tercer lugar, un giro alrededor del eje 1 resultante (rojo). Se denomina “balance” (roll).
- Esta secuencia se denomina (3,2,1). Las otras secuencias en la anterior diapositiva son la (1,2,3) y la (3,1,3).
- La secuencia elegida depende de los ángulos de interés.



- Otras secuencias posibles: (1,2,1), (1,3,1), (1,3,2), (2,1,2), (2,1,3), (2,3,1), (2,3,2), (3,1,2), (3,2,3).



## Ángulos de Euler III

- Como ya vimos, para el caso  $(\psi, \theta, \varphi)$ :

$$C_n^b = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\varphi s\psi + s\varphi s\theta c\psi & c\varphi c\psi + s\varphi s\theta s\psi & s\varphi c\theta \\ s\varphi s\psi + c\varphi s\theta c\psi & -s\varphi c\psi + c\varphi s\theta s\psi & c\varphi c\theta \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que  $(180^\circ + \psi, 180^\circ - \theta, 180^\circ + \varphi)$  es la misma actitud que  $(\psi, \theta, \varphi)$ . Por ello se suelen limitar los ángulos, típicamente  $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ .

$$n \xrightarrow[\underset{z^n}{z^n}]{\overset{\psi}{\psi}} S \xrightarrow[\underset{y^S}{y^S}]{\overset{\theta}{\theta}} S' \xrightarrow[\underset{x^{S'}}{x^{S'}}]{\overset{\varphi}{\varphi}} BFS$$

- Para obtener los ángulos de la DCM:
  - 1  $\theta = -\arcsin c_{13}$ .
  - 2 Con  $\cos \psi = c_{11} / \cos \theta$ ,  $\sin \psi = c_{12} / \cos \theta$ , obtener  $\psi$ .
  - 3 Con  $\sin \varphi = c_{23} / \cos \theta$ ,  $\cos \varphi = c_{33} / \cos \theta$ , obtener  $\varphi$ .
- Para otros ángulos de Euler, se obtienen relaciones similares.



## Ángulos de Euler IV

- Su mayor ventaja es su significado físico.
- No obstante, hay que tener cuidado a la hora de componer dos actitudes.
- Supongamos que la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $(\psi_2, \theta_2, \varphi_2)$ . Denotemos como  $(\psi_3, \theta_3, \varphi_3)$  la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$ . En general:  $\psi_3 \neq \psi_1 + \psi_2$ ,  $\theta_3 \neq \theta_1 + \theta_2$ ,  $\varphi_3 \neq \varphi_1 + \varphi_2$ .
- Para obtener  $(\psi_3, \theta_3, \varphi_3)$  hay que calcular los ángulos de Euler a partir de  $C_{S_1}^{S_3} = C_{S_2}^{S_3}(\psi_2, \theta_2, \varphi_2)C_{S_1}^{S_2}(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$ .
- Por tanto es complicado operar con ángulos de Euler.



# Ángulo y eje de Euler I

- Teorema de Euler: “el movimiento más general posible de un sólido con un punto fijo es una rotación alrededor de un único eje”.
- **Nota:** De momento consideramos la actitud en un instante de tiempo concreto, es decir, no estudiamos cuando hay una rotación que cambia con el tiempo.
- Denominemos a un vector unitario en la dirección de dicho eje (**Eje de Euler**) como  $\vec{e}_{S/S'}$  y a la magnitud de la rotación (**Ángulo de Euler**) como  $\theta$ .
- Por tanto  $\|\vec{e}_{S/S'}\| = 1$  y si escribimos  $\vec{e}_{S/S'} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$ , se tiene que  $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$ .
- Dado un vector  $\vec{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  definimos el operador  $\vec{v}^\times$  como:

$$\vec{v}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$



## Ángulo y eje de Euler II

- El operador  $\vec{v}^\times$  sirve para escribir fácilmente el producto vectorial  $\vec{v} \times \vec{w}$ , para cualquier vector  $\vec{w}$ , en un sistema de referencia dado  $S$ :  $(\vec{v} \times \vec{w})^S = (\vec{v}^S)^\times \vec{w}^S$ .
- Por tanto la actitud con el ángulo y eje de Euler queda representada con los parámetros  $(\vec{e}_{S/S'}^{S'}, \theta)$ . ¿Cómo se puede pasar de estos parámetros a la DCM y viceversa?

- Se tiene que

$$C_S^{S'} = \cos \theta \text{Id} + (1 - \cos \theta) \vec{e}_{S/S'}^{S'} (\vec{e}_{S/S'}^{S'})^T - \sin \theta \left( \vec{e}_{S/S'}^{S'} \right)^\times.$$

Ésta es la llamada fórmula de Euler-Rodrigues. La demostraremos más adelante

- Por otro lado, dada  $C_S^{S'}$ , y calculando por un lado  $\text{Tr}(C_S^{S'})$  y por otro  $(C_S^{S'})^T - C_S^{S'}$ , se obtiene:

$$\cos \theta = \frac{\text{Tr}(C_S^{S'}) - 1}{2}$$

$$\left( \vec{e}_{S/S'}^{S'} \right)^\times = \frac{1}{2 \sin \theta} \left( (C_S^{S'})^T - C_S^{S'} \right)$$



## Ángulo y eje de Euler III

- Otra relación entre el ángulo y el eje de Euler y la matriz de cosenos directores viene dada por las propiedades algebraicas de la DCM.
- En particular al ser la DCM ortogonal se puede demostrar que siempre tiene el autovalor 1. Si  $C$  es la DCM, entonces el autovector asociado al autovalor 1 es el eje de Euler  $\vec{e}$  ya que  $C\vec{e} = \vec{e}$ .
- Por otro lado los otros dos autovalores de la DCM serán  $e^{i\theta}$ ,  $e^{-i\theta}$ .
- Esta es otra forma de obtener el ángulo y eje de Euler, simplemente calculando los autovalores y autovectores de la DCM.



## Ángulo y eje de Euler IV

- Por tanto se representa la actitud con cuatro parámetros: tres componentes de un vector unitario y un ángulo. Estos parámetros tienen un claro significado físico.
- Obsérvese que la actitud dada por  $(\vec{e}_{S'/S'}, \theta)$  y por  $(-\vec{e}_{S'/S'}, 360^\circ - \theta)$  es exactamente la misma. Para evitar ésta ambigüedad, se restringe  $\theta$  al intervalo  $[0, 180^\circ)$ .
- La actitud inversa (la de  $S$  respecto a  $S'$ ) vendrá dada por  $(-\vec{e}_{S'/S}, \theta)$ . Nota: Obsérvese que  $e_{S'/S}^S = e_{S/S'}^{S'}$ .
- Finalmente si la actitud de  $S_2$  respecto a  $S_1$  viene dada por  $(\vec{e}_{S_1/S_2}^{S_2}, \theta_1)$  y que la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_2$  viene dada por  $(\vec{e}_{S_2/S_3}^{S_3}, \theta_2)$ , si denotamos como  $(\vec{e}_{S_1/S_3}^{S_3}, \theta_3)$  la actitud de  $S_3$  respecto a  $S_1$ , viene dada por:

$$\cos \theta_3 = -\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\vec{e}_{S_1/S_2} \cdot \vec{e}_{S_2/S_3})$$

$$\vec{e}_{S_1/S_3}^{S_3} = \frac{1}{\sin \theta_3} \left( \sin \theta_1 \cos \theta_2 \vec{e}_{S_1/S_2} + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \vec{e}_{S_2/S_3} + \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\vec{e}_{S_1/S_2} \times \vec{e}_{S_2/S_3}) \right)$$



## Vector de rotación

- Una representación de actitud mínima se puede obtener combinando el eje y el ángulo de Euler en un único vector  $\vec{\theta} = \theta \vec{e}$ .
- Esta representación es útil porque físicamente representaría la velocidad angular que habría que mantener constante durante un segundo para pasar de la actitud identidad a la actitud actual.
- Por otro lado para giros “grandes” la representación no es muy adecuada; por ejemplo un giro de  $0^\circ$  y uno de  $360^\circ$  físicamente son iguales pero para el primero  $\vec{\theta} = \vec{0}$  y para el segundo no está bien definido.
- Por tanto es una representación que se reserva para análisis teóricos o para ángulos pequeños.



# Cuaterniones

- Los cuaterniones son una creación de Hamilton (siglo XIX), que los consideraba su mayor invento; pensó serían como el “lenguaje universal” de la física. Pero fueron sustituidos pronto por los vectores (Gibbs) y las matrices (Cayley).
- Recordemos que un número complejo  $z$  es como un “vector 2-D”, que se puede escribir como  $z = x + iy$ . Los números complejos de módulo 1 se pueden usar para representar una rotación 2-D, ya que si  $|z| = 1$ , se puede escribir  $z = e^{i\theta}$ , y en tal caso representa una rotación 2-D de ángulo  $\theta$ .
- Los cuaterniones son una extensión de los números complejos a “4 dimensiones”. Escribimos un cuaternión  $q$  como:  
$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3.$$
- En ocasiones  $q_0$  se denomina la “parte escalar” de  $q$  y se define  $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  como la “parte vectorial” de  $q$ . Algunos autores (y STK) escriben  $q_4$  (al final del vector) en vez de  $q_0$ .



# Álgebra de cuaterniones I

- Para poder entender los cuaterniones es importante conocer su álgebra, es decir, como se opera con cuaterniones.
- **Suma:** la suma es componente a componente, es decir, dado  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  y  $q' = q'_0 + iq'_1 + jq'_2 + kq'_3$ , se tiene que  $q'' = q + q' = q''_0 + iq''_1 + jq''_2 + kq''_3$  viene dado por las fórmulas:  

$$q''_0 = q_0 + q'_0, q''_1 = q_1 + q'_1, q''_2 = q_2 + q'_2, q''_3 = q_3 + q'_3.$$
- **Producto:** el producto es componente a componente, conociendo las siguientes reglas de multiplicación:  

$$i \star i = -1, i \star j = k, i \star k = -j, j \star i = -k, j \star j = -1,$$

$$j \star k = i, k \star i = j, k \star j = -i, k \star k = -1.$$
- Se tiene la fórmula de Hamilton:  $i \star j \star k = -1$ .
- Obsérvese que en general  $q \star q' \neq q' \star q$ : La multiplicación no es conmutativa!



# Álgebra de cuaterniones II

- **Forma matricial del producto:** Es posible escribir el producto  $q'' = q' \star q$  en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} q''_0 \\ q''_1 \\ q''_2 \\ q''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_0 & -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 \\ q'_1 & q'_0 & -q'_3 & q'_2 \\ q'_2 & q'_3 & q'_0 & -q'_1 \\ q'_3 & -q'_2 & q'_1 & q'_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- **Forma “vectorial” del producto:**  $q''_0 = q'_0 q_0 - \vec{q}'^T \vec{q}$ ,  
 $\vec{q}'' = q_0 \vec{q}' + q'_0 \vec{q} + \vec{q}' \times \vec{q}$ .
- **Conjugado:** Como para los números complejos, dado  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  se define el conjugado de  $q$  como  $q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ .
- **Módulo:** Se define el módulo de  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  como  $|q|^2 = q \star q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ . Propiedad:  $|q \star q'| = |q||q'|$ .
- **División:** Se define la división usando el conjugado:  
 $q' / q = q' / q \star q^* / q^* = (q' \star q^*) / |q|^2$ .



# Representación de la actitud mediante cuaterniones I

- Dada la actitud representada mediante el eje y ángulo de Euler,  $\vec{e}$  y  $\theta$ , se “codifica” dicha actitud en forma de cuaterniones mediante:

$$q_0 = \cos \theta/2, \quad \vec{q} = \sin \theta/2 \vec{e}.$$

- Obsérvese que si un cuaternión  $q$  representa una actitud, entonces  $|q| = 1$ .

- Recordemos el operador  $\vec{q}^\times$ :  $\vec{q}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$

- Para pasar de la DCM  $C$  a cuaterniones, se utilizan las fórmulas:  $q_0 = \frac{\sqrt{1+\text{Tr}(C)}}{2}$  y  $\vec{q}^\times = \frac{1}{4q_0} (C^T - C)$ .

- Para pasar de cuaterniones a DCM se utiliza la fórmula de Euler-Rodrigues para cuaterniones:

$$C = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \text{Id} + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_0\vec{q}^\times.$$

- También se puede girar un vector  $\vec{v}$  sin calcular la matriz

$$C \text{ usando la fórmula: } \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v}' \end{bmatrix} = q^* \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix} \star q$$



## Representación de la actitud mediante cuaterniones II

- Fórmula de Euler-Rodrigues en forma matricial:

$$C(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

- Los cuaterniones son una representación de la actitud que requiere 4 parámetros, con la relación  $|q| = 1$ .
- Existe un problema de ambigüedad:  $q$  y  $-q$  representan la misma actitud, ya que si  $q$  corresponde a  $(\vec{e}, \theta)$ , entonces  $-q$  corresponde a  $(-\vec{e}, 360 - \theta)$ .
- Tienen la desventaja de ser una representación matemática sin sentido físico.
- Para pasar de la DCM a cuaterniones y viceversa no es necesario usar fórmulas trigonométricas.
- Si  $q_{S'S}$  representa la actitud de  $S'$  respecto a  $S$  y  $q_{S''S'}$  representa la actitud de  $S''$  respecto a  $S'$ , entonces  $q_{S''S}$ , la actitud de  $S''$  respecto a  $S$ , se calcula como  $q_{S''S} = q_{S'S} \star q_{S''S'}$  (al revés que la DCM).



## Cálculo de cuaterniones dados los ángulos de Euler

- Obsérvese que:
  - A los ángulos de Euler  $(\psi, 0, 0)$  les corresponde el cuaternión  $q_\psi = \cos \psi/2 + k \sin \psi/2$ .
  - A los ángulos de Euler  $(0, \theta, 0)$  les corresponde el cuaternión  $q_\theta = \cos \theta/2 + j \sin \theta/2$ .
  - A los ángulos de Euler  $(0, 0, \varphi)$  les corresponde el cuaternión  $q_\varphi = \cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2$ .
- Por tanto, a los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  les corresponderá el cuaternión  $q = q_\psi \star q_\theta \star q_\varphi$ .
- Realizando el producto, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 q = & (\cos \psi/2 \cos \theta/2 \cos \varphi/2 + \sin \psi/2 \sin \theta/2 \sin \varphi/2) \\
 & + i (\cos \psi/2 \cos \theta/2 \sin \varphi/2 - \sin \psi/2 \sin \theta/2 \cos \varphi/2) \\
 & + j (\cos \psi/2 \sin \theta/2 \cos \varphi/2 + \sin \psi/2 \cos \theta/2 \sin \varphi/2) \\
 & + k (\sin \psi/2 \cos \theta/2 \cos \varphi/2 - \cos \psi/2 \sin \theta/2 \sin \varphi/2).
 \end{aligned}$$



## Cuaterniones: camino más corto e interpolación

- Dados dos cuaterniones  $q_0$  y  $q_1$  que representan dos actitudes diferentes, ¿se puede construir un “cuaternión de interpolación” continuo  $q(s)$  de forma que  $q(0) = q_0$  y  $q(1) = q_1$ ?
- La forma de hacerlo es encontrar el cuaternión  $q_2$  que representa la actitud entre  $q_0$  y  $q_1$ :  $q_2 = \frac{1}{q_0} \star q_1 = q_0^* q_1$ . Este cuaternión estará representado por un ángulo  $\theta$  y eje de Euler  $\vec{e}$  de forma que  $q_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta/2 \\ \text{sen } \theta/2 \vec{e} \end{bmatrix}$ .
- La solución del problema es formar el cuaternión  $q(s)$  como el producto de  $q_0$  y otro cuaternión con eje  $\vec{e}$  y ángulo  $s\theta$ , de forma que cuando  $s = 0$  es el cuaternión unidad (y por tanto el producto es  $q_0$ ) y cuando  $s = 1$  es  $q_2$ , de forma que el producto es  $q_1$ :

$$q(s) = q_0 \star \begin{bmatrix} \cos(s\theta/2) \\ \text{sen}(s\theta/2) \vec{e} \end{bmatrix}$$



## Parámetros de Rodrigues I

- La representación mediante parámetros de Rodrigues (PR, también llamada vector de Gibbs) se consigue a partir del cuaternión, definiendo  $\vec{g} = \frac{\vec{q}}{q_0}$ , obviamente sólo válido si  $q_0 > 0$  ( $\theta < 180^\circ$ ). Para recuperar el cuaternión a partir del vector de Gibbs:

$$\|\vec{g}\|^2 = \frac{\|\vec{q}\|^2}{q_0^2} = \frac{1 - q_0^2}{q_0^2}$$

Luego  $q_0 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \|\vec{g}\|^2}}$ . Y por tanto:

$$q = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \|\vec{g}\|^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

- En términos del eje y ángulo de Euler,  $\vec{g} = \vec{e} \tan \frac{\theta}{2}$ .



## Parámetros de Rodrigues II

- La relación con la matriz de actitud es:

$$C = \text{Id} + 2 \frac{\vec{g}^\times \vec{g}^\times - \vec{g}^\times}{1 + \|\vec{g}\|^2} = (\text{Id} - \vec{g}^\times)(\text{Id} + \vec{g}^\times)^{-1} = (\text{Id} + \vec{g}^\times)^{-1}(\text{Id} - \vec{g}^\times)$$

- Por otro lado, como  $q_0 = \frac{\sqrt{1 + \text{Tr}(C)}}{2}$  y  $\vec{q}^\times = \frac{1}{4q_0} (C^T - C)$ , tendremos:

$$\vec{g}^\times = \frac{q^\times}{q_0} = \frac{1}{4q_0^2} (C^T - C) = \frac{C^T - C}{1 + \text{Tr}(C)}$$

- La composición de actitudes sigue una regla simple. Si  $\vec{g}_{S'S}$  representa la actitud de  $S'$  respecto a  $S$  y  $\vec{g}_{S''S'}$  representa la actitud de  $S''$  respecto a  $S'$ , entonces  $\vec{g}_{S''S}$ , la actitud de  $S''$  respecto a  $S$ , se calcula como:

$$\vec{g}_{S''S} = \frac{\vec{g}_{S''S'} + \vec{g}_{S'S} - \vec{g}_{S''S'} \times \vec{g}_{S'S}}{1 - \vec{g}_{S'S} \cdot \vec{g}_{S''S'}}$$



## Parámetros de Rodrigues modificados

- La representación mediante parámetros de Rodrigues modificados (PRM) es muy reciente (1962) pero también muy popular. Similarmente a los PR se consigue a partir del cuaternión, definiendo  $\vec{p} = \frac{\vec{q}}{1+q_0}$ . Para recuperar el cuaternión a partir del vector de Gibbs:

$$\|\vec{p}\|^2 = \frac{\|\vec{q}\|^2}{(1+q_0)^2} = \frac{1-q_0^2}{(1+q_0)^2} = \frac{1-q_0}{1+q_0}$$

Luego  $q_0 = \frac{1-\|\vec{p}\|^2}{1+\|\vec{p}\|^2}$ . Y por tanto:

$$q = \frac{1}{1+\|\vec{p}\|^2} \begin{bmatrix} 1 - \|\vec{p}\|^2 \\ 2\vec{p} \end{bmatrix}$$

- En términos del eje y ángulo de Euler,  $\vec{p} = \vec{e} \tan \frac{\theta}{4}$ .



## Parámetros de Rodrigues modificados II

- La relación con la matriz de actitud es:

$$C = \text{Id} + \frac{8\vec{p}^\times \vec{p}^\times - 4(1 - \|\vec{p}\|^2)\vec{p}^\times}{(1 + \|\vec{p}\|^2)^2} = [(\text{Id} - \vec{p}^\times)(\text{Id} + \vec{p}^\times)^{-1}]^2$$

- Como  $q$  y  $-q$  representan la misma actitud, también lo hacen  $\vec{p} = \frac{\vec{q}}{1+q_0}$  y  $\vec{p}' = \frac{-\vec{q}}{1-q_0}$ . ¿Cuál es la relación entre ambos?

$$\|\vec{p}\|^2 = \frac{1 - q_0}{1 + q_0} = \frac{1}{\|\vec{p}'\|^2}$$

- Luego  $\vec{p}$  y  $\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|^2}$  representan la misma actitud. Por tanto limitando  $\|\vec{p}\| \leq 1$  evitamos la falta de ambigüedad.
- La composición de actitudes sigue una regla no tan simple como para los PR.  $\vec{p}_{S'S}$  representa la actitud de  $S'$  respecto a  $S$  y  $\vec{p}_{S''S'}$  representa la actitud de  $S''$  respecto a  $S'$ , entonces  $\vec{p}_{S''S}$ , la actitud de  $S''$  respecto a  $S$ , se calcula como:

$$\vec{p}_{S''S} = \frac{(1 - \|\vec{p}_{S'S}\|^2)\vec{p}_{S''S'} + (1 - \|\vec{p}_{S''S'}\|^2)\vec{p}_{S'S} - 2\vec{p}_{S''S'} \times \vec{p}_{S'S}}{1 + \|\vec{p}_{S'S}\|^2\|\vec{p}_{S''S'}\|^2 - 2\vec{p}_{S'S} \cdot \vec{p}_{S''S'}}$$



## Cuaternión de error

- Para linealizar ecuaciones de actitud con cuaterniones en torno a un valor  $\bar{q}$ , la formulación clásica “aditiva”  $q = \bar{q} + \delta q$  no funciona, porque aunque  $\bar{q}$  y  $\delta q$  tengan módulo unidad, la suma no tiene por qué tenerlo.
- Se utiliza una formulación “multiplicativa” donde  $q = \bar{q} \star \delta q$ , y donde  $\delta q$  es el llamado cuaternión de error que debe estar “cerca” del cuaternión unidad  $q = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .
- $\delta q$  tiene 4 componentes pero realmente sólo 3 grados de libertad; estos se codifican en un vector  $\vec{a}$  “pequeño” (equivalente a  $2\vec{g}$ ):

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que  $\delta q(\vec{a})$  tiene módulo unidad. Si es necesario linealizar la anterior expresión se obtiene:

$$\delta q(\vec{a}) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix}$$



# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 3: Determinación de actitud. Sensores

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

23 de febrero de 2017



## Determinación de la actitud

- La determinación (estática) de actitud requiere del uso de sensores de actitud y algoritmos apropiados a los sensores disponibles.
- Los sensores de determinación de actitud, en general son sensores que determinan un vector  $\vec{v}$  en los ejes cuerpo, es decir,  $\vec{v}^B$  (en realidad lo determinan en los “ejes sensor”, pero la transformación a ejes cuerpo es conocida). Además dicho vector se supone conocido en los ejes de referencia (inerciales u órbita), es decir,  $\vec{v}^N$  es conocido. Es necesario tener dos o más medidas simultáneas para poder resolver el problema sólo con este tipo de sensores.
- Más adelante veremos sensores que miden la velocidad angular  $\vec{\omega}^B$  para la estimación dinámica de la actitud.



## Estimación a partir de observaciones

- En primer lugar consideramos el caso de que tenemos  $n$  (2 o más) sensores que determinan un vector  $\vec{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , en los ejes cuerpo, es decir,  $\vec{v}_i^B$ , que es conocido en los ejes de referencia (inerciales u órbita), es decir,  $\vec{v}_i^N$  es conocido. Puesto que sólo importan las direcciones de los vectores, los consideramos unitarios.
- Por tanto tenemos  $n$  ecuaciones de la forma  $\vec{v}_i^B = C_N^B \vec{v}_i^N$  y tenemos que “despejar” la matriz  $C_N^B$ .
- Para simplificar notación escribamos  $\vec{W}_i = \vec{v}_i^B$ ,  $\vec{V}_i = \vec{v}_i^N$ ,  $A = C_N^B$ . Por tanto tenemos  $n$  ecuaciones  $\vec{W}_i = A \vec{V}_i$  y es necesario calcular  $A$ .
- En general estos vectores pueden contener errores.
- En el caso de tener 2 vectores, se puede usar un método sencillo llamado método TRIAD. También veremos métodos más generales que sirve para  $n \geq 2$ .



## Método TRIAD

- Partimos de las dos ecuaciones  $\vec{W}_1 = A\vec{V}_1$  y  $\vec{W}_2 = A\vec{V}_2$
- Definamos los siguientes vectores:  $\vec{r}_1 = \vec{V}_1$ ,  $\vec{r}_2 = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2|}$ , y  $\vec{r}_3 = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{V}_1 \times \vec{r}_2|}$ . Similarmente:  $\vec{s}_1 = \vec{W}_1$ ,  $\vec{s}_2 = \frac{\vec{W}_1 \times \vec{W}_2}{|\vec{W}_1 \times \vec{W}_2|}$ , y  $\vec{s}_3 = \frac{\vec{W}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{W}_1 \times \vec{s}_2|}$ . Está claro que se cumplirá, por construcción:  $\vec{s}_1 = A\vec{r}_1$ ,  $\vec{s}_2 = A\vec{r}_2$ , y  $\vec{s}_3 = A\vec{r}_3$ .
- Construimos ahora las matrices  $M_{ref} = [\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3]$  y  $M_{obs} = [\vec{s}_1 \ \vec{s}_2 \ \vec{s}_3]$ . Se cumple  $M_{obs} = AM_{ref}$ . Además las columnas de la matriz  $M_{ref}$  son, por construcción, ortornormales, luego  $M_{ref}$  es invertible y además ortogonal. Por tanto:  $A = M_{obs}M_{ref}^T$ .
- Obsérvese que el método no es simétrico, sino que da más “peso” a la medida número 1. Por tanto habrá que usar como primera medida la más “fiable”. En la práctica no se obtendrá la matriz exacta por los errores en los sensores.



## Problema de Wahba

- Ahora tenemos  $n$  medidas cumpliendo  $\vec{W}_i = A\vec{V}_i$ . Planteamos el problema como un problema de mínimos cuadrados.
- Formulamos la función  $L(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |\vec{W}_i - A\vec{V}_i|^2$ , donde  $a_i$  son los pesos que se le da a cada medida (cumpliendo  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ) y planteamos el objetivo matemático de encontrar  $A$  (ortogonal) tal que  $L(A)$  sea mínimo. En la literatura esto se conoce como el "**Problema de Wahba**".
- Puesto que, operando:

$$|\vec{W}_i - A\vec{V}_i|^2 = (\vec{W}_i - A\vec{V}_i)^T (\vec{W}_i - A\vec{V}_i) = 2 - 2\vec{W}_i^T A\vec{V}_i,$$

tenemos que:

$$L(A) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T A\vec{V}_i = 1 - g(A),$$

donde  $g(A) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T A\vec{V}_i$ . Minimizar  $L(A)$  equivale a maximizar  $g(A)$ .



## Método q de Davenport

- Escribiendo  $A$  en función de  $q$  con la ecuación de Euler-Rodrigues  $A = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q})I + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_0\vec{q}^\times$  se llega a

$$g(A) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \vec{V}_i + 2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{q}\vec{q}^T \vec{V}_i - 2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{q}^\times \vec{V}_i$$

- Desarrollemos cada término para intentar llegar a una forma bilineal  $g(q) = q^T K q$ :

- Empezando por el segundo término:

$$2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{q}\vec{q}^T \vec{V}_i = 2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{q}^T \vec{W}_i \vec{V}_i^T \vec{q} = 2\vec{q}^T B \vec{q} = \vec{q}^T (B + B^T) \vec{q}$$

donde  $B = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T$ .

- El primer término se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \vec{V}_i = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i = q_0 \sigma q_0 - \vec{q}^T (\sigma I) \vec{q}$$

donde  $\sigma = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i = \text{Tr}(B)$ .



## Método q de Davenport

- Finalmente, el último término se puede escribir:

$$-2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{q}^\times \vec{V}_i = 2 \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T q_0 \vec{V}_i^\times \vec{q} = 2 q_0 \vec{z}^T \vec{q} = q_0 \vec{z}^T \vec{q} + \vec{q}^T \vec{z} q_0$$

donde  $\vec{z}^T = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i^T \vec{V}_i^\times$ , luego  $\vec{z} = - \sum_{i=1}^n a_i \vec{V}_i^\times \vec{W}_i$ .

- Se tiene que  $(\vec{a}^\times \vec{b})^\times = \vec{b} \vec{a}^T - \vec{a} \vec{b}^T$ , lo que se demuestra usando la identidad de  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ . Observemos que

$$\vec{z}^\times = - \sum_{i=1}^n a_i (\vec{V}_i^\times \vec{W}_i)^\times = \sum_{i=1}^n a_i \vec{V}_i \vec{W}_i^T - \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T = B^T - B$$



## Método $q$ de Davenport

- Luego se ha llegado a:

$$g(q) = q^T K q$$

donde la matriz  $K$  se escribe completamente a partir de  $B = \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{V}_i^T$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma &= \text{Tr}(B), \\ S &= B + B^T, \\ \vec{z}^\times &= B^T - B\end{aligned}$$

siendo  $K$  una matriz  $4 \times 4$  igual a:

$$K = \begin{bmatrix} \sigma & \vec{z}^T \\ \vec{z} & S - \sigma \text{Id} \end{bmatrix}$$



## Método $q$ de Davenport

- Por tanto el problema se reduce a encontrar  $q$  (cuaternión válido de actitud, es decir, de norma 1) tal que  $g(q) = q^T K q$  sea máximo.
- Problema de maximización con restricciones ( $q^T q = 1$ ). Usamos multiplicadores de Lagrange, escribiendo:

$$H = q^T K q - \lambda(q^T q - 1)$$

- Tomando derivada respecto a  $q$  e igualando a cero:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 2q^T K - 2\lambda q^T = 0 \quad \longrightarrow \quad Kq = \lambda q,$$

- Por tanto  $\lambda$  debe ser un autovalor de  $K$  y  $q$  el autovector asociado (de módulo 1). ¿Cuál? Sustituyendo en  $g(q)$ :

$$g(q) = q^T K q = q^T \lambda q = \lambda$$

- Por tanto, el cuaternión solución del problema será el autovector (de módulo 1) asociado al mayor autovalor!



## Método QUEST

- Si bien el método  $q$  de Davenport reduce el problema a uno de autovalores y autovectores, este problema algebraico puede ser problemático en un computador a bordo de un satélite.
- En 1978 se desarrolló el método QUEST (QUaternion ESTimator) que evita este cálculo.
- El problema de encontrar  $Kq = \lambda q$  se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \sigma & \vec{z}^T \\ \vec{z} & S - \sigma \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix}$$

- Es decir, dos ecuaciones:

$$\sigma q_0 + \vec{z}^T \vec{q} = \lambda q_0, \quad q_0 \vec{z} + S \vec{q} - \sigma \vec{q} = \lambda \vec{q}$$

- Recordando el vector de Gibbs  $\vec{g} = \frac{\vec{q}}{q_0}$ , la 2ª ecuación queda:

$$\vec{z} + [S - (\sigma + \lambda)\text{I}] \vec{g} = 0$$

- Luego  $\vec{g} = [(\sigma + \lambda)\text{I} - S]^{-1} \vec{z}$  (pero no conocemos  $\lambda$ , el máximo autovalor)



## Método QUEST

- Una primera forma de resolver el problema es suponer  $\lambda \approx 1$  (si las medidas son exactas este es el valor que se obtiene). En tal caso:  $\vec{g} = [(1 + \sigma)\mathbf{I} - S]^{-1} \vec{z}$
- Si esto no es una buena aproximación, se puede encontrar una expresión explícita para el autovalor máximo, resolviendo la ecuación característica de la matriz  $K$ . Se obtiene:

$$\lambda^4 - (a + b)\lambda^2 - c\lambda + (ab + c\sigma - d) = 0$$

- Donde los coeficientes son:

$$a = \sigma - \text{Tr}[\text{adj}(S)],$$

$$b = \sigma - \vec{z}^T \vec{z},$$

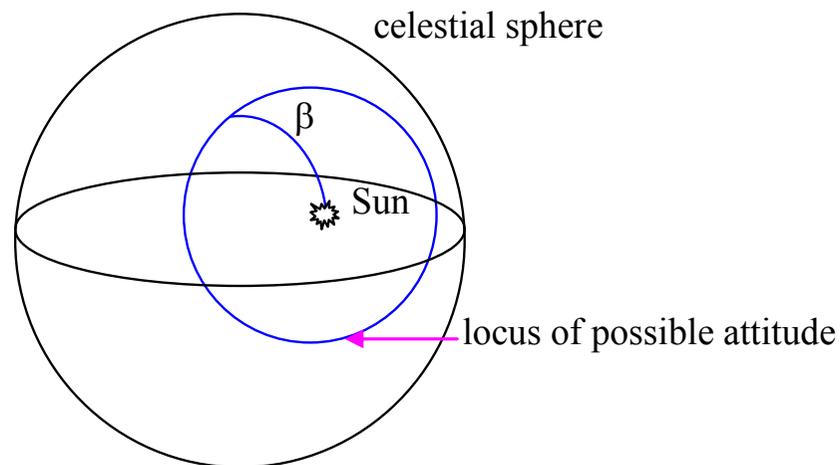
$$c = \det[S] + \vec{z}^T S \vec{z},$$

$$d = \vec{z}^T S^2 \vec{z}.$$



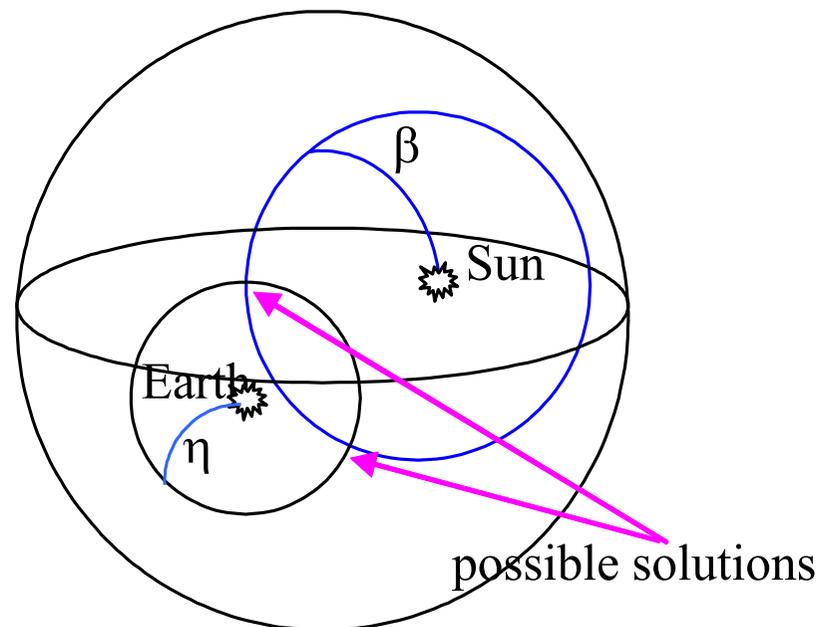
## Determinación geométrica de la actitud

- En algunos casos sólo interesa determinar la orientación (inercial) de una dirección del vehículo (por ejemplo, donde se ubica un instrumento o una antena, o el eje de giro).
- En tal caso sería suficiente tener dos sensores que nos permitan estimar el ángulo entre la dirección de interés y astros de referencia (por ejemplo, el sol o la Tierra).  
Gráficamente, se puede representar considerando la “esfera celeste” en torno al vehículo, encontrando el lugar geométrico de las posibles orientaciones de la dirección.



## Determinación geométrica de la actitud

- Con dos cuerpos, existirá una ambigüedad que usualmente puede ser resuelta si se conocía aproximadamente la actitud anterior.



## Determinación geométrica de la actitud

- Si bien el problema se puede resolver geoméricamente, es sencillo plantear su resolución analítica usando la trigonometría esférica (distancias ortodrómicas).
- Sea  $AR_1, \delta_1$  y  $AR_2, \delta_2$  las ascensiones rectas y declinaciones de los dos cuerpos de referencia, y  $\beta$  y  $\eta$  los ángulos formados con cada uno de ellos. Si  $AR$  y  $\delta$  es la ascensión recta y declinación hacia la que apunta la dirección de medida, se tiene que:

$$\cos \beta = \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos(AR - AR_1)$$

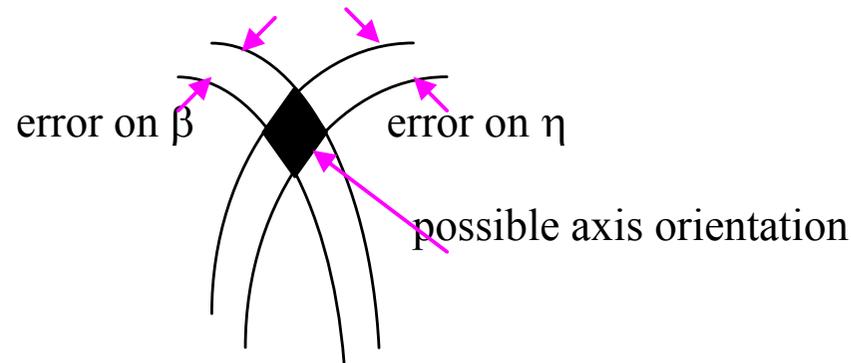
$$\cos \eta = \sin \delta \sin \delta_2 + \cos \delta \cos \delta_2 \cos(AR - AR_2)$$

- Se trata de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo  $\delta$  y  $AR$  se resuelve el problema.



## Determinación geométrica de la actitud

- En la práctica existirán errores en ambas medidas, por lo que existirá una región de posibles direcciones:



- Cuanto “menos ortogonal” sea la intersección entre las dos circunferencias esféricas, mayor es la región de incertidumbre. Esto depende de la situación geométrica y no tanto de la precisión de los sensores.
- Por tanto, es importante elegir cuidadosamente las direcciones de referencia, de acuerdo a la geometría.



## Sensores

- Existen tres tipos fundamentales de sensores, de acuerdo al fenómeno físico en el que se basan:
  - Ópticos: detectan la **dirección relativa** de un cuerpo planetario o estelar.
  - Mecánicos: miden la velocidad angular del vehículo respecto a un sistema de referencia inercial. Se usa en estimación dinámica.
  - Magnéticos: sólo se pueden usar en la proximidad (LEO) de planetas con un campo magnético de intensidad suficiente (p.ej. la Tierra).
- Aunque no es técnicamente sencillo, está demostrado que es posible usar el sistema GPS para altitudes desde LEO hasta GEO. Su uso se basa en usar varias antenas receptoras, deduciéndose la actitud de la diferencia en la señal recibida en ambas.
- Típicamente se mezclan varios tipos de sensores mediante un Filtro de Kalman o similar.



# Sensores

- Precisión de algunos sensores:

**Table 9.3 Potential accuracies of reference sensors**

<b>Reference object</b>	<b>Potential accuracy</b>
<b>Stars</b>	<b>1 arc second</b>
<b>Sun</b>	<b>1 arc minute</b>
<b>Earth (horizon)</b>	<b>6 arc minutes</b>
<b>RF beacon</b>	<b>1 arc minute</b>
<b>Magnetometer</b>	<b>30 arc minutes</b>
<b>Narstar Global Positioning System (GPS)</b>	<b>6 arc minutes</b>

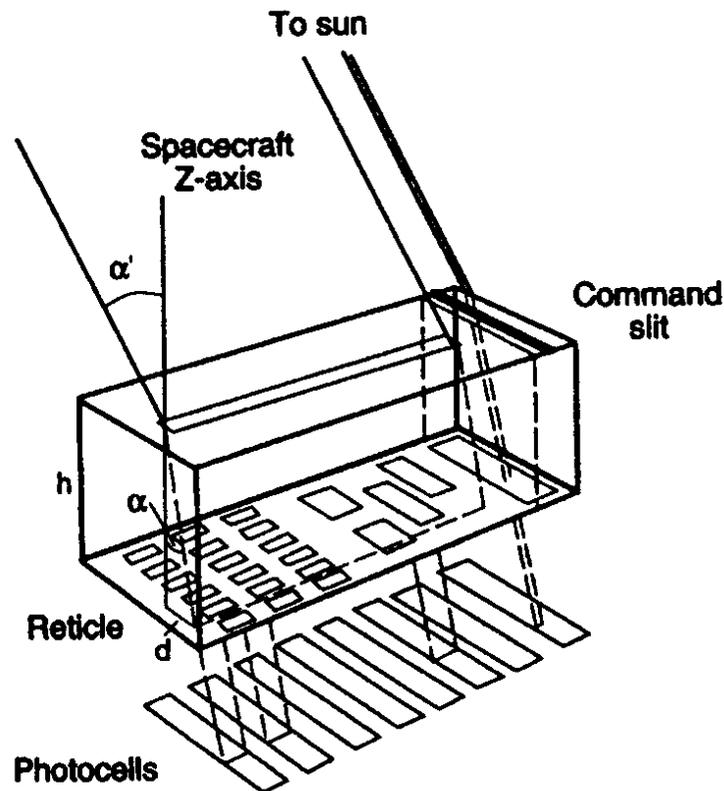


## Sensores Ópticos

- Un sensor óptico trata de deducir la dirección (respecto al sistema de ejes en el que se encuentra montado, es decir, ejes cuerpo) de un cuerpo planetario o estelar de referencia.
- Típicamente estos cuerpos serán el Sol, la Tierra o una estrella.
- Si bien en general determinan una dirección (es decir dos ángulos), en algunos casos de sensores más sencillo se encuentra un único ángulo.
- Un sólido rígido tiene tres grados de libertad en su actitud, y puesto que típicamente se obtendrán bastantes medidas, el problema de la estimación estará sobre-determinado. Para resolverlo se emplean métodos estadísticos y/o filtros de estimación (p.ej. el **Filtro de Kalman**, si también se usan giróscopos).



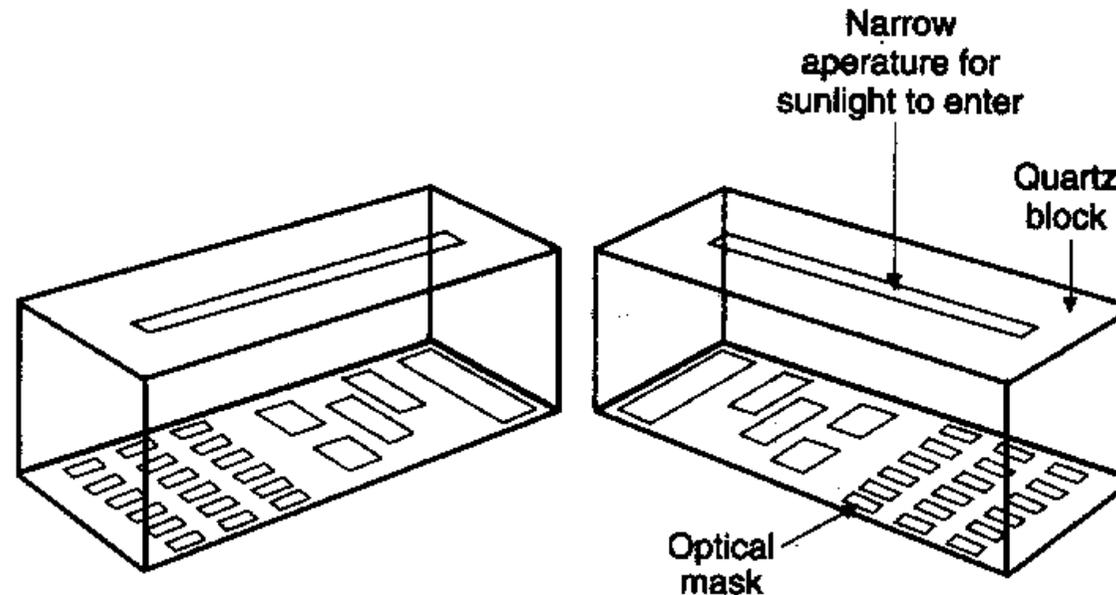
## Sensores de radiación solar



- **Sensores de radiación solar:** determinan la dirección en la que se encuentra el Sol.
- Consisten en una “cámara oscura”, fija al vehículo, y provista de una pequeña ranura de entrada con una retícula de detectores fotoeléctricos al fondo de la cámara.
- Según los detectores de la retícula que se activen, se puede calcular el ángulo de incidencia.

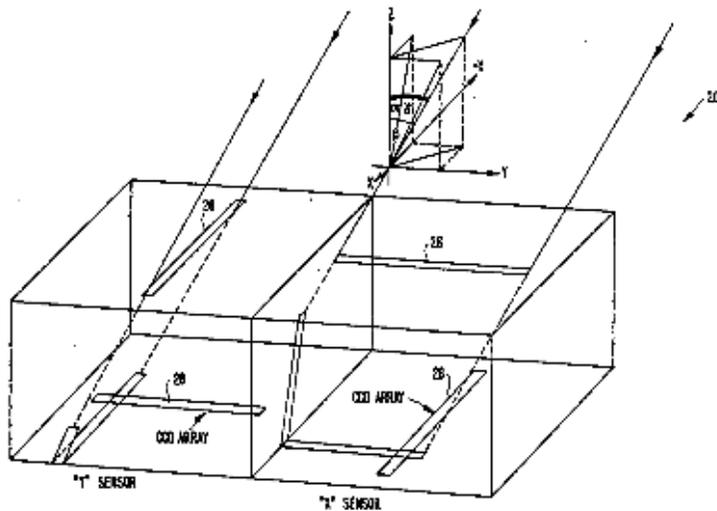


## Sensores de radiación solar



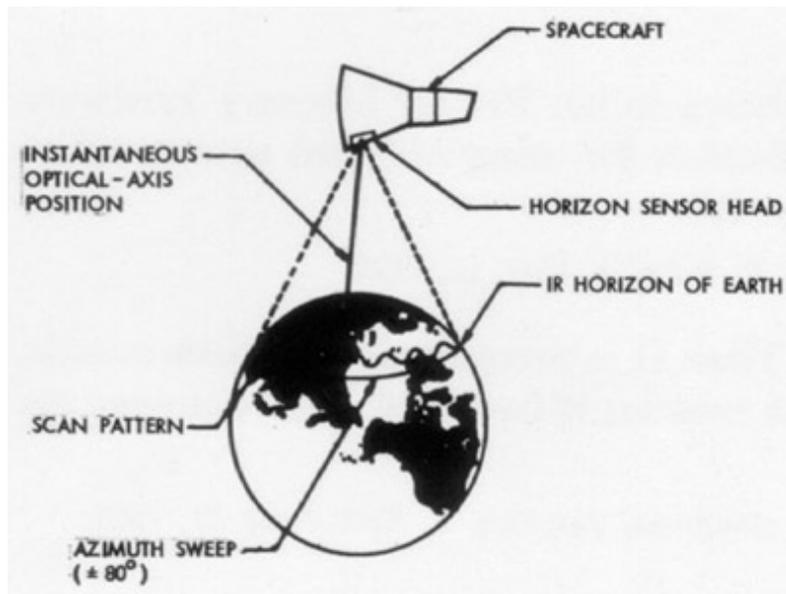
- Un sensor es capaz de determinar un ángulo relativo, para calcular los dos ángulos de una dirección es necesario usar una configuración con dos sensores perpendiculares.
- La precisión máxima es igual al diámetro angular del sol (0.5 grados en LEO).

## Sensores digitales de aspecto solar



- **Sensores digitales de aspecto solar (DSADs)**: son similares a los sensores de radiación solar, pero mejoran su precisión.
- Usan una celda de sensores fotoeléctricos más sensibles, capaces de determinar además del ángulo, la intensidad de la radiación incidente.
- Una vez conocida la dirección y ángulo de máxima intensidad, se puede calcular la dirección en la que se encuentra el **centroide del Sol**, con gran precisión.
- Se obtiene una precisión de segundos de arco.

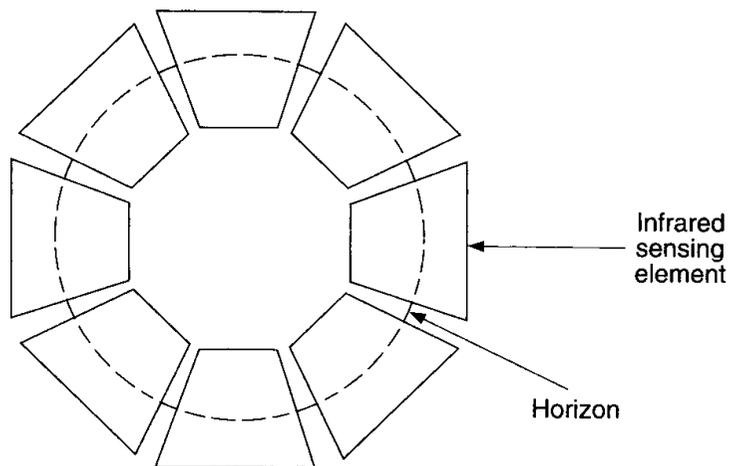
## Sensores de horizonte terrestre



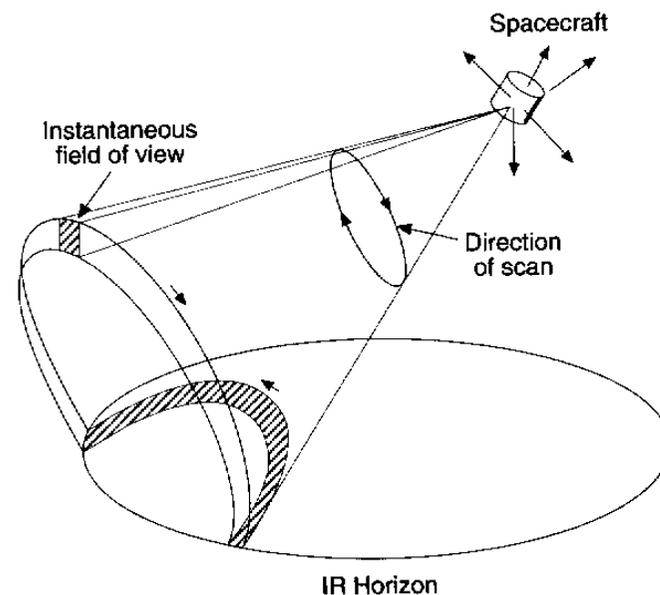
- **Sensores de horizonte terrestre:** determinan la dirección en la que se encuentra la Tierra.
  - Se basan en que la Tierra refleja la radiación solar en el espectro infrarrojo.
  - Su precisión está limitada en parte por la imprecisión de la línea de horizonte.
- 
- Existen dos tipos de sensores de horizonte terrestre:
    - Estáticos: detectan el “dibujo” del horizonte terrestre.
    - De barrido: en continua rotación, encuentran cuando empieza y cuando acaba el horizonte.



## Sensores de horizonte terrestre



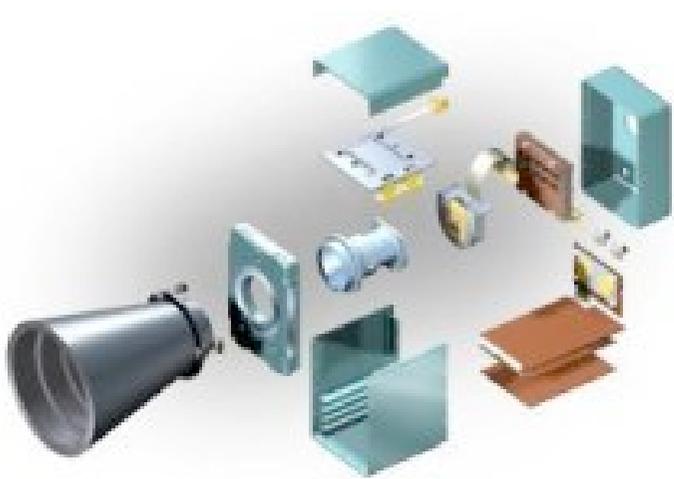
- Sensor de tipo estático.
- Complejo en órbitas excéntricas.
- Su precisión va de 0.1 grados (LEO) a 0.01 grados (GEO).



- Sensor de tipo barrido.
- Se calcula el ancho del horizonte en base a cuando aparece y desaparece la señal.
- Precisión variable (minutos de arco o menos).



## Sensores de estrellas



- **Sensores de estrellas:** determinan la dirección en base a las estrellas. Los más precisos.
- Los star trackers o rastreadores encuentran una estrella concreta, que siguen.
- Las star cameras buscan grupos de estrellas, cuyas posiciones son comparadas con mapas estelares para determinar la actitud.
- Puesto que la intensidad de radiación emitida por una estrella suele ser baja, requieren dispositivos muy sensibles o bien amplificadores.
- No son útiles en vehículos estabilizados por rotación, puesto que a velocidades angulares grandes dejan de ser efectivos.



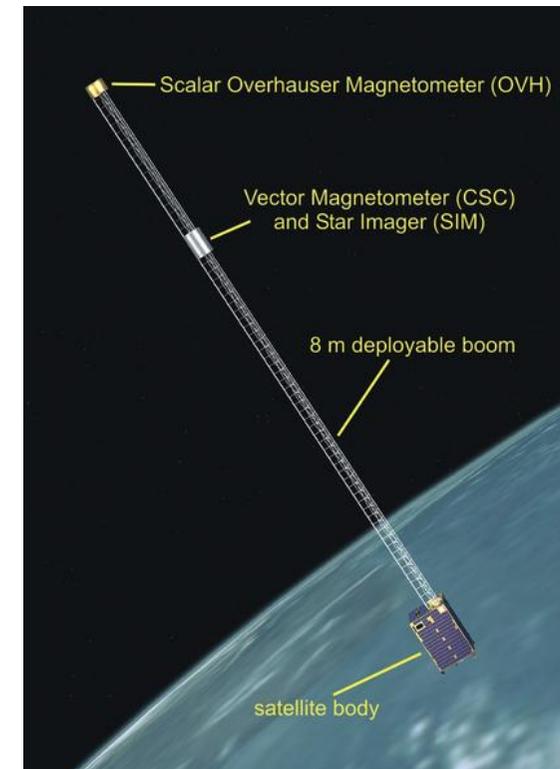
## Sensores magnéticos (magnetómetros)

*Low Power  
and High  
Performance  
in a Small  
Package*



- Un magnetómetro mide el vector campo magnético en el sistema de referencia ejes cuerpos.
- Se compara con el campo magnético teórico en los ejes fijos de la Tierra, para hallar la actitud.
- No muy precisos por la irregularidad del campo magnético terrestre.

- Satélite Ørsted, medidas precisas del campo magnético terrestre.
- “Boom” (mástil) de 8 metros para minimizar las interferencias del propio satélite en el magnetómetro.



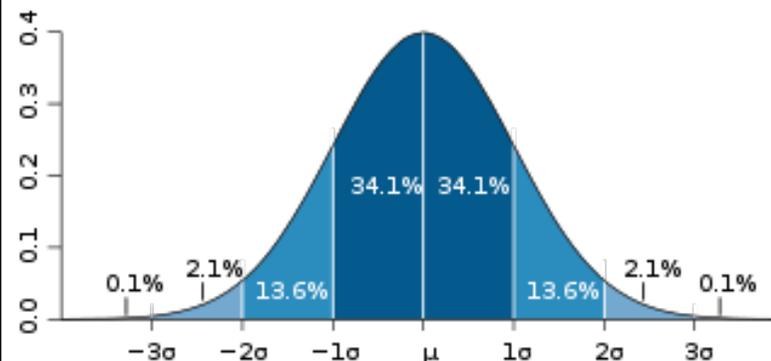
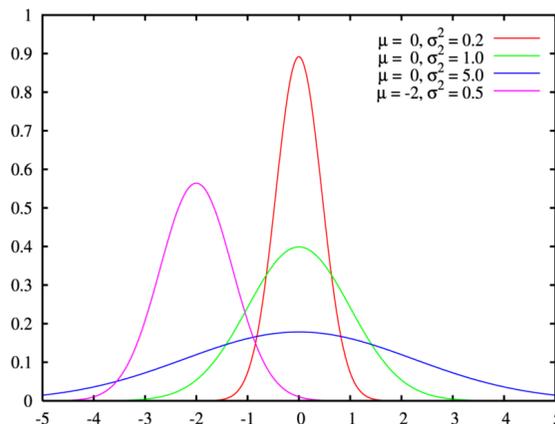
## VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS UNIDIMENSIONALES

- Sea una variable aleatoria  $X \in \mathbb{R}$  continua.
- Recordemos que la función de distribución  $F(x)$  es la probabilidad de que  $X \leq x$ , que se escribe como  $F(x) = P(X \leq x)$ .
- La función de distribución se calcula mediante la función de densidad  $f(x)$ :  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$ .
- Se define el operador esperanza matemática actuando sobre la función  $g(x)$  como  $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)dy$ . Se trata de un operador lineal, de forma que  $E[\alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X)] = \alpha_1 E[g_1(X)] + \alpha_2 E[g_2(X)]$ . Los dos casos importantes son:
  - Media:  $m(X) = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$ .
  - Varianza:  $V(X) = E[(X - m(X))^2] = E[X^2] - (E[X])^2$ .
  - Desviación típica  $\sigma$ , la raíz cuadrada de la varianza,  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .



# Distribución normal o gaussiana I

- Es la distribución más usada en estadística. Se escribe  $X \sim N(m, \sigma^2)$  y su función de densidad es 
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{Exp} \left( -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right).$$
- Intervalos de confianza: si  $X \sim N(m, \sigma^2)$ :
  - Intervalo 1- $\sigma$ :  $P(X \in [m - \sigma, m + \sigma]) = 68,3 \%$ .
  - Intervalo 2- $\sigma$ :  $P(X \in [m - 2\sigma, m + 2\sigma]) = 95,45 \%$ .
  - Intervalo 3- $\sigma$ :  $P(X \in [m - 3\sigma, m + 3\sigma]) = 99,74 \%$ .



## Distribución normal o gaussiana II

- El **teorema central del límite** dice que la suma de variables aleatorias (con cualquier tipo de distribución) tiende en media a la normal. Puesto que los errores a gran escala provienen de la suma y acumulación de muchos errores a pequeña escala, esto justifica el uso de la normal como modelo para errores.
- Una propiedad importante de la normal es que la suma de normales es de nuevo normal, es decir, si  $X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$  e  $Y \sim N(m_y, \sigma_y^2)$  y son independientes, entonces si  $Z = X + Y$  se tiene que  $Z \sim N(m_x + m_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ .
- Por tanto  $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ , es decir, la desviación típica de la suma de errores es **la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones típicas de los errores**.
- Esta regla, conocida como Root-Sum-of-Squares (RSS) es muy importante.



## Variables aleatorias continuas multidimensionales

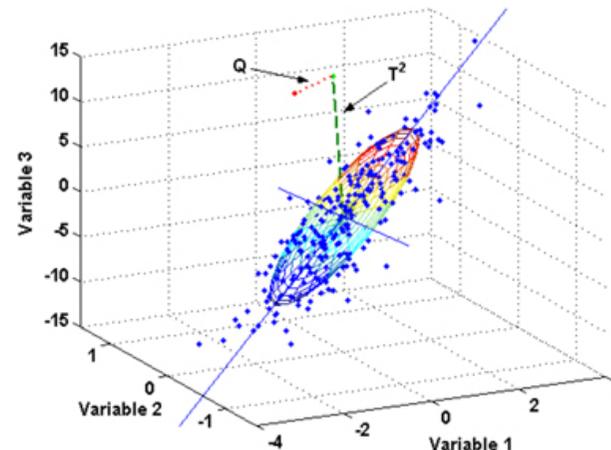
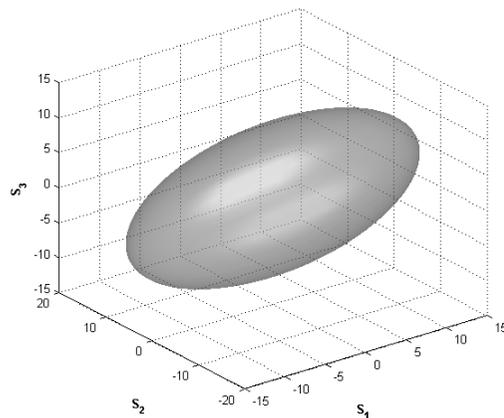
- Sea una variable aleatoria  $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$  continua multidimensional.
- Cada componente de  $\vec{X}$  sigue una distribución unidimensional.
- Como en el caso unidimensional, se define una función de distribución conjunta, que se calcula mediante la función de densidad  $f(\vec{x})$ .
- Igualmente  $E[g(\vec{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{y})f(\vec{y})d\vec{y}$ . Los dos casos importantes son:
  - Media:  $\vec{m}(\vec{X}) = E[\vec{X}] = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{y}f(\vec{y})d\vec{y}$ .
  - Covarianza:  $Cov(\vec{X}) = E[(\vec{X} - m(\vec{X}))(\vec{X} - m(\vec{X}))^T] = \Sigma$ . Es una matriz simétrica y definida positiva. Los valores de la diagonal representan la varianza de cada componente de  $\vec{X}$ , y los otros valores la correlación entre dos componentes de  $\vec{X}$ . Se tiene  $\Sigma = E[(\vec{X}\vec{X}^T] - m(\vec{X})m(\vec{X})^T$ .
- Por ejemplo, para  $n = 3$  y escribiendo  $\vec{X} = [X, Y, Z]$ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & E[(X - m_x)(Y - m_y)] & E[(X - m_x)(Z - m_z)] \\ E[(X - m_x)(Y - m_y)] & \sigma_y^2 & E[(Y - m_y)(Z - m_z)] \\ E[(X - m_x)(Z - m_z)] & E[(Y - m_y)(Z - m_z)] & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$



## Distribución normal multivariante I

- Se escribe  $\vec{X} \sim N_n(\vec{m}, \Sigma)$  y su función de densidad es  $f(\vec{x}) = \frac{1}{\text{Det}(\Sigma)(2\pi)^{n/2}} \text{Exp} \left( -\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{m})^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{m}) \right)$ .
- Los intervalos de confianza son ahora regiones de  $\mathbb{R}^n$ , definidos por  $P(\vec{X} \in \Omega) = P_\Omega$ .
- La forma de estas regiones de confianza es de elipsoides, descritos por la ecuación  $(\vec{x} - \vec{m})^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{m}) = d^2$ , donde  $d$  depende de  $P_\Omega$ . Cuanto mayores sean los valores de los autovalores de  $\Sigma$ , mayor será el elipsoide. Las direcciones de los ejes del elipsoide vendrán dados por los autovectores de  $\Sigma$ .



## Distribución normal multivariante II

- Tomando un ejemplo aeronáutico clásico en navegación aérea, si por ejemplo describimos el error en posición de un avión en ejes cuerpo,  $\delta \vec{r}^b = [\delta x \ \delta y \ \delta z]^T$ , como una normal multivariante con  $n = 3$ , de media cero (centrada en el avión) y con matriz de covarianzas:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

- Entonces podemos asimilar el movimiento del avión al movimiento del elipsoide, que representa una región de incertidumbre donde se puede encontrar el avión con gran probabilidad.
- Se verifica que si  $\vec{X} \sim N_n(\vec{m}_x, \Sigma_x)$  e  $\vec{Y} \sim N_n(\vec{m}_y, \Sigma_y)$  y son independientes, entonces si  $\vec{Z} = \vec{X} + \vec{Y}$  resulta  $\vec{Z} \sim N_n(\vec{m}_x + \vec{m}_y, \Sigma_x + \Sigma_y)$ .
- Igualmente  $A\vec{X} + \vec{b}$  donde  $A$  y  $b$  son no-aleatorios verifica que  $A\vec{X} + \vec{b} \sim N_n(A\vec{m}_x + \vec{b}, A\Sigma_x A^T)$ .



## Matrices de covarianza de los métodos q y TRIAD

- Para el método TRIAD, la matriz  $C_N^B$  obtenida contendrá errores. La forma de modelar estos errores es usando un vector "de ángulos pequeños". Denotando  $\hat{C}_N^B$  a la matriz estimada, realmente  $\hat{C}_N^B = C_n^{\hat{b}}$ , donde se tiene que:

$$N \longrightarrow \hat{B} \xrightarrow[x^b]{\delta\phi_x} S_1 \xrightarrow[y^{S_1}]{\delta\phi_y} S_2 \xrightarrow[z^{S_2}]{\delta\phi_z} B$$

- Se tiene entonces  $C_N^B = C_{\hat{B}}^B C_N^{\hat{B}}$ , por analogía con las definiciones anteriores definimos

$$\delta C_N^B = C_N^B - \hat{C}_N^B = C_{\hat{B}}^B \hat{C}_N^B - \hat{C}_N^B = (C_{\hat{B}}^B - \text{Id}) \hat{C}_N^B.$$

- Suponiendo que los errores  $\delta\vec{\phi} = [\delta\phi_x \ \delta\phi_y \ \delta\phi_z]^T$  son pequeños, se vio que  $C_{\hat{B}}^B = \text{Id} - \delta\vec{\phi}^\times$ .

- Por tanto, la relación entre la "matriz de error"  $\delta C_N^B$  y  $\delta\vec{\phi}$  es

$$\delta C_N^B = (\text{Id} - \delta\vec{\phi}^\times - \text{Id}) \hat{C}_N^B = -\delta\vec{\phi}^\times \hat{C}_N^B. \text{ Y se tiene}$$

$$C_N^B = (\text{Id} - \delta\vec{\phi}^\times) \hat{C}_N^B.$$



## Matrices de covarianza de los métodos q y TRIAD

- Para el método TRIAD, modelamos el error desconocido  $\delta\vec{\phi}$  como una normal multivariante con media cero y covarianza  $P_{\phi\phi}$ . Se demuestra la siguiente relación:

$$P_{\phi\phi} = \sigma_1^2 \text{Id} + \frac{1}{|\vec{W}_1 \times \vec{W}_2|^2} \left( (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) W_1 W_1^T + \sigma_1^2 (W_1^T W_2)(W_1 W_2^T + W_2 W_1^T) \right)$$

donde  $\sigma_1$  representa el error (desviación típica) de la primera medida y  $\sigma_2$  el error de la segunda medida. Se observa la mayor influencia del error de la primera variable.

- En el caso del algoritmo Q, puesto que se calcula un error, el error vendrá dado por un cuaternión de error  $\delta q$ , de forma que  $\hat{q} = q \star \delta q$ , tal como se definió en el tema 3:

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$



## Matrices de covarianza de los métodos q y TRIAD

- Por tanto es ahora  $\vec{a}$  quien representa el error de actitud (a través del cuaternión de error) y por tanto  $\vec{a}$  sería una normal multivariante de media 0 y covarianza  $P_a$ .
- En el algoritmo q cada medida tendrá su error representado por su varianza  $\sigma_i^2$ . El error final dependerá de los pesos elegidos en el algoritmo y en general, se demuestra que

$$P_a = \frac{1}{4} \left[ \text{Id} - \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{W}_i^T \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \left[ \text{Id} - \vec{W}_i \vec{W}_i^T \right] \right] \left[ \text{Id} - \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{W}_i^T \right]^{-1}$$

- Una elección de  $a_i$  sería hacerla proporcional al inverso de la varianza  $\sigma_i^2$ . Como los  $a_i$  tienen que sumar 1, se podría elegir

$$a_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

llegando a

$$P_a = \frac{1}{4} \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2}} \left[ \text{Id} - \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{W}_i^T \right]^{-1}$$

- Nota: Si  $\left[ \text{Id} - \sum_{i=1}^n a_i \vec{W}_i \vec{W}_i^T \right]$  no es invertible el problema no tiene solución única por el algoritmo q.



# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 4: Cinemática de la Actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

23 de febrero de 2017



# Ecuaciones Diferenciales Cinemáticas de la Actitud

- Para el caso de la posición, las ecuaciones cinemáticas relacionan el vector posición con el vector velocidad, mientras que las ecuaciones dinámicas relacionan el vector velocidad con el vector fuerza.
- Para el caso de la actitud, las ecuaciones diferenciales cinemáticas (EDC) relacionan la representación de la actitud (DCM, ángulos de Euler, cuaterniones) con la velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Típicamente estas ecuaciones son no-lineales.
- En el sistema de navegación inercial, los giróscopos nos darán  $\vec{\omega}$ , y habrá que utilizar las EDC, es decir, integrar las ecuaciones, para calcular la actitud.
- Por tanto es importante conocer las diferentes EDC para las diferentes representaciones, para ver cuál es la más ventajosa desde un punto de vista computacional.



## DCM para ángulos pequeños I

- Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia  $A$  y  $B$ , relacionados de la siguiente forma:

$$A \xrightarrow[x^A]{d\theta_1} S_1 \xrightarrow[y^{S_1}]{d\theta_2} S_2 \xrightarrow[z^{S_2}]{d\theta_3} B$$

donde suponemos que  $d\theta_i$  son ángulos pequeños, de forma que podemos aproximar  $\cos d\theta_i \simeq 1$  y  $\sin d\theta_i \simeq d\theta_i$ .

- Si escribimos las matrices de rotación teniendo en cuenta la aproximación anterior, obtenemos:

$$C_A^{S_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta_1 \\ 0 & -d\theta_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{S_1}^{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ d\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{S_2}^B = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_3 & 0 \\ -d\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Si escribimos  $C_A^B = C_{S_2}^B C_{S_1}^{S_2} C_A^{S_1}$  y despreciamos todos los productos dobles de ángulos, es decir,  $d\theta_i d\theta_j \simeq 0$ , obtenemos:

$$C_A^B = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_3 & -d\theta_2 \\ -d\theta_3 & 1 & d\theta_1 \\ d\theta_2 & -d\theta_1 & 1 \end{bmatrix} = \text{Id} - \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_3 & d\theta_2 \\ d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ -d\theta_2 & d\theta_1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Id} - d\vec{\theta}^\times,$$



## DCM para ángulos pequeños II

- En la anterior transparencia, se ha definido  $d\vec{\theta} = [d\theta_1 \ d\theta_2 \ d\theta_3]^T$  y la matriz

$$d\vec{\theta}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_3 & d\theta_2 \\ d\theta_3 & 0 & -d\theta_1 \\ -d\theta_2 & d\theta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

que es la matriz antisimétrica que se emplea para efectuar el producto vectorial.

- Obsérvese que bajo estas hipótesis (ángulos pequeños) no importa el orden de las rotaciones y los ángulos se suman. Pero no se pueden usar ángulos de Euler en los que se repitan ejes, ya que quedaría sin definir una de las rotaciones y otras dos se sumarían.



## EDC para la DCM I

- Supongamos que quiero calcular la actitud de  $B$  respecto a  $A$ , mediante la DCM  $C_A^B(t)$ , sabiendo que  $B$  gira con respecto a  $A$  con una velocidad angular  $\vec{\omega}_{B/A}^B$ .

- Por definición:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \frac{C_A^B(t+dt) - C_A^B(t)}{dt}$

- Suponiendo  $A$  fijo, entonces podemos imaginar que es  $B$  quien se mueve en el tiempo, y por tanto podríamos escribir  $B = B(t)$  y por tanto  $C_A^B(t) = C_A^{B(t)}$ .

- Usando este razonamiento,  
 $C_A^B(t + dt) = C_A^{B(t+dt)} = C_{B(t)}^{B(t+dt)} C_A^{B(t)}$ . Por tanto:

$$A \longrightarrow B(t) \longrightarrow B(t + dt)$$

- En el tiempo  $dt$ , el sistema de referencia  $B$  habrá girado respecto a sí mismo un ángulo muy pequeño en cada eje; por lo que hemos visto en la anterior transparencia, por tanto,

$$C_{B(t)}^{B(t+dt)} = \text{Id} - \left( d\vec{\theta}^B \right)^\times, \text{ donde } d\vec{\theta}^B \text{ es como antes.}$$



## EDC para la DCM II

- Siguiendo el razonamiento:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \frac{C_A^B(t+dt) - C_A^B(t)}{dt} = \frac{C_{B(t)}^{B(t+dt)} C_A^B(t) - C_A^B(t)}{dt} = \frac{(\text{Id} - (d\vec{\theta}^B)^\times) C_A^B(t) - C_A^B(t)}{dt} = -\frac{(d\vec{\theta}^B)^\times}{dt} C_A^B(t)$
- La matriz  $\frac{(d\vec{\theta}^B)^\times}{dt}$  se escribiría

$$\frac{(d\vec{\theta}^B)^\times}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d\theta_3}{dt} & \frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{d\theta_3}{dt} & 0 & -\frac{d\theta_1}{dt} \\ -\frac{d\theta_2}{dt} & \frac{d\theta_1}{dt} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\vec{\omega}_{B/A}^B = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  ya que  $d\vec{\theta}^B$  representaba el ángulo girado por  $B$  en un  $dt$ , y por definición de velocidad angular.

Se tiene entonces:

$$\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

- Por tanto:  $\frac{d}{dt} C_A^B = \dot{C}_A^B = -\left(\vec{\omega}_{B/A}^B\right)^\times C_A^B$ .



## EDC para la DCM III

- Otra variación: trasponiendo ambos miembros de  $\dot{C}_A^B = - \left( \vec{\omega}_{B/A}^B \right)^\times C_A^B$  llegamos a  $\dot{C}_B^A = C_B^A \left( \vec{\omega}_{B/A}^B \right)^\times$
- En general, la EDC es una ecuación diferencial matricial, que habrá que resolver componente a componente: nueve ecuaciones diferenciales acopladas.
- El principal problema de resolver numéricamente esta ecuación es garantizar que la matriz resultante de integrar sea ortogonal. Obsérvese que en teoría la ecuación diferencial respeta la ortogonalidad:  $I = (C_A^B)(C_A^B)^T$ , derivando:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{d}{dt} (C_A^B) \right] (C_A^B)^T + C_A^B \frac{d}{dt} (C_A^B)^T \\
 &= - \left( \vec{\omega}_{B/A}^B \right)^\times C_A^B (C_A^B)^T + C_A^B C_B^A \left( \vec{\omega}_{B/A}^B \right)^\times \\
 &= - \left( \vec{\omega}_{B/A}^B \right)^\times + \left( \vec{\omega}_{B/A}^B \right)^\times = 0
 \end{aligned}$$



## EDC para la DCM III

- Sin embargo los errores numéricos en la integración pueden desviar a la DCM resultante de la ortogonalidad.
- Existen algoritmos para encontrar la matriz ortogonal “más próxima” a una matriz dada.
- Por ejemplo, dada  $M$ , encontrar una matriz próxima que sea ortogonal:

$$Q = M(M^T M)^{-1/2}$$

- El problema con la fórmula anterior es que requiere calcular una raíz cuadrada matricial, lo que no siempre es sencillo.
- El método iterativo  $Q_0 = M$ ,

$$Q_{k+1} = 2M(Q_k^{-1}M + M^T Q_k)^{-1}$$

converge a la misma matriz cuando  $k \rightarrow \infty$ , si  $M$  es próximo a una matriz ortogonal (y por tanto invertible).

- Obviamente si  $M$  es muy próxima a una matriz ortogonal el método iterativo convergerá muy rápido.



## Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues I

- Supongamos que se parte de la actitud identidad y se impone un giro con velocidad angular constante  $\vec{\omega}$ , donde  $\vec{\theta} = \theta \vec{e}$ , siendo  $\vec{e}$  un vector unitario, durante una unidad de tiempo. La actitud resultante debería ser la descrita por el eje y ángulo de Euler  $(\vec{e}, \theta)$ .
- La actitud final será la solución en  $t = 1$  de la ecuación diferencial  $\dot{C} = -\vec{\theta}^\times C$  con condición inicial  $C(0) = \text{Id}$ . Recordemos que la solución de esta ecuación diferencial matricial es la "matriz exponencial":

$$C(t) = C(0)\text{Exp}(-\vec{\theta}^\times t) = C(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\vec{\theta}^\times t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n \theta^n (\vec{e}^\times)^n}{n!}$$

- Esta serie es sumable, pero hay que calcular las potencias de  $\vec{e}^\times$ . Obsérvese que  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ , expresado matricialmente:  $\vec{a}^\times \vec{b}^\times \vec{c} = \vec{b} \vec{a}^T \vec{c} - \vec{a}^T \vec{b} \vec{c} = (\vec{b} \vec{a}^T - \vec{a}^T \vec{b} \text{Id}) \vec{c}$ . Luego  $(\vec{e}^\times)^2 = \vec{e} \vec{e}^T - \vec{e}^T \vec{e} \text{Id} = \vec{e} \vec{e}^T - \text{Id}$ .



## Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues II

- Observemos:

$$\begin{aligned}
 (\vec{e}^\times)^0 &= \text{Id} \\
 (\vec{e}^\times)^1 &= (\vec{e}^\times)^1 \\
 (\vec{e}^\times)^2 &= \vec{e}\vec{e}^T - \text{Id} \\
 (\vec{e}^\times)^3 &= \vec{e}^\times (\vec{e}\vec{e}^T - \text{Id}) = -\vec{e}^\times \\
 (\vec{e}^\times)^4 &= -(\vec{e}^\times)^2 = -\vec{e}\vec{e}^T + \text{Id} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

- Por tanto:

$$\begin{aligned}
 (\vec{e}^\times)^0 &= \text{Id} \\
 (\vec{e}^\times)^{2k+1} &= (-1)^k \vec{e}^\times, \quad k \geq 0 \\
 (\vec{e}^\times)^{2k} &= (-1)^k \left( \text{Id} - \vec{e}\vec{e}^T \right), \quad k \geq 1
 \end{aligned}$$



## Demostración de la ecuación de Euler-Rodrigues III

- Sustituyendo  $t = 1$  y separando  $n = 0$ ,  $n$  impar y  $n$  par de la serie, obtenemos:

$$C(1) = \text{Id} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1} (\vec{e}^{\times})^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k} (\vec{e}^{\times})^{2k}}{(2k)!}$$

- Sustituyendo los valores antes hallados:

$$C(1) = \text{Id} - \vec{e}^{\times} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + (\text{Id} - \vec{e}\vec{e}^T) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k} (\vec{e}^{\times})^{2k}}{(2k)!}$$

- Reconociendo las series del seno y del coseno:

$$C(1) = \text{Id} - \vec{e}^{\times} \sin \theta + (\text{Id} - \vec{e}\vec{e}^T)(\cos \theta - 1)$$

- Operando, llegamos al resultado final:

$$C(1) = \text{Id} \cos \theta - \vec{e}^{\times} \sin \theta + \vec{e}\vec{e}^T (1 - \cos \theta)$$



## EDC para los ángulos de Euler I

- Partimos de la definición de los ángulos de Euler en el caso de aeronaves:

$$n \xrightarrow[z^n]{\psi} S \xrightarrow[y^S]{\theta} S' \xrightarrow[x^{S'}]{\varphi} b$$

- La velocidad angular tiene la propiedad de que

$$\vec{\omega}_{b/n} = \vec{\omega}_{b/S'} + \vec{\omega}_{S'/S} + \vec{\omega}_{S/n}.$$

- Si mecanizamos esta ecuación en b:

$$\vec{\omega}_{b/n}^b = \vec{\omega}_{b/S'}^b + \vec{\omega}_{S'/S}^b + \vec{\omega}_{S/n}^b$$

- Por otro lado está claro que:

$$\vec{\omega}_{b/S'}^b = [\dot{\varphi} \ 0 \ 0]^T, \quad \vec{\omega}_{S'/S}^{S'} = [0 \ \dot{\theta} \ 0]^T, \quad \vec{\omega}_{S/n}^S = [0 \ 0 \ \dot{\psi}]^T.$$

- Luego:  $\vec{\omega}_{b/n}^b = \vec{\omega}_{b/S'}^b + C_{S'}^b \vec{\omega}_{S'/S}^{S'} + C_S^b \vec{\omega}_{S/n}^S$  y puesto que

$$C_S^b = C_{S'}^b C_S^{S'}, \text{ podemos escribir:}$$

$$\vec{\omega}_{b/n}^b = \vec{\omega}_{b/S'}^b + C_{S'}^b \vec{\omega}_{S'/S}^{S'} + C_{S'}^b C_S^{S'} \vec{\omega}_{S/n}^S$$



## EDC para los ángulos de Euler II

- Desarrollando esta ecuación:

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega}_{b/n}^b &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c\varphi\dot{\theta} \\ -s\varphi\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s\theta\dot{\psi} \\ s\varphi c\theta\dot{\psi} \\ c\varphi c\theta\dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & s\varphi c\theta \\ 0 & -s\varphi & c\varphi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



## EDC para los ángulos de Euler III

- Obsérvese que lo que realmente se quiere es una expresión para las derivadas de los ángulos en función de  $\vec{\omega}_{b/n}^b = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ , y por tanto hay que invertir la matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & s\varphi c\theta \\ 0 & -s\varphi & c\varphi c\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c\theta} \begin{bmatrix} c\theta & s\theta s\varphi & s\theta c\varphi \\ 0 & c\varphi c\theta & -s\varphi c\theta \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

- Obsérvese que se trata de 3 ecuaciones diferenciales no lineales, con multitud de funciones trigonométricas.
- Posee una singularidad para  $\theta = \pm 90^\circ$ . En realidad los ángulos de Euler no están bien definidos para esta situación. Ésta singularidad es el motivo por el que no se suelen usar en sistemas de navegación inercial (aeronaves o vehículos).
- Lo mismo sucede para cualquier otro conjunto de ángulos de Euler; siempre existe una singularidad.



## EDC para el eje y ángulo de Euler

- La representación en forma de eje y ángulo de Euler,  $(\vec{e}_{b/n}^b, \theta)$ , tiene las siguientes EDC:
- Para el ángulo de Euler:  $\dot{\theta} = (\vec{e}_{b/n}^b)^T \vec{\omega}_{b/n}^b$
- Para el eje de Euler:

$$\dot{\vec{e}}_{b/n}^b = \frac{1}{2} \left[ \left( \vec{e}_{b/n}^b \right)^\times + \frac{1}{\tan \theta/2} \left( \text{Id} - \vec{e}_{b/n}^b (\vec{e}_{b/n}^b)^T \right) \right] \vec{\omega}_{b/n}^b$$

- Son cuatro ecuaciones diferenciales, no lineales.
- Poseen una singularidad para  $\theta = 0$ .
- Si la dirección de  $\vec{\omega}$  es constante e igual al eje  $\vec{e}$  inicial, entonces la actitud se reduce a  $\vec{e}(t) = \vec{e}(0)$  y  $\dot{\theta} = \|\vec{\omega}\|$ .
- En la práctica no se utilizan directamente; las usamos para hallar las EDC para los cuaterniones.



## EDC para cuaterniones I

- Recordemos la definición de cuaterniones en función de ángulo y eje de Euler:

$$q_0 = \cos \theta/2, \quad \vec{q} = \sin \theta/2 \vec{e}_{b/n}^b.$$

- Derivando en la ecuación de  $q_0$  y sustituyendo la EDC de  $\theta$ , obtenemos:

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \sin \theta/2 \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \sin \theta/2 (\vec{e}_{b/n}^b)^T \vec{\omega}_{b/n}^b = -\frac{1}{2} \vec{q}^T \vec{\omega}_{b/n}^b$$

- Derivando en la ecuación de  $\vec{q}$ :

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \cos \theta/2 \vec{e}_{b/n}^b \dot{\theta} + \sin \theta/2 \dot{\vec{e}}_{b/n}^b$$

- Sustituyendo las EDC de ángulo y eje de Euler:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \frac{1}{2} \cos \theta/2 \vec{e}_{b/n}^b (\vec{e}_{b/n}^b)^T \vec{\omega}_{b/n}^b \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \theta/2 \left[ \left( \vec{e}_{b/n}^b \right)^\times + \frac{1}{\tan \theta/2} \left( \text{Id} - \vec{e}_{b/n}^b (\vec{e}_{b/n}^b)^T \right) \right] \vec{\omega}_{b/n}^b \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{q}^\times + q_0 \text{Id} \right] \vec{\omega}_{b/n}^b \end{aligned}$$



## EDC para cuaterniones II

- Podemos escribir esta ecuación en forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

donde  $\vec{\omega}_{b/n}^b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ .

- Son cuatro ecuaciones diferenciales, bilineales, sin singularidades.
- Obsérvese la ausencia de singularidades y de funciones trigonométricas; se trata simplemente de una ecuación diferencial bilineal.
- Estas propiedades de las EDC son la razón más importante por la cual su uso es generalizado para representar la actitud de vehículos espaciales. Se realizan todos los cálculos mediante cuaterniones y si es necesario visualizarlos, se transforman a los ángulos de Euler más cómodos para la aplicación.



## EDC para cuaterniones III

- Recordando la definición matricial del producto de cuaterniones, si definimos un “cuaternión”  $q_\omega$  cuya parte escalar es cero y cuya parte vectorial es igual a los componentes de la velocidad angular, es decir:

$$q_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

podemos expresar la anterior ecuación como

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \star q_\omega$$

- Si se acumulan errores por imprecisiones numéricas se puede normalizar el cuaternión para que su módulo se mantenga en la unidad.



## Otras EDC

- Parámetros de Rodrigues:

$$\dot{\vec{g}} = \frac{1}{2} \left[ \text{Id} + \vec{g}^\times + \vec{g}\vec{g}^T \right] \vec{\omega}$$

- Parámetros de Rodrigues modificados:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{1 + \|\vec{p}\|^2}{4} \left[ \text{Id} + 2 \frac{\vec{p}^\times + \vec{p}^\times \vec{p}^\times}{1 + \|\vec{p}\|^2} \right] \vec{\omega}$$

- Vector de rotación:

$$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\theta} \times \vec{\omega} + \frac{1}{\theta} \left( 1 - \frac{\theta}{2 \tan \theta/2} \right) \vec{\theta} \times (\vec{\theta} \times \vec{\omega})$$



## Pasando de una actitud a otra

- Dados dos cuaterniones  $q_0$  y  $q_1$  que representan dos actitudes diferentes, ¿se puede construir una velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  de forma que  $q(t=0) = q_0$  y  $q(t=T) = q_1$ ?
- Como antes, la forma de hacerlo es encontrar el cuaternión  $q_2$  que representa la actitud entre  $q_0$  y  $q_1$ :  $q_2 = \frac{1}{q_0} \star q_1 = q_0^* q_1$ . Este cuaternión estará representado por un ángulo  $\theta_1$  y eje de Euler  $\vec{e}$  de forma que  $q_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1/2 \\ \text{sen } \theta_1/2 \vec{e} \end{bmatrix}$ .
- La velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  solución tiene la dirección de  $\vec{e}$  y representa el “giro más corto”. Llamemos a su módulo  $\omega(t)$ . Se tendrá  $\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$  y la actitud será:

$$q(t) = q_0 \star \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)/2) \\ \text{sen}(\theta(t)/2) \vec{e} \end{bmatrix}$$

- Cualquier  $\omega(t)$  tal que  $\int_0^T \omega(\tau) d\tau = \theta_1$  es solución.



## Linealizando la EDC para cuaterniones I

- Supongamos que tenemos una velocidad angular de referencia  $\vec{\omega}_r$  que genera un cuaternión de referencia  $\bar{q}$ , de acuerdo a la EDC que acabamos de ver. Supongamos ahora que  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}$ , donde  $\delta\vec{\omega}$  es “pequeño”. ¿Cuál será el cuaternión resultante?

- Usamos el cuaternión de error de forma que  $q = \bar{q} \star \delta q$ , determinemos  $\delta q$ . Tomando derivada, se tiene:

$$\dot{q} = \dot{\bar{q}} \star \delta q + \bar{q} \star \dot{\delta q} = \frac{1}{2} q \star q_\omega$$

- Usando  $\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \bar{q} \star q_{\omega_r}$ :

$$\frac{1}{2} \bar{q} \star q_{\omega_r} \star \delta q + \bar{q} \star \dot{\delta q} = \frac{1}{2} \bar{q} \star \delta q \star q_\omega$$

- Multiplicamos por el inverso de  $\bar{q}$  a la izquierda y despejamos  $\dot{\delta q}$ , obteniendo:

$$\dot{\delta q} = \frac{1}{2} \delta q \star q_\omega - \frac{1}{2} q_{\omega_r} \star \delta q$$



## Linealizando la EDC para cuaterniones II

- Expresando  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}$  y recordando la expresión linealizada de un cuaternión pequeño  $\delta q$  en función del parámetro  $\vec{a}$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_r \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix}$$

- Recordemos:  $\begin{bmatrix} q'_0 \\ \vec{q}' \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_0 q_0 - \vec{q}'^T \vec{q} \\ q_0 \vec{q}' + q'_0 \vec{q} + \vec{q}' \times \vec{q} \end{bmatrix}$ . Por tanto:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\vec{a}^T / 2 (\vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}) + \vec{\omega}_r^T \vec{a} / 2 \\ \vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega} + \vec{a} / 2 \times (\vec{\omega}_r + \delta\vec{\omega}) - \vec{\omega}_r - \vec{\omega}_r \times \vec{a} / 2 \end{bmatrix}$$

- Operando y teniendo en cuenta que  $\|\vec{a}\| \|\delta\vec{\omega}\| \approx 0$  al ser ambos términos pequeños:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{a}/2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_r \end{bmatrix}$$

- Es decir:  $\dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_r$ .



## Maniobras óptimas de actitud básicas en torno a un eje de simetría

En estas notas se pretende responder al siguiente problema: dada una actitud inicial A (dada por el cuaternión  $q_0$ ) una actitud final B (dada por el cuaternión  $q_1$ ), se pretende rotar el vehículo desde la actitud A hasta la B, de forma que al principio y al final de la maniobra el vehículo se encuentre en reposo (velocidad angular nula).

En primer lugar, usando los conceptos aprendidos de "interpolación" de actitudes, podemos obtener el giro más corto para llegar de A a B. Para ello, calculamos el cuaternión de rotación entre A y B:  $q_R = q_0^* \star q_1$ , y de dicho cuaternión obtenemos el eje y ángulo de Euler,  $\vec{e}$  y  $\theta_F$ . Por tanto para pasar de A a B hay que girar un ángulo  $\theta_F$  en torno al eje  $\vec{e}$ . Por tanto la velocidad angular la definimos como  $\vec{\omega} = \omega(t)\vec{e}$ , ya que el eje es fijo durante la maniobra. La parte final del problema se reduce a encontrar  $\omega(t)$ . Sea  $\theta$  el ángulo girado en torno al eje, supongamos que el tiempo de maniobra es  $T$ , que se puede ejercer un par  $M$  en el eje encontrado y que la inercia en dicho eje es  $I$ . Para simplificar consideremos que se trata de un eje de simetría. Por tanto, la dinámica del problema es

$$\dot{\theta} = \omega, \quad I\dot{\omega} = M$$

y las condiciones establecidas en el enunciado son:

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(T) = \theta_F, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(T) = 0$$

Este problema se resolverá para dos casos básicos, extremos entre sí:

1. Realizar la maniobra en el tiempo mínimo. Por tanto  $T$  es una incógnita, lo denotamos por  $T_{min}$ . El dato necesario es el par máximo aplicable ( $M_{max}$ ), que debe ser positivo, y el par mínimo aplicable ( $M_{min}$ ), que debe ser negativo.
2. Realizar la maniobra con mínima energía, es decir minimizar  $\int_0^T M^2(\tau)d\tau$ . En este caso  $T$  es dato, y suponemos que el par no está limitado para simplificar el problema.

### 1. Maniobra de tiempo mínimo con pares máximo/mínimo simétricos

Partimos inicialmente de la base de que  $M_{min} = -M_{max}$ . Intuitivamente, la maniobra requerirá aplicar durante la mitad del tiempo el par máximo, y durante el resto del tiempo el par mínimo.

Por tanto el valor del par y de la velocidad angular es:

$$M(t) = \begin{cases} M_{max}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ -M_{max}, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$
$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{M_{max}}{I}t, & 0 \leq t \leq T/2 \\ \frac{M_{max}}{I}T/2 - \frac{M_{max}}{I}(t - T/2), & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Integrando la velocidad angular para hallar el ángulo:

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{M_{max}}{I} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ \frac{M_{max}}{I} \frac{(T/2)^2}{2} + \frac{M_{max}}{I} T/2(t - T/2) - \frac{M_{max}}{I} \frac{(t - T/2)^2}{2}, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Finalmente, en  $t = T$ , el ángulo será:

$$\begin{aligned} \theta_F &= \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2}{8} + \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2}{4} - \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2}{8} \\ &= \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2}{4} \end{aligned}$$

Despejando el tiempo:

$$T_{min} = \sqrt{\frac{4I\theta_F}{M_{max}}}$$

Esta maniobra se puede ver en la figura 1. De hecho es posible calcular el tiempo gráficamente: la integral de la velocidad angular, es decir, el área bajo la curva, debe ser el ángulo total girado. Por tanto usando el área de un triángulo es posible deducir rápidamente la fórmula anterior.

### 2. Maniobra de mínima energía

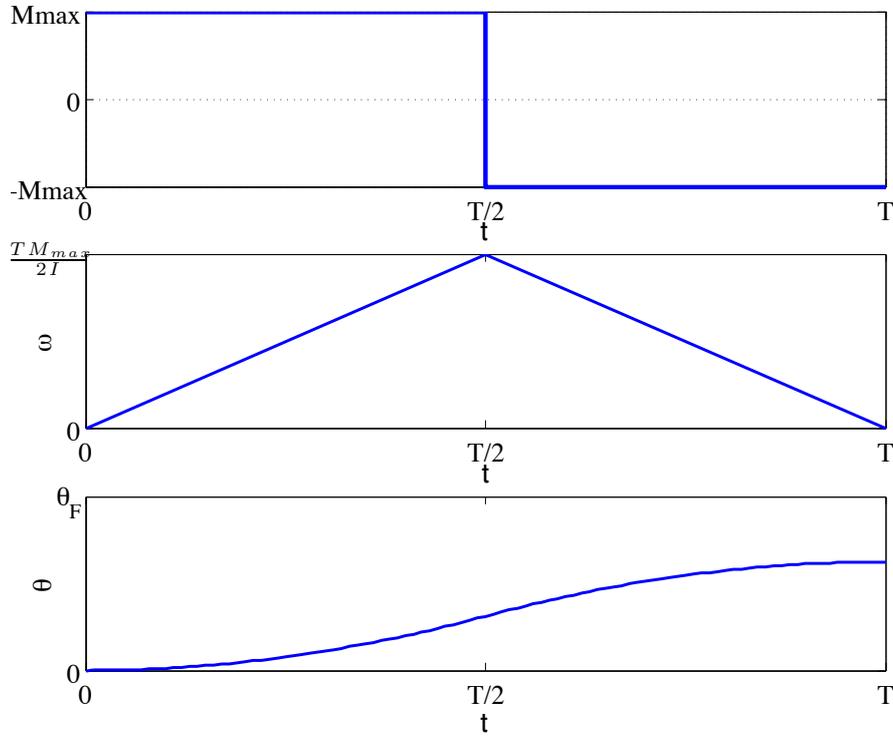


Figura 1: Maniobra de tiempo mínimo con pares máximo y mínimo simétricos entre sí.

Si no hay restricciones, se puede deducir del cálculo de variaciones que el par que minimiza la energía total consumida es lineal, de forma que la velocidad angular es cuadrática:  $\omega(t) = A + Bt + Ct^2$ . De las restricciones  $\omega(0) = \omega(T) = 0$  obtenemos:

$$A = 0, B = -CT$$

Por tanto la velocidad angular es  $\omega(t) = Ct(t - T)$ . Finalmente, integrando la ecuación diferencial de  $\theta$  obtenemos:

$$\theta_F = \int_0^T \omega(\tau) d\tau = C \int_0^T t(t - T) dt = C \left( \frac{T^3}{3} - \frac{T^3}{2} \right) = -C \frac{T^3}{6}$$

de donde  $C = -\frac{6\theta_F}{T^3}$ , obteniendo finalmente:

$$\omega(t) = \frac{6\theta_F}{T^3} t(T - t)$$

Podemos calcular igualmente el par y ángulo girado en el tiempo:

$$M(t) = \frac{6I\theta_F}{T^3} (T - 2t), \quad \theta(t) = \frac{\theta_F}{T^3} t^2 (3T - 2t)$$

Esta maniobra se puede ver en la figura 2.

### Nota: Maniobra de tiempo mínimo con pares desiguales

Intuitivamente, la maniobra requerirá aplicar durante una fracción  $\alpha$  de  $T$  el par máximo, y durante el resto del tiempo (una fracción  $(1 - \alpha)$  de  $T$ ) el par mínimo. Para calcular  $\alpha$ , es necesario aplicar el hecho de que la velocidad angular debe ser cero al final de la maniobra.

Tras un tiempo  $\alpha T$  aplicando el par máximo, se tendría  $\omega(\alpha T) = \frac{M_{max}}{I} \alpha T$ . Si ahora aplicamos el par mínimo durante un tiempo  $(1 - \alpha)T$ , encontramos que:

$$\omega(T) = \omega(\alpha T) + \frac{M_{min}}{I} (1 - \alpha)T = \frac{M_{max}}{I} \alpha T + \frac{M_{min}}{I} (1 - \alpha)T = \frac{T}{I} (\alpha M_{max} + (1 - \alpha) M_{min})$$

como esta cantidad debe ser cero,  $T$  o  $I$  no juegan ningún papel y encontramos, despejando  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{-M_{min}}{M_{max} - M_{min}}$$

Como  $M_{max}$  es positivo y  $M_{min}$  es negativo  $\alpha$  está bien definida. Obsérvese que si  $M_{min} = -M_{max}$  obtenemos  $\alpha = 1/2$  como era de esperar.

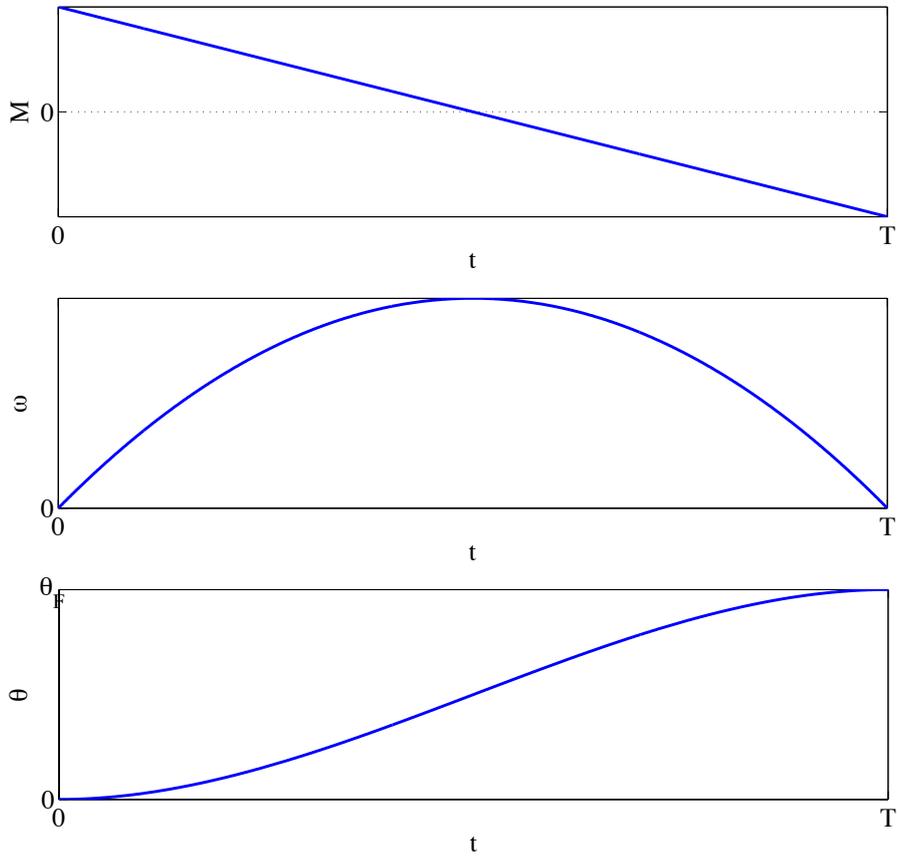


Figura 2: Maniobra de energía mínima en tiempo  $T$ .

Por tanto el valor del par y de la velocidad angular es:

$$M(t) = \begin{cases} M_{max}, & 0 \leq t \leq \alpha T \\ M_{min}, & \alpha T \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{M_{max}}{I} t, & 0 \leq t \leq \alpha T \\ \frac{M_{max}}{I} \alpha T + \frac{M_{min}}{I} (t - \alpha T), & \alpha T \leq t \leq T \end{cases}$$

Integrando la velocidad angular para hallar el ángulo:

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{M_{max}}{I} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \alpha T \\ \frac{M_{max}}{I} \frac{(\alpha T)^2}{2} + \frac{M_{max}}{I} \alpha T (t - \alpha T) + \frac{M_{min}}{I} \frac{(t - \alpha T)^2}{2}, & \alpha T \leq t \leq T \end{cases}$$

Finalmente, en  $t = T$ , el ángulo será:

$$\begin{aligned} \theta_F &= \frac{M_{max}}{I} \frac{(\alpha T)^2}{2} + \frac{M_{max}}{I} \alpha T (T - \alpha T) + \frac{M_{min}}{I} \frac{(T - \alpha T)^2}{2} \\ &= \frac{M_{max}}{I} \frac{T^2 \alpha (2 - \alpha)}{2} + \frac{M_{min}}{I} \frac{T^2 (1 - \alpha)^2}{2} \\ &= \frac{T^2}{2I} (M_{max} \alpha (2 - \alpha) + M_{min} (1 - \alpha)^2) \\ &= \frac{T^2}{2I} \left( M_{max} \frac{-M_{min}}{M_{max} - M_{min}} \left( \frac{2M_{max} - M_{min}}{M_{max} - M_{min}} \right) + M_{min} \left( \frac{M_{max}}{M_{max} - M_{min}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{T^2}{2I} \frac{-M_{max} M_{min}}{(M_{max} - M_{min})^2} (2M_{max} - M_{min} - M_{max}) \\ &= \frac{T^2}{2I} \frac{-M_{max} M_{min}}{(M_{max} - M_{min})} \end{aligned}$$

Donde se ha sustituido el valor hallado de  $\alpha$ .

Despejando el tiempo:

$$T_{min} = \sqrt{\frac{2I\theta_F(M_{max} - M_{min})}{-M_{max}M_{min}}}$$

Para el caso  $M_{min} = -M_{max}$  corroboramos el resultado anterior obteniendo:

$$T_{min} = \sqrt{\frac{4I\theta_F}{M_{max}}}$$

Esta maniobra se puede ver en la figura 3. Las fórmulas obtenidas se pueden también conseguir de forma gráfica como en el caso de pares máximo y mínimo simétricos.

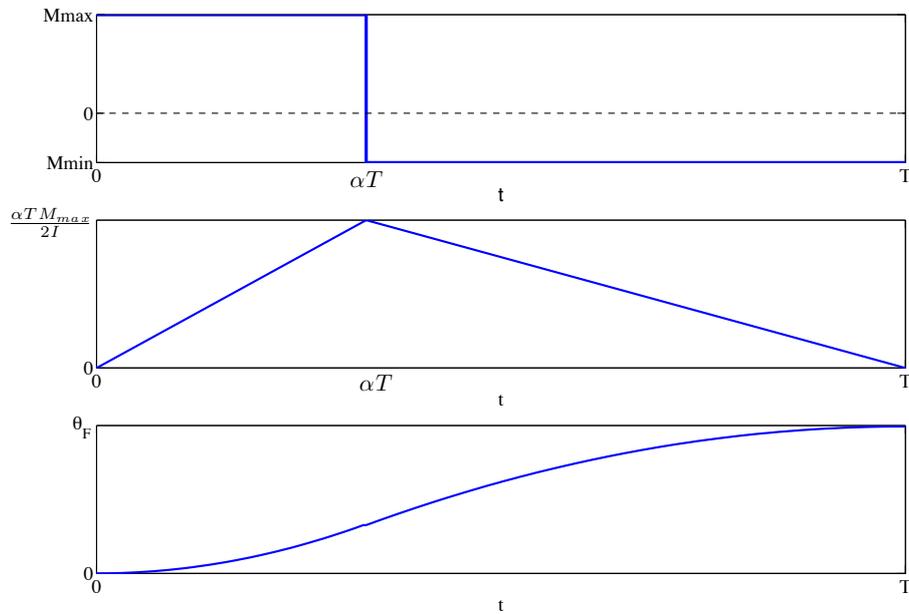


Figura 3: Maniobra de tiempo mínimo con pares máximo y mínimo asimétricos entre sí.

# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 5: Estimación dinámica de actitud. Giróscopos. Filtro de Kalman.

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

23 de febrero de 2017

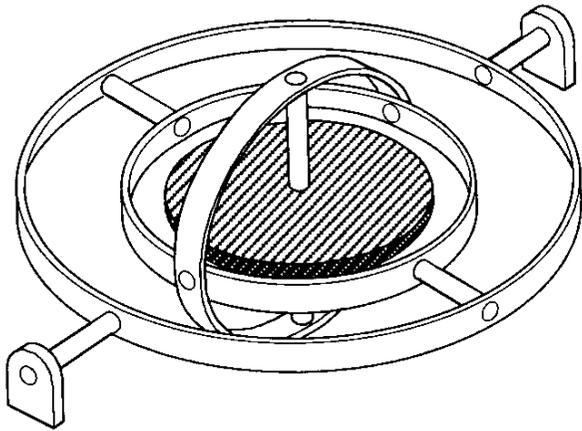


## Estimación dinámica de la actitud

- La estimación dinámica de actitud (típicamente llamada simplemente estimación de actitud) requiere del uso de modelos cinemáticos, giróscopos y filtro de Kalman, así como sensores de dirección complementarios.
- Los giróscopos miden la velocidad angular  $\vec{\omega}^B$  con respecto al sistema de referencia inercial. Se recupera la actitud usando esta medida para integrar las ecuaciones diferenciales cinemáticas, pero los errores se acumulan generando una cierta deriva: es necesario complementar con otro tipo de sensores.
- Para entender como se acumula el error es necesario modelarlo como un proceso estocástico (aleatorio) y utilizar las ecuaciones de propagación.



## Sensores electromecánicos: giróscopos

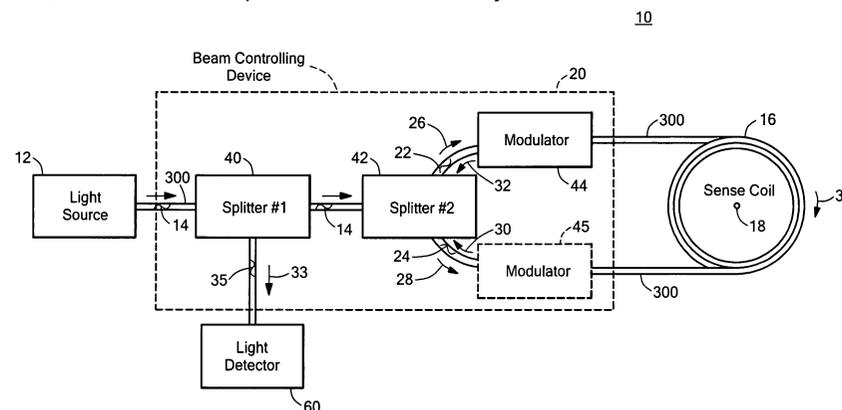


- **Giróscopos:** Típicamente en configuración “strap-down” (fijos a los ejes cuerpo), los giróscopos miden la velocidad angular en un eje.
- Tres giróscopos en ejes perpendiculares podrán calcular todas las componentes de la velocidad angular.
- El principal problema de los giróscopos es que, aunque son capaces de realizar medidas de gran precisión (desde 1 grado por hora hasta 10 segundos de arco por hora), no proporcionan una medida angular, sino de velocidad angular.
- Dicha medida debe ser integrada en el tiempo (usando las ecuaciones diferenciales cinemáticas) para obtener la actitud.



## Sensores mecánicos: giróscopos

- Inevitablemente pequeños errores se acumularan y provocarán un error de deriva en la medida.
- Por ese motivo, los sensores giroscópicos siempre se usan en combinación con otros sensores.
- No obstante son muy deseables por su elevado ancho de banda (bajo en el resto de los sensores).
- Giróscopos no mecánicos: en la actualidad se usan giróscopos ópticos (basados en principios de interferometría: RLG/FOG) y piezoeléctricos (basados en sistemas electromecánicos MEMS, de bajo coste/precisión).



## Procesos estocásticos.

- Un proceso estocástico o variable estocástica no es sino una variable aleatoria  $\vec{X}(t)$  que cambia con el tiempo. Los errores de navegación serán este tipo de variables.
- Por tanto la media y la covarianza también varían con el tiempo:  $\vec{m}(t)$ ,  $\Sigma(t)$ .
- Para un proceso, se define la autocorrelación como  $R(t, \tau) = E[\vec{X}(t)\vec{X}(\tau)^T]$ . La autocorrelación permite conocer hasta que punto la historia pasada de  $\vec{X}$  influye en su valor actual.
- **Proceso gaussiano:** Un proceso gaussiano verifica  $\vec{X}(t) \sim N_n(\vec{m}(t), \Sigma(t))$ , es decir, se distribuye como una normal multivariante cuya media y covarianza varían con el tiempo.



## Ruido blanco.

- **Ruido blanco:** Se define como ruido blanco un proceso  $\vec{\nu}(t)$  que verifica:
  - $E[\vec{\nu}(t)] = \vec{0}$ .
  - $E[\vec{\nu}(t)\vec{\nu}(t)^T] = \sigma^2\text{Id}$ .
  - $R(t, \tau) = E[\vec{\nu}(t)\vec{\nu}(\tau)^T] = \delta(t - \tau)\sigma^2\text{Id}$ , donde  $\delta(x)$  vale 1 si  $x = 0$  y 0 en cualquier otro caso.
- La última condición quiere decir que el valor del ruido blanco en un instante es independiente de su valor en cualquier instante anterior.
- **Ruido blanco gaussiano:** Es un proceso que cumple las condiciones anteriores, y además es gaussiano.
- Un buen modelo para las fuentes de error de sensores es  $\delta\vec{\epsilon}(t) = \vec{b} + D\vec{\nu}$ , donde  $\vec{\nu}$  es ruido blanco gaussiano. El valor de  $\vec{b}$  será la media del error (sesgo, llamado bias en inglés).



## Propagación del error. Caso continuo.

- Consideremos una ecuación diferencial del tipo

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + D\vec{b},$$

donde  $\vec{b}$  es ruido blanco gaussiano de covarianza  $\sigma^2 \text{Id}$ , y la condición inicial es también gaussiana, es decir,  $\vec{x}_0 \sim N_n(\vec{m}_0(t), P_0(t))$ . Entonces se tiene que  $\vec{x}$  es un proceso gaussiano,  $\vec{x} \sim N_n(\vec{m}(t), P(t))$ , con media y covarianza evolucionando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{m}} &= A\vec{m}, \\ \dot{P} &= AP + PA^T + \sigma^2 DD^T, \\ \vec{m}(0) &= \vec{m}_0, \\ P(0) &= P_0\end{aligned}$$



## Propagación del error. Caso discreto.

- Consideremos una ecuación discreta del tipo

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k + D\vec{b}_k,$$

donde  $\vec{b}_k$  es ruido blanco gaussiano de covarianza  $\sigma^2 \text{Id}$ , y la condición inicial es también gaussiana, es decir,  $\vec{x}_0 \sim N_n(\vec{m}_0(t), P_0(t))$ . Entonces se tiene que  $\vec{x}_k$  es un proceso gaussiano,  $\vec{x}_k \sim N_n(\vec{m}_k(t), P_k(t))$ , con media y covarianza evolucionando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\vec{m}_{k+1} &= A\vec{m}_k, \\ P_{k+1} &= AP_kA^T + \sigma^2DD^T,\end{aligned}$$



## Ejemplo 1-D: propagación del error de un giróscopo

- Cuando uno tiene medidas de giróscopos, es necesario integrar las ecuaciones diferenciales cinemáticas.
- Para entender el filtro de Kalman a nivel conceptual, vamos a ejemplificarlo en el caso más sencillo: un único grado de libertad de giro. Por tanto hay un sólo ángulo  $\theta$ , cuya ecuación diferencial cinemática es

$$\dot{\theta} = \omega$$

- Un giróscopo proporcionará una medida de  $\omega$  que denotamos por  $\hat{\omega}$ . En realidad no será exactamente  $\omega$ , sino que estará contaminado por un cierto ruido (que modelamos como ruido blanco)  $\nu$ :

$$\omega = \hat{\omega} + \nu$$

- Si intentamos estimar  $\theta$  (denotamos a la estimación  $\hat{\theta}$ ) directamente de  $\hat{\omega}$ , tendremos:

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega}$$



## Ejemplo 1-D: propagación del error de un giróscopo

- El error de estimación  $\delta\theta = \theta - \hat{\theta}$  verifica:

$$\delta\dot{\theta} = \omega - \hat{\omega} = \nu$$

- Suponiendo  $\nu$  ruido blanco (unidimensional) de varianza  $Q$  y  $\delta\theta(0) \approx N(0, P_0)$ , encontramos (usando la teoría de procesos expuesta en las primeras transparencias) que el error es un proceso estocástico gaussiano,  $\delta\theta \approx N(m, P)$ , donde:

$$\dot{m} = 0 \longrightarrow m = \delta\theta_0 = 0,$$

y

$$\dot{P} = \sigma_\nu^2 \longrightarrow P = P_0 + Qt$$

- Por tanto, aunque la media del error permanece fija en cero, la varianza del error crece linealmente con el tiempo y eventualmente se dispara, siendo por tanto este estimador inútil a medio plazo.



## Medida externa

- Supongamos que se tiene una medida externa adicional del ángulo. Suponemos que cada ciertos instantes discretos  $t = t_k$  se realiza una medida del ángulo  $\hat{\theta}(t_k)$ , que llamamos  $\hat{\theta}_k^{med}$  con algún otro dispositivo (que también tendrá un cierto error asociado, de forma que  $\theta_k = \hat{\theta}_k^{med} + \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es ruido blanco, de varianza  $R$ ).
- Como el tiempo entre medidas puede ser grande, no es buena idea decir  $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_k^{med}$  para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ .
- Otra idea es resetear el estimador de las anteriores transparencias cuando se llega a  $t = t_k$ , es decir, combinar las medidas de la siguiente forma:
$$\hat{\theta} = \hat{\omega}, \quad \hat{\theta}(t_k) = \hat{\theta}_k^{med}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$
- Por tanto cada nueva medida externa se reinicia la condición inicial de la ecuación diferencial y se vuelve a integrar.
- Es fácil ver que el error obtenido de esta forma sería  $\delta\theta \approx N(m, P)$ , con  $m = 0$  y  $\dot{P} = Q$ , para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , con  $P(t_k) = R$ , luego  $P = R + Q(t - t_k)$ .



## Filtro de Kalman

- Con la anterior forma que el error sería máximo justo antes de una medida, obteniendo  $P = R + Q(t_{k+1} - t_k)$  en dicho instante.
- El problema es que se ha despreciado la estimación que daba la ecuación diferencial, cuando entre  $t_k$  y  $t_{k+1}$  no ha dado tiempo a que se el error crezca demasiado. La idea del filtro de Kalman es combinar la estimación de la ecuación diferencial justo antes de la medida externa, con la medida externa, de forma que la covarianza del error sea mínima.
- A la estimación justo antes de la medida se le llama estimación a priori  $\hat{\theta}_k^-$ .
- La estimación después de la medida (estimación a posteriori), se denota  $\hat{\theta}_k^+$  y se calcula como:

$$\hat{\theta}_k^+ = \hat{\theta}_k^- + K(\hat{\theta}_k^{med} - \hat{\theta}_k^-)$$

donde  $K$  es la ganancia de Kalman y el paréntesis es la diferencia entre la estimación que se tenía y la medida externa.



## Filtro de Kalman

- $K$  se calcula para minimizar la covarianza del error a posteriori.
- La covarianza a priori será  $P_k^-$ .
- A posteriori, calculando la covarianza de la ecuación de  $\theta_k^+$ :

$$P_k^+ = (1 - K)^2 P_k^- + K^2 R$$

- Derivando con respecto a  $K$  e igualando a cero:

$$0 = -2(1 - K)P_k^- + 2KR, \text{ luego } K = \frac{P_k^-}{P_k^- + R}.$$

- Por tanto la covarianza a posterior será, sustituyendo  $K$ :

$$P_k^+ = \frac{P_k^- R}{P_k^- + R}$$

- Se ve fácilmente que  $P_k^+$  es menor que  $R$  y menor que  $P_k^-$  (recordar que ambas son positivas): por tanto se ha conseguido mejorar tanto la estimación anterior como la que se tenía de la medida!



## Filtro de Kalman

- Resumiendo el algoritmo:
- Para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , se integra usando la medida de los giróscopos, partiendo de la última estimación a posteriori:

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega}, \quad \theta(t_k) = \theta_k^+,$$

- También se propaga la covarianza del error:

$$\dot{P} = Q, \quad P(t_k) = P_k^+,$$

- Al llegar a  $t = t_{k+1}$ , se obtiene de estas ecuaciones  $\theta_{k+1}^- = \theta(t_{k+1})$  y  $P_{k+1}^-$ , y se obtiene una medida externa  $\hat{\theta}_{k+1}^{med}$ . Aplicamos el filtro de Kalman:

$$\hat{\theta}_{k+1}^+ = \hat{\theta}_{k+1}^- + K(\hat{\theta}_{k+1}^{med} - \hat{\theta}_{k+1}^-),$$

donde  $K = \frac{P_{k+1}^-}{P_{k+1}^- + R}$ , y también obtenemos  $P_{k+1}^+ = \frac{P_{k+1}^- R}{P_{k+1}^- + R}$ .

- Repetimos y volvemos a integrar las ecuaciones diferenciales hasta la nueva medida en  $t = t_{k+2}$ .



## Filtro de Kalman: casos extremos

- Si la medida del giróscopo es muy mala, es decir,  $Q$  es muy grande, entonces  $P_k^- \rightarrow \infty$ , y se puede ver que  $P_k^+ \rightarrow R$ ,  $K \rightarrow 1$ , y por tanto  $\theta_k^+ = \theta_k$  (es decir se coge la medida del sensor externo despreciando el resultado de integrar la ecuación diferencial).
- Si la medida del sensor externo es muy mala, es decir,  $R$  es muy grande, entonces se puede ver que  $P_k^+ \rightarrow P_k^-$ ,  $K \rightarrow 0$ , y por tanto  $\theta_k^+ = \theta_k^-$  (es decir se coge la estimación resultado de integrar la ecuación diferencial despreciando la medida del sensor externo ).
- Si resulta que  $P_k^- = R$ , es decir, la estimación a priori tiene el mismo error que es sensor externo, entonces se puede ver que  $P_k^+ = R/2$ ,  $K \rightarrow 1/2$ , y por tanto  $\theta_k^+ = \frac{\theta_k + \theta_k^-}{2}$  (es decir se toma la media entre la estimación resultado de integrar la ecuación diferencial y la medida del sensor externo ).



## Filtro de Kalman: otras consideraciones

- Se ha simplificado considerablemente el Filtro de Kalman al considerar un caso 1-D que es lineal. El caso N-D es similar pero más complejo ya que implica diversos productos e inversiones matriciales. No obstante conceptualmente es lo mismo: se integra la ecuación diferencial con los giróscopos y al obtener una medida externa se aplica el algoritmo de Kalman para ponderar entre la estimación a priori y la medida.
- Para aplicar el filtro de Kalman es suficiente una medida, pero cuantas más se tenga, mejor será el resultado.
- Si el sistema es no lineal hay que empezar por linealizarlo; el filtro resultante se denomina Filtro Extendido de Kalman. Para estimación de actitud esto es necesario ya que las ecuaciones diferenciales cinemáticas son siempre no-lineales.
- Para aeronaves y misiles se usa filtrado de Kalman para integrar las medidas de la IMU (giróscopos y acelerómetros) con medidas externas (GPS, antenas, magnetómetros).



## Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Vamos a desarrollar ahora el algoritmo del Filtro de Kalman en 3D para el siguiente caso:
  - 1 Se tienen giróscopos en los 3 ejes, de forma que se tiene una estimación de la velocidad angular  $\hat{\vec{\omega}}_{B/N}^B$ , que contendrá error, de forma que  $\vec{\omega}_{B/N}^B = \hat{\vec{\omega}}_{B/N}^B + \vec{v}$ , donde  $\vec{v}$  es ruido blanco de covarianza  $Q$ . Estas medidas se suponen continuas.
  - 2 Cada cierto tiempo se obtienen medidas de  $n$  direcciones en ejes cuerpo  $\hat{\vec{v}}_i^B$ , de forma que  $\vec{v}_i^B = C_N^B \vec{v}_i^N$  y  $\vec{v}_i^B = \hat{\vec{v}}_i^B + \vec{\epsilon}_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .  $\vec{\epsilon}_i$  es ruido blanco de covarianza  $R_i$ .
- Se podrían realizar estimaciones con los giróscopos o con las medidas por separado. Con las medidas ya lo hemos visto (algoritmo Q) pero sólo se podría hacer si hubiera dos o más medidas tomadas a la vez.
- Con los giróscopos, la estimación sería  $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} q \star q_{\hat{\vec{\omega}}}$ .



## Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Si uno usa  $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} q \star q_{\hat{\omega}}$ , ¿cuál es el error de estimación sabiendo que  $\hat{\omega}$  está corrompida con ruido blanco de covarianza  $Q$ ?
- No podemos aplicar la teoría general porque la ecuación es no-lineal!
- Recordamos los conceptos de cuaternión linealizado y ecuación cinemática linealizada:  $q = \hat{q} \star \delta q$ , con

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{a}} \approx \vec{v} + \vec{a} \times \hat{\omega} = -\hat{\omega} \times \vec{a} + \vec{v}.$$

- Por tanto con el cuaternión de error podemos estimar cuanto error se está cometiendo, estudiando su covarianza  $P$ , la cual evolucionará de acuerdo con la teoría que hemos planteado antes:

$$\dot{P} = -\hat{\omega} \times P + P \hat{\omega} \times + Q, \quad P(0) = P_0$$



## Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Esta covarianza crece sin límite, lo cuál sólo podemos remediarlo tomando medidas. Si en un cierto instante tomamos  $n$  medidas, ¿cómo actualizamos el cuaternión estimado  $\hat{q}$ ?
- Una posibilidad sería descartar totalmente lo obtenido con los giróscopos, de forma que se resetea la estimación a un nuevo valor (sólo posible si se tienen dos o más medidas), usando el algoritmo Q. En tal caso la nueva covarianza sería la estudiada con el algoritmo Q.
- Una mejor idea sería aprovechar la estimación que ya teníamos y combinarlas de acuerdo al filtro de Kalman. Para ello hay que linealizar el proceso de medida.
- Supongamos que tenemos  $n$  medidas  $\vec{v}_i^B$  en ejes cuerpo de direcciones conocidas en ejes inerciales  $\vec{v}_i^N$ .



## Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Partiendo del cuaternión estimado  $\hat{q}$  puedo obtener la matriz  $\hat{C}_N^B$ .
- Llamamos  $\vec{z}_i$  a la discrepancia entre lo medido y lo esperado, es decir,  $\vec{z}_i = \hat{\vec{v}}_i^B - \hat{C}_N^B \vec{v}_i^N$ . Si la estimación y la medida fueran perfectas entonces  $\vec{z}_i = \vec{0}$ .
- La medida no es perfecta, está contaminada con ruido:  
 $\hat{\vec{v}}_i^B = \vec{v}_i^B - \vec{\epsilon}_i$ .
- La estimación no es perfecta, sino que  $\hat{C}_N^B = C_N^{\hat{B}} = C_B^{\hat{B}} C_N^B$ .
- Por tanto, se tendrá  $\vec{z}_i = \vec{v}_i^B - C_B^{\hat{B}} \vec{v}_i^B - \vec{\epsilon}_i$ .
- Recordando que en función del cuaternión de error,  $C_B^{\hat{B}} = I - \vec{a}^\times$ , obtenemos  $\vec{z}_i = -\vec{a}^\times \vec{v}_i^B - \vec{\epsilon}_i = (\vec{v}_i^B)^\times \vec{a} - \vec{\epsilon}_i$ .
- Por tanto tendremos  $n$  medidas del error de la forma  $\vec{z}_i = H_i \vec{a} - \vec{\epsilon}_i$ , donde  $H_i \approx (\hat{\vec{v}}_i^B)^\times$ . (NOTA: se tomarán sólo dos filas para evitar problemas de invertibilidad). La covarianza de esta medida será  $R_i$ .



## Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Llamemos al instante antes de la medida con el superíndice  $-$  y el posterior con  $+$ . De la integración teníamos por un lado  $\hat{q}^-$  con error  $a^-$  cuya media es  $E[\vec{a}^-] = 0$  y covarianza  $P^-$ .
- Con las medidas, supuestas independientes, formamos
$$\vec{z} = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_n \end{bmatrix}$$
- Usando las medidas, escribimos  $\vec{a}^+ = \vec{a}^- + K(\vec{z} - H\vec{a}^-)$ , pero puesto que en media  $\vec{a}^- = 0$ , simplemente tendremos:  $\vec{a}^+ = K\vec{z}$ , donde  $K$  es la ganancia de Kalman.
- La ganancia de Kalman (óptima) se calcula como  $K = P^- H^T (H P^- H^T + R)^{-1}$ . La covarianza se actualiza también como  $P^+ = P^- - K H P^-$ .
- Con  $\vec{a}^+$  corregimos  $\hat{q}: \hat{q}^+ = \hat{q}^- \star \delta q = \hat{q}^- \star \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a}^+ \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}^+\|^2}}$
- Este procedimiento se itera, integrando con los giróscopos y actualizando cada vez que hay medidas.



## Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Resumen. Datos iniciales:  $\hat{q}_0$ ,  $P_0$ ,  $Q$ ,  $R_i$ . Siempre se tienen medidas de  $\hat{\omega}$ . Ocasionalmente se tienen medidas  $\vec{z}_i$ .

- 1 Comenzar integrando las ecuaciones hasta que haya una medida, de forma que se estiman  $\hat{q}$  y  $P$ :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2} q * q_{\hat{\omega}}, \quad q(0) = q_0, \\ \dot{P} &= -\hat{\omega}^\times P + P \hat{\omega}^\times + Q, \quad P(0) = P_0\end{aligned}$$

- 2 Cuando en el instante  $t_k$  llegan una o más medidas, llamar  $\hat{q}^- = \hat{q}(t_k)$  y  $P^- = P(t_k)$ . Calcular  $\vec{z}$ ,  $H$ ,  $R$ . Calcular  $K = P^- H^T (H P^- H^T + R)^{-1}$ . Calcular  $\vec{a}^+ = K \vec{z}$ . Actualizar  $\hat{q}^+ = \hat{q}^- * \delta q = \hat{q}^- * \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a}^+ \end{bmatrix}$ ,  $P^+ = P^- - K H P^-$ .
- 3 Continuar integrando las ecuaciones a partir de las estimaciones actualizadas hasta que haya más medidas:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2} q * q_{\hat{\omega}}, \quad q(t_k) = q^+, \\ \dot{P} &= -\hat{\omega}^\times P + P \hat{\omega}^\times + Q, \quad P(t_k) = P^+\end{aligned}$$

- 4 Cuando haya nuevas medidas, iterar a partir de 2.



## Filtro Extendido Multiplicativo de Kalman (MEKF)

- Consideraciones adicionales:
  - Conviene renormalizar los cuaterniones estimados  $\hat{q}(t)$  si el módulo se alejara de la unidad.
  - Igualmente, la matriz de covarianzas  $P(t)$  debe ser simétrica en todo momento. Se puede "simetrizar" forzando  $P = 1/2(P + P^T)$ , o se puede simplemente calcular sólo la "mitad" de la matriz e imponer que la otra mitad es la traspuesta.
  - La ganancia de Kalman es óptima, pero está calculada para el problema linealizado. Si la estimación no está suficientemente cerca de la realidad, el filtro puede diverger.
  - Se pueden (y se deben) incluir los sesgos (bias) de los giróscopos en el estimador.
    - En la práctica es difícil conocer bien las matrices  $Q$  y  $R$ .
- Existen muchos otros algoritmos de filtrado, con sus ventajas e inconvenientes. El MEKF tiene la ventaja de ser sencillo en su uso y flexible a cualquier número de medidas, pero no es necesariamente el más preciso.



# 1. Notas Filtro de Kalman para Sistemas continuos-discretos

Se considera un sistema continuo-discreto como aquel cuya evolución es continua en el tiempo (representada por ecuaciones diferenciales ordinarias) pero del cual se obtienen medidas cada cierto intervalo temporal (por lo cual el proceso de medida se representa en tiempo discreto). Estos sistemas son típicos en ingeniería (y más concretamente en navegación), donde muchos procesos (trayectorias) están representados por ecuaciones diferenciales continuas, pero se tienen sistemas de medida con ancho de banda limitado.

## 1.1. Caso lineal

El modelo general para el caso lineal es:

$$\dot{x} = F(t)x + B(t)u + G(t)w, \quad (1)$$

donde  $x$  es el estado,  $u$  la variable de entrada al sistema (supuesta conocida para el problema de estimación, que para el caso de la navegación inercial va a representar las medidas de los giróscopos), y  $w$  es una perturbación, modelada como ruido blanco, es decir:  $E[w(t)] = 0$ ,  $E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau)$ , donde  $E[\cdot]$  representa la esperanza matemática y  $\delta$  es la delta de Dirac. En principio, estado, entrada y perturbación podrían ser de diferente dimensión. En la ecuación,  $F$ ,  $B$  y  $G$  son matrices de la dimensión adecuada.

El modelo de medida es

$$y_k = H_k x_k + v_k, \quad (2)$$

donde el subíndice  $k$  se refiere al instante de tiempo discreto  $t_k$  en el cual se realiza la medida (es decir, para  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  no se realiza medida alguna). La variable  $y_k$  representa el valor de la medida en el instante  $k$ ,  $x_k = x(t_k)$ ,  $H_k$  es una matriz de dimensión adecuada, y  $v_k$  es ruido blanco discreto, es decir,  $E[v_k] = 0$ ,  $E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}$ .

Además se tiene que el ruido de medida es independiente del ruido del sistema, es decir,  $E[v_k w(t)] = 0$  para todo  $k$  y todo  $t$ .

## 1.2. Caso no lineal

El modelo no lineal se escribiría, en general, como:

$$\dot{x} = f(x, u, t) + G(t)w(t), \quad (3)$$

donde  $x$  es el estado,  $u$  representa la entrada al sistema y  $w$  es una perturbación, modelada como ruido blanco, es decir:  $E[w(t)] = 0$ ,  $E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau)$ , donde  $E[\cdot]$  representa la esperanza matemática y  $\delta$  es la delta de Dirac. En principio, estado, entrada y perturbación podrían ser de diferente dimensión. En la ecuación,  $f$  es una función y  $G$  es una matriz, de la dimensión adecuada.

El modelo de medida es

$$y_k = h(x_k, t_k) + v_k, \quad (4)$$

donde el subíndice  $k$  se refiere al instante de tiempo discreto  $t_k$  en el cual se realiza la medida (es decir, para  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  no se realiza medida alguna). La variable  $y_k$  representa el valor de la medida en el instante  $k$ ,  $x_k = x(t_k)$ ,  $h$  es una función no lineal de la dimensión adecuada, y  $v_k$  es ruido blanco discreto, es decir,  $E[v_k] = 0$ ,  $E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}$ .

## 2. Estimación del estado del sistema

En esta Sección explicaremos como usar el modelo del sistema, el conocimiento de  $u(t)$  y las medidas  $y_k$  para obtener una estimación de  $x(t)$  que denotaremos como  $\hat{x}(t)$ . Obtener esta estimación es difícil debido a la presencia de los ruidos en sistema y en medidas.

Se presupone que el modelo es conocido, es decir, las matrices y funciones en los modelos anteriores son conocidos. Si no fuera así, todo lo que no estuviera incluido se podría suponer englobado en el ruido blanco que entra al sistema (aumentando su covarianza).

También es necesario conocer una estimación de la condición inicial de  $x$ ,  $x(0)$ , que denotaremos  $\hat{x}_0$ , tal vez a partir de una medida en  $t_0$  (por ello se supondrá que desde el tiempo inicial a la primera medida transcurre cierto tiempo). Se debe tener que  $E[\hat{x}_0] = x(0)$ , y se conocerá una estimación de lo "buena" que es dicha estimación, en el sentido de que conoceremos la covarianza del error  $P_0 = E[(x(0) - \hat{x}_0)(x(0) - \hat{x}_0)^T]$  (puede ser 0). Se supondrá  $\hat{x}_0$  independiente de los ruidos que entran al sistema.

Matemáticamente, definamos la covarianza del error de estimación como  $P(t) = E[(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T]$ . El objetivo será hallar  $\hat{x}(t)$  tal que  $P(t)$  sea lo menor posible, es decir, buscar la mejor estimación posible desde el punto de vista de la covarianza del error. Obsérvese que la covarianza es una matriz, simétrica y definida semipositiva.

## 2.1. Caso lineal

En primer lugar consideremos el modelo lineal continuo-discreto.

### 2.1.1. Estimación sin medidas

Supongamos en primer lugar que NO tenemos medidas. Sin embargo sí tenemos acceso a  $u(t)$ . En tal caso se puede realizar una estimación de la siguiente forma:

- En primer lugar se estima  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ . Por tanto inicialmente  $P(0) = P_0$ .
- Por otro lado se estima  $\hat{x}(t)$  usando el observador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x} + B(t)u. \quad (5)$$

- Para estudiar el valor de la covarianza, definamos  $\delta x = x - \hat{x}$ , el error de estimación. Por tanto  $P(t) = E[\delta x \delta x^T]$ . Se tiene:

$$\delta \dot{x}(t) = \dot{x} - \dot{\hat{x}}(t) = F(t)\delta x + G(t)w(t). \quad (6)$$

De la teoría de procesos gaussianos, se obtiene una ecuación para  $P(t)$ :

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + G(t)Q(t)G^T(t). \quad (7)$$

Se puede demostrar que la ecuación (7) implica que  $P(t)$  siempre crece. Lo que implica que la estimación se degrada cada vez más y por tanto este procedimiento no es muy bueno.

### 2.1.2. Estimación sólo con medidas

Si el número de medidas (dimensión del vector  $y$ ) de la ecuación

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (8)$$

es mayor que el número de estados (dimensión del vector  $x$ ) entonces es posible que se pueda obtener una estimación de  $x_k$  (por ejemplo mediante mínimos cuadrados); en caso contrario, de al menos parte de  $x_k$ . Incluso aunque se pudiera obtener dicha estimación, no sabríamos que sucedería con  $x$  en los instantes de tiempo entre medidas y habría que interpolar. Por tanto, especialmente si las medidas son lentas, este procedimiento no es demasiado bueno.

### 2.1.3. Filtro de Kalman para sistemas lineales continuos-discretos (KF)

La idea del filtro de Kalman es, conocido  $u(t)$  y una estimación  $\hat{x}(0)$  de  $x(0)$ , intentar reconstruir  $x(t)$  con ayuda de las medidas  $y_k$  y del conocimiento del modelo.

Entre medidas, se utiliza el procedimiento descrito en la Sección 2.1.1; cuando llega una medida, se utiliza la nueva información para actualizar la información, ponderando el error de medida con el error que tenía la estimación antes de la medida.

Puesto que las medidas son “instantáneas”, para diferenciar en el instante  $k$  antes y después de medir, llamaremos a  $\hat{x}_k^-$  la estimación antes de la medida (también llamada “a priori”) y a  $\hat{x}_k^+$  la estimación después de la medida (también llamada “a posteriori”). De forma similar con otras variables.

El algoritmo del filtro de Kalman será como sigue:

- **Inicialización:** En primer lugar se estima  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ . Por tanto inicialmente  $P(0) = P_0$ .
- **Fase de propagación:** Mientras no haya medidas, se estima  $\hat{x}(t)$  usando el observador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x} + B(t)u. \quad (9)$$

- Como antes, la covarianza del error  $P(t)$  evoluciona siguiendo la ecuación

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + G(t)Q(t)G^T(t). \quad (10)$$

- **Fase de medida:** Supongamos que estamos en el instante de tiempo  $t_k$  en el cual obtenemos una medida  $y_k$  de acuerdo al modelo de medida del sistema. Partimos de la estimación anterior justo antes de la medida,  $\hat{x}_k^- = \hat{x}(t_k^-)$ , y de la covarianza del error justo antes de la medida,  $P_k^- = P(t_k^-)$ . Usando la medida, se *actualiza* la estimación de la siguiente forma:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-), \quad (11)$$

donde  $K_k$  es la ganancia de Kalman (cuya definición se da más abajo).

- Igualmente se actualiza la covarianza del error como

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-, \quad (12)$$

donde  $I$  es la identidad de orden adecuado.

- **Ganancia de Kalman:** La ganancia de Kalman se calcula como

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (13)$$

y es la que pondera la “calidad” de la estimación antes de la medida con la “calidad” de la medida.

- Estos pasos (excepto la inicialización) se iteran. Mientras no haya medida, se propaga la estimación y la covarianza del error. Cuando haya una medida, se calcula la ganancia de Kalman y se actualiza la estimación y la covarianza del error.

Este algoritmo garantiza (supuestas todas las hipótesis de partida verdaderas) que la covarianza del error  $P(t)$  es la menor posible, por lo que la estimación  $\hat{x}(t)$  es óptima.

#### 2.1.4. Demostración de la expresión de la ganancia de Kalman

Pasemos ahora a demostrar las ecuaciones (13) y (12) a partir de (11). Para ello, usemos la definición de covarianza:

$$\begin{aligned} P_k^+ &= E[(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^T] \\ &= E[(x_k - \hat{x}_k^- - K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^- - K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))^T] \\ &= E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] - E[(K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^-)^T] \\ &\quad - E[(x_k - \hat{x}_k^-)(K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))^T] + E[(K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))(K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))^T] \\ &= P_k^- - 2E[(K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^-)^T] + E[(K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))(K_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-))^T]. \end{aligned} \quad (14)$$

Aquí se ha usado la definición de covarianza tanto de  $P_k^+$  como de  $P_k^-$ . Sustituyendo ahora la medida  $y_k = H_k x_k + v_k$ :

$$\begin{aligned} P_k^+ &= P_k^- - E[(K_k H_k (x_k - \hat{x}_k^-) + K_k v_k)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] \\ &\quad - E[(x_k - \hat{x}_k^-)(K_k H_k (x_k - \hat{x}_k^-) + K_k v_k)^T] \\ &\quad + E[(K_k H_k (x_k - \hat{x}_k^-) + K_k v_k)(K_k H_k (x_k - \hat{x}_k^-) + K_k v_k)^T] \\ &= P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + K_k R_k K_k^T \\ &= P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T, \end{aligned} \quad (15)$$

donde se ha usado la independencia del ruido blanco con la covarianza del error de estimación, y la definición de la covarianza del ruido blanco.

Una buena medida de la magnitud de la covarianza a posteriori es la traza de  $P_k^+$

Para minimizar la traza de covarianza a posteriori, es necesario derivarla respecto a la matrix  $K_k$ . Se recuerdan los siguientes resultados:  $\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[AB] = B$ ,  $\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[BA^T] = B^T$ ,  $\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[ABA^T] = (B + B^T)A^T$ .

Por tanto:

$$\frac{\partial \text{Tr}[P_k^+]}{\partial K_k} = -2H_k P_k^- + 2H_k P_k^- H_k^T K_k^T + 2R_k K_k^T, \quad (16)$$

E igualando a cero la derivada, obtenemos la ganancia de Kalman:

$$K_k^T = (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^- \rightarrow K_k^T = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (17)$$

Sustituyendo parcialmente el valor hallado en (15), sólo la  $K_k$  que premultiplica el paréntesis, encontramos:

$$\begin{aligned} P_k^+ &= P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + P_k^- H_k^T K_k^T \\ &= (I - K_k H_k) P_k^-, \end{aligned} \quad (18)$$

que es la expresión buscada (se puede sustituir el valor de  $K_k$  pero no resulta especialmente esclarecedora).

## 2.2. Caso no lineal

Para el caso no lineal se pueden repetir las estrategias en las que no hay medidas o en las que sólo hay medidas sin fase de propagación. No obstante, será más complejo al ser las funciones no lineales, y para el caso sin medidas, no se podrá conocer con exactitud  $P(t)$  ya que dejará de verificarse la ecuación (7).

Directamente pasamos a explicar como se usa el filtro de Kalman para el caso no lineal. Esta versión de filtro de Kalman se denomina “Filtro Extendido de Kalman”.

### 2.2.1. Filtro Extendido de Kalman para sistemas no lineales (EKF)

El filtro extendido de Kalman se basa en la linealización de las ecuaciones del error. El procedimiento se basa en la siguiente idea.

Aproximemos el estado del sistema  $x(t)$ , como antes, con un valor  $\hat{x}(t)$  obtenido de la integración de las ecuaciones del sistema ignorando el ruido, es decir:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t). \quad (19)$$

Por analogía con el caso lineal, sabemos que el error de esta aproximación crece, pero inicialmente será pequeño. Llamemos al error de la aproximación como  $\delta x(t) = x(t) - \hat{x}$ .

Si conociéramos el error  $\delta x(t)$ , entonces podríamos escribir  $x(t) = \hat{x} + \delta x(t)$ . ¡Conoceríamos perfectamente el estado! ¿Pero cómo calcular  $\delta x(t)$ ? No es posible, por tanto habrá que *estimarlo*. Para ello se usará el filtro de Kalman. Lo que hace el EKF, pues, es *estimar el error* de la aproximación sin ruido, mediante un filtro de Kalman aplicado a las ecuaciones linealizadas del error!

Obsérvese que si queremos calcular la dinámica del error, se tiene:

$$\delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t) + G(t)w(t) \approx \left. \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} \delta x + G(t)w(t), \quad (20)$$

una aproximación válida siempre que el error sea pequeño.

Igualmente, en una medida:

$$y_k = h(x_k, t_k) + v_k = h(\hat{x}_k + \delta x_k, t_k) + v_k \approx h(\hat{x}_k, t_k) + \left. \frac{\partial h(x, t_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \delta x_k + v_k, \quad (21)$$

Definamos entonces  $F(\hat{x}(t), t) = \left. \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}}$ ,  $\delta y_k = y_k - h(\hat{x}_k, t_k)$ ,  $H_k(\hat{x}_k) = \left. \frac{\partial h(x, t_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k}$ . Se tendría el siguiente modelo lineal para el error:

Dinámica:

$$\delta \dot{x} = F(\hat{x}(t), t)\delta x + G(t)w(t). \quad (22)$$

Medida:

$$\delta y_k = H_k(\hat{x}_k)\delta x_k + v_k. \quad (23)$$

A este modelo se le puede aplicar el filtro de Kalman. Como se verá, se supondrá que  $\hat{x}$ , en media, es una estimación correcta del estado, mientras que  $\delta x$ , en media, es cero, pero contiene la covarianza que se quiere minimizar (ya que la covarianza de  $\hat{x}$  no se puede calcular ni minimizar al ser el problema no lineal). El algoritmo del filtro de Kalman aplicado a  $\delta x$  trataría de calcular  $\delta \hat{x}$ , de la siguiente forma:

- **Inicialización:** Consideramos que inicialmente  $\hat{x} = \hat{x}_0$  y que  $\delta \hat{x} = 0$ . Por otro lado, como antes, inicialmente  $P(0) = P_0$ .
- **Fase de propagación:** Mientras no haya medidas, por un lado se propaga la estimación :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t). \quad (24)$$

mientras que por otro lado se “estima el error de estimación”  $\delta \hat{x}(t)$  usando el observador de antes:

$$\delta \dot{\hat{x}}(t) = F(\hat{x}(t), t)\delta \hat{x}. \quad (25)$$

Como  $\delta \hat{x}(0) = 0$ , la ecuación de arriba resulta en que  $\delta \hat{x} = 0$  para todo instante! Hasta que no haya una medida, no cambiará el valor de  $\delta \hat{x}$ . Por tanto la ecuación (25) realmente no hay que resolverla y se puede reemplazar por  $\delta \hat{x} = 0$  (hasta que haya una medida).

- Como antes, la covarianza del error  $P(t)$  sí que evoluciona, siguiendo la ecuación

$$\dot{P}(t) = F(\hat{x}(t), t)P(t) + P(t)F(\hat{x}(t), t)^T + G(t)Q(t)G^T(t). \quad (26)$$

- **Fase de medida:** Supongamos que estamos en el instante de tiempo  $t_k$  en el cual obtenemos una “medida”  $\delta y_k = y_k - h(\hat{x}_k^-, t_k)$ . Como antes, se *actualiza* la estimación  $\delta \hat{x}$  de la siguiente forma:

$$\delta \hat{x}_k^+ = \delta \hat{x}_k^- + K_k(\hat{x}_k^-)(\delta y_k - H_k(\hat{x}_k^-)\delta \hat{x}_k^-), \quad (27)$$

y teniendo en cuenta que el valor de  $\delta \hat{x}_k^-$  es cero, y sustituyendo la fórmula de  $\delta y_k$ , llegamos a:

$$\delta \hat{x}_k^+ = K_k(y_k - h(\hat{x}_k^-, t_k)), \quad (28)$$

donde  $K_k(\hat{x}_k^-)$  es la ganancia de Kalman (cuya definición se da más abajo, se debe calcular previamente).

- Igualmente se actualiza la covarianza del error como antes:

$$P_k^+ = (I - K_k(\hat{x}_k^-)H_k(\hat{x}_k^-))P_k^-. \quad (29)$$

- **Ganancia de Kalman:** La ganancia de Kalman se calcula como antes:

$$K_k(\hat{x}_k^-) = P_k^- H_k(\hat{x}_k^-)^T (H_k(\hat{x}_k^-)P_k^- H_k(\hat{x}_k^-)^T + R_k)^{-1}. \quad (30)$$

- **Actualización de  $\hat{x}_k$ :** Otra diferencia importante del EKF es que ahora que se ha encontrado un valor  $\delta \hat{x}_k^+$ , este valor se traspassa a  $\hat{x}_k^+$ . Por tanto se hace:  $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \delta \hat{x}_k^+$ , y  $\delta \hat{x}_k^+$  se vuelve a fijar a cero.
- Estos pasos (excepto la inicialización) se iteran. Mientras no haya medida, se propaga la estimación, la estimación del error de estimación, y la covarianza del error. Cuando haya una medida, se calcula la ganancia de Kalman y se actualiza la estimación del error de estimación y su covarianza; dicha actualización se “traspassa” a la estimación.

Obsérvese que, por tanto,  $\delta \hat{x}$  no juega ningún papel (aparte de entender la formulación del filtro). Se puede por tanto eliminar y el algoritmo EKF quedaría como sigue:

- **Inicialización:** Fijamos  $\hat{x} = \hat{x}_0$  y  $P(0) = P_0$ .

- **Fase de propagación:** Propagamos

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t). \quad (31)$$

y la covarianza del error  $P(t)$ :

$$\dot{P}(t) = F(\hat{x}(t), t)P(t) + P(t)F(\hat{x}(t), t)^T + G(t)Q(t)G^T(t). \quad (32)$$

- **Fase de medida:** Primero calculamos la ganancia de Kalman:

$$K_k(\hat{x}_k^-) = P_k^- H_k(\hat{x}_k^-)^T (H_k(\hat{x}_k^-)P_k^- H_k(\hat{x}_k^-)^T + R_k)^{-1}. \quad (33)$$

Actualizamos  $\hat{x}_k^-$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - h(\hat{x}_k^-, t_k)), \quad (34)$$

y la covarianza del error

$$P_k^+ = (I - K_k(\hat{x}_k^-)H_k(\hat{x}_k^-))P_k^-. \quad (35)$$

- Iteramos el procedimiento propagación/medida.

**OBSERVACIÓN:** No existe garantía matemática de que la estimación del EKF converja al valor real ni es ya óptimo. Pero es casi “lo mejor que se puede hacer” para el caso no lineal. Si la estimación inicial es buena y el ruido que le entra al sistema no es excesivo, se comporta bien.

Ejemplo (a desarrollar en clase): vehículo en un plano con dos acelerómetros y un giróscopo.

### 2.3. Filtro Extendido de Kalman Multiplicativo para las ecuaciones cinemáticas de la actitud expresadas en cuaterniones (MEKF)

En el caso de la estimación de la actitud, cuando dicha actitud está expresada mediante cuaterniones  $q$ , es necesario modificar el EKF.

En primer lugar, las ecuaciones diferenciales del sistema son:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

En estas ecuaciones, el vector de velocidades angulares  $\vec{\omega}$  representa a las velocidades angulares reales; realmente, se tendrá conocimiento de las velocidades angulares medidas mediante giróscopos, cuya relación con la velocidad angular real representaremos como el modelo más simple posible con ruido y sesgo:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{gyro} + \vec{b} + \vec{v}_\omega, \quad (37)$$

donde  $\vec{v}_\omega$  representa ruido blanco y  $\vec{b}$  representa el sesgo, modelado por la ecuación diferencial  $\dot{\vec{b}} = \vec{v}_b$ , donde  $\vec{v}_b$  es también ruido blanco y representa la deriva del sesgo. Obsérvese que también habrá que estimar el sesgo! Esta estimación se definirá como  $\hat{\vec{b}}$ , y a partir de esta estimación se tendrá que  $\hat{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^{gyro} + \hat{\vec{b}}$ . Para esta estimación necesitaríamos conocer una estimación de  $\vec{b}$  en cero,  $\hat{\vec{b}}_0$ . Obsérvese también que  $\dot{\vec{b}} = 0$ . También sería necesario conocer el valor inicial de la covarianza de dicha estimación,  $P_{b0}$ .

Por otro lado, el modelo de medida se basa en que en cada instante de medida  $k$ , se conocerán  $m$  vectores (unitarios) en el sistema de referencia inercial,  $\vec{v}_{i,k}^I$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y se realizarán medidas de dichos vectores en el sistema de referencia ejes cuerpo  $\vec{v}_{i,k}^B$  (también supuestos unitarios) que estarán corrompidas con ruido blanco, es decir, el modelo de medida será:

$$\vec{v}_{i,k}^B = C_I^B(q_k) v_{i,k}^I + \vec{\xi}_{i,k}, \quad i = 1, \dots, m \quad (38)$$

donde  $\vec{\xi}_{i,k}$  es ruido blanco asociado a la medida  $i$  en el instante  $k$ , y  $C_I^B(q_k)$  es la matriz de actitud del vehículo, que representa la orientación de los ejes cuerpo respecto a los ejes inerciales, dependiendo de los cuaterniones en el instante  $k$ . Si  $q_{4,k}$  es la parte escalar del cuaternión y  $\vec{q}_k = [q_{1,k} q_{2,k} q_{3,k}]^T$  la parte vectorial se tiene que:

$$C_I^B(q_k) = (q_{4,k}^2 - \|\vec{q}_k\|^2) I_3 - 2q_{4,k} \vec{q}_k^\times + 2\vec{q}_k \vec{q}_k^T, \quad (39)$$

donde  $I_3$  es la identidad de orden 3 y el operador  $\vec{q}^\times$  viene dado por la matriz

$$\vec{q}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Para aplicar el filtro de Kalman extendido, se utilizará la representación de error de cuaterniones explicada previamente. Por tanto, siguiendo la notación establecida anteriormente:

$$q = \hat{q} \otimes \delta q, \quad (41)$$

donde  $\hat{q}$  es la estimación del cuaternión,  $\delta q$  el cuaternión de error, y  $\otimes$  la multiplicación de cuaterniones. Para calcular  $\hat{q}$  se usará la ecuación diferencial cinemática empleando las medidas de los giróscopos. Por tanto:

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Siguiendo el desarrollo tal como se hizo al deducir la dinámica del cuaternión de error, se llega a una ecuación para  $\delta\dot{q}$ :

$$\delta\dot{q} = \frac{1}{2} \left( \delta q \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\vec{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q \right). \quad (43)$$

Si representamos este cuaternión de error con los parámetros  $\vec{a}$  tal como se hizo al deducir la dinámica del cuaternión de error, se tiene:

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\vec{a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

La dinámica de  $\vec{a}$  se puede aproximar, siguiendo los mismos pasos que al deducir la dinámica del cuaternión de error, como:

$$\dot{\vec{a}} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}_3 & -\hat{\omega}_2 \\ -\hat{\omega}_3 & 0 & \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 & -\hat{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \vec{v}_\omega, \quad (45)$$

Por otro lado, en las medidas se tendrá:

$$\vec{v}_{i,k}^B = C_{B'}^B(\delta q) C_I^{B'}(\hat{q}_k) v_{i,k}^I + \vec{\xi}_{i,k}, \quad i = 1, \dots, m \quad (46)$$

donde  $B'$  es el sistema de referencia al cual se refiere  $\hat{q}_k$ , que no será exactamente  $B$  debido a errores; dichos errores están codificados en  $\delta q$ . Utilizando la representación de  $\delta q$  mediante  $\vec{a}$ , podemos linealizar  $C_{B'}^B(\delta q_k)$  obteniendo:

$$\begin{aligned} C_{B'}^B(\delta q_k) &= (\delta q_{4,k}^2 - \|\vec{\delta q}_k\|^2) I_3 - 2\delta q_{4,k} \vec{\delta q}_k^\times + 2\vec{\delta q}_k \vec{\delta q}_k^T \\ &= \frac{1}{4 + \|\vec{a}_k\|^2} [(4 - \|\vec{a}_k\|^2) I_3 - 4\vec{a}_k^\times + 2\vec{a}_k \vec{a}_k^T] \\ &\approx I_3 - \vec{a}_k^\times \end{aligned} \quad (47)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de medida se llega a:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{i,k}^B &\approx (I_3 - \vec{a}_k^\times) C_I^{B'}(\hat{q}_k) v_{i,k}^I + \vec{\xi}_{i,k}, \\ &= \vec{v}_{i,k}^{B'} - \vec{a}_k^\times \vec{v}_{i,k}^{B'} + \vec{\xi}_{i,k} \\ &= \vec{v}_{i,k}^{B'} + (\vec{v}_{i,k}^{B'})^\times \vec{a}_k + \vec{\xi}_{i,k}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (48)$$

donde  $\vec{v}_{i,k}^{B'} = C_I^{B'}(\hat{q}_k) v_{i,k}^I$ .

Para el filtro de Kalman extendido, el "vector de estado" será:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix},$$

y la matriz de covarianzas:

$$P = \begin{bmatrix} P_a & P_c \\ P_c & P_b \end{bmatrix},$$

Usando la notación del filtro de Kalman extendido llamemos:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}_3 & -\hat{\omega}_2 \\ -\hat{\omega}_3 & 0 & \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 & -\hat{\omega}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

y

$$H_k(\hat{q}_k) = \begin{bmatrix} (\vec{v}_{1,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \\ (\vec{v}_{2,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \\ \dots & \dots \\ (\vec{v}_{m,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_I^{B'}(\hat{q}_k) v_{1,k}^I)^\times & \mathcal{O} \\ (C_I^{B'}(\hat{q}_k) v_{2,k}^I)^\times & \mathcal{O} \\ \dots & \dots \\ (C_I^{B'}(\hat{q}_k) v_{m,k}^I)^\times & \mathcal{O} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

donde  $\mathcal{O}$  es una matriz de ceros ( $3 \times$ ).

Ya estamos en condiciones de escribir el algoritmo del filtro de Kalman:

- **Inicialización:** Fijamos  $\hat{q} = \hat{q}_0$ ,  $\hat{b} = \hat{b}_0$  y  $P(0) = P_0$  en función de los valores iniciales estimados de la actitud, el sesgo de los giróscopos y la covarianza del error de estimación de actitud y de sesgo de giróscopos (la estimación de actitud y su error, por ejemplo, pueden ser obtenidos del algoritmo Q).
- **Fase de propagación:** Propagamos

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

donde  $\hat{\omega} = \vec{\omega}^{gyro} + \hat{b}$ , y la covarianza del error  $P(t)$ :

$$\dot{P}(t) = F(\hat{\omega})P(t) + P(t)F(\hat{\omega})^T + Q, \quad (52)$$

donde  $Q$  es:

$$Q = \begin{bmatrix} \vec{v}_\omega & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \vec{v}_b \end{bmatrix}.$$

- **Fase de medida:** Para cada medida  $i$  tendremos  $\vec{v}_{i,k}^B$  (la medida) y  $\vec{v}_{i,k}^I$  (el valor real). Calculamos para cada medida  $\vec{v}_{i,k}^{B'} = C_I^{B'}(\hat{q}_k)v_{i,k}^I$ . Obtenemos ahora

$$H_k(\hat{q}_k) = \begin{bmatrix} (\vec{v}_{1,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \\ (\vec{v}_{2,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \\ \dots & \\ (\vec{v}_{m,k}^{B'})^\times & \mathcal{O} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Se calcula entonces la ganancia de Kalman:

$$K_k(\hat{\delta}_k^-) = P_k^- H_k(\hat{\delta}_k^-)^T \left( H_k(\hat{\delta}_k^-) P_k^- H_k(\hat{\delta}_k^-)^T + R_k \right)^{-1}, \quad (54)$$

donde  $R_k$  será:

$$R_k = \begin{bmatrix} \text{Cov}(\vec{\xi}_{1,k}) \\ \text{Cov}(\vec{\xi}_{2,k}) \\ \dots \\ \text{Cov}(\vec{\xi}_{m,k}) \end{bmatrix} \quad (55)$$

es decir una matriz conteniendo las covarianzas de los ruidos de medida. Formamos la matriz de los errores de medida:

$$\delta y_k = \begin{bmatrix} \vec{v}_{1,k}^B - \vec{v}_{1,k}^{B'} \\ \vec{v}_{2,k}^B - \vec{v}_{2,k}^{B'} \\ \dots \\ \vec{v}_{m,k}^B - \vec{v}_{m,k}^{B'} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Dividimos  $K_k$  en dos trozos:

$$K_k = \begin{bmatrix} K_k^a \\ K_k^b \end{bmatrix}.$$

Encontramos  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = K_k^a \delta y_k, \quad (57)$$

actualizamos  $\hat{b}$ :

$$\hat{b}^+ = \hat{b}^- + K_k^b \delta y_k,$$

y la covarianza del error

$$P_k^+ = (I - K_k(\hat{q}_k^-)H_k(\hat{q}_k^-))P_k^-. \quad (58)$$

Finalmente, actualizamos  $\hat{q}_k$ :

$$\hat{q}_k^+ = \delta q(\vec{a}) \otimes \hat{q}_k^- = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \delta q_k^-. \quad (59)$$

- Iteramos el procedimiento propagación/medida.

Este procedimiento suele funcionar bastante bien, permite tener en cuenta las covarianzas de la estimación inicial, giróscopos y medidas y permite variar el número de medidas en cada momento  $k$  de observación (simplemente variando la dimensión de las matrices).

# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 6: Dinámica de la Actitud. Estabilidad.

Rafael Vázquez Valenzuela

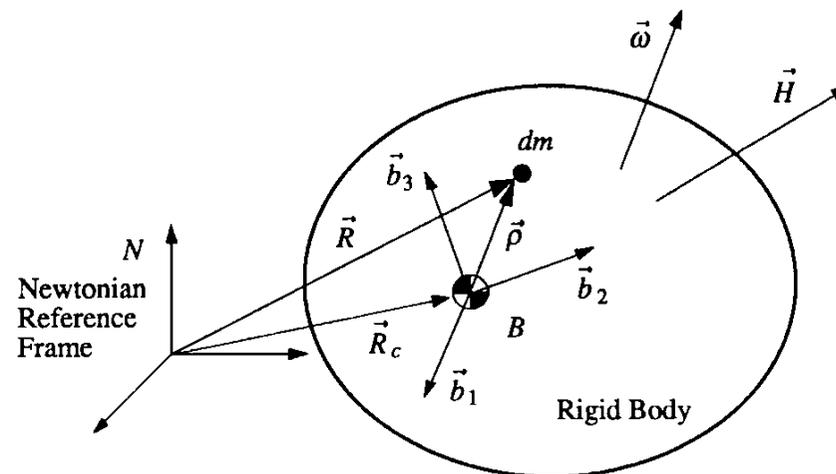
Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

23 de octubre de 2018

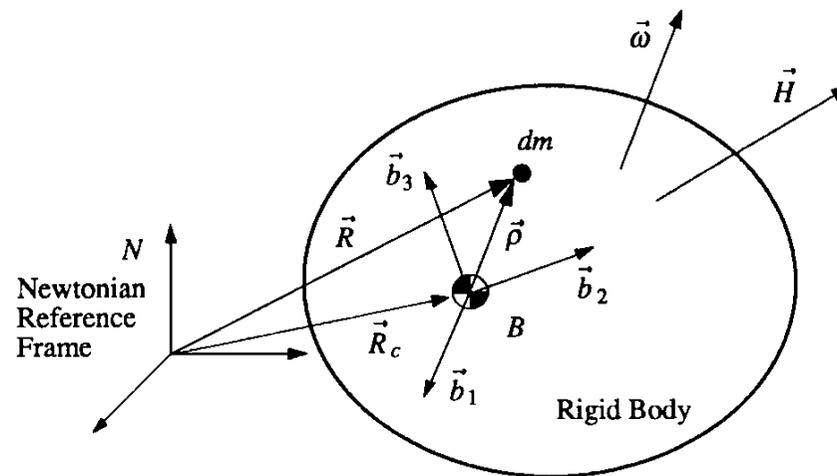


## Dinámica de la actitud de un vehículo

- La dinámica de la actitud de un vehículo está descrita por las ecuaciones de la dinámica rotacional, que describen la relación entre las causas (momentos ejercidos en el vehículo) y los efectos (velocidad angular).
- Partimos de la hipótesis básica de que el vehículo es un sólido rígido (si tuviera partes móviles, o efectos de flexibilidad, habría que ampliar el modelo), y estudiamos su rotación respecto a un sistema de referencia inercial.



## Momento cinético y par I

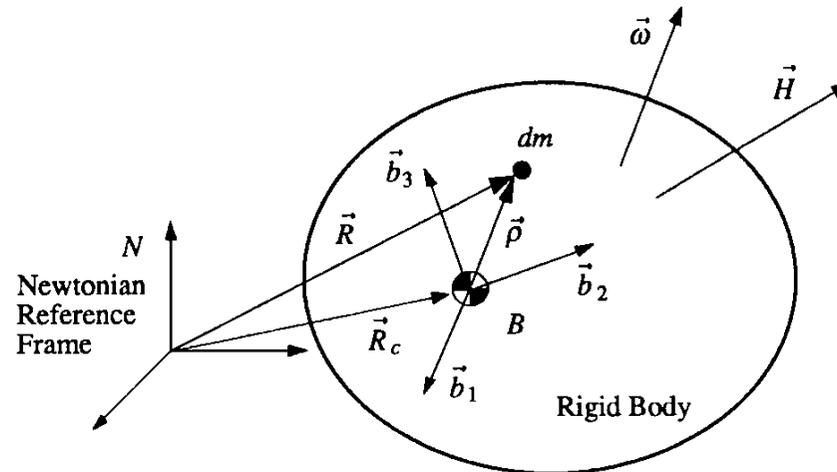


- Para cada punto  $dm$ , se tendrá que  $\vec{R}dm = d\vec{F}$ . Tomando momento respecto al centro de masas  $B$ , tendremos que  $\vec{\rho} \times \vec{R}dm = \vec{\rho} \times d\vec{F} = d\vec{M}_B$ , e integrando en todo el volumen  $V$ , obtenemos el momento total de las fuerzas respecto a  $B$ :  

$$\int_V \vec{\rho} \times \vec{R}dm = \vec{M}_B.$$
- Estas derivadas están tomadas respecto al sistema de referencia inercial.



## Momento cinético y par II

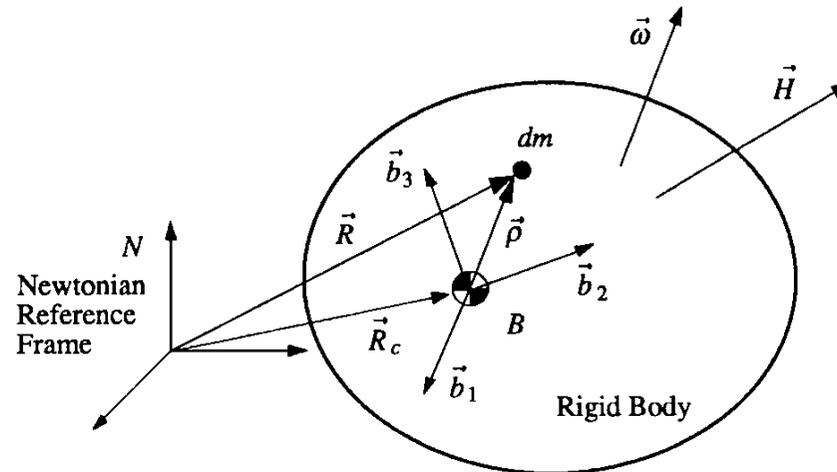


- Se define el momento cinético angular absoluto respecto a  $B$ ,  $\vec{\Gamma}_B$  como:  $\vec{\Gamma}_B = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{R}} dm$ .
- Observemos que  $\vec{\Gamma}_B = \int_V \dot{\vec{\rho}} \times \dot{\vec{R}} dm + \int_V \vec{\rho} \times \ddot{\vec{R}} dm$ .
- Puesto que  $\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{\rho}$ , se tiene:  

$$\vec{\Gamma}_B = \int_V \dot{\vec{\rho}} \times \dot{\vec{\rho}} dm + \int_V \dot{\vec{\rho}} \times \dot{\vec{R}}_c dm + \vec{M}_B$$
- El primer término es cero. El segundo cumple  

$$\int_V \dot{\vec{\rho}} \times \dot{\vec{R}}_c dm = \left( \frac{d}{dt} \int_V \vec{\rho} dm \right) \times \dot{\vec{R}}_c = \vec{0}.$$
- Por tanto  $\vec{\Gamma}_B = \vec{M}_B$

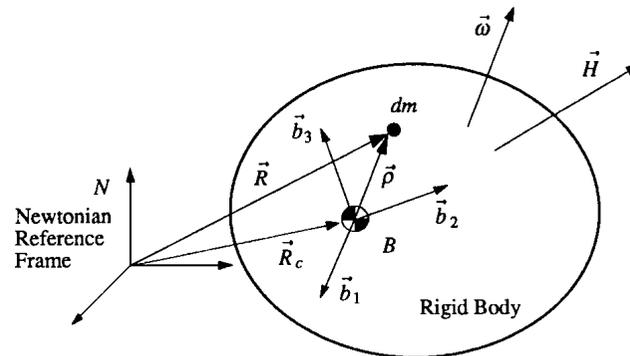
# Momento cinético y tensor de inercia I



- El momento  $\vec{\Gamma}_B$  cumple
 
$$\vec{\Gamma}_B = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{R}} dm = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{R}}_c dm + \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm.$$
- Recordemos la ecuación de Coriolis
 
$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}\right)_N = \left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}\right)_B + \vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho},$$
 donde  $N$  es el sdr inercial y  $B$  ejes cuerpo. Se tiene entonces  $\left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}\right)_N = \vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho}.$
- Por tanto:
 
$$\vec{\Gamma}_B = \int_V \vec{\rho} \times (\vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho}) dm = \left(-\int_V \vec{\rho}^\times \vec{\rho}^\times dm\right) \vec{\omega}_{B/N}$$
- Definimos el tensor de inercia
 
$$\mathcal{I} = -\int_V \vec{\rho}^\times \vec{\rho}^\times dm = \int_V [(\rho^T \vec{\rho}) \text{Id} - \rho \rho^T] dm$$



## Momento cinético y tensor de inercia II



- Luego  $\vec{\Gamma}_B = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N}$ . La expresión explícita del tensor de inercia es

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \int_V (\rho_2^2 + \rho_3^2) dm & - \int_V \rho_1 \rho_2 dm & - \int_V \rho_1 \rho_3 dm \\ - \int_V \rho_1 \rho_2 dm & \int_V (\rho_1^2 + \rho_3^2) dm & - \int_V \rho_2 \rho_3 dm \\ - \int_V \rho_1 \rho_3 dm & - \int_V \rho_2 \rho_3 dm & \int_V (\rho_1^2 + \rho_2^2) dm \end{bmatrix}$$

- Siempre se pueden encontrar unos ejes cuerpo principales en los que esta matriz es diagonal. En dichos ejes

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

- El mayor de los  $I_i$  se denomina eje mayor, el menor eje menor, y el restante eje intermedio.



## Momento cinético y tensor de inercia III

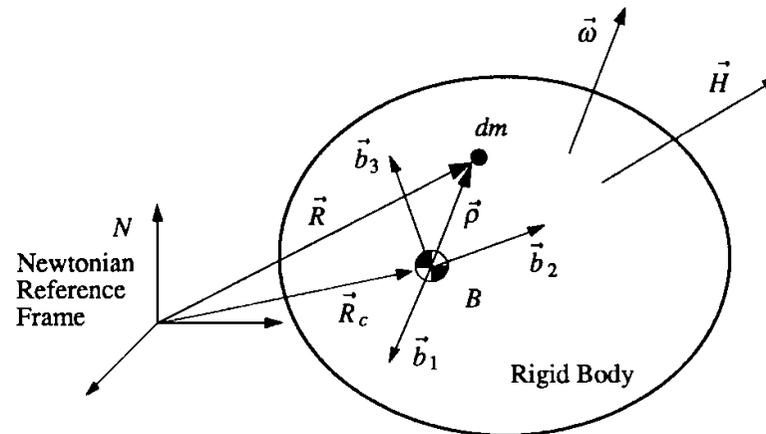
- Si el vehículo se compone de  $m$  partes, de cada una de las cuales se conoce su masa, centro de masas y tensor de inercia, se puede encontrar el tensor de inercia del conjunto con la siguiente fórmula:

$$\mathcal{I} = \sum_{k=1}^m \left[ M_k \left( \|\vec{r}_{ck}\|^2 \text{Id} - \vec{r}_{ck} \vec{r}_{ck}^T \right) + \mathcal{I}_k \right]$$

- En la fórmula,  $M_k$  es la masa de la parte  $k$ ,  $\mathcal{I}_k$  el tensor de inercia de la parte  $k$  considerada por separado, y  $\vec{r}_{ck}$  el vector que une el centro de masas de la parte  $k$  con el centro de masas del conjunto.
- En la práctica al estar formado un vehículo espacial por muchos elementos estructurales es una fórmula muy utilizada para calcular el tensor de inercia del conjunto.



# Energía cinética



- La energía cinética se definirá como  $T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{\rho}} dm$ .
- Usando la relación anteriormente encontrada de que  $\left(\frac{d}{dt}\vec{\rho}\right)_N = \vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho}$ , obtenemos  $T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\vec{\rho}} \cdot (\vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\rho}) dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{B/N} \cdot \int_V (\vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}) dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{B/N} \cdot \vec{\Gamma}_B = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{B/N} \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N}$ .
- Observemos que en ejes principales, si  $\vec{\omega}_{B/N} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ ,

se tiene:  $\vec{\Gamma}_B = \begin{bmatrix} \omega_1 l_1 \\ \omega_2 l_2 \\ \omega_3 l_3 \end{bmatrix}$

- Por tanto en estos ejes:  $T = \frac{\omega_1^2 l_1 + \omega_2^2 l_2 + \omega_3^2 l_3}{2}$



## Ecuaciones de Euler

- Partimos de  $\dot{\vec{\Gamma}} = \vec{M}$ . Puesto que esta derivada está tomada en el sistema de referencia inercial, pasando a ejes cuerpo:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\Gamma}\right)_N = \left(\frac{d}{dt}\vec{\Gamma}\right)_B + \vec{\omega}_{B/N} \times \vec{\Gamma} = \vec{M}.$$

- Sustituyendo el tensor de inercia:

$$\left(\frac{d}{dt}\mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N}\right)_B + \vec{\omega}_{B/N} \times (\mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N}) = \vec{M}$$

- Puesto que bajo la hipótesis de sólido rígido  $\left(\frac{d}{dt}\mathcal{I}\right)_B = 0$ , se tiene:  $\mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{B/N} + \vec{\omega}_{B/N}^\times \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}_{B/N} = \vec{M}$ .

- Desarrollando para el caso de ejes principales y escribiendo  $\vec{M} = [M_1 \ M_2 \ M_3]^T$

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = M_3$$



## Movimiento libre

- En primer lugar estudiaremos el movimiento libre, es decir,  $\vec{M} = \vec{0}$ . En estas circunstancias se conserva el momento cinético total del sistema.
- Si bien en la realidad no se da este caso, ya que siempre existen momentos perturbadores, éstos son pequeños.
- Veremos algunas soluciones analíticas pero lo más interesante será estudiar la estabilidad del sistema; encontraremos la regla del eje mayor.
- Consideraremos dos casos: axilsimétrico (dos ejes de inercia iguales) y asimétrico (los tres ejes de inercia distintos).
- El caso totalmente simétrico ( $I_1 = I_2 = I_3$ ) desacopla totalmente las ecuaciones y es trivialmente resoluble (las velocidades angulares resultantes son independientes y constantes).



## Caso axilsimétrico. Resolución analítica.

- Consideremos el caso en el que  $I_1 = I_2 = I$ ,  $I_3 \neq I$ .
- Las ecuaciones se reducen a:

$$I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

- En primer lugar obtenemos  $\omega_3 = \text{Cte} = n$  (tasa de rotación del VE alrededor de su eje de simetría). Definamos  $\lambda = \frac{I - I_3}{I} n$ , la llamada “tasa de rotación relativa”. Las dos primeras ecuaciones quedan:

$$\dot{\omega}_1 - \lambda\omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 + \lambda\omega_1 = 0$$

Son las ecuaciones de un oscilador armónico, obteniendo:

$$\omega_1 = \omega_1(0) \cos \lambda t + \omega_2(0) \operatorname{sen} \lambda t$$

$$\omega_2 = \omega_2(0) \cos \lambda t - \omega_1(0) \operatorname{sen} \lambda t$$



## Caso axilsimétrico. Resolución analítica.

- Es fácil ver que  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{Cte} = \omega_{12}^2$ , la llamada velocidad angular transversal. Por tanto  $\|\omega\| = \sqrt{\omega_{12}^2 + n^2} = \text{Cte}$  y su tercera componente (en ejes b) también es cte. Por lo que el  $\vec{\omega}$  en ejes cuerpo describe un cono en torno al eje de simetría del cuerpo, de ángulo  $\gamma = \arctan\left(\frac{\omega_{12}}{n}\right)$ .
- Por otro lado, puesto que  $\vec{\Gamma} = \text{Cte}$  en el sdr inercial al conservarse el momento cinético, podemos elegir el eje 3 del sistema de referencia inercial apuntado en la dirección de  $\vec{\Gamma}$  ( $\vec{H}$  en la figura). Además su módulo  $\Gamma$  ha de ser constante.
- Además observemos que en ejes cuerpo,  $\vec{\Gamma} = [I\omega_1 \ I\omega_2 \ I_3 n]^T$ , y por tanto  $\vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z^b = I_3 n = \cos \theta \Gamma$ , es decir el ángulo entre  $\vec{\Gamma}$  y el eje z cuerpo es constante; este ángulo,  $\theta$ , es el llamado el ángulo de nutación. Además:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{\Gamma^2 - I_3^2 n^2}}{I_3 n} = \frac{I \omega_{12}}{I_3 n} = \frac{I}{I_3} \tan \gamma$$

- Se puede verificar que el ángulo entre  $\vec{\Gamma}$  y  $\vec{\omega}$  es  $\theta - \gamma$ .





## Caso axilsimétrico. Resolución analítica.

- Para la secuencia

$$n \xrightarrow[z^n]{} S \xrightarrow[x^S]{} S' \xrightarrow[z^{S'}]{} BFS$$

las ecuaciones diferenciales cinemáticas son, aplicando  $\theta = \text{Cte}$ :

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$$

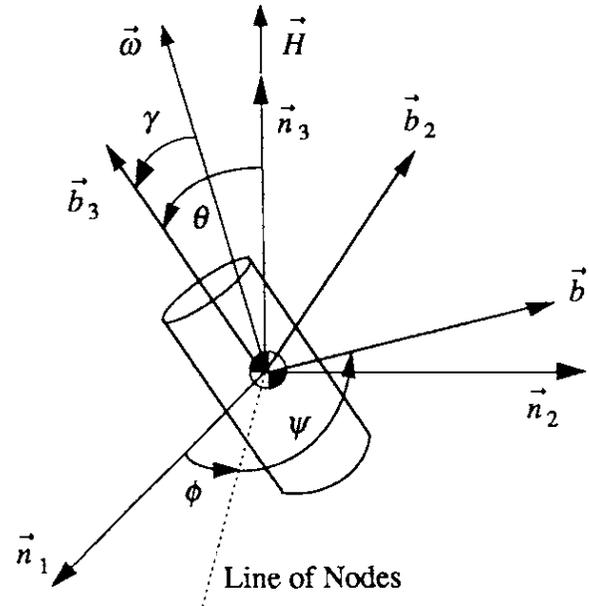
$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- Aplicando  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{12}^2$  obtenemos:  $\omega_{12} = \dot{\phi} \sin \theta$ . Luego  $\dot{\phi} = \frac{\omega_{12}}{\sin \theta} = \text{Cte}$ , la llamada tasa de precesión. Finalmente  $\dot{\psi} = n - \dot{\phi} \cos \theta = n - \frac{\omega_{12}}{\tan \theta} = n - \frac{l_3 n}{l} = n \frac{l-l_3}{l} = \lambda = \text{Cte}$ .
- Similarmente  $\dot{\phi} = \frac{\omega_{12}}{\sin \theta} = \frac{l_3 n}{l \cos \theta} = \frac{l_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)}{l \cos \theta}$ , de donde  $\dot{\phi} = \frac{l_3 \dot{\psi}}{(l-l_3) \cos \theta}$ .



## Caso axilsimétrico. Interpretación geométrica.

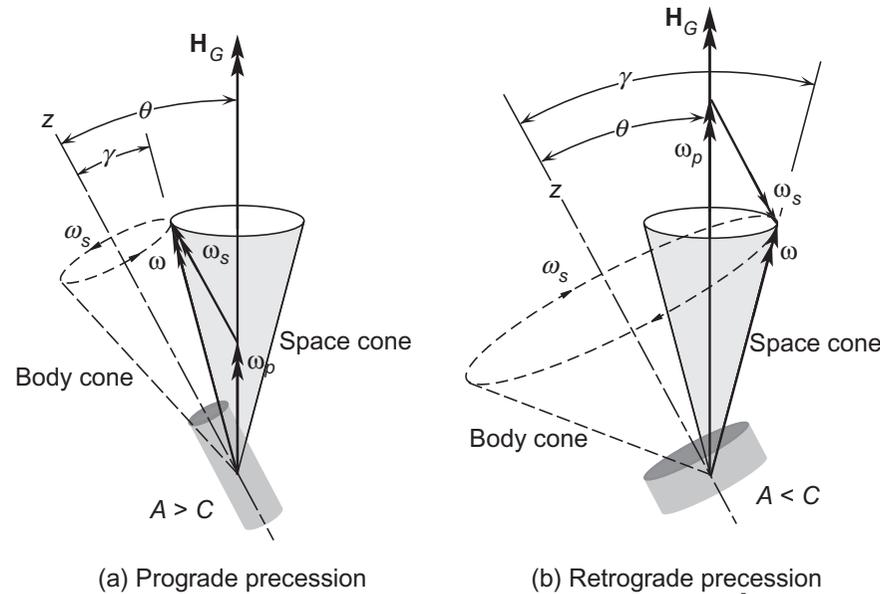


$$n \xrightarrow[\substack{\phi \\ z^n}]{} S \xrightarrow[\substack{\theta \\ x^S}]{} S' \xrightarrow[\substack{\psi \\ z^{S'}}]{} BFS$$

- Mirando la secuencia y teniendo en cuenta las deducciones que hemos hecho antes, nos podemos imaginar el movimiento como el de dos conos que rotan (con velocidades angulares  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ ) deslizando uno sobre otro; el punto de contacto es donde se mueve la velocidad angular  $\vec{\omega}$ .



## Caso axil simétrico. Interpretación geométrica.



- Recordemos  $\tan \gamma = \tan \theta \frac{I_3}{I}$  y  $\dot{\phi} = \frac{I_3 \dot{\psi}}{(I - I_3) \cos \theta}$ . Dos casos:
  - Cuerpo prolato (eje de simetría alargado,  $I_3 < I$ ): es el caso (a). Como  $\gamma < \theta$  los conos rotan por fuera y como los signos de  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  son iguales el giro de ambos conos es en la misma dirección (movimiento directo).
  - Cuerpo oblato (eje de simetría aplastado,  $I_3 > I$ ): es el caso (b). Como  $\gamma > \theta$  un cono rota dentro de otro y como los signos de  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  son distintos el giro de ambos conos es en la dirección opuesto (movimiento retrógrado).

## Movimiento libre de un sólido asimétrico

- En el caso asimétrico, existirá un eje mayor, un eje menor, y un eje intermedio; las ecuaciones no se pueden resolver analíticamente en términos de funciones convencionales.

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0$$

- Algunos autores resuelven las ecuaciones usando las “funciones elípticas” de Jacobi. No obstante no es fácil interpretar físicamente estas funciones y no tomaremos esta vía, sino una vía más geométrica.
- Observemos que debido a la conservación del momento cinético,  $\vec{\Gamma}$  es constante (en ejes inerciales). Eso implica que  $\|\vec{\Gamma}\| = \Gamma$  es constante en cualesquiera ejes que se escriba  $\vec{\Gamma}$ . En particular en ejes cuerpo,  $\vec{\Gamma} = [I_1 \omega_1 \ I_2 \omega_2 \ I_3 \omega_3]^T$ , luego  $\Gamma^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = \text{Cte.}$



## Movimiento libre de un sólido asimétrico

- Similarmente al no existir momentos externos la energía cinética  $T$  debe conservarse. Eso implica
$$2T = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = \text{Cte}'$$
- Por tanto, las componentes de la velocidad angular  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_3(t)$ , sean las que sean, deben verificar:

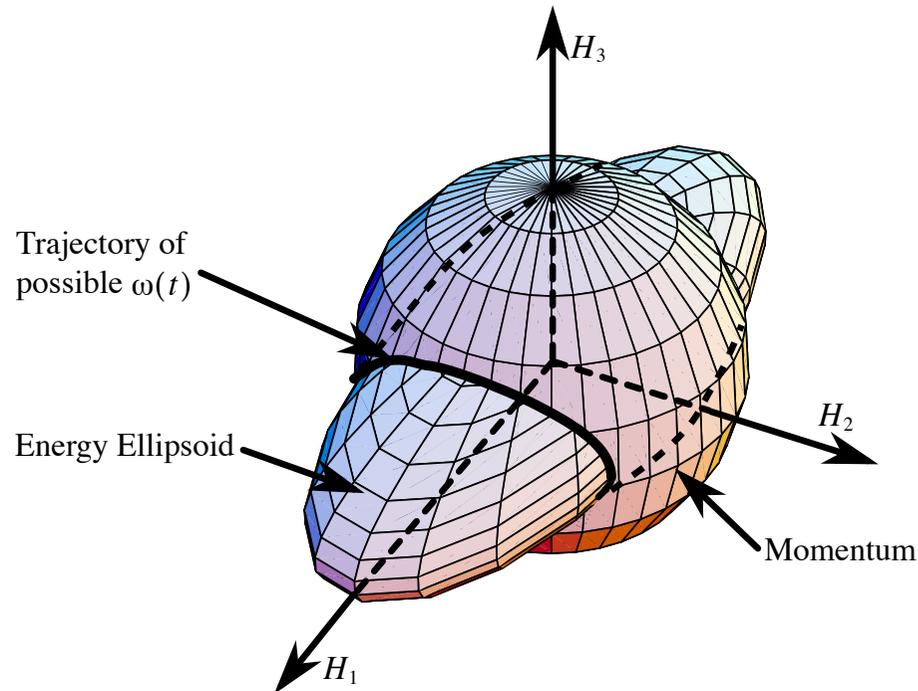
$$\frac{\omega_1^2}{\frac{\Gamma^2}{I_1^2}} + \frac{\omega_2^2}{\frac{\Gamma^2}{I_2^2}} + \frac{\omega_3^2}{\frac{\Gamma^2}{I_3^2}} = 1$$
$$\frac{\omega_1^2}{\frac{2T}{I_1}} + \frac{\omega_2^2}{\frac{2T}{I_2}} + \frac{\omega_3^2}{\frac{2T}{I_3}} = 1$$

- Estas son las ecuaciones de dos elipsoides: el elipsoide del momento cinético y el elipsoide de la energía cinética. Por tanto el vector velocidad angular debe siempre encontrarse en la intersección entre estos dos elipsoides; estas son las llamadas “curvas polodia”.



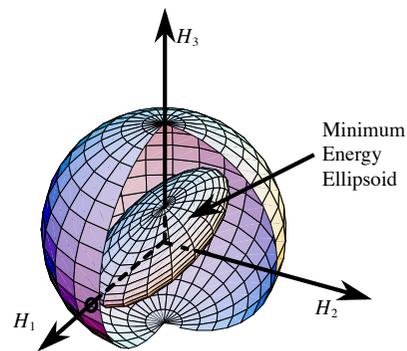
## Curvas polodia

- En general la intersección resultará en dos curvas cerradas, disjuntas.

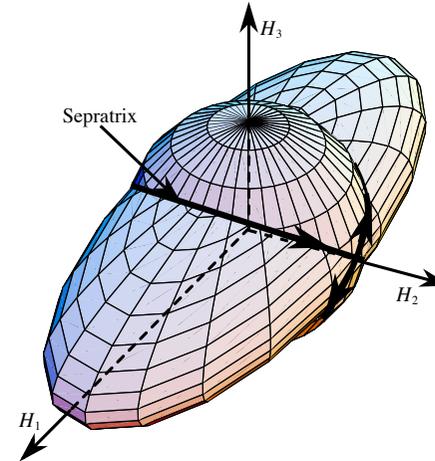


- Hay tres casos en los que la intersección se reduce a tres puntos: cuando los elipsoides son tangentes en alguno de los ejes. Estos casos corresponden a extremos de la energía (excepto el caso intermedio que es un “punto de silla”).

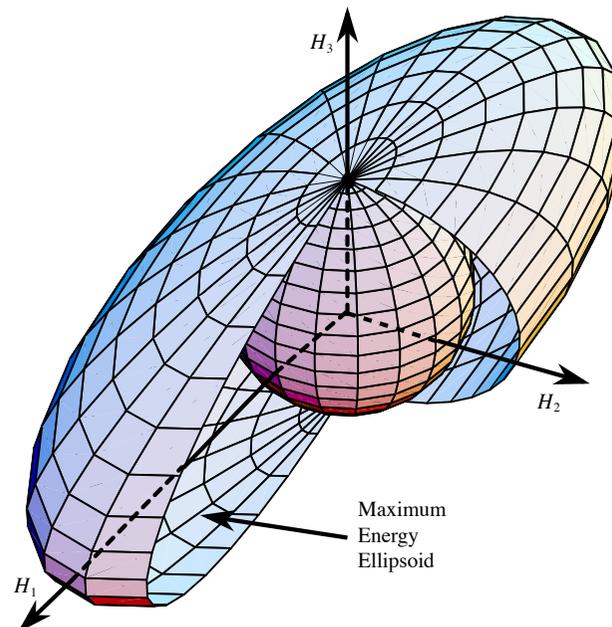
# Curvas polodia: casos especiales



(i) Minimum Energy Case



(ii) Intermediate Energy Case



(iii) Maximum Energy Case



## Movimiento libre de un sólido asimétrico

- Supongamos que  $I_3 < I_2 < I_1$ . Definamos  $I^* = \frac{\Gamma^2}{2T}$ . Restando las ecuaciones de los elipsoides y multiplicando por  $\Gamma^2$ , obtenemos:

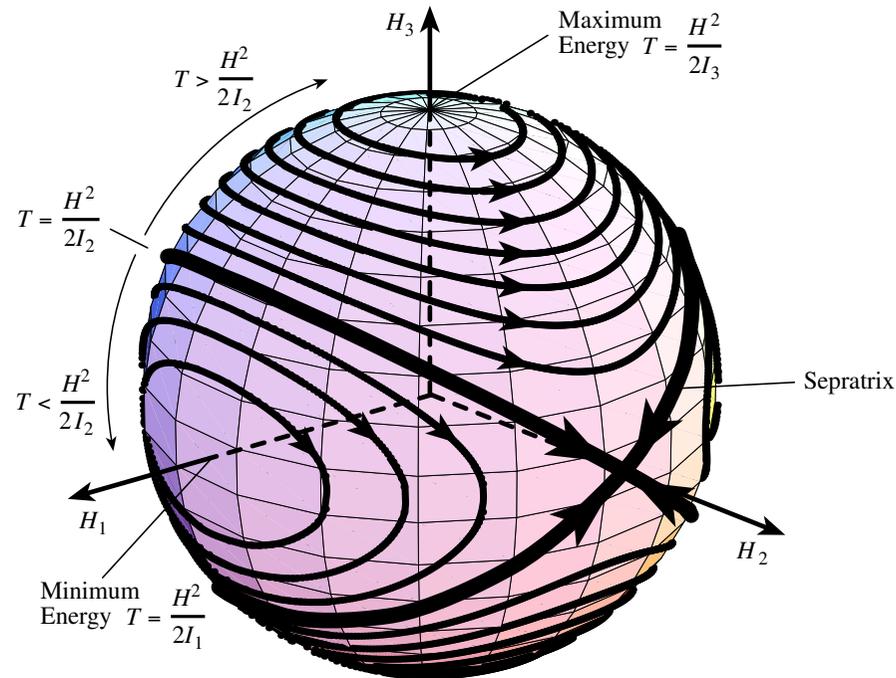
$$I_1\omega_1^2 (I_1 - I^*) + I_2\omega_2^2 (I_2 - I^*) + I_3\omega_3^2 (I_3 - I^*) = 0$$

- Observemos que si  $I^* < I_3$  todos los términos son positivos (y por tanto no pueden sumar cero). Igualmente si  $I^* > I_1$  todos los términos son negativos. Luego  $I^* \in [I_3, I_1]$ . Para  $\Gamma$  fijo, eso implica que la energía tiene que estar en un cierto rango. Los casos extremos son  $I^* = I_1$  (energía mínima, implica  $\omega_2 = \omega_3 = 0$  y por tanto un giro en el eje 1, el mayor) e  $I^* = I_3$  (energía máxima, implica  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  y por tanto un giro en el eje 3, el menor)
- El caso  $I^* = I_2$  tiene más soluciones aparte de rotaciones puras en torno al eje 2 ( $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ); dichas soluciones se llaman separatrices.



## Curvas polodia para $\Gamma$ fijo

- Si  $\Gamma$  está fijo y variamos la energía, obtenemos las posibles curvas polodia sobre la superficie del elipsoide del momento, incluyendo las separatrices.



## Estabilidad del movimiento libre alrededor de un eje principal

- Hemos visto que las soluciones más sencillas son rotaciones puras en torno a un eje principal. En este apartado, partamos de la solución de equilibrio  $\bar{\omega}_3 = n = \text{Cte}$  y que  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = 0$ . Estudiemos la estabilidad de esta rotación en función de si el eje 3 es mayor, menor o intermedio.
- Para ello perturbamos las ecuaciones, definiendo  $\omega_1 = \delta\omega_1$ ,  $\omega_2 = \delta\omega_2$  y  $\omega_3 = n + \delta\omega_3$ . Sustituyendo en las ecs de Euler:

$$I_1\delta\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\delta\omega_2(n + \delta\omega_3) = 0$$

$$I_2\delta\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\delta\omega_1(n + \delta\omega_3) = 0$$

$$I_3\delta\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\delta\omega_2\delta\omega_1 = 0$$

- Despreciando términos de segundo orden obtenemos:

$$I_1\delta\dot{\omega}_1 + n(I_3 - I_2)\delta\omega_2 = 0$$

$$I_2\delta\dot{\omega}_2 + n(I_1 - I_3)\delta\omega_1 = 0$$

$$I_3\delta\dot{\omega}_3 = 0$$



## Estabilidad del movimiento libre en un eje principal

- La ecuación en  $\delta\omega_3$  es (marginalmente) estable, es decir, estable pero no asintóticamente estable (las perturbaciones no crecen pero tampoco se disipan).
- La ecuación de  $\delta\omega_1$  y  $\delta\omega_2$  se puede simplificar en una única ecuación:

$$\delta\ddot{\omega}_1 + \frac{n^2(l_3 - l_2)(l_3 - l_1)}{l_1 l_2} \delta\omega_1 = 0$$

- La estabilidad de esta ecuación depende del signo de  $(l_3 - l_2)(l_3 - l_1)$ . Si el signo es positivo las soluciones son oscilatorias (ni crecen ni disminuyen: marginalmente estable). Si el signo es negativo las soluciones son exponenciales (una de las soluciones crece en el tiempo: inestable)
- Si  $l_3$  eje mayor,  $(l_3 - l_2)(l_3 - l_1) = + \times + > 0$ : estable.
- Si  $l_3$  eje menor,  $(l_3 - l_2)(l_3 - l_1) = - \times - > 0$ : estable.
- Si  $l_3$  eje intermedio,  $(l_3 - l_2)(l_3 - l_1) = + \times - < 0$ : inestable.



## Estabilidad del movimiento libre con disipación de energía

- El cálculo anterior es correcto, pero sólo si el modelo empleado (Ecuaciones de Euler para el sólido rígido) es un modelo totalmente exacto.
- La realidad no es tan simple, y siempre existe alguna fuente de disipación de energía (efectos de flexibilidad, rozamientos de partes móviles, movimiento de combustible en el depósito, etc...). Ello modificará el resultado anterior, ya que el sistema siempre tenderá a permanecer en un mínimo de energía.
- Partiendo de principios físicos, encontremos el mínimo de energía para un momento cinético determinado, es decir, resolvamos el problema

$$\begin{aligned} &\text{mín } I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \\ &\text{sujeto a } I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = \Gamma^2 \end{aligned}$$



## Estabilidad del movimiento libre con disipación de energía

- Usando multiplicadores de Lagrange:

$$L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + \lambda(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 - \Gamma^2)$$

- Se tiene  $0 = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 2I_i\omega_i(1 + \lambda I_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$

- Por tanto hay tres soluciones:

- $\omega_2 = \omega_3 = 0$ ,  $\lambda = -\frac{1}{I_1}$ ,  $\omega_1 = \frac{\Gamma}{I_1}$ .  $T = \frac{\Gamma^2}{2I_1}$ .

- $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ,  $\lambda = -\frac{1}{I_2}$ ,  $\omega_2 = \frac{\Gamma}{I_2}$ .  $T = \frac{\Gamma^2}{2I_2}$ .

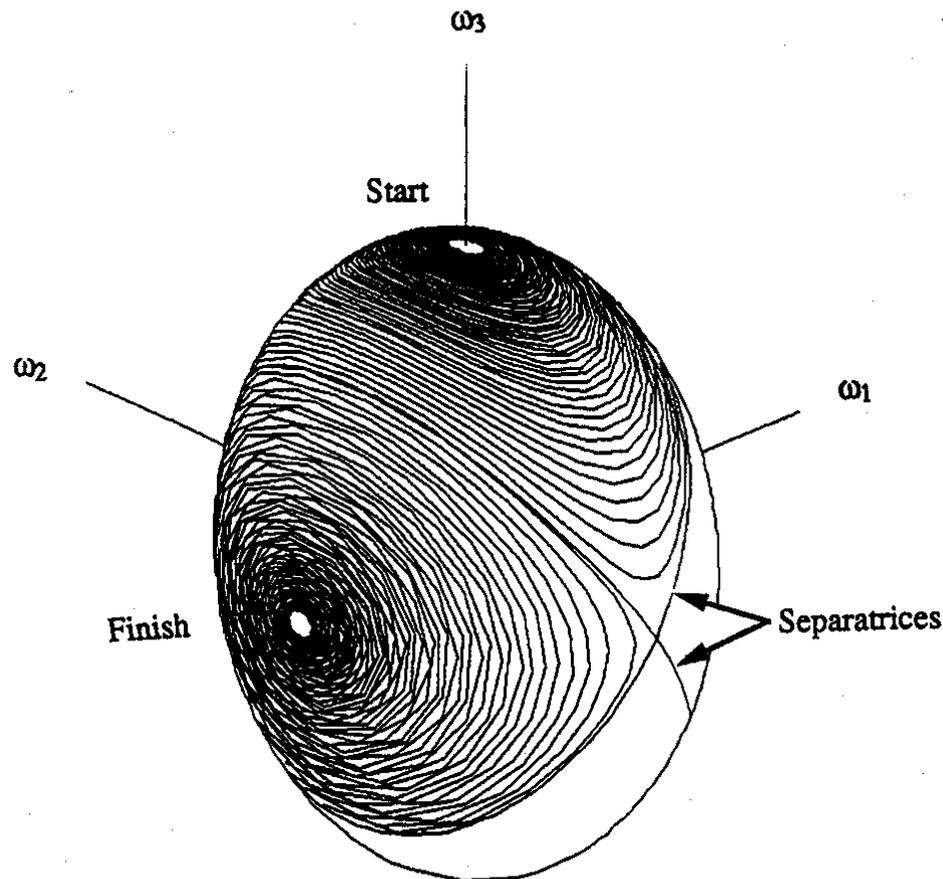
- $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\lambda = -\frac{1}{I_3}$ ,  $\omega_3 = \frac{\Gamma}{I_3}$ .  $T = \frac{\Gamma^2}{2I_3}$ .

- Claramente el mínimo viene dada por la primera solución (la segunda es punto de silla y la tercera máximo). Por tanto la única rotación matemáticamente estable y que a la vez es un mínimo de la energía son las rotaciones en torno al eje mayor.
- En base a este argumento se enuncia la regla del eje mayor: “En presencia de disipación de energía, las únicas rotaciones estables son aquellas en torno al eje mayor”.



## Estabilidad del movimiento libre con disipación de energía

- El efecto geométrico de la regla del eje mayor es que las curvas polodia pasan de ser cerradas a ser una única curva espiral que conduce al mínimo de la energía:



## Ejemplo de modelo con disipación de energía

- Modelo de un satélite con un depósito perfectamente esférico de combustible viscoso, lleno, tal que el combustible (de inercia  $J$  y coeficiente de fricción  $\Delta$ ) tiene su propia velocidad angular  $\vec{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T$  relativa al satélite.
- Sacado de C.D. Rahn, P.M. Barba, "Reorientation Maneuver for Spinning Spacecraft", AIAA Journal of Guidance, Dynamics and Control, Vol. 14, 1991.

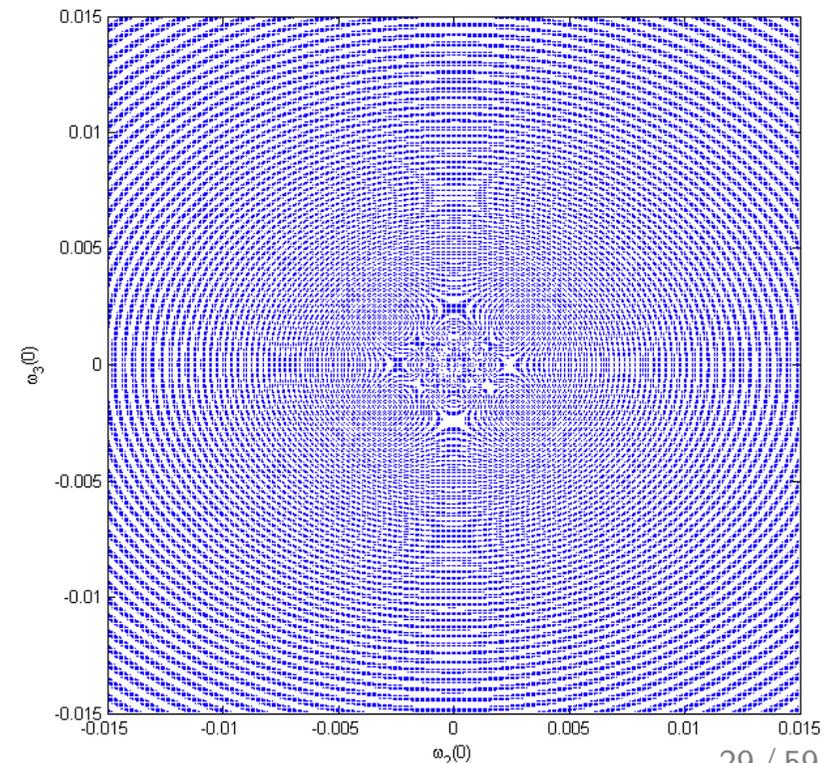
$$\begin{aligned}
 (I_1 - J)\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= \Delta\sigma_1 \\
 (I_2 - J)\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= \Delta\sigma_2 \\
 (I_3 - J)\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= \Delta\sigma_3 \\
 \dot{\sigma}_1 + \dot{\omega}_1 + \omega_2\sigma_3 - \omega_3\sigma_2 &= -\frac{\Delta\sigma_1}{J} \\
 \dot{\sigma}_2 + \dot{\omega}_2 + \omega_3\sigma_1 - \omega_1\sigma_3 &= -\frac{\Delta\sigma_2}{J} \\
 \dot{\sigma}_3 + \dot{\omega}_3 + \omega_1\sigma_2 - \omega_2\sigma_1 &= -\frac{\Delta\sigma_3}{J}
 \end{aligned}$$

- Por la disipación, cualquier rotación termina en torno al eje mayor; sin embargo, no es posible saber a priori el sentido de la rotación ya que la ecuación tiene dinámica caótica.



## Ejemplo de modelo con disipación de energía

- El hecho de que la ecuación tenga dinámica caótica quiere decir que el sentido de la rotación depende enormemente de la condición inicial, hasta el punto de que un cambio de condición inicial, por minúsculo que sea, produce una variación en el sentido de la rotación.
- Eso implica que, a todos los efectos prácticos, es imposible predecir cuál va a ser el sentido final de la rotación.
- Un dibujo en el que se marque con el mismo color los puntos que producen el mismo sentido de rotación es de enorme complejidad (debido a esta propiedad caótica). Este tipo de figuras se conocen en matemáticas como fractales.



## Regla del eje mayor. Consideraciones.

- La inestabilidad que surge en el eje menor tiene una escala de tiempo muy inferior a la inestabilidad en el eje intermedio; dicha escala dependerá de la velocidad con la que la energía se disipa.
- Si el movimiento deseado es una rotación en torno al eje mayor se puede amplificar este efecto añadiendo disipación: disipadores de nutación (“péndulos” con fricción añadidos al sistema).
- Si puntualmente es necesaria una rotación en torno al eje menor, no hay ningún problema mientras se requiera por un corto periodo de tiempo. Luego se puede volver a una rotación en torno al eje mayor simplemente dejando pasar el tiempo.
- La presencia de partes móviles (p.ej. volantes de inercia) cambia estos resultados teóricos.



## Ecuaciones rotacionales con rueda/volante de inercia/CMG.

- Veamos para empezar como se modifican las ecuaciones del movimiento por tener  $k$  ruedas o CMGs.
- Para cada rueda/CMG  $i$ , supuesta axisimétrica, definimos  $I_{Ri}$  como su inercia en la dirección del eje de giro  $\vec{e}_i$  y su velocidad de giro relativa al vehículo como  $\omega_{Ri}$ .
- Observemos que la inercia del conjunto no cambia en ningún momento, por la simetría de la rueda/CMG.
- Por tanto el momento cinético del conjunto será:  
$$\vec{\Gamma} = \mathcal{I}\vec{\omega}_{B/N} + \sum_{i=0}^k \vec{e}_i I_{Ri} \omega_{Ri}$$
- Expresando como antes la derivada  $\dot{\vec{\Gamma}} = \vec{M}$  en los ejes cuerpo obtenemos las ecuaciones correspondientes.



## Ecuaciones rotacionales con una rueda en cada eje

- Si hay una rueda en cada eje el momento cinético del

conjunto será:  $\vec{\Gamma} = \mathcal{I}\vec{\omega}_{B/N} + \begin{bmatrix} \omega_{R1} I_{R1} \\ \omega_{R2} I_{R2} \\ \omega_{R3} I_{R3} \end{bmatrix}$

- Obtenemos las siguientes ecuaciones de Euler:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + I_{R1} \dot{\omega}_{R1} + I_{R3} \omega_{R3} \omega_2 - I_{R2} \omega_{R2} \omega_3 = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 + I_{R2} \dot{\omega}_{R2} + I_{R1} \omega_{R1} \omega_3 - I_{R3} \omega_{R3} \omega_1 = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 + I_{R3} \dot{\omega}_{R3} + I_{R2} \omega_{R2} \omega_1 - I_{R1} \omega_{R1} \omega_2 = M_3$$

- A estas ecuaciones habría que añadir ecuaciones que gobiernan el giro de las ruedas; por ejemplo si  $J_{Ri}$  es el par interno que controla el giro de la rueda, estas ecuaciones serían:

$$I_{R1} (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_{R1}) = J_1$$

$$I_{R2} (\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_{R2}) = J_2$$

$$I_{R3} (\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_{R3}) = J_3$$



## Ecuaciones rotacionales con volante de inercia en el eje 3.

- Supongamos que el vehículo posee un volante de inercia en el eje 3, con inercia  $I_R$ , y que gira a una velocidad  $\omega_R$  relativa al resto del vehículo. También podría tratarse de un sistema de rotación doble, es decir, parte del vehículo (rotor) gira con respecto al resto del vehículo (plataforma) con una velocidad angular relativa.
- El momento cinético del sistema sería  
$$\Gamma = [I_1\omega_1 \ I_2\omega_2 \ I_3\omega_3 + I_R\omega_R]^T.$$
- Las ecuaciones de Euler quedan ahora:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + I_R\omega_R\omega_2 = 0$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 - I_R\omega_R\omega_1 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + I_R\dot{\omega}_R + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = 0$$

- Además hay que añadir  $I_R(\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_R) = J$ , donde  $J$  es el par del motor que controla el giro relativo del volante.



## Ecuaciones rotacionales con plataforma/volante de inercia.

- Podemos usar el motor, por ejemplo, para mantener  $\omega_R$  constante. En tal caso las ecuaciones se reducen a:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + I_R \omega_R \omega_2 = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 - I_R \omega_R \omega_1 = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0$$

- Ahora aparecen términos nuevos que modifican el análisis de estabilidad. Por ejemplo el eje intermedio se podría hacer estable!! Repitiendo el análisis de estabilidad de antes:

$$\delta \ddot{\omega}_1 + \frac{(n(I_3 - I_2) + I_R \omega_R)(n(I_3 - I_1) + I_R \omega_R)}{I_1 I_2} \delta \omega_1 = 0$$

- Si por ejemplo, el eje 1 es el menor y el eje 2 es el mayor, la condición necesaria para la estabilidad es  $n(I_3 - I_2) + I_R \omega_R > 0$ , es decir,  $\omega_R > \frac{I_2 - I_3}{I_R} n$ .
- Se puede realizar un análisis de energía y encontrar condiciones para que la estabilidad se verifique incluso en presencia de disipación de energía!



## Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Como antes, minimizamos la energía cinética fijando el momento cinético (ya que no hay pares externos).
- En este caso:

$$\begin{aligned}2T &= I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + I_R\omega_R^2, \\ \Gamma^2 &= I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + (I_3\omega_3 + I_R\omega_R)^2\end{aligned}$$

- El último término de la energía lo podemos ignorar ya que es una constante, y por tanto no cambiará el resultado de la minimización. El problema se plantea:

$$\begin{aligned}\text{mín } & I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \\ \text{sujeto a } & I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + (I_3\omega_3 + I_R\omega_R)^2 = \Gamma^2\end{aligned}$$



## Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Usando multiplicadores de Lagrange:

$$L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + \lambda(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + (I_3\omega_3 + I_R\omega_R)^2 - \Gamma^2)$$

- Se tiene  $0 = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 2I_i\omega_i(1 + \lambda I_i)$ ,  $i = 1, 2$  y

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \omega_3} = 2I_3(\omega_3 + \lambda(I_3\omega_3 + I_R\omega_R))$$

- Hay varias soluciones como antes, nos quedamos con:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = n, \quad \lambda = -\frac{n}{I_3n + I_R\omega_R}.$$

- Para resolver el problema usamos el siguiente teorema: Sea  $L(x, y, z) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$  el Lagrangiano del sistema de forma que  $F$  es la función a minimizar y  $G(x, y, z) = 0$  es la restricción. Entonces, se forman las matrices:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$



## Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Si  $x^*$ ,  $\lambda^*$  es el punto crítico (que hace las primeras derivadas de  $L$  cero) donde se quiere investigar si hay un mínimo o un máximo entonces, si se cumple:

- 1  $\frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) \neq 0$
- 2  $\text{Det}(H_3(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$
- 3  $\text{Det}(H_4(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) < 0$

entonces se tiene un mínimo en el punto crítico.

- Para verificar las condiciones, tenemos que llamar  $x = \omega_3$ ,  $y = \omega_1$ ,  $z = \omega_2$ . Entonces tenemos:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2I_3(I_3 n + I_r \omega_R) & 0 & 0 \\ 2I_3(I_3 n + I_r \omega_R) & 2I_3(1 + \lambda I_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_1(1 + \lambda I_1) & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2I_3(I_3 n + I_r \omega_R) & 0 & 0 & 0 \\ 2I_3(I_3 n + I_r \omega_R) & 2I_3(1 + \lambda I_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_1(1 + \lambda I_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2I_2(1 + \lambda I_2) \end{bmatrix}.$$



## Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Obtenemos las condiciones de mínimo:

1  $\frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) = 2I_3(I_3 n + I_r \omega_R) \neq 0$  (puesto que si las otras dos velocidades angulares son cero, se tiene

$$I_3 n + I_r \omega_R = \pm \Gamma \neq 0).$$

2  $\text{Det}(H_3(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) = -8I_3^2(I_3 n + I_r \omega_R)^2 I_1 (1 + \lambda I_1) < 0$

3  $\text{Det}(H_4(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)) = \text{Det}(H_3) 2I_2 (1 + \lambda I_2) < 0$

- Por tanto llegamos a dos condiciones:

$$1 + \lambda I_1 > 0,$$

$$1 + \lambda I_2 > 0.$$

- Usando el valor de  $\lambda$  antes hallado llegamos a

$$1 - \frac{I_1 n}{I_3 n + I_R \omega_R} > 0,$$

$$1 - \frac{I_2 n}{I_3 n + I_R \omega_R} > 0.$$

- Hay que tener cuidado con el signo de  $I_3 n + I_R \omega_R$  ya que al despejar  $\omega_R$  puede cambiar el signo de la desigualdad.



## Disipación de energía con plataforma/volante de inercia.

- Si en vez de despejar  $\omega_R$  metemos “el uno” en la fracción, estas condiciones se reducen a:

$$\frac{(I_3 - I_1)n + I_R\omega_R}{I_3n + I_R\omega_R} > 0,$$

$$\frac{(I_3 - I_2)n + I_R\omega_R}{I_3n + I_R\omega_R} > 0,$$

- Por lo que claramente habrá dos casos:

**1** Si  $I_3n + I_R\omega_R > 0$ , es decir  $\omega_R > -\frac{I_3n}{I_R}$ , entonces las condiciones son  $\omega_R > \frac{(I_1 - I_3)n}{I_R}$ ,  $\omega_R > \frac{(I_2 - I_3)n}{I_R}$ .

**2** Si  $I_3n + I_R\omega_R < 0$ , es decir  $\omega_R < -\frac{I_3n}{I_R}$ , entonces las condiciones son  $\omega_R < \frac{(I_1 - I_3)n}{I_R}$ ,  $\omega_R < \frac{(I_2 - I_3)n}{I_R}$ .

- Se observa que son condiciones similares, pero más restrictivas, que las obtenidas sin disipación de energía!



## Ejemplo I

- Sea un satélite del que se sabe:

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad n = 60 \text{ r.p.m.}, \quad I_R = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- Si estudiamos a qué velocidad debe girar la rueda para que el eje 3 (intermedio) sea estable.
- Con análisis usando el modelo de sólido rígido, la condición es  $(n(I_2 - I_3) - I_R\omega_R)(n(I_3 - I_1) + I_R\omega_R) < 0$ . Dos casos:
  - 1 Primer paréntesis negativo, segundo positivo. Las condiciones son  $\omega_R > \frac{n(I_2 - I_3)}{I_R} = 300 \text{ r.p.m.}$  y  $\omega_R > \frac{n(I_3 - I_1)}{I_R} = -300 \text{ r.p.m.}$ . Como la primera condición es más restrictiva, llegamos a la conclusión de que  $\omega_R > 300 \text{ r.p.m.}$ .
  - 2 Segundo paréntesis negativo, primero positivo. Las condiciones son  $\omega_R < \frac{n(I_2 - I_3)}{I_R} = 300 \text{ r.p.m.}$  y  $\omega_R < \frac{n(I_3 - I_1)}{I_R} = -300 \text{ r.p.m.}$ . Como la segunda condición es más restrictiva, llegamos a la conclusión de que  $\omega_R < -300 \text{ r.p.m.}$ .
- En conclusión, con el modelo de sólido rígido el eje 3 es estable si  $\omega_R > 300 \text{ r.p.m.}$  o si  $\omega_R < -300 \text{ r.p.m.}$ , pero inestable si  $\omega_R \in [-300, 300] \text{ r.p.m.}$



## Ejemplo II

- Con análisis usando el modelo de disipación de energía, hay también dos casos:

**1** Si  $l_3 n + I_R \omega_R > 0$ , es decir  $\omega_R > -\frac{l_3 n}{I_R} = -600$  r.p.m., entonces las condiciones son  $\omega_R > \frac{(l_1 - l_3)n}{I_R} = -300$  r.p.m.,  $\omega_R > \frac{(l_2 - l_3)n}{I_R} = 300$  r.p.m.. Como la tercera condición es más restrictiva, llegamos a la conclusión de que  $\omega_R > 300$  r.p.m..

**2** Si  $l_3 n + I_R \omega_R < 0$ , es decir  $\omega_R < -\frac{l_3 n}{I_R} = -600$  r.p.m., entonces las condiciones son  $\omega_R < \frac{(l_1 - l_3)n}{I_R} = -300$  r.p.m.,  $\omega_R < \frac{(l_2 - l_3)n}{I_R} = 300$  r.p.m.. Como la primera condición es más restrictiva, llegamos a la conclusión de que  $\omega_R < -600$  r.p.m..

- En conclusión, en presencia de disipación de energía, el eje 3 es estable si  $\omega_R > 300$  r.p.m. o si  $\omega_R < -600$  r.p.m., pero inestable si  $\omega_R \in [-600, 300]$  r.p.m..
- Obsérvese que en la zona  $\omega_R \in [-600, -300]$  r.p.m. los dos modelos difieren; al ser más realista el modelo con disipación de energía, sabemos que en dicha zona falla el análisis con modelo de sólido rígido!



## Movimiento forzado

- En la realidad siempre existirán momentos perturbadores. Normalmente son de magnitud pequeña pero pueden ser persistentes (como por ejemplo el gradiente gravitatorio que actúa a lo largo de toda la órbita). También pueden ser más intensos, como por ejemplo en el caso de toberas propulsivas no perfectamente alineadas durante maniobras.
- En esta sección analizaremos dos casos:
  - Momento perturbador constante actuando sobre un sólido en rotación (efecto giroscópico).
  - Efecto en la estabilidad del gradiente gravitatorio.
- Además expondremos un modelo de vehículo espacial con ruedas y volante de inercia que será necesario para el posterior tema de control.



## Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- Modelamos este caso con las siguientes hipótesis:
  - Vehículo axilsimétrico:  $I_1 = I_2 = I$ .
  - Vehículo rotando con velocidad  $n$  en torno a su eje 3, es decir,  $\omega_3 = n$ .
  - Momento perturbador constante  $M_1$  en el eje 1. Sin momento en el resto de los ejes.
- Esta situación modela, por ejemplo, el caso de un vehículo estabilizado por rotación que realiza una maniobra propulsiva, pero con la tobera ligeramente desalineada con el eje de rotación. Si el vehículo no rotara, el momento causaría el giro inmediato del vehículo y la maniobra fallaría.
- Veremos que al haber rotación el vehículo posee “rigidez giroscópica” y el momento perturbador lo que finalmente produce es un movimiento (posiblemente muy pequeño) de precesión y nutación del eje de giro.



## Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- Las ecuaciones que modelan el movimiento son:

$$I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 = M_1$$

$$I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

- Encontramos la solución  $\omega_3 = \text{Cte} = n$  y definimos  $\lambda = \frac{I - I_3}{I}n$  y  $\mu = \frac{M_1}{I}$ . La ecuación a resolver es:

$$\dot{\omega}_1 - \lambda\omega_2 = \mu$$

$$\dot{\omega}_2 + \lambda\omega_1 = 0$$

- Derivando en la primera ecuación y sustituyendo la segunda:

$$\ddot{\omega}_1 + \lambda^2\omega_1 = 0$$

- La solución de esta ecuación es  $\omega_1(t) = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t$ .



## Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- Sustituyendo en la 1ª ecuación:  $\omega_2(t) = A \cos \lambda t - B \sin \lambda t - \frac{\mu}{\lambda}$ .
- Usando las condiciones iniciales  $\omega_1(0)$  y  $\omega_2(0)$  encontramos:  
 $B = \omega_1(0)$ ,  $A = \omega_2(0) + \frac{\mu}{\lambda}$ . Por tanto:

$$\omega_1 = \left( \omega_2(0) + \frac{\mu}{\lambda} \right) \sin \lambda t + \omega_1(0) \cos \lambda t = \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t$$

$$\omega_2 = \left( \omega_2(0) + \frac{\mu}{\lambda} \right) \cos \lambda t - \omega_1(0) \sin \lambda t - \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} (\cos \lambda t - 1)$$

donde finalmente se han supuesto  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ .

- Para describir la actitud usamos unos ángulos de Euler:

$$I \xrightarrow[\theta_1]{x^n} S \xrightarrow[\theta_2]{y^S} S' \xrightarrow[\theta_3]{z^{S'}} BFS$$

- En el desarrollo de las ecuaciones cinemáticas se llegaría a:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\omega_1 \cos \theta_3 - \omega_2 \sin \theta_3}{\cos \theta_2}$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_1 \sin \theta_3 + \omega_2 \cos \theta_3$$

$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 + (-\omega_1 \cos \theta_3 + \omega_2 \sin \theta_3) \tan \theta_2$$



## Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- Se tomarán condiciones iniciales para los ángulos de 0.
- Esperamos que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  sean más bien pequeños, mientras que  $\theta_3$  será grande (ya que es en torno al eje de giro). Por ello sustituimos  $\cos \theta_2 \approx 1$  y  $\tan \theta_2 \approx \theta_2$ . Llegamos a:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \cos \theta_3 - \omega_2 \operatorname{sen} \theta_3$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_1 \operatorname{sen} \theta_3 + \omega_2 \cos \theta_3$$

$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 + \theta_2 (-\omega_1 \cos \theta_3 + \omega_2 \operatorname{sen} \theta_3) = \omega_3 - \theta_2 \dot{\theta}_1$$

- Suponiendo  $\omega_3 \gg \theta_2 \dot{\theta}_1$ , encontramos  $\theta_3 = \omega_3 t = nt$ .
- Las ecuaciones para  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \cos nt - \omega_2 \operatorname{sen} nt$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_1 \operatorname{sen} nt + \omega_2 \cos nt$$

- Sustituyamos los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  encontrados antes:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t \cos nt - \frac{\mu}{\lambda} (\cos \lambda t - 1) \operatorname{sen} nt = \frac{\mu}{\lambda} (\operatorname{sen} (\lambda - n) t + \operatorname{sen} nt)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda t \operatorname{sen} nt + \frac{\mu}{\lambda} (\cos \lambda t - 1) \cos nt = \frac{\mu}{\lambda} (\cos (\lambda - n) t - \cos nt)$$



## Cuerpo en rotación sujeto a un momento externo constante

- La solución de estas ecuaciones es:

$$\theta_1 = \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{1 - \cos(\lambda - n)t}{\lambda - n} + \frac{1 - \cos nt}{n} \right)$$

$$\theta_2 = \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{\sin(\lambda - n)t}{\lambda - n} - \frac{\sin nt}{n} \right)$$

- Definamos  $A_p = \frac{\mu}{\lambda(n-\lambda)}$  y  $\omega_p = n - \lambda$ , amplitud y frecuencia de precesión, respectivamente, y  $A_n = \frac{\mu}{\lambda n}$  y  $\omega_n = n$ , amplitud y frecuencia de nutación, respectivamente. La solución queda:

$$\theta_1 = -A_p (1 - \cos \omega_p t) + A_n (1 - \cos \omega_n t)$$

$$\theta_2 = A_p \sin \omega_p t - A_n \sin \omega_n t$$

- Es la superposición de dos movimientos circulares: epicicloide.

- Las amplitudes vienen dadas por  $A_p = \frac{M_1}{(I - I_3)n^2} \frac{I}{I_3}$  y

$A_n = \frac{M_1}{(I - I_3)n^2}$ , por lo que la “rigidez giroscópica” será mayor cuanto mayor sea  $n$ ,  $I_3/I$ , y la diferencia  $I - I_3$ .

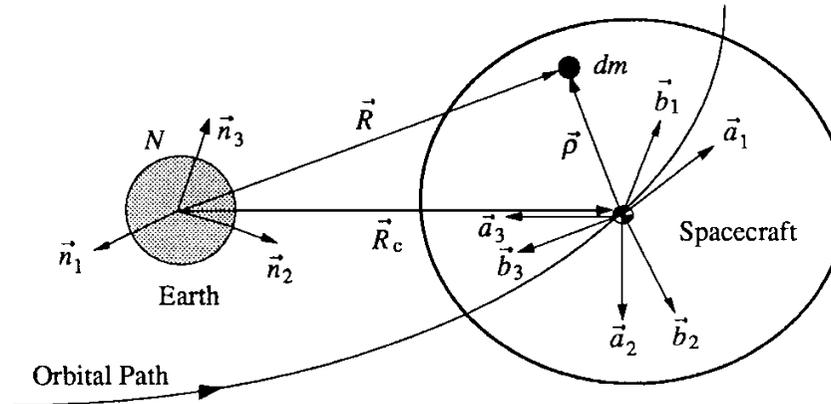


## Gradiente gravitatorio.

- El par perturbador más importante es el gradiente gravitatorio, puesto que siempre está presente en órbita.
- Vamos a estudiar el caso de un vehículo espacial asimétrico en órbita circular de radio  $R$  en torno a un planeta esférico; las órbitas elípticas y las desviaciones de la gravedad esférica (p.ej. el  $J_2$ ) introducen términos de orden mayor que no analizaremos.
- La velocidad angular se estudiará en ejes cuerpo; sin embargo los ángulos de Euler elegidos serán respecto a ejes órbita, que en sí no es un sistema de referencia inercial, lo que tendrá que tomarse en cuenta.
- La situación es la de la figura de la transparencia siguiente. Los ejes N son los inerciales, los ejes A son los ejes órbita (que definiremos) y los ejes B los ejes cuerpo (en ejes principales de inercia).



# Gradiente gravitatorio.

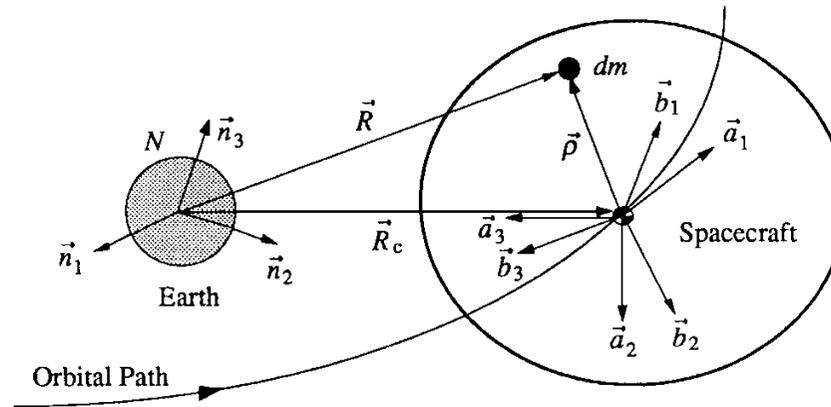


- Ejes órbita: la dirección  $z$  ( $\vec{a}_3$ ) apunta siempre al centro de la Tierra. La dirección  $x$  ( $\vec{a}_1$ ) en la dirección de la velocidad. La dirección  $y$  ( $\vec{a}_2$ ) en la dirección contraria al momento cinético  $\vec{h}$  (perpendicular al plano orbital).
- Estos ejes rotan respecto al sistema de referencia inercial ( $n$ ) en torno al eje  $-\vec{a}_2$  con velocidad  $n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R^3}}$ .
- La relación entre los sistemas de referencia es la siguiente:

$$N \xrightarrow[-y^n]{-nt} A \xrightarrow[z^A]{\theta_3} S \xrightarrow[y^S]{\theta_2} S' \xrightarrow[x^{S'}]{\theta_1} B$$



# Gradiente gravitatorio.



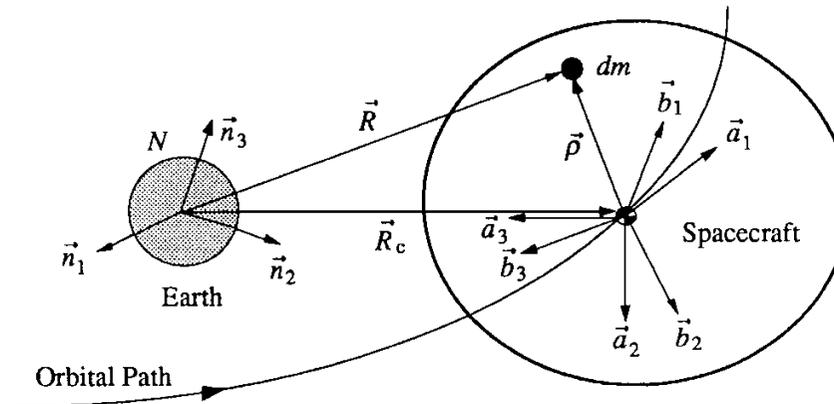
- La matriz  $C_A^B$  y las ecuaciones diferenciales cinemáticas entre  $B$  y  $A$  son:

$$C_A^B = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 & c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & s\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c\theta_2} \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 s\theta_1 & s\theta_2 c\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix} \vec{\omega}_{B/A}^B$$



## Gradiente gravitatorio.

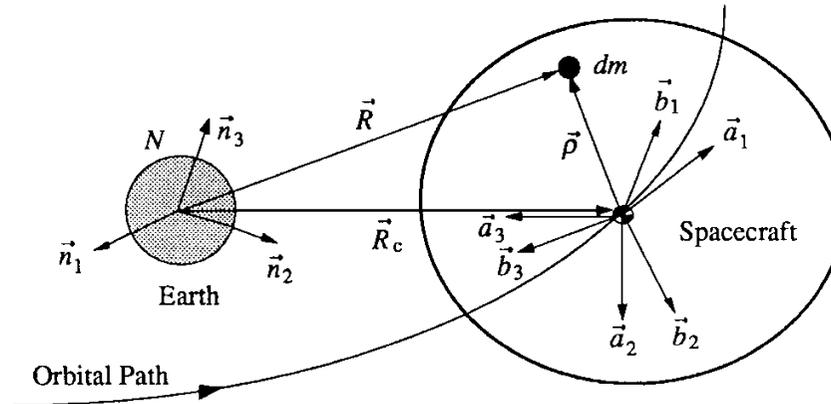


- Empecemos estudiando el gradiente gravitatorio. En cada  $dm$  del vehículo actuará una fuerza  $d\vec{F} = -\frac{\mu\vec{R}}{R^3} dm = -\frac{\mu(\vec{R}_c + \vec{\rho})}{|\vec{R}_c + \vec{\rho}|^3} dm$ .
- Por tanto el momento de las fuerzas será:

$$\vec{M} = \int_V \rho \times d\vec{F} = -\mu \int_V \rho \times \frac{\vec{R}_c + \vec{\rho}}{|\vec{R}_c + \vec{\rho}|^3} dm = -\mu \int_V \frac{\rho \times \vec{R}_c}{|\vec{R}_c + \vec{\rho}|^3} dm$$



# Gradiente gravitatorio.



- Usemos el hecho de que, puesto que  $|\vec{\rho}| \ll |\vec{R}_c|$ ,  
 $|\vec{R}_c + \vec{\rho}|^{-3} \approx \frac{1}{R_c^3} - 3\frac{\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}}{R_c^5}$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{M} &\approx -\frac{\mu}{R_c^3} \int_V \rho \times \vec{R}_c dm + 3\frac{\mu}{R_c^5} \int_V \rho \times \vec{R}_c (\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}) dm \\ &= 3\frac{\mu}{R_c^5} \int_V \rho \times \vec{R}_c (\vec{R}_c \cdot \vec{\rho}) dm = -3\frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c^\times \left( \int_V \vec{\rho} \vec{\rho}^T dm \right) \vec{R}_c \\ &= 3\frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c^\times \mathcal{I} \vec{R}_c - 3\frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c^\times \left( \int_V (|\vec{\rho}|^2) dm \right) \vec{R}_c = 3\frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c^\times \mathcal{I} \vec{R}_c \end{aligned}$$



## Gradiente gravitatorio.

- Por tanto  $\vec{M} = 3 \frac{\mu}{R_c^5} \vec{R}_c \times \mathcal{I} \vec{R}_c$ . En ejes  $A$ ,  $\vec{R}_c^A = [0 \ 0 \ -R_c]^T$ .  
 Por tanto, en ejes  $B$ :

$$\vec{R}_c^B = C_A^B \vec{R}_c^A = -R_c \begin{bmatrix} -s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix}$$

- Luego:

$$\vec{M}^B = 3 \frac{\mu}{R_c^3} \begin{bmatrix} 0 & -c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix}$$

- Operando:

$$\begin{aligned} \vec{M}^B &= 3n^2 \begin{bmatrix} 0 & -c\theta_1 c^2\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\theta_2 l_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 l_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 l_3 \end{bmatrix} \\ &= 3n^2 \begin{bmatrix} -c\theta_1 c^2\theta_2 s\theta_1 (l_2 - l_3) \\ c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (l_3 - l_1) \\ s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (l_1 - l_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## Gradiente gravitatorio.

- Las ecuaciones de Euler que verifica la velocidad en ejes cuerpo son, por tanto:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = [\omega_2 \omega_3 - 3n^2 c\theta_1 c^2 \theta_2 s\theta_1] (I_2 - I_3)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = [\omega_1 \omega_3 + 3n^2 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2] (I_3 - I_1)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = [\omega_2 \omega_1 + 3n^2 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2] (I_1 - I_2)$$

- Por otro lado, puesto que

$$\vec{\omega}_{B/N}^B = \vec{\omega}_{B/A}^B + \vec{\omega}_{A/N}^B = \vec{\omega}_{B/A}^B + C_A^B \vec{\omega}_{A/N}^A, \text{ se tiene:}$$

$$\vec{\omega}_{B/A}^B = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} - C_A^B \begin{bmatrix} 0 \\ -n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} c\theta_2 s\theta_3 \\ c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ -s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \end{bmatrix}$$

- Y las ecuaciones cinemáticas son, operando:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c\theta_2} \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 s\theta_1 & s\theta_2 c\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \frac{n}{c\theta_2} \begin{bmatrix} s\theta_3 \\ c\theta_2 c\theta_3 \\ s\theta_2 s\theta_3 \end{bmatrix}$$



## Posición estable

- En primer lugar buscamos un equilibrio. Haciendo las derivadas cero, obtenemos:

$$0 = [\omega_2 \omega_3 - 3n^2 c\theta_1 c^2 \theta_2 s\theta_1] (l_2 - l_3)$$

$$0 = [\omega_1 \omega_3 + 3n^2 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2] (l_3 - l_1)$$

$$0 = [\omega_2 \omega_1 + 3n^2 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2] (l_1 - l_2)$$

$$\vec{0} = \frac{1}{c\theta_2} \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 s\theta_1 & s\theta_2 c\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \frac{n}{c\theta_2} \begin{bmatrix} s\theta_3 \\ c\theta_2 c\theta_3 \\ s\theta_2 s\theta_3 \end{bmatrix}$$

- Un posible equilibrio sería  $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ,  $\omega_2 = -n$ ,  
 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ ,. Ojo: hay otros equilibrios (p.ej.  $\theta_1 = \pi$ ).
- Si los ángulos son pequeños, linealizamos las ecuaciones y obtenemos:

$$\dot{\omega}_1 = -[n\omega_3 + 3n^2 \theta_1] (l_2 - l_3)$$

$$\dot{\omega}_2 = 3n^2 \theta_2 (l_3 - l_1)$$

$$\dot{\omega}_3 = -n\omega_1 (l_1 - l_2)$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + n\theta_3$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2$$

$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 - n\theta_1$$



## Posición estable

- Tomando una derivada más en los ángulos obtenemos:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \dot{\omega}_1 + n\dot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_2 &= \dot{\omega}_2 \\ \ddot{\theta}_3 &= \dot{\omega}_3 - n\dot{\theta}_1\end{aligned}$$

- Sustituyendo las ecuaciones anteriores y eliminando las  $\omega_i$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}l_1\ddot{\theta}_1 &= -[n\dot{\theta}_3 + 4n^2\theta_1](l_2 - l_3) + nl_1\dot{\theta}_3 \\ l_2\ddot{\theta}_2 &= 3n^2\theta_2(l_3 - l_1) \\ l_3\ddot{\theta}_3 &= -n(\dot{\theta}_1 - n\theta_3)(l_1 - l_2) - nl_3\dot{\theta}_1\end{aligned}$$

- La segunda ecuación es estable si  $l_3 < l_1$ . Para la primera y tercera ecuaciones escribimos la matriz del sistema y calculamos sus autovalores:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4n^2 \frac{l_3 - l_2}{l_1} & 0 & 0 & n \frac{l_3 - l_2 + l_1}{l_1} \\ 0 & n^2 \frac{l_1 - l_2}{l_3} & n \frac{l_2 - l_1 - l_3}{l_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

- Definamos  $k_1 = \frac{l_2 - l_3}{l_1}$  y  $k_3 = \frac{l_2 - l_1}{l_3}$ . Puesto que  $l_1 + l_2 > l_3$ ,  $l_2 + l_3 > l_1$ ,  $l_1 + l_3 > l_2$ , se tiene  $k_1, k_3 \in [-1, 1]$ .



## Posición estable

- El sistema queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4n^2k_1 & 0 & 0 & n(1-k_1) \\ 0 & -n^2k_3 & n(k_3-1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

- Estudiando los autovalores de la matriz, encontramos el polinomio característico:

$$\lambda^4 + \lambda^2 n^2 (1 + k_1(3 + k_3)) + 4n^4 k_1 k_3 = 0, \text{ cuya solución es:}$$

$$\lambda = \pm n \sqrt{\frac{-(1 + k_1(3 + k_3)) \pm \sqrt{(1 + k_1(3 + k_3))^2 - 16k_1 k_3}}{2}}$$

- Los autovalores serán estables si y sólo si las dos posibilidades dentro de la primera raíz son números negativos reales, es decir:  $-(1 + k_1(3 + k_3)) \pm \sqrt{(1 + k_1(3 + k_3))^2 - 16k_1 k_3} < 0$ . Esto sólo es posible:

- Si  $-(1 + k_1(3 + k_3)) < 0$ , es decir,  $1 + k_1(3 + k_3) > 0$ .
- Si  $\sqrt{(1 + k_1(3 + k_3))^2 - 16k_1 k_3}$  es real, es decir,  $(1 + k_1(3 + k_3))^2 - 16k_1 k_3 > 0$ .
- Si  $16k_1 k_3 > 0$  (si no la raíz sería mayor que el primer término y en el caso positivo saldría un número positivo dentro de la raíz)



## Posición estable

- Si representamos gráficamente estas condiciones, obtenemos la siguiente figura:

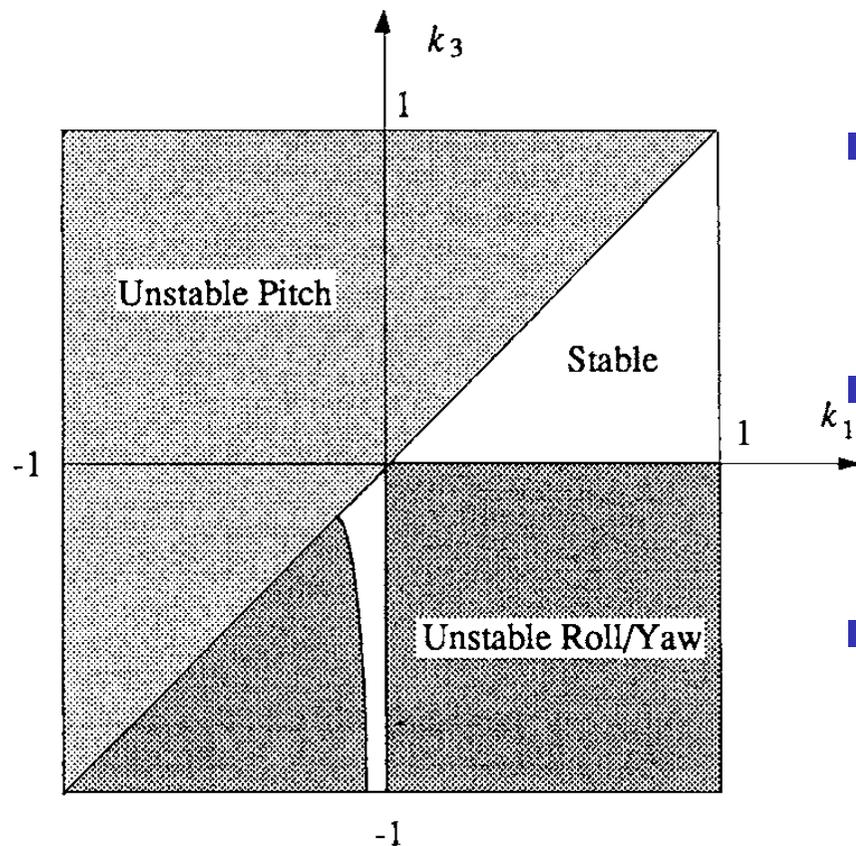


Fig. 6.9 Gravity-gradient stability plot.

- De  $16k_1k_3 > 0$ , obtenemos  $k_1$  y  $k_3$  o ambos positivos, o ambos negativos.
- Como  $I_3 < I_1$ , se comprueba calculando  $k_1 - k_3$  que se tiene que dar  $k_1 - k_3 > 0$ .
- Para  $k_1 > k_3 > 0$  obtenemos la llamada "región de Lagrange" (triángulo superior izquierdo).
- La otra región estable (llamada de "De Bra-Delp") se obtiene de  $(1 + k_1(3 + k_3))^2 - 16k_1k_3 > 0$ . No obstante la menor disipación de energía la hace inestable.



## Posición estable

- Si representamos gráficamente estas condiciones, obtenemos la siguiente figura:

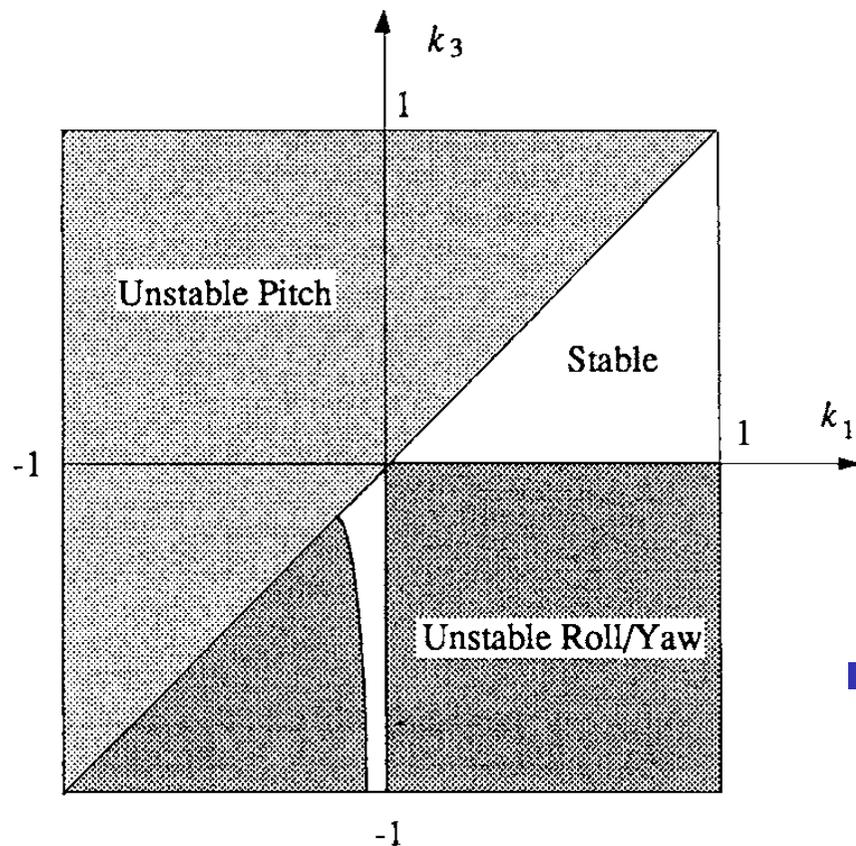


Fig. 6.9 Gravity-gradient stability plot.

- Por tanto la zona estable de interés práctico corresponde a  $k_1 > k_3 > 0$ , lo que se verifica para  $I_2 > I_1$  e  $I_2 > I_3$ . Antes obtuvimos  $I_3 < I_1$ . Luego el eje 2 (perpendicular al plano orbital) es el mayor, el eje 3 (en dirección al planeta) el menor, y el eje 1 (en la dirección de la velocidad) el intermedio.
- Hay que tener cuidado: los ángulos de equilibrio son 0 grados o también 180 grados (la actitud opuesta también es estable).



# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 7: Sistemas de control de actitud pasivos.

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

23 de febrero de 2017



## Control de actitud

- El sistema de control de actitud de los satélites se puede dividir a muy grandes rasgos en dos grandes tipos:
  - Satélites estabilizados por rotación: se aprovechan del efecto giroscópico para mantener una dirección inercialmente fija. Más barato y sencillo.
  - Satélites estabilizados en los tres ejes: utilizan algún mecanismo de control activo para mantener su actitud fija respecto a alguna referencia.
- Muchos satélites pueden usar los dos modos, según la fase de la misión (particularmente sondas interplanetarias).
- También se pueden estabilizar satélites utilizando el gradiente gravitatorio (no requiere control activo de ningún tipo, pero es poco preciso), o mediante algún sistema de rotación doble (esencialmente similares a los estabilizados por rotación). En las siguientes transparencias veremos los tipos de estabilización comúnmente empleados.



## Métodos de control de actitud

- Otra clasificación de los métodos de control de actitud en dos clases: control activo y control pasivo.
- No obstante, la palabra pasivo tiene, en teoría de control, varias interpretaciones.
  - Control pasivo en el sentido energético: un sistema de control que no requiere ningún tipo de fuente de energía adicional para su funcionamiento.
  - Pasivo en el sentido estructural: un sistema de control que carece de lógica de comando, es decir, no necesita ningún tipo de procesamiento de información para su actuación, puesto que aprovecha algún tipo de efecto físico o natural.
  - Además, existe el concepto de “Sistema Pasivo”, una definición matemática utilizada en control no lineal.
- Ésto no se debe confundir con la distinción entre Bucle Abierto y Bucle Cerrado.
- Los sistemas que denominaremos de Control Pasivo no lo son estrictamente, sino que en general incorporan algún elemento activo complementario.

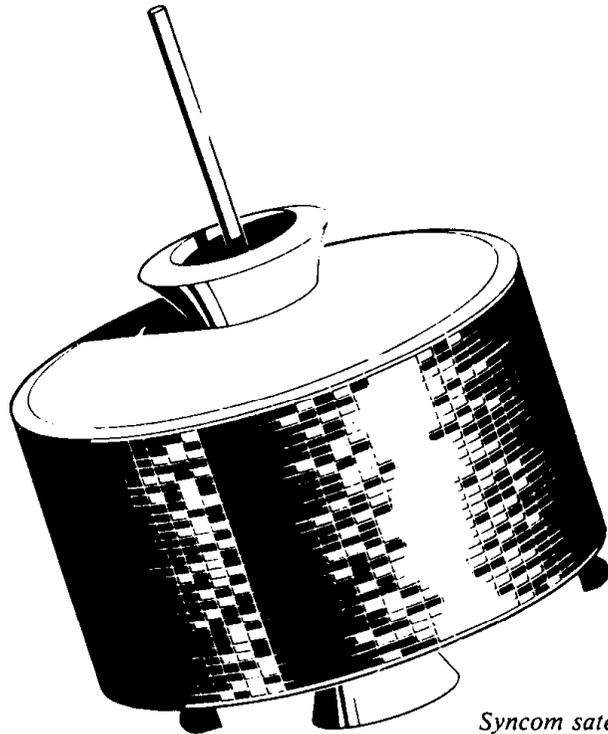


## Sistemas de control pasivos

- Los sistemas de Control Pasivo típicamente encontrados en vehículos espaciales son los siguientes:
  - Estabilización por rotación (spin stabilized systems).
  - Estabilización por rotación doble (dual-spin stabilized systems).
  - Estabilización por gradiente gravitatorio ( $G^2$ ).
  - Estabilización por volante de inercia (bias-momentum stabilized systems). Éste método también se puede considerar activo.
  - Estabilización por momentos magnéticos. Éste método también se puede considerar activo.

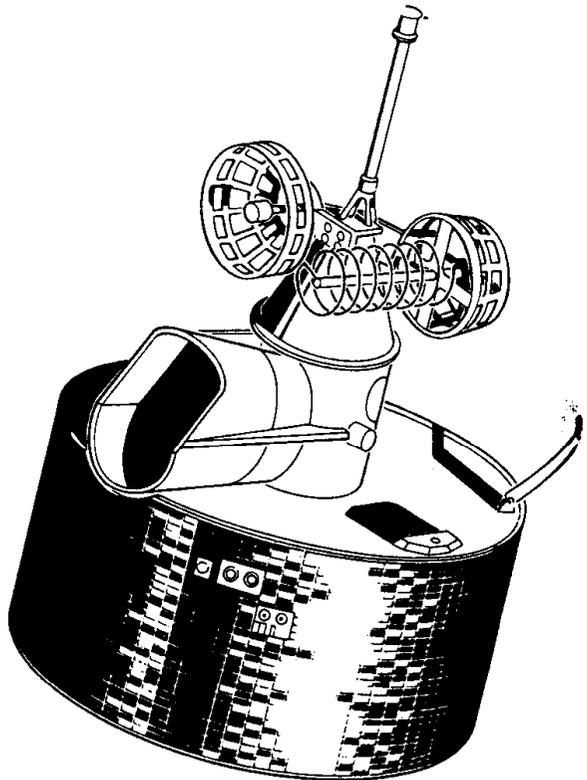


## Estabilización por rotación



- Estabilización por rotación: Sistema simple y económico para estabilizar la actitud.
- Si el sistema es puramente pasivo, el eje de rotación debe ser el eje mayor.
- Típico en vehículos con simetría de revolución, que deben ser oblatos y no prolatos.
- Las perturbaciones provocarán un movimiento de nutación del eje de rotación, que puede ser eliminado mediante amortiguadores de nutación.
- Para acelerar o frenar la rotación se emplean propulsores o (para frenar) sistemas yo-yo.
- Los propulsores también se pueden emplear para re-orientar el eje de rotación (coning o “cono”).

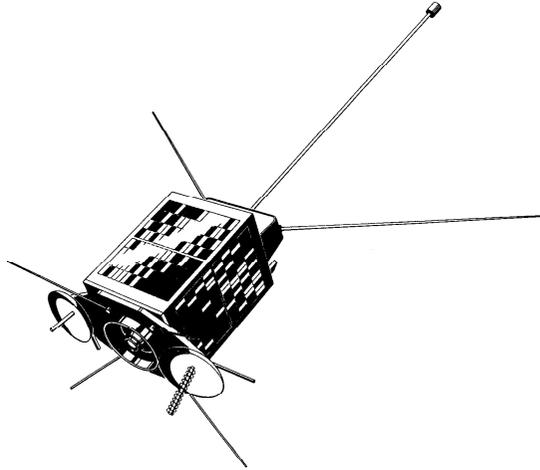
## Estabilización por rotación doble



GOES satellite.

- Estabilización por rotación doble: Cuando se requiere mayor precisión de actitud o por requisitos de lanzamiento el vehículo no puede ser oblato, se recurre al sistema de estabilización de rotación doble.
- Una parte del vehículo (rotor) gira a una cierta velocidad, mientras que otra parte del vehículo (plataforma o estator) no gira o rota muy despacio.
- En la plataforma se suelen ubicar instrumentos de medida.
- Si el rotor adquiere el suficiente momento cinético, la rotación puede ser alrededor del eje menor o incluso el intermedio, permitiendo mayor libertad en la forma del vehículo y mejorando la maniobrabilidad.

## Estabilización mediante gradiente gravitatorio



- El  $G^2$  puede ser utilizado para estabilizar de forma simple y barata, de forma que siempre se apunte a un cuerpo central y la órbita sea casi-circular.
- Es un mecanismo lento y poco preciso, requiere elementos disipadores.
- Proporciona baja maniobrabilidad y poca estabilidad en guiñada.

- El gradiente gravitatorio tiende a alinear el eje menor con la vertical local, el eje intermedio con la dirección de la órbita y el eje mayor perpendicular al plano de la órbita, lo que debe ser considerado en el diseño.



## Estabilización mediante gradiente gravitatorio

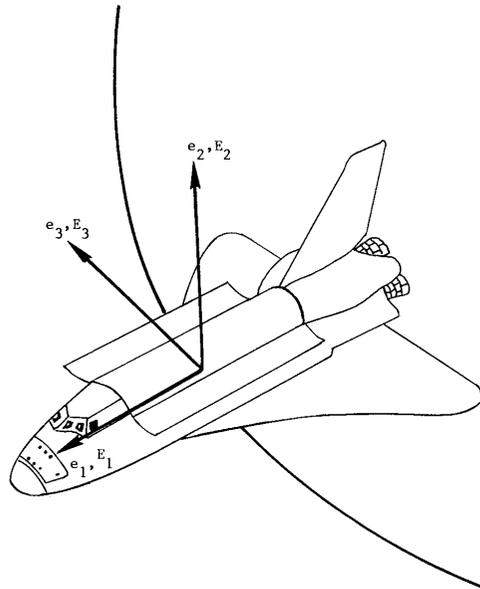


Figure 7.9 Space Shuttle body axes.

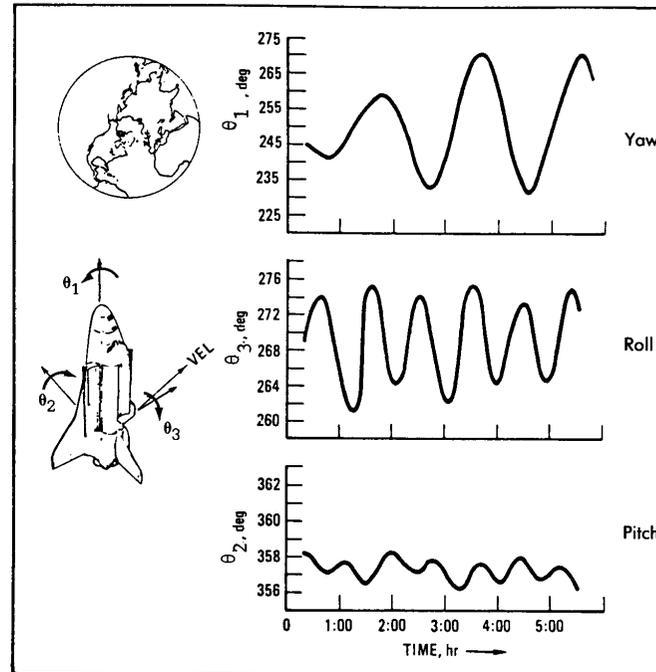
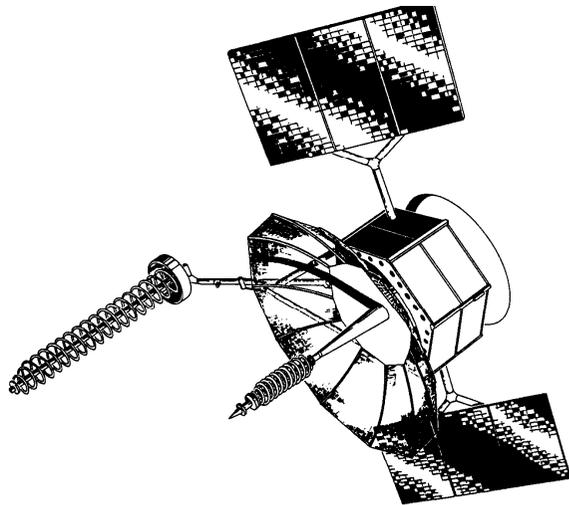


Figure 7.10 Space Shuttle attitude excursions in gravity gradient mode in an orbital coordinate frame.

- El  $G^2$  en algunos casos es un mecanismo secundario, para ahorrar combustible en los momentos en los que no es crítica una actitud precisa.
- Los satélites de más larga vida incorporan este tipo de estabilización.



## Estabilización con volante de inercia

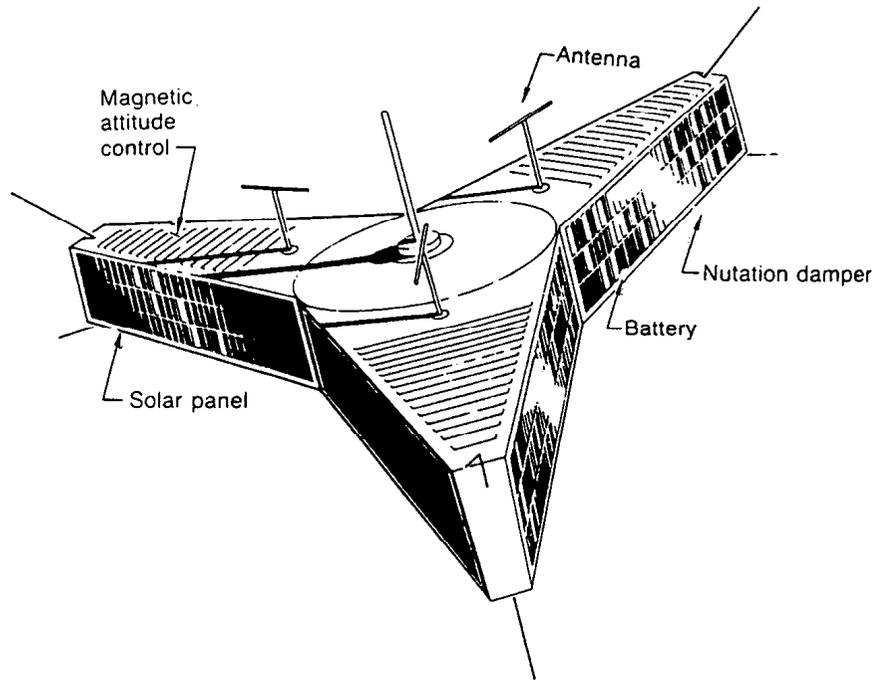


- El mismo concepto de los sistemas de rotación doble se puede incorporar a un vehículo espacial con una rueda interna (volante de inercia) rotando a una cierta velocidad base, eliminando así la necesidad de elementos externos rotatorios.

- Además se puede emplear como parte de un sistema de control activo.
- El volante de inercia se suele colocar con el eje perpendicular al plano orbital, combinándose con el  $G^2$ .
- Para realizar maniobras en el plano orbital, si se acelera o frena el volante, provoca que el vehículo rote en la dirección opuesta, por conservación del momento cinético.

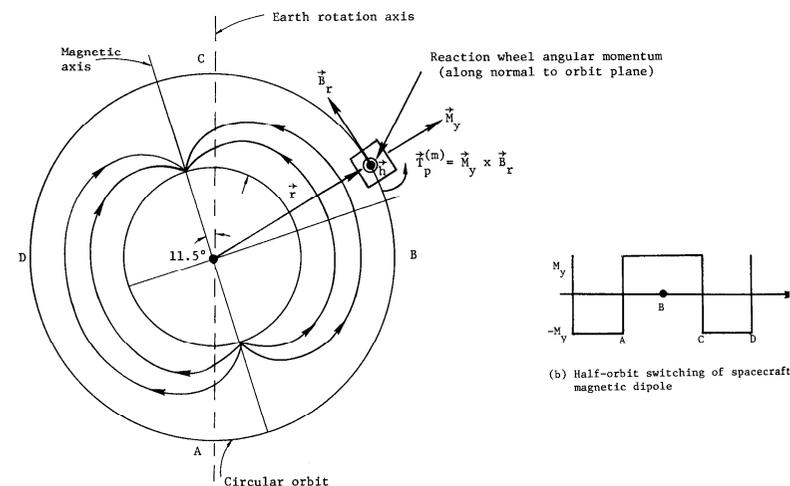


# Estabilización por momentos magnéticos



- Usando magnetopares, se puede aprovechar el campo magnético de la Tierra para orientar un vehículo mediante las fuerzas de Lorentz.

- Sólo útil en órbita baja de planetas con campo magnético de suficiente intensidad.
- Puesto que el campo magnético de la Tierra siempre apunta hacia el Norte, se debe cambiar la polaridad de los actuadores cada media órbita.



## Control de un satélite estabilizado por rotación

- Por la regla del eje mayor sabemos que un satélite rotando en torno a su eje mayor es estable; además hemos estudiado que su respuesta a perturbaciones externas es un movimiento de precesión y nutación, que terminará disipándose.
- Los objetivos de un sistema de control para un satélite estabilizado por rotación pueden ser:
  - Iniciar o incrementar la rotación.
  - Aumentar la estabilidad de la rotación.
  - Modificar la dirección del eje de rotación.
  - Frenar la rotación.
- El primer objetivo es trivial de conseguir con toberas propulsivas, aunque muchas veces los satélites empiezan con una cierta rotación que ya poseía el vehículo lanzador (tal vez en el eje equivocado).
- El segundo objetivo se puede conseguir con disipadores de nutación, que aumentan la disipación de energía y por tanto refuerzan la regla del eje mayor (ver tema 6).



## Modificar el eje de rotación

- Una forma de modificar el eje de rotación sería frenar dicha rotación, entonces modificar el eje con otra rotación, y posteriormente volver a hacer rotar el eje. No obstante este procedimiento sería lento y caro en términos de gasto de combustible. Veamos otro procedimiento, la llamada maniobra de “coning”.
- Para simplificar nos centramos en el caso axisimétrico ( $I_1 = I_2 = I < I_3$ ) y consideramos que podemos realizar maniobras impulsivas: podemos modificar el momento cinético instantáneamente en un  $\Delta\Gamma$  usando toberas.
- Inicialmente, sea una rotación pura  $n$  en torno al eje 3 (eje de simetría y mayor), de forma que  $\vec{\omega}$  y  $\vec{\Gamma}$  están alineados.
- Recordemos el estudio del movimiento forzado (efecto giroscópico): sabemos que si aplicamos un par perpendicular al eje 3, se produce un movimiento de precesión y nutación.



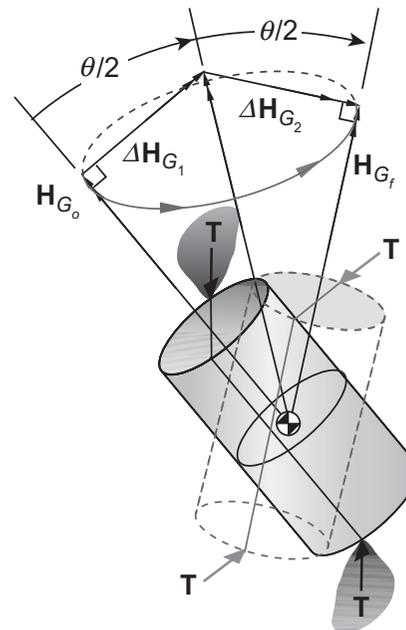
## Modificar el eje de rotación

- Para simplificar, vamos a suponer, en vez de usar el movimiento forzado, que podemos modificar “instantáneamente”  $\vec{\Gamma}$ , con impulsos casi instantáneos, de forma que  $\vec{\Gamma}_f = \vec{\Gamma}_i + \Delta\vec{\Gamma}$
- En el tema 6 estudiamos que el movimiento libre de un satélite axisimétrico rotando en torno a su eje de simetría era un movimiento de precesión, de forma que la velocidad angular  $\vec{\omega}$  rota formando un cono en torno al momento cinético  $\vec{\Gamma}$ .
- Por tanto con la hipótesis de cambio de momento cinético instantáneo eliminamos el movimiento de nutación, que complica el problema, y podemos usar los resultados exactos del movimiento libre de un sólido axisimétrico.



## Coning

- Supongamos que se quiere girar el eje de rotación un ángulo  $\theta$ .
- La idea es aplicar un  $\Delta\vec{\Gamma}$  de forma que el nuevo  $\vec{\Gamma}$  forme un ángulo  $\theta/2$  con la velocidad angular. Esto causará que la velocidad angular gire en torno al nuevo  $\vec{\Gamma}$  formando un cono y cuando haya girado un ángulo de 180 grados habrá girado un ángulo  $\theta$  respecto a su antigua posición. Entonces se aplica un nuevo  $\Delta\vec{\Gamma}$  de forma que el  $\vec{\Gamma}$  final sea paralelo a la velocidad angular. En la figura,  $\mathbf{H}_G = \vec{\Gamma}$ .



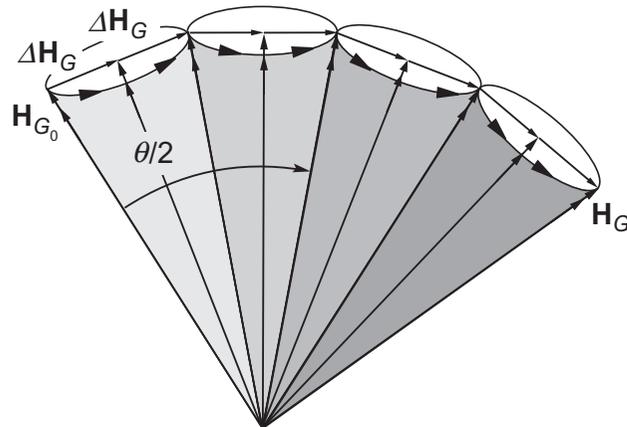
## Coning

- De la figura, se ve que  $\Delta\Gamma_1 = \Delta\Gamma_2 = \Gamma \tan \theta/2$ , luego el total  $\Delta\Gamma_{coning} = 2\Gamma \tan \theta/2$ . El momento cinético final es igual al inicial (el intermedio es ligeramente mayor:  $\frac{\Gamma}{\cos \theta/2}$ ).
- El tiempo que se tarda en realizar la maniobra será  $\pi$  (media vuelta) dividido por la velocidad angular de precesión:  $t = \frac{\pi}{\dot{\phi}}$ .
- Como del tema 6 se tiene  $\dot{\phi} = \frac{l_3 n}{I \cos \theta/2} = \frac{\Gamma}{I \cos \theta/2}$ , se tiene  $t = \frac{\pi I \cos \theta/2}{\Gamma}$ .
- Por otro lado durante ese tiempo el cuerpo habrá rotado respecto a su eje de simetría, en ejes cuerpo (ver tema 6), un ángulo  $\psi = t\lambda = \frac{\pi I \cos \theta/2}{\Gamma} \frac{n(I-l_3)}{I} = \frac{\pi(I-l_3) \cos \theta/2}{l_3}$ .
- En general este ángulo no será 180 grados (a menos que  $\frac{(I-l_3) \cos \theta/2}{l_3} = 1$ ) luego habrá que usar un par de toberas distintas a las que se usaron para empezar la maniobra.



## Coning múltiple

- Una idea para reducir el consumo de combustible (o para ángulos de giro demasiado grandes) es dividir la maniobra de coning en  $m$  pequeñas maniobras intermedias, como se ve en la figura:



- En cada maniobra hay que rotar  $\Gamma$  un ángulo  $\theta/2m$  y esperar un giro de 180 grados.
- El consumo total será  $\Delta \Gamma_{coning} = 2m\Gamma \tan \theta/2m$  (si  $m$  es grande tiende a  $\theta\Gamma$ , merece la pena para ángulos grandes).
- El tiempo de maniobra será  $t = \frac{m\pi I \cos \theta/2m}{\Gamma}$  (si  $m$  es grande tiende a infinito).



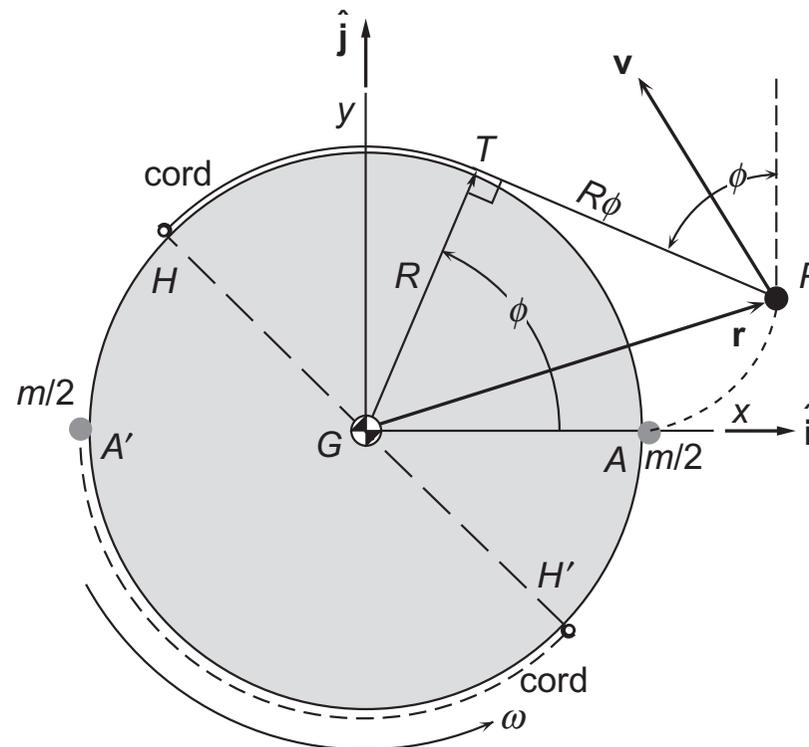
## Frenar la rotación: mecanismo yo-yo

- El mecanismo yo-yo es un dispositivo de un único uso que se emplea para frenar total o parcialmente la rotación de un vehículo. El mecanismo consiste en dos masas simétricas fijadas al vehículo por una unión que se puede liberar, y a su vez unidas a un hilo que está fijado en otro punto al vehículo. Todo esto en un plano perpendicular a la rotación que se pretende frenar.
- Para frenar la rotación, se liberan las masas; éstas se empiezan a separar del vehículo y el hilo comienza a tensarse, hasta que se tensa en el punto donde está fijado en el vehículo y entonces también se libera el hilo. Si la longitud del hilo está bien diseñada, en este punto se habrá frenado el vehículo.
- Hipótesis: las masas se consideran puntuales de masa  $m/2$ , el hilo no tiene masa y no es flexible, vehículo axilisimétrico de radio  $R$  rotando inicialmente en su eje de simetría con velocidad  $n_0$ .

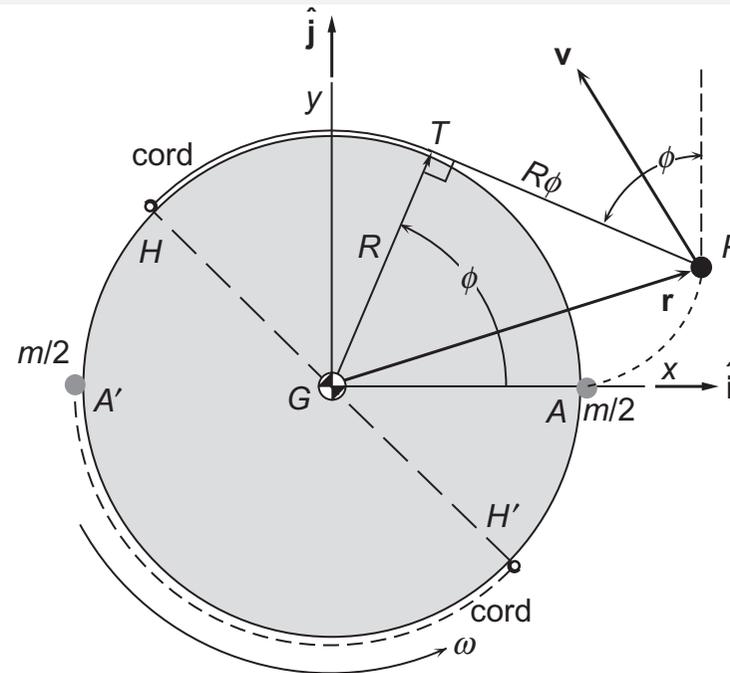


## Mecanismo yo-yo

- Inicialmente, la energía cinética es  $T_0 = \frac{1}{2} (I_3 n_0^2 + mR^2 n_0^2)$  y el momento cinético inicial  $\Gamma_0 = I_3 n_0 + mR^2 n_0$ . Usando el parámetro  $K = 1 + \frac{I_3}{mR^2}$ , podemos escribir  $T_0 = \frac{1}{2} mR^2 K n_0^2$  y  $\Gamma_0 = mR^2 K n_0$ .
- La situación en un momento intermedio es la de la figura:



## Mecanismo yo-yo



- Para frenar la rotación, se liberan las masas; éstas se empiezan a separar del vehículo y el hilo comienza a tensarse, hasta que se tensa en el punto donde está fijado en el vehículo y entonces también se libera el hilo. Si la longitud del hilo está bien diseñada, en este punto se habrá frenado el vehículo.
- Hipótesis: las masas se consideran puntuales, el hilo no tiene masa y no es flexible, vehículo axilisimétrico rotando inicialmente en su eje de simetría con velocidad  $n_0$ .



## Mecanismo yo-yo

- En la figura, el hilo se ha soltado ya un ángulo  $\phi$ , y el vector  $\vec{r}$  es el vector de posición de una de las masas (la otra tiene una posición simétrica, por lo que basta estudiar una de ellas). Por las hipótesis el hilo estará tangente justo en el punto  $T$  hasta donde se ha soltado. Usamos unos ejes móviles con el cuerpo  $i$  y  $j$  como en la figura.
- En estos ejes,  $\vec{r}$  se escribirá como la suma  
$$\vec{r} = \vec{GT} + \vec{TP} = R(\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}) + R\phi(\sin \phi \vec{i} - \cos \phi \vec{j}).$$
- Para hallar la energía cinética y el momento cinético en este estado intermedio necesitamos la velocidad (inercial). Se tiene

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}|_{IN} = \dot{\vec{r}}|_{ROT} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

donde  $\vec{\omega} = n\vec{k}$ .

- Operando,  $\dot{\vec{r}}|_{ROT} = \dot{\phi}R\phi(\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j})$  y  
$$\vec{\omega} \times \vec{r} = nR(\cos \phi \vec{j} - \sin \phi \vec{i}) + nR\phi(\sin \phi \vec{j} + \cos \phi \vec{i}).$$



## Mecanismo yo-yo

- Por tanto

$$\vec{v} = R \left( (\dot{\phi} + n)\phi \cos \phi - n \sin \phi \right) \vec{i} + R \left( (\dot{\phi} + n)\phi \sin \phi + n \cos \phi \right) \vec{j}.$$

- Calculando el módulo de la velocidad:

$$v = R \sqrt{\left( (\dot{\phi} + n)\phi \cos \phi - n \sin \phi \right)^2 + \left( (\dot{\phi} + n)\phi \sin \phi + n \cos \phi \right)^2}.$$

- Operando:  $v = R \sqrt{(\dot{\phi} + n)^2 \phi^2 + n^2}$ .

- Por tanto,  $T = \frac{1}{2} \left( I_3 n^2 + mR^2((\dot{\phi} + n)^2 \phi^2 + n^2) \right)$  y usando el parámetro  $K$ ,  $T = \frac{mR^2}{2} \left( Kn^2 + (\dot{\phi} + n)^2 \phi^2 \right)$ .

- Por otro lado el momento cinético de las masas será

$$\Gamma_m = |\vec{r} \times m\vec{v}|. \text{ Efectuando este producto hallamos}$$

$$\Gamma_m = mR^2(n + (n + \dot{\phi})\phi^2).$$

- Luego  $\Gamma = I_3 n + mR^2(n + (n + \dot{\phi})\phi^2) = mR^2(Kn + (n + \dot{\phi})\phi^2)$ .



## Mecanismo yo-yo

- Aplicando conservación del momento cinético y conservación de la energía:  $T = T_0$ ,  $\Gamma = \Gamma_0$ , llegamos a dos ecuaciones:

$$K(n_0^2 - n^2) = (\dot{\phi} + n)^2 \phi^2, \quad K(n_0 - n) = (n + \dot{\phi})\phi^2$$

- Dividiendo la primera por la segunda, obtenemos  $n_0 + n = n + \dot{\phi}$ , luego  $\dot{\phi} = n_0$ , es decir, la tasa de “desenrollamiento” del hilo es igual a la velocidad angular inicial del vehículo durante todo el proceso. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación y despejando  $\phi$ , hallamos el ángulo de hilo suelto en función de la velocidad actual:

$$\phi = \sqrt{K \frac{n_0 - n}{n_0 + n}}$$

- Si queremos que al final del proceso  $n = 0$ , sustituyendo, llegamos a  $\phi = \sqrt{K}$ , y puesto que la longitud de hilo  $l = R\phi$ , obtenemos  $l = R\sqrt{K}$ , independiente de la velocidad inicial!
- Se puede encontrar longitud de hilo apropiada para cualquier valor de  $n \in (-n_0, n_0)$ .



# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 8: Control activo de la actitud

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

23 de febrero de 2017

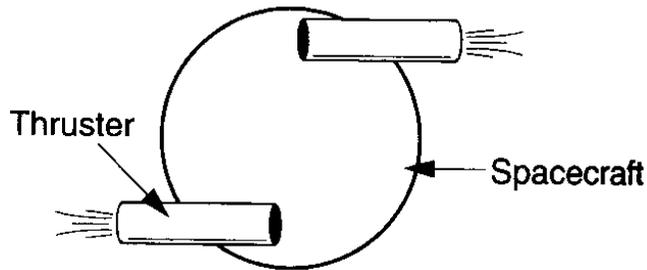


# Actuadores

- Existen diferentes tipos de actuadores para controlar la actitud de un vehículo espacial, entre los que destacan:
  - Propulsores: basados en la expulsión de masa a alta velocidad.
  - Ruedas/Volantes de inercia: discos de velocidad variables, que controlan la actitud basándose en el intercambio de momento cinético.
  - Giróscopos de control de momento (CMG): son volantes de inercia que rotan a velocidad constante, pero que pueden ser rotados en el espacio, de forma que provocan una reacción por la conservación de momento cinético.
  - Magnetopares o varillas magnéticas, que utilizan el campo magnético para provocar un par.
  - Elementos estructurales para control pasivo: mástiles, “booms”, disipadores, sistemas yo-yo...
- Típicamente habrá dos o más tipos de actuadores en un vehículo, ya que son complementarios en sus características.

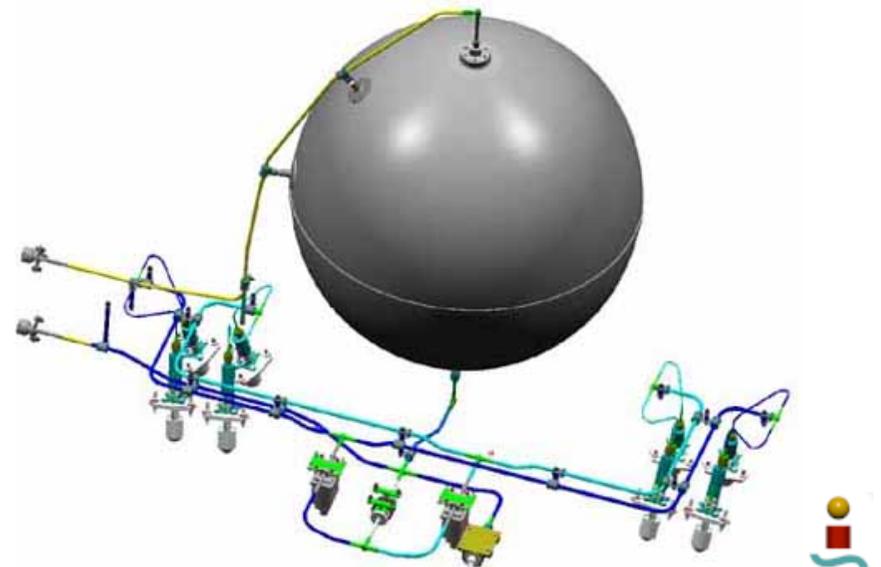


# Propulsores

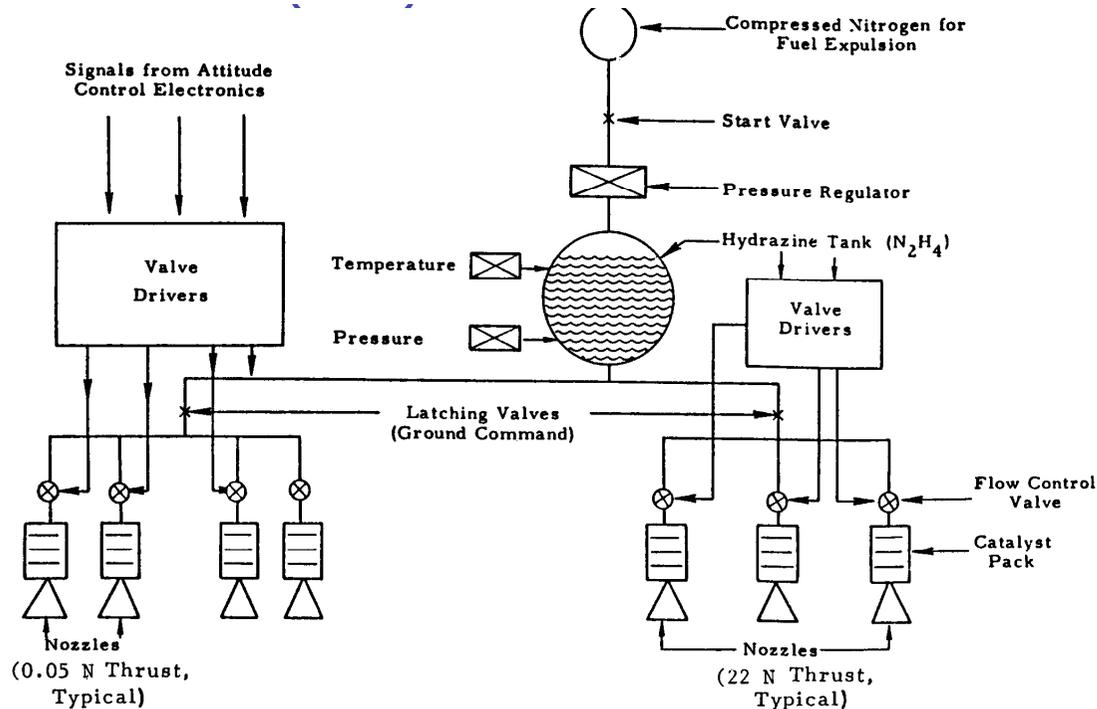


- Son el actuador más eficaz, capaz de ejercer actuaciones de elevada magnitud con rapidez.
- El más costoso y de uso limitado, ya que utilizan combustible.
- Para ejercer un par, se utilizan en una configuración en pareja (por cada eje que se pretenda controlar).

- Nunca se utiliza un único par por eje, sino varias toberas de forma redundante.
- El conjunto de elementos de propulsión junto con la lógica de control se denomina Sistema de Control de Reacción (RCS)



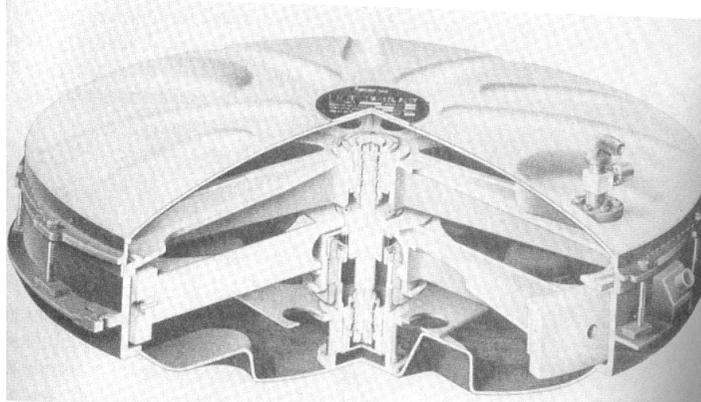
# Ejemplos de RCS



- El RCS del Apollo.
- Típicamente habrá toberas de empuje “pequeño” para maniobras de actitud “finas”, y toberas de mayor empuje para maniobras rápidas de actitud y maniobras orbitales.

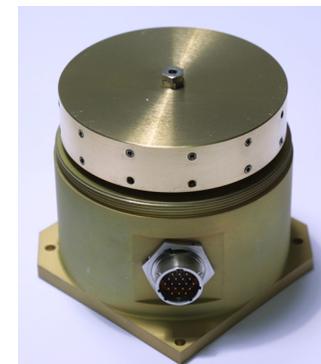


## Ruedas y Volantes de Inercia

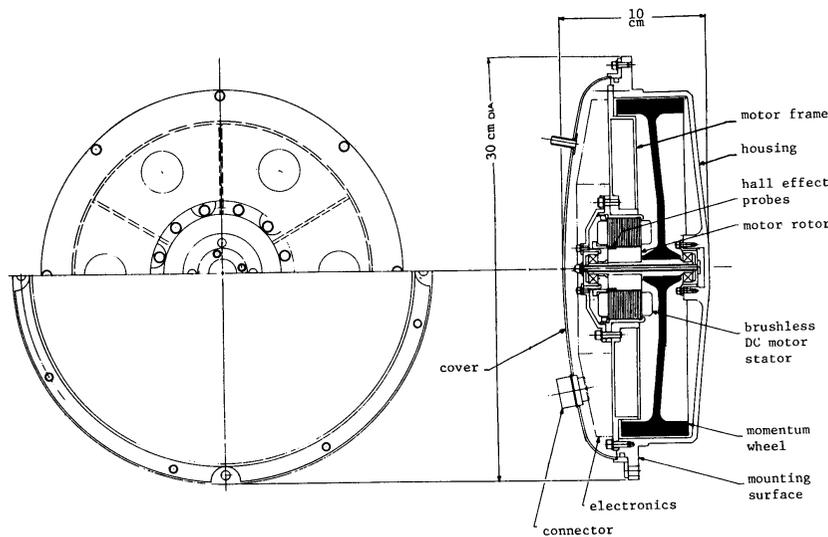


- Son elementos compuestos por un disco de elevada inercia (muy elevada en el caso de los volantes de inercia).
- Poseen un motor eléctrico que hace girar al disco con la velocidad deseada.

- La diferencia fundamental entre los volantes de inercia y las ruedas de reacción es que los volantes de inercia (bias momentum wheel) están diseñados para rotar permanentemente a una cierta velocidad de base (que proporciona estabilidad giroscópica), sobre la que se pueden realizar cambios para absorber momentos perturbadores o rotar el vehículo.



# Ruedas y Volantes de Inercia



W = 7 kg  
NORMAL RPM = 2,000  
WHEEL INERTIA =  $0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
POWER = 1-24 watts (peak)

- Ambos elementos funcionan como actuadores “absorbiendo” momento cinético en forma de rotación.
- Puesto que el momento cinético del conjunto vehículo-rueda se conserva, mediante varias ruedas se puede modificar a voluntad el momento cinético del vehículo (y por tanto su velocidad de rotación en cada eje)
- Por ejemplo se pueden usar las ruedas para “almacenar” el momento cinético causado por pares perturbadores.
- No obstante las ruedas tienen un límite de saturación a partir del cual el motor no puede aumentar el momento cinético.
- Por tanto, se debe “descargar” el momento cinético con otro elemento capaz de disminuirlo, por ejemplo propulsores o actuadores magnéticos.



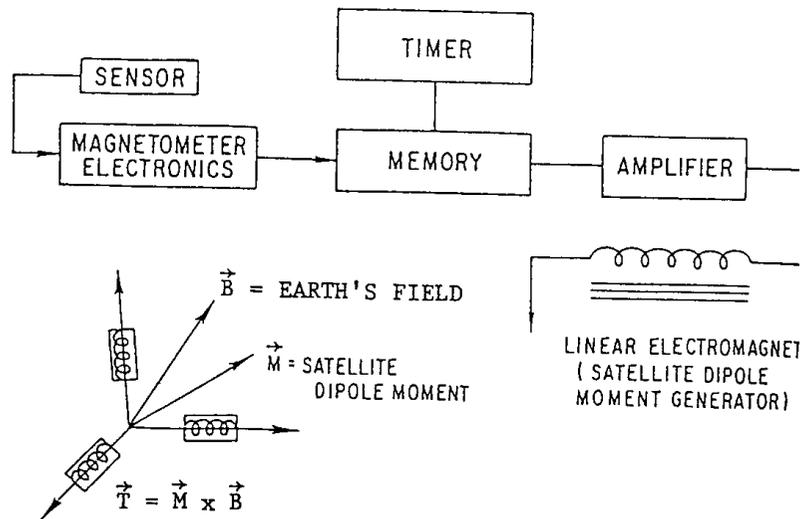
# CMGs



- La ISS tiene 4 CMGs girando a 6600 rpm y almacenando, cada uno de ellos, un momento cinético igual a 4760 Nms.
- Pueden producir un par igual a 258 Newtons por metro y una esperanza de vida de unos 10 años, aunque algunos han fallado prematuramente.



# Magnetopares



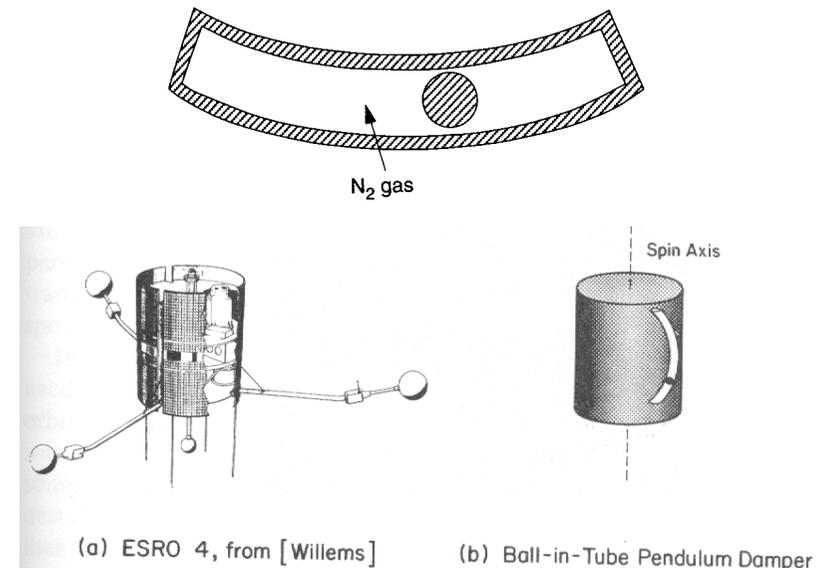
- Magnetopares o Varillas magnéticas: son elementos que aprovechan la fuerza de Lorentz.
- Esta fuerza es causada por una partícula cargada en movimiento en un campo magnético, que será el de la Tierra (u otro planeta).

- Pueden ser permanentes (un imán permanente), que normalmente se usan para maniobras de adquisición de actitud (orientando al vehículo como si de una brújula se tratase).
- También pueden ser variables y usarse para control y estabilización.
- Típicamente se usan en microsátélites, y también en satélites más grandes para descargar el exceso de momento cinético de las ruedas de reacción.



## Elementos de control estructurales

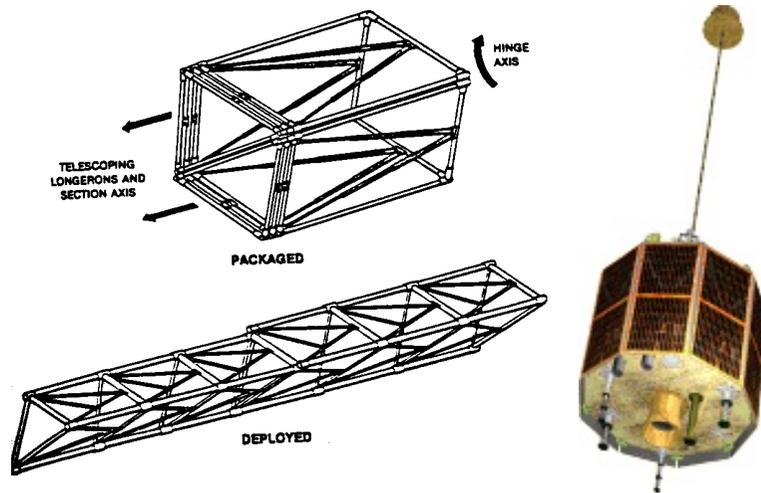
- No son actuadores en el sentido más estricto de la palabra, pero juegan un papel importante en el control (pasivo) de la actitud.
- Consisten en partes móviles que actúan de diversas formas:
  - Incorporando disipación: disipadores de nutación.
  - Modificando los momentos de inercia del vehículo (y por tanto afectando la estabilidad): mástiles, “booms”,
  - Expulsando masa para modificar el momento cinético total: dispositivo yo-yo.



- Ejemplo: disipador de nutación.
- Su objetivo es evitar desviaciones del eje de rotación.

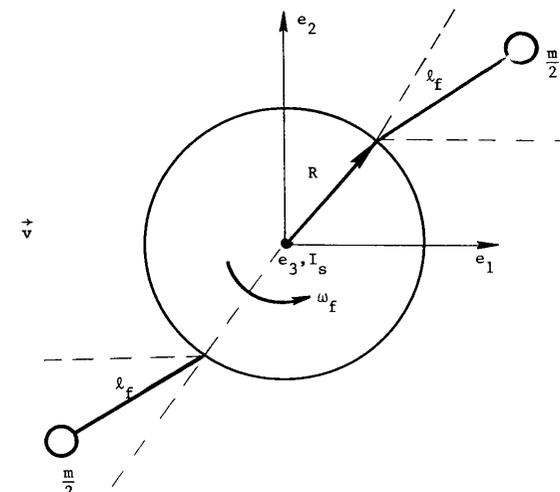


## Elementos de control estructurales



- Partes móviles para modificación de los momentos de inercia: suelen ser mástiles motorizados o telescópicos.
- Se emplean especialmente en vehículos estabilizados por gradiente gravitatorio, de forma que se alcance la orientación deseada.

- Expulsión de masa: se emplean para detener rápidamente una rotación.
- Ejemplo: sistemas yo-yo. Se expulsan 2 masas atadas a la estructura; al acelerarse “concentran” el momento cinético, frenando la rotación.
- Cuando los cables se tensan, las masas se liberan.



# Resumen de actuadores

## ■ Resumen de actuadores

**Table 9.2** Types of torquer

Type	Advantages	Disadvantages
<b>External types</b>	Can control momentum build-up	
Gas jets	Insensitive to altitude Suit any orbit Can torque about any axis	Requires fuel On-off operation only Has minimum impulse Exhaust plume contaminants
Magnetic	No fuel required Torque magnitude is controllable	No torque about the local field direction Torque is altitude and latitude sensitive Can cause magnetic interference
Gravity gradient	No fuel or energy needed	No torque about the local vertical Low accuracy Low torque, altitude sensitive Libration mode needs damping
Solar radiation	No fuel required	Needs controllable panels Very low torque
<b>Internal types</b>	No fuel required Can store momentum Torque magnitude is controllable	Cannot control momentum build-up
Reaction wheels (RW)	Continuous, fine-pointing capability	Non-linearity at zero speed
Momentum wheels (MWs)	Provide momentum bias	
Control moment gyroscope (CMG)	Suitable for three-axis control Provides momentum bias	Complicated Potential reliability problem

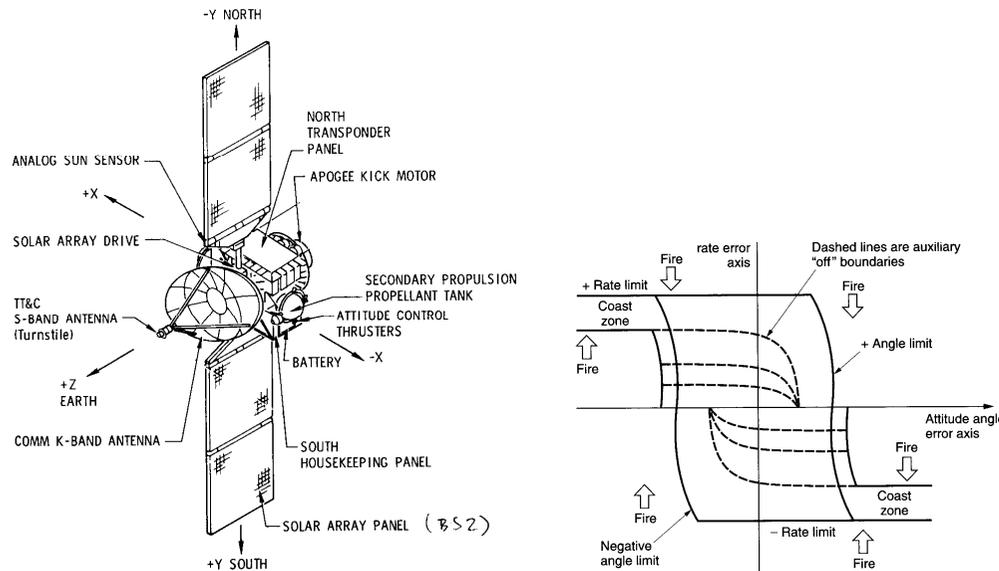


## Sistemas de control activos

- Los sistemas de Control Pasivo permiten un nivel de estabilidad adecuado para muchas aplicaciones
- No obstante (sobre todo al principio de su vida útil), todos los vehículos necesitan realizar:
  - Maniobras de actitud.
  - Ajustes de la velocidad de rotación
  - Maniobras de stationkeeping (mantener el apuntamiento a la estación o estaciones base).
- Para ello es necesario un sistema de control que será activo tanto en el sentido energético como en el estructural, precisando de una fuente de energía y una lógica de control.
- En misiones que requieran gran precisión en la actitud dicho sistema será primario. En este caso se dice que el satélite está **estabilizado en tres ejes** o triaxialmente estabilizado.
- En otros casos puede ser un sistema secundario que sólo se activará cuando sea necesario.



# Sistemas de Control de Reacción (RCS)



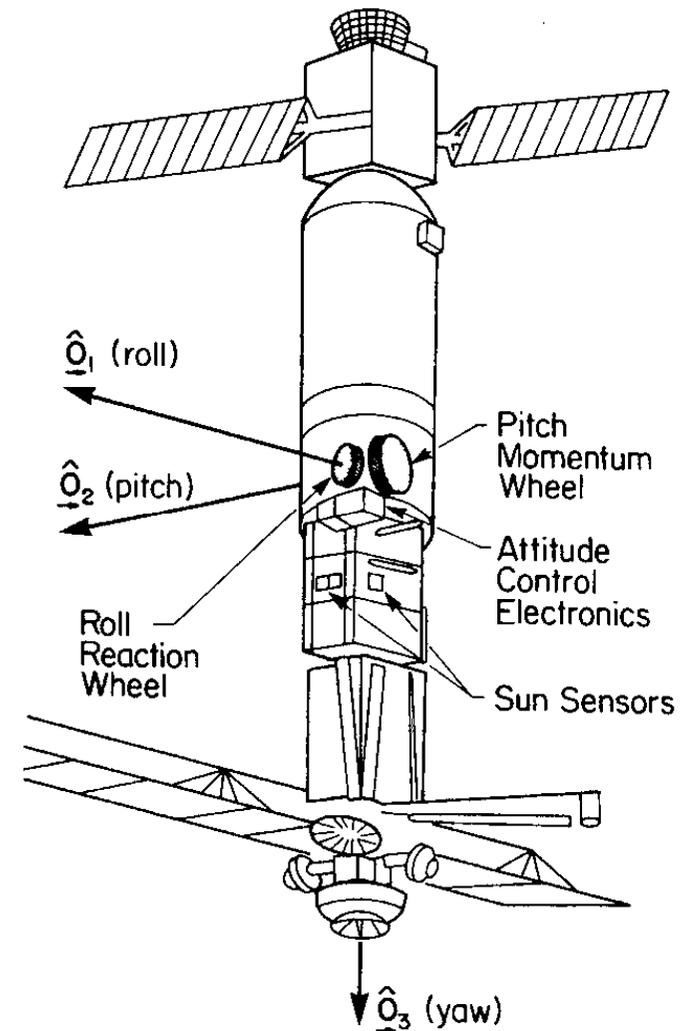
- En sistemas que requieran elevada y/o rápida maniobrabilidad, se emplea un sistema de control de reacción o RCS, que emplea un conjunto de propulsores distribuidos por el vehículo para modificar la actitud.

- La llamada “lógica de propulsión” establece cuando se disparan los propulsores y cuando se acepta un pequeño error de actitud/velocidad.
- Normalmente es una combinación de “zonas muertas” (sin actuación) e histéresis (para evitar el disparo repetitivo de propulsores).
- Además los propulsores suelen ser actuadores “todo o nada”, con lo que siempre actúan en saturación.
- Por tanto un RCS es intrínsecamente no-lineal.



## Sistemas de Intercambio de Momento Cinético

- Para la mayor precisión de actitud, maniobrabilidad en los tres ejes y estabilización en cualquier orientación independientemente de los momentos de inercia, se usan sistemas de intercambio de momento angular que usan ruedas de reacción, volantes de inercia y/o CMGs, basados en la conservación del momento cinético.
- No obstante es un sistema caro, poco tolerante a fallos, y requiere un sistema propulsivo auxiliar (en algunos casos magnetopares) para descargar el momento de las ruedas y así evitar la saturación.



## Satélites estabilizados en tres ejes

- Los satélites estabilizados en tres ejes pueden tener cualquier tipo de apuntamiento (inercial, orbital...).
- Los objetivos pueden ser dos: mantener al satélite de forma estable en una actitud prefijada (estabilización) o realizar una maniobra de actitud (bien sea un seguimiento—tracking— o simplemente cambiar de una actitud a otra).
- En primer lugar nos centraremos en el objetivo de estabilización de una cierta actitud inercialmente fija (es decir sin velocidades angulares, lo que sería un apuntamiento inercial); el objetivo de modificar la actitud es más complicado.
- Estudiaremos este objetivo para los dos tipos de actuadores: ruedas y volantes de inercia, y sistemas de control de reacción.
- También consideraremos el objetivo de pasar de una actitud inicial a otra final, sólo para el caso de ruedas y volantes de inercia.



## Vehículo con ruedas de reacción

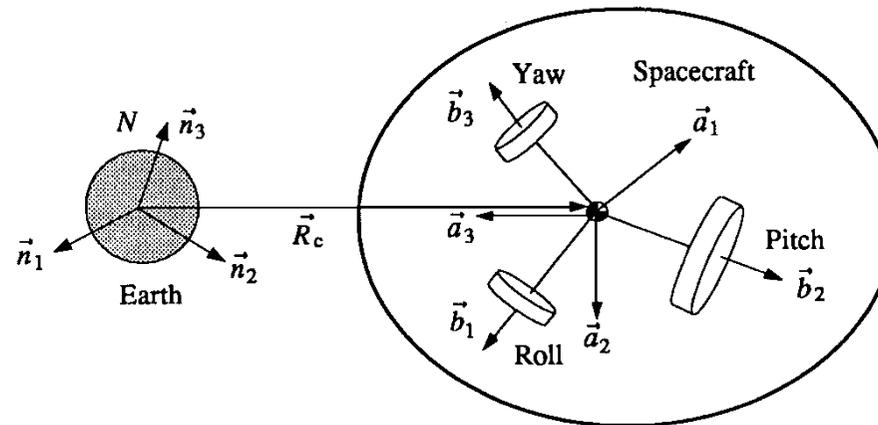


Fig. 6.10 Gyrostat in a circular orbit.

- Supongamos la situación de la figura: un cuerpo en órbita con ruedas en torno a los tres ejes:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + \dot{h}_1 + \omega_2 h_3 - \omega_3 h_2 = M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 + \dot{h}_2 + \omega_3 h_1 - \omega_1 h_3 = M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 + \dot{h}_3 - \omega_2 h_1 + \omega_1 h_2 = M_3$$

- El momento cinético de las ruedas se denota por  $h_i$ : variables de control.



## Vehículo con ruedas de reacción

- Supongamos que podemos manipular directamente los momentos cinéticos de las ruedas mediante motores eléctricos internos. agrupando todos los términos de control obtenemos:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = u_1 + M_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = u_2 + M_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = u_3 + M_3$$

donde

$$u_1 = -\dot{h}_1 - \omega_2 h_3 + \omega_3 h_2$$

$$u_2 = -\dot{h}_2 - \omega_3 h_1 + \omega_1 h_3$$

$$u_3 = -\dot{h}_3 - \omega_1 h_2 + \omega_2 h_1$$

Es decir  $\vec{u} = -\dot{\vec{h}} + \vec{h} \times \vec{\omega}$



## Regulación en torno a una posición

- Además tendremos la EDC

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \star q_{\vec{\omega}}$$

- Supongamos que ahora el objetivo es mantener  $q(t) = q_{ref}$  y  $\omega(t) = 0$ , y supongamos también que inicialmente estamos cerca de dicho estado.
- Linealizando la ecuación de la velocidad angular e ignorando pares perturbadores:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

donde  $\vec{u} = -\dot{\vec{h}} + \vec{h} \times \delta\vec{\omega}$

- Obsérvese que si encontramos  $\vec{u}$  que resuelve el problema de control, podríamos encontrar los valores de  $\vec{h}$  resolviendo una ecuación diferencial.



## Estabilización

- Por otro lado el cuaternión que describe la actitud será pequeño (si estamos cerca de una actitud que queremos mantener).
- Siguiendo la teoría del Tema 2, se tendrá entonces  $q = q_{ref} \star \delta q$ , donde  $q_{ref}$  es la actitud que queremos mantener y

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

- Por otro lado la relación entre  $\vec{a}$  y la velocidad angular es  $\dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_{ref}$ , como  $\vec{\omega}_{ref} = \vec{0} \rightarrow \dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega}$ . Es decir
- Es decir:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{bmatrix}$$

- Combinando las ecuaciones de error en velocidad angular y actitud encontramos la descripción del sistema (siguiente transparencia).



# Estabilización

- Descripción del sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

- Llamando  $\vec{x}$  a las variables que describen al estado, es una descripción clásica

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$$

- Se puede usar “nuestro método favorito lineal” para encontrar una ley de control  $\vec{u}$ , que luego habrá que convertir en comandos de velocidad angular de las ruedas resolviendo la ecuación diferencial que relaciona  $\vec{u}$  con los pares de las ruedas, en cada instante, y luego se podrá transformar en comandos del motor de las ruedas.
- Se ejemplificará con el método LQR (linear quadratic regulator) con “horizonte infinito”.



## Regulación con el método LQR

- Dado

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$$

encontrar una ley de control  $\vec{u}(t)$  con realimentación que minimice el siguiente funcional:

$$J = \int_0^{\infty} (\vec{x}^T(t)Q\vec{x}(t) + \vec{u}^T(t)R\vec{u}(t))dt$$

- Problema planteado y resuelto por Rudolph Kalman!
- Hipótesis:  $Q, R$  simétricas y  $Q > 0, R \geq 0$  (definidas -semidefinidas- positivas, equivale a todos los autovalores positivos -no negativos-).
- Hipótesis: El sistema es “controlable”. Quiere decir que “es posible resolver el problema” (es fácil construir problemas no resolubles. Por ejemplo  $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = x_2$ .) Matemáticamente un problema es controlable si la matrix  $\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ A^{n-1}B]$  es de rango completo, donde  $n$  es el número de estados. Se verifica en nuestro caso.



## Regulación con el método LQR

- La ley de control que minimiza el funcional es

$$\vec{u} = K\vec{x}$$

donde la ganancia  $K$  se encuentra de la siguiente manera:

- 1 Encontrar la matriz  $P$  que resuelve la llamada “ecuación de Riccati algebraica”:

$$Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = 0$$

por ejemplo con la orden de Matlab “are” (necesita el Control Systems Toolbox)  $P = \text{are}(A, B * \text{inv}(R) * B', Q)$ ;

- 2 La ganancia  $K = -R^{-1}B^T P$
- La ecuación de Riccati sólo es resoluble si el sistema es controlable.
  - El control óptimo garantiza un buen comportamiento del sistema, pero no tiene en cuenta saturaciones de los actuadores. La elección de  $Q$  y  $R$  determina en gran medida la calidad del controlador (más conservador o más agresivo).



## Regulación con el método LQR

- Para implementar la ley de control

$$\vec{u} = K\vec{x}$$

hay que recordar la definición de  $\vec{x}$ .

- Como  $\vec{\omega}_{ref} = \vec{0}$ , las tres primeras componentes son el valor real de la velocidad angular.
- Las tres segundas componentes corresponden a  $\vec{a}$ , que se extrae del cuaternión de error. Es fácil ver que

$$\vec{a} = 2 \frac{\delta \vec{q}}{\delta q_0}$$

para lo cual hay que calcular  $\delta q = q_{ref}^* \star q(t)$ .

- Finalmente, una vez calculado el control  $\vec{u}$  en cada instante resolver  $\dot{\vec{h}} = -\vec{u} + \vec{h} \times \delta \vec{\omega}$  para saber como modificar el momento cinético de las ruedas.



## Cambio de actitud entre dos apuntamientos inerciales

- Hemos estudiado en los temas 2 y 4 como calcular una velocidad angular que me permite pasar de una cierta actitud a otra, por ejemplo empezando y terminando en reposo. Denotémosla como  $\vec{\omega}_{ref}(t)$ . También obtuvimos el cuaternión de referencia  $q_{ref}(t)$ .
- Como seguir este perfil de velocidades y actitudes a veces se denomina problema de tracking.
- Sustituyendo esta velocidad angular de referencia en las ecuaciones del sólido con ruedas de reacción (e ignorando los pares de perturbación) podemos calcular (analíticamente o numéricamente) un valor de control de referencia  $\vec{u}_{ref}$ . Este valor es “en bucle abierto” (no utiliza realimentación):

$$u_{ref1} = I_1 \dot{\omega}_{ref1} + (I_3 - I_2) \omega_{ref2} \omega_{ref3}$$

$$u_{ref2} = I_2 \dot{\omega}_{ref2} + (I_1 - I_3) \omega_{ref3} \omega_{ref1}$$

$$u_{ref3} = I_3 \dot{\omega}_{ref3} + (I_2 - I_1) \omega_{ref1} \omega_{ref2}$$



## Cambio de actitud entre dos apuntamientos inerciales

- Linealizando en torno a este perfil de referencia y calculando un controlador extra en bucle cerrado (que se sumará al valor de referencia) podemos garantizar que (al menos ante pequeños errores y perturbaciones) el vehículo se mantendrá en la trayectoria deseada. Sea  $\delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref}$ ,  $\delta\vec{u} = \vec{u} - \vec{u}_{ref}$ , y el cuaternión de error definido como antes. Las ecuaciones linealizadas son:

$$I_1\delta\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)(\omega_{ref2}\delta\omega_3 + \delta\omega_2\omega_{ref3}) = \delta u_1 + M_1$$

$$I_2\delta\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)(\omega_{ref3}\delta\omega_1 + \delta\omega_3\omega_{ref1}) = \delta u_2 + M_2$$

$$I_3\delta\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)(\omega_{ref1}\delta\omega_2 + \delta\omega_1\omega_{ref2}) = \delta u_3 + M_3$$

y para el error en actitud:

$$\dot{\vec{a}} \approx \delta\vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref}^{\times} \vec{a}$$



# Tracking

- Descripción del sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{l_2-l_3}{l_1} \omega_{ref3} & \frac{l_2-l_3}{l_1} \omega_{ref2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_3-l_1}{l_2} \omega_{ref3} & 0 & \frac{l_3-l_1}{l_2} \omega_{ref1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_1-l_2}{l_3} \omega_{ref2} & \frac{l_1-l_2}{l_3} \omega_{ref1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_{ref3} & -\omega_{ref2} \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_{ref3} & 0 & \omega_{ref1} \\ 0 & 0 & 1 & \omega_{ref2} & -\omega_{ref1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}$$

- Llamando  $\vec{x}$  a las variables que describen al estado, es una descripción clásica

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + B(t)\delta\vec{u}$$

- Como  $A$  y  $B$  varían con el tiempo la solución se complica.
- Son necesarios métodos más avanzados; por ejemplo el método LQR (linear quadratic regulator) con “horizonte finito”.



# Tracking con el método LQR de horizonte finito

- Dado

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + B(t)\delta\vec{u}$$

encontrar una ley de control  $\delta\vec{u}(t)$  con realimentación que minimice el siguiente funcional:

$$J = \int_0^T (\vec{x}^T(t)Q(t)\vec{x}(t) + \delta\vec{u}^T(t)R(t)\delta\vec{u}(t))dt + \vec{x}^T(T)Q_{fin}\vec{x}(T)$$

- Hipótesis:  $Q, R, Q_{fin}$  simétricas y  $Q_{fin}, Q > 0, R \geq 0$  (definidas o semidefinidas positivas, equivale a todos los autovalores positivos o no negativos).
- Al ser de horizonte finito, no requiere la hipótesis de controlabilidad (pero puede haber problemas si hay pérdida de controlabilidad en algún instante).



## Tracking con el método LQR de horizonte finito

- La ley de control que minimiza el funcional es

$$\delta \vec{u} = K(t) \vec{x}$$

donde la ganancia  $K(t)$  se encuentra de la siguiente manera:

- 1 Encontrar la matriz  $P(t)$  que resuelve la llamada “ecuación diferencial de Riccati”:

$$-\dot{P} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q, \quad P(T) = Q_{fin}$$

mediante por ejemplo la orden ode45 de Matlab.

- 2 La ganancia  $K = -R^{-1}B^T P$
- La ecuación diferencial de Riccati es siempre resoluble! Pero, importante, no se puede resolver en tiempo real porque hay que resolverla desde el futuro hacia el presente; se resuelve previamente y se almacenan los valores de  $K(t)$ .
  - Como antes: la elección de  $Q$  y  $R$  (también  $Q_{fin}$ ) determina en gran medida la calidad del controlador (más conservador o más agresivo).



## Tracking con el método LQR de horizonte finito

- Para implementar la ley de control

$$\delta \vec{u} = K(t) \vec{x}$$

hay que recordar la definición de  $\vec{x}$ .

- Como  $\vec{\omega}_{ref} \neq \vec{0}$ , las tres primeras componentes son  $\vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref}$ .
- Las tres segundas componentes corresponden a  $\vec{a}$ , que se extrae del cuaternión de error. Es fácil ver que

$$\vec{a} = 2 \frac{\delta \vec{q}}{\delta q_0}$$

para lo cual hay que calcular  $\delta q = q_{ref}^* \star q(t)$ .

- El control final es  $\vec{u} = \vec{u}_{ref} + \delta \vec{u}$ .
- Finalmente, una vez calculado el control  $\vec{u}$  en cada instante resolver  $\dot{\vec{h}} = -\vec{u} + \vec{h} \times \delta \vec{\omega}$  para saber como modificar el momento cinético de las ruedas.



## Control no lineal

- “Control no lineal” es un nombre amplio que designa a un abanico de técnicas que no requiere el uso de linealización.
- Consideremos el siguiente problema. Partiendo de un estado inicial dado por  $\vec{\omega}(0)$  y  $q(0)$  queremos alcanzar el reposo en la actitud identidad, pero nos “conformamos” con que el sistema tienda a dicho estado, es decir, nuestro objetivo es que  $\vec{\omega}(t) \rightarrow \vec{0}$  y  $q_0(t) \rightarrow 1$ ,  $\vec{q}(t) \rightarrow \vec{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- Es decir hacemos “asintóticamente estable” el equilibrio del sistema en el origen.
- Si esto es cierto para cualquier condición inicial se dice que el equilibrio es globalmente asintóticamente estable.
- Obsérvese que la actitud objetivo puede ser cualquier actitud que se desee con sólo hacer una rotación fija del sistema de referencia inercial,  $q' = q_{ref}^* \star q$ .
- Vamos a resolver este problema con la llamada “técnica de las funciones de Lyapunov”.



## Control no lineal: el sistema

- Ahora no linealizamos, luego el sistema es el original, cambiando como antes los términos que dependan de las ruedas por términos de control.
- Empecemos por la velocidad angular:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{l_2 - l_3}{l_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{u_1}{l_1} \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{l_3 - l_1}{l_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{u_2}{l_2} \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{l_1 - l_2}{l_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{u_3}{l_3}\end{aligned}$$



## Control no lineal: función de Lyapunov

- ¿Podemos encontrar un valor de  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  que garantice que el equilibrio  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , sea asintóticamente estable?
- La técnica de las funciones de Lyapunov consiste en lo siguiente. Sea una función  $V$  regular (continua, diferenciable) que depende del estado (en este caso la velocidad angular y los cuaterniones), tal que:
  - Es siempre positiva para cualquier valor de los estados, excepto cuando el estado es cero; para dicho valor es cero (esto se denomina definida positiva).
  - La derivada con respecto al tiempo de  $V$  es definida negativa (es decir negativa para cualquier valor de los estados excepto cero).
- Entonces se demuestra que el origen (valor cero del estado) es asintóticamente estable (Idea: entender como funciona este método imaginando las curvas de nivel de  $V$  en función del estado).
- Además si el límite de  $V$  cuando el estado tiende a infinito es infinito, este resultado es global.



## Control no lineal: encontrando el control

- Usemos la función de Lyapunov

$$V = I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} + I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} + I_3 \frac{\omega_3^2}{2k}$$

- Vemos que cumple la primera condición (se ha desplazado  $q_0$  para que el equilibrio en  $q_0 = 1$  sea el origen).
- $k$  es una constante positiva que definiremos más adelante.
- Tomando derivada:

$$V_t = I_1 \frac{\omega_1 \dot{\omega}_1}{k} + I_2 \frac{\omega_2 \dot{\omega}_2}{k} + I_3 \frac{\omega_3 \dot{\omega}_3}{k}$$

- Sustituyendo los valores de las derivadas:

$$V_t = \frac{\omega_1((I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1)}{k} + \frac{\omega_2((I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2)}{k} + \frac{\omega_3((I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + u_3)}{k}$$



## Control no lineal: encontrando el control

- Simplificando

$$V_t = \frac{\omega_1 u_1}{k} + \frac{\omega_2 u_2}{k} + \frac{\omega_3 u_3}{k}$$

- Elegimos ahora:  $u_1 = -c_1\omega_1$ ,  $u_2 = -c_2\omega_2$ ,  $u_3 = -c_3\omega_3$ , donde  $c_i$  es una constante positiva. Sustituyendo:

$$V_t = -\frac{c_1\omega_1^2 + c_2\omega_2^2 + c_3\omega_3^2}{k}$$

- Aplicando la técnica de Lyapunov, queda demostrado que el equilibrio  $\vec{\omega} = 0$  es globalmente asintóticamente estable.



## Control no lineal: el sistema

- Consideremos ahora también la cinemática de la actitud. El problema es más complejo.

$$\dot{\omega}_1 = \frac{l_2 - l_3}{l_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{u_1}{l_1}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{l_3 - l_1}{l_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{u_2}{l_2}$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{l_1 - l_2}{l_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{u_3}{l_3}$$

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2 + q_3 \omega_3)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2} (q_0 \omega_1 - q_3 \omega_2 + q_2 \omega_3)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2} (q_3 \omega_1 + q_0 \omega_2 - q_1 \omega_3)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2} (-q_2 \omega_1 + q_1 \omega_2 + q_0 \omega_3)$$



## Control no lineal: función de Lyapunov

- ¿Podemos encontrar un valor de  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  que garantice que el equilibrio  $\vec{\omega} = \vec{q} = \vec{0}$ ,  $q_0 = 1$  sea asintóticamente estable?
- Además del resultado de Lyapunov, necesitamos el llamado "Teorema de La Salle":
  - Sea una función de Lyapunov  $V$  tal que su derivada es **semidefinida negativa** (es decir negativa para algún valor de los estados además de cero). Llamemos  $E$  al conjunto de los puntos que verifica  $\dot{V} = 0$ .
  - Sea  $M$  el **conjunto invariante** del sistema más grande contenido en  $E$ .
- Entonces se demuestra que el estado tiende a  $M$  cuando el tiempo tiende a infinito.
- ¿Qué es un conjunto invariante de un sistema? Es un conjunto tal que si la condición inicial empieza en el conjunto, el estado permanece en el conjunto durante todo  $t$ .



## Control no lineal: encontrando el control

- Usemos la función de Lyapunov

$$V = I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} + I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} + I_3 \frac{\omega_3^2}{2k} + (q_0 - 1)^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

- Vemos que cumple la primera condición de Lyapunov (se ha desplazado  $q_0$  para que el equilibrio en  $q_0 = 1$  sea el origen).
- Tomando derivada:

$$V_t = I_1 \frac{\omega_1 \dot{\omega}_1}{k} + I_2 \frac{\omega_2 \dot{\omega}_2}{k} + I_3 \frac{\omega_3 \dot{\omega}_3}{k} + 2(q_0 - 1)\dot{q}_0 + 2q_1\dot{q}_1 + 2q_2\dot{q}_2 + 2q_3\dot{q}_3$$

- Sustituyendo los valores de las derivadas:

$$V_t = \frac{\omega_1((I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1)}{k} + \frac{\omega_2((I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2)}{k} + \frac{\omega_3((I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + u_3)}{k} \\ - (q_0 - 1)(q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3) + q_1(q_0\omega_1 - q_3\omega_2 + q_2\omega_3) \\ + q_2(q_3\omega_1 + q_0\omega_2 - q_1\omega_3) + q_3(-q_2\omega_1 + q_1\omega_2 + q_0\omega_3)$$



## Control no lineal: encontrando el control

- Simplificando

$$V_t = \frac{\omega_1 u_1}{k} + \frac{\omega_2 u_2}{k} + \frac{\omega_3 u_3}{k} + (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2 + q_3 \omega_3)$$

- Elegimos ahora:  $u_1 = -(kq_1 + c_1\omega_1)$ ,  $u_2 = -(kq_2 + c_2\omega_2)$ ,  $u_3 = -(kq_3 + c_3\omega_3)$ , donde  $c_i$  es una constante positiva. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} V_t &= -\frac{\omega_1(kq_1 + c_1\omega_1)}{k} - \frac{\omega_2(kq_2 + c_2\omega_2)}{k} - \frac{\omega_3(kq_3 + c_3\omega_3)}{k} \\ &\quad + (q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3) \\ &= -\frac{c_1\omega_1^2 + c_2\omega_2^2 + c_3\omega_3^2}{k} \end{aligned}$$

- Ya no podemos aplicar Lyapunov directamente, sino que necesitamos La Salle. En primer lugar, el conjunto  $E$  es simplemente  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$  para todo  $t$ .



## Conjunto invariante

- Sustituycamos en el sistema  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$  para todo  $t$  (lo que en particular implica que sus derivadas son nulas):

$$0 = 0 + u_1$$

$$0 = 0 + u_2$$

$$0 = 0 + u_3$$

$$\dot{q}_0 = 0$$

$$\dot{q}_1 = 0$$

$$\dot{q}_2 = 0$$

$$\dot{q}_3 = 0$$

- Luego el conjunto invariante verifica  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ , y  $q$  constante.
- Por tanto, como  $u_1 = -(kq_1 + c_1\omega_1)$ ,  $u_2 = -(kq_2 + c_2\omega_2)$ ,  $u_3 = -(kq_3 + c_3\omega_3)$ , obtenemos  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ .



## Conjunto invariante

- Finalmente, del hecho de que el cuaternión debe ser unitario, obtenemos  $q_0 = \pm 1$ . Al ser  $q_0 = 1$  el origen de la función de Lyapunov, es el que se estabiliza. De hecho, se puede comprobar que  $q_0 = -1$  es inestable (lo cual es un inconveniente al ser en realidad el mismo punto; se comprobará por simulación).
- Si se usa  $k$  negativo en la ley de control entonces  $q_0 = -1$  se vuelve estable y  $q_0 = 1$  inestable. Esto se comprueba modificando la función de Lyapunov a

$$V = -I_1 \frac{\omega_1^2}{2k} - I_2 \frac{\omega_2^2}{2k} - I_3 \frac{\omega_3^2}{2k} + (q_0 + 1)^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

- Si se fija  $k = k_0 \cdot \text{sgn}(q_0)$  entonces se vuelve estable el equilibrio “más próximo”!
- Obsérvese que en la ley de control no aparecen las inercias: no es necesario conocerlas. Pero si es necesario conocer el estado ( $\vec{\omega}$  y  $q$ ) para poder aplicar la ley de control.



## Sistema de control de reacción

- Si ahora tenemos toberas, éstas actúan como pares.
- Supongamos la estabilización de una actitud inicial inercial (velocidad angular cero). Si linealizamos y tomamos ángulos de Euler 1-2-3 en torno a dicha actitud inicial, combinando las ecuaciones cinemáticas y dinámicas linealizadas el sistema a controlar escrito en la forma típica de control resultaría:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 &\approx u_1, \\ I_2 \ddot{\theta}_2 &\approx u_2, \\ I_3 \ddot{\theta}_3 &\approx u_3, \end{aligned}$$

- Deberíamos diseñar  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  para estabilizar el sistema; los ejes son independientes entre sí. Los métodos clásicos de control no se pueden emplear en el caso de que se usen toberas, ya que éstas no pueden dar un valor variable, sino solamente un valor constante, en una u otra dirección, o cero. Es decir, las únicas posibilidades son  $u = 0, u_{MAX}, u_{MIN}$ , donde  $u_{MIN}$  sería un valor negativo (suponemos  $u_{MIN} = -u_{MAX}$ ). Para diseñar leyes de control hay que usar técnicas de control óptimo.



## Maniobras con toberas

- Consideremos sólo un eje, con la ecuación  $\ddot{\alpha} = u$  (donde  $u$  se ha redefinido dividida por la inercia), con condiciones iniciales  $\dot{\alpha}_0$  y  $\alpha_0$ . Integrando la ecuación diferencial obtenemos velocidad y posición:

$$\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0 = tu, \quad \alpha - \alpha_0 - t\dot{\alpha}_0 = \frac{t^2}{2}u$$

- Eliminando el tiempo:

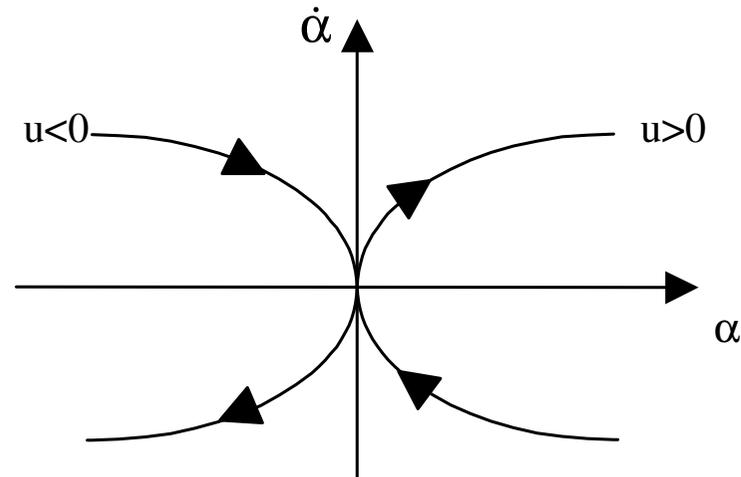
$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\dot{\alpha}_0(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0)}{u} + \frac{(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0)^2}{2u}$$

- Se trata de la ecuación de una parábola, cuya forma dependerá de las condiciones iniciales y de la elección del control ( $u = 0, u_{MAX}, -u_{MAX}$ ). Si  $u = 0$  obsérvese que no se puede eliminar el tiempo y se reduce a la recta  $\alpha - \alpha_0 = t\dot{\alpha}_0$ .

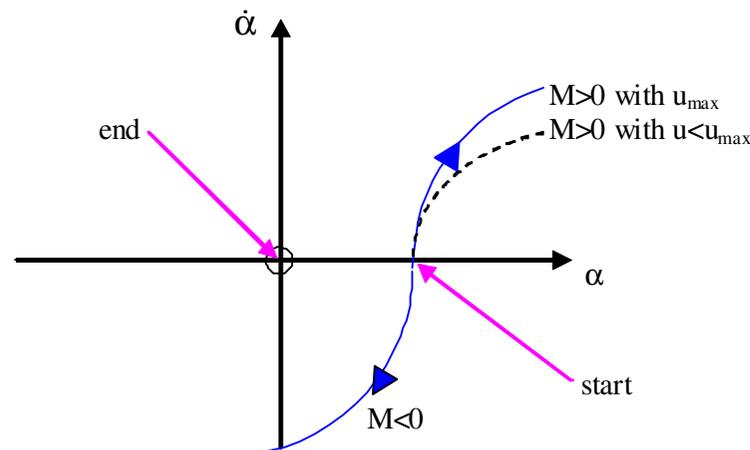


## Maniobras con toberas

- Ejemplo de parábolas con condición inicial nula (las flechas indican la dirección que se sigue):

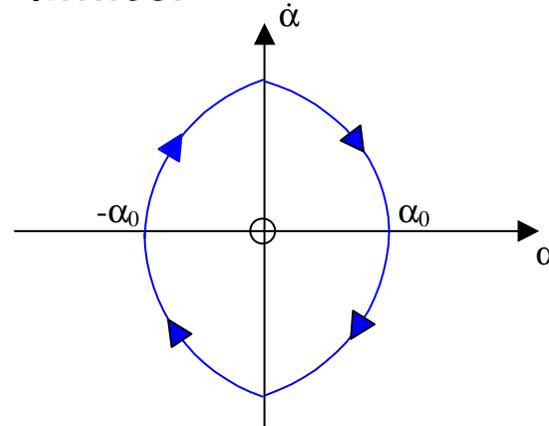


- Para ir de un punto a otro tendríamos que movernos por las parábolas:

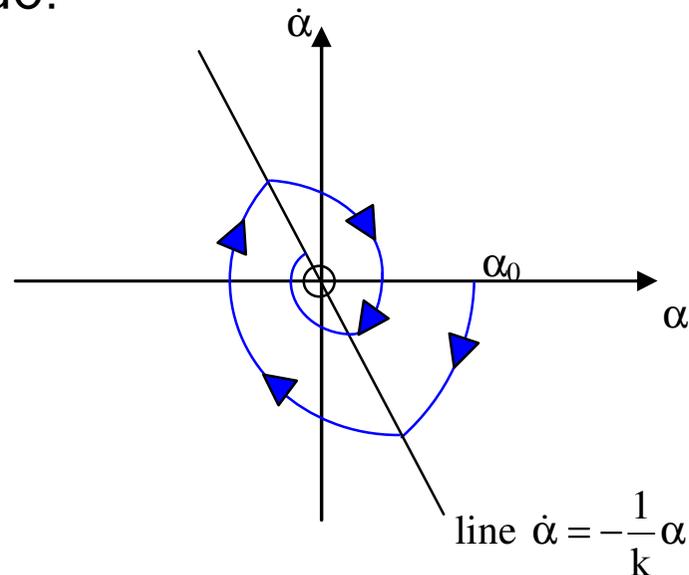


## Maniobras con toberas

- Primera idea: usar una ley de control  $u = -u_{MAX}\text{signo}(\alpha)$ . El resultado es un ciclo límite:

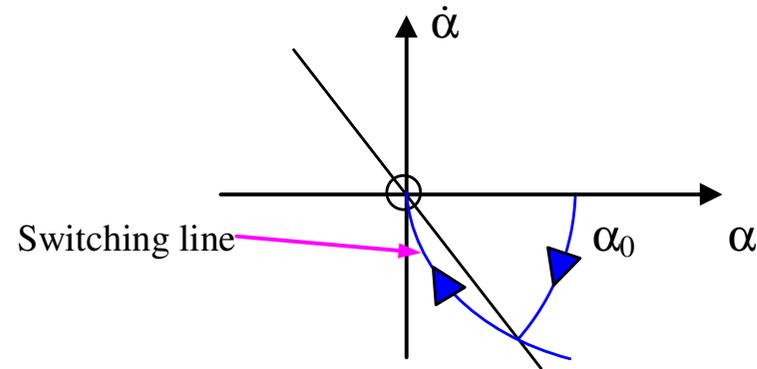


- Para evitar la oscilación:  $u = -u_{MAX}\text{signo}(\alpha + k\dot{\alpha})$ , con  $k > 0$ . El resultado:

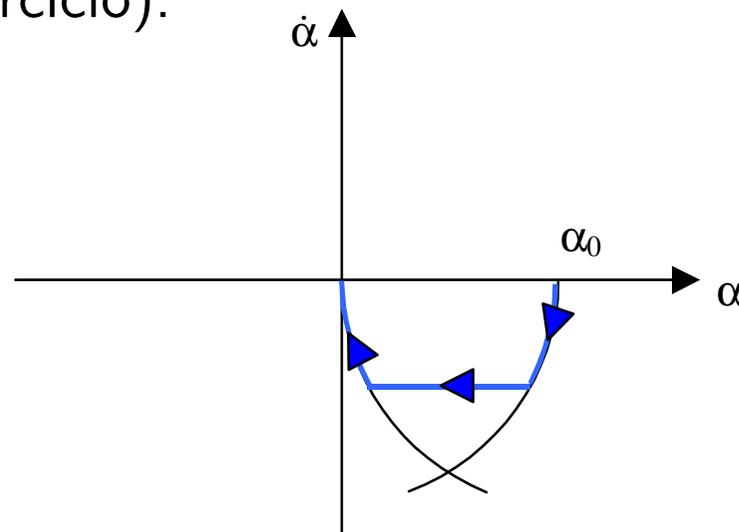


## Maniobras con toberas

- Para llegar en un tiempo finito se puede usar  $u = -u_{MAX} \text{signo}(\alpha - \frac{1}{2u_{MAX}} \dot{\alpha} |\dot{\alpha}|)$  (ejercicio). El resultado:

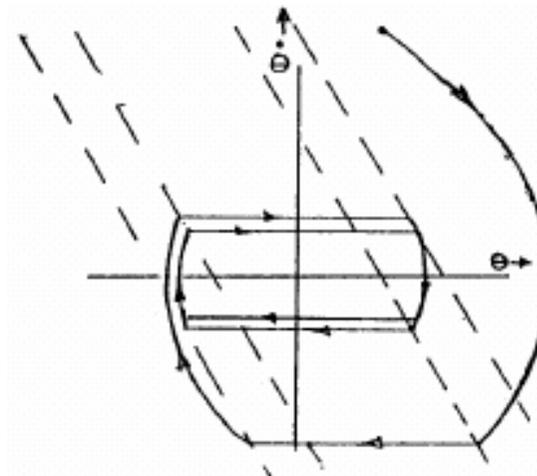
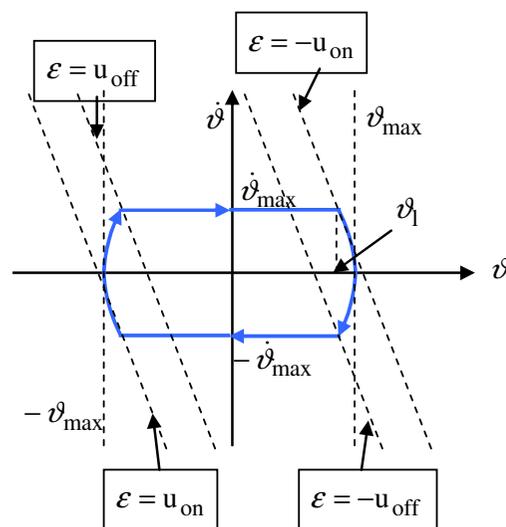


- Si fijamos un tiempo mínimo y queremos gastar el mínimo combustible (ejercicio):



## Maniobras con toberas: consideraciones prácticas

- El procedimiento analítico estudiado no se podría emplear si no se pueden despreciar los términos no lineales (los acoplamientos hacen que haya que estudiar toda la dinámica simultáneamente). Es necesario usar cálculo de variaciones.
- Por otro lado, en la práctica, es suficiente con garantizar que las soluciones converjan siempre a un ciclo límite suficientemente próximo al origen (para evitar encender los propulsores con demasiada frecuencia). Para ello se usan zonas muertas e histéresis.



# 1. Notas RCS: control en tiempo mínimo y combustible mínimo

Supongamos la situación en la que se puede considerar ángulos y velocidades angulares iniciales pequeños, y se tiene un conjunto de toberas para controlar la actitud.

En dicha situación, linealizando las ecuaciones, se llega a una ecuación del tipo

$$I\ddot{\alpha} = M$$

para cada eje, donde  $\alpha$  es el ángulo de cada eje,  $I$  la inercia,  $M$  el par ejercido mediante toberas; si llamamos  $u = M/I$ , entonces

$$\ddot{\alpha} = u$$

y además  $u$  sólo puede tomar los valores  $0, u_{max}, u_{min}$ , donde para simplificar supondremos  $u_{min} = -u_{max}$ .

Resolviendo la ecuación, y suponiendo una condición inicial  $\alpha_0, \dot{\alpha}_0$ , llegamos a:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \dot{\alpha}_0 + tu, \\ \alpha(t) &= \alpha_0 + t\dot{\alpha}_0 + \frac{1}{2}t^2u,\end{aligned}$$

y eliminando el tiempo de estas ecuaciones llegamos a

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}_0}{u}\dot{\alpha}_0 + \frac{1}{2}\frac{(\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}_0)^2}{u}$$

y desarrollando:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\alpha}^2(t) - \dot{\alpha}_0^2}{u}$$

que es la ecuación de una parábola.

## 1.1. Maniobra de combustible mínimo

Para fijar ideas, supongamos  $\dot{\alpha}_0 = 0$  y  $\alpha_0 > 0$ , y queremos conseguir  $\alpha = \dot{\alpha} = 0$  gastando el menor combustible. La idea de la maniobra se plasma en la Figura 1: primero realizamos un tramo (1) aplicando  $-u_{max}$ , hasta una velocidad angular  $\dot{\alpha} = -\delta$ , luego un tramo (2) dejando que la propia dinámica disminuya el ángulo, y finalmente un tramo (3) aplicando  $u_{max}$  hasta llegar al origen.

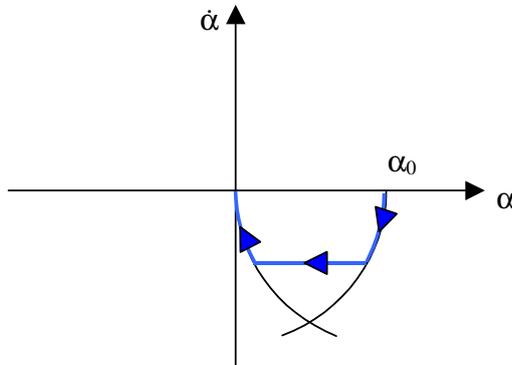


Figura 1: Maniobra de combustible mínimo

Llamando  $\alpha_1$  al ángulo resultante tras la fase 1 y  $\alpha_2$  al ángulo resultante tras la fase 2, así como  $t_1, t_2$  y  $t_3$  a las duraciones respectivas de cada fase, encontramos las siguientes ecuaciones.

Para la fase 1:

$$\begin{aligned}-\delta &= 0 - t_1 u_{max} \rightarrow t_1 = \frac{\delta}{u_{max}}, \\ \alpha_1 &= \alpha_0 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{u_{max}}\end{aligned}$$

Para la fase 2:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \delta t_2 \rightarrow t_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\delta},$$

Para la fase 3:

$$\begin{aligned}0 &= -\delta + t_3 u_{max} \rightarrow t_3 = \frac{\delta}{u_{max}}, \\0 &= \alpha_2 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{u_{max}}\end{aligned}$$

Por tanto para  $t_2$  obtenemos:

$$t_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\delta} = \frac{\alpha_0 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{u_{max}} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{u_{max}}}{\delta} = \frac{\alpha_0}{\delta} - \frac{\delta}{u_{max}}$$

Y el tiempo total de la maniobra es:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{\delta}{u_{max}} + \frac{\alpha_0}{\delta} - \frac{\delta}{u_{max}} + \frac{\delta}{u_{max}} = \frac{\alpha_0}{\delta} + \frac{\delta}{u_{max}}$$

Mientras que el tiempo que las toberas están encendidas es  $t_1 + t_3$ , es decir:

$$t_1 + t_3 = 2 \frac{\delta}{u_{max}}.$$

Cuanto más pequeño  $\delta$ , menos combustible se emplea pero más se tarda en llegar. Por tanto, fijado el tiempo que se tarda en llegar, se puede hallar  $\delta$  de la ecuación de  $t$  y luego calcular el tiempo que las toberas están encendidas.

## 1.2. Maniobra de tiempo mínimo

Si queremos llegar lo antes posible, será equivalente a hacer  $t_2 = 0$ . Hallaríamos entonces  $\delta$ :

$$t_2 = \frac{\alpha_0}{\delta} - \frac{\delta}{u_{max}} = 0 \rightarrow \delta = \sqrt{\alpha_0 u_{max}}$$

y por tanto el tiempo mínimo sería:

$$t = t_1 + t_3 = 2 \frac{\delta}{u_{max}} = 2 \sqrt{\frac{\alpha_0}{u_{max}}}$$

# Dinámica de Vehículos Espaciales

## Tema 9: Diseño de ADCS

Rafael Vázquez Valenzuela

Departamento de Ingeniería Aeroespacial  
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla [rvazquez1@us.es](mailto:rvazquez1@us.es)

23 de febrero de 2017



# Diseño de un ADCS

- En las siguientes transparencias estudiaremos diferentes consideraciones a la hora de diseñar un ADCS (considerando tanto la parte de control como la de estimación).
- En primer lugar estudiaremos los requisitos y con estos se relacionan con otros subsistemas (trade-offs).
- En base a los requisitos expondremos los métodos antes vistos, que también se relacionarán con el tipo de apuntamiento necesario (inercial o hacia Tierra).
- Estudiaremos con más detalle los requisitos de maniobra y de las cargas útiles.



# Diseño de un ADCS

## ■ Requisitos típicos de un ADCS

**TABLE 11-3. Typical Attitude Determination and Control Performance Requirements.** Requirements need to be specified for each mode. The following lists the areas of performance frequently specified.

Area	Definition*	Examples/Comments
<b>DETERMINATION</b>		
<i>Accuracy</i>	How well a vehicle's orientation with respect to an absolute reference is known	0.25 deg, 3 $\sigma$ , all axes; may be real-time or post-processed on the ground
<i>Range</i>	Range of angular motion over which accuracy must be met	Any attitude within 30 deg of nadir
<b>CONTROL</b>		
<i>Accuracy</i>	How well the vehicle attitude can be controlled with respect to a commanded direction	0.25 deg, 3 $\sigma$ ; includes determination and control errors, may be taken with respect to an inertial or Earth-fixed reference
<i>Range</i>	Range of angular motion over which control performance must be met	All attitudes, within 50 deg of nadir, within 20 deg of Sun
<i>Jitter</i>	A specified angle bound or angular rate limit on short-term, high-frequency motion	0.1 deg over 1 min, 1 deg/s, 1 to 20 Hz; usually specified to keep spacecraft motion from blurring sensor data
<i>Drift</i>	A limit on slow, low-frequency vehicle motion. Usually expressed as angle/time.	1 deg/hr, 5 deg max. Used when vehicle may drift off target with infrequent resets (especially if actual direction is known)
<i>Settling Time</i>	Specifies allowed time to recover from maneuvers or upsets.	2 deg max motion, decaying to < 0.1 deg in 1 min; may be used to limit overshoot, ringing, or nutation

\* Definitions vary with procuring and designing agencies, especially in details (e.g., 1 or 3  $\sigma$ , amount of averaging or filtering allowed). It is always best to define exactly what is required.



# Diseño de un ADCS

- Estudio de los requisitos derivados de/hacia otros subsistemas

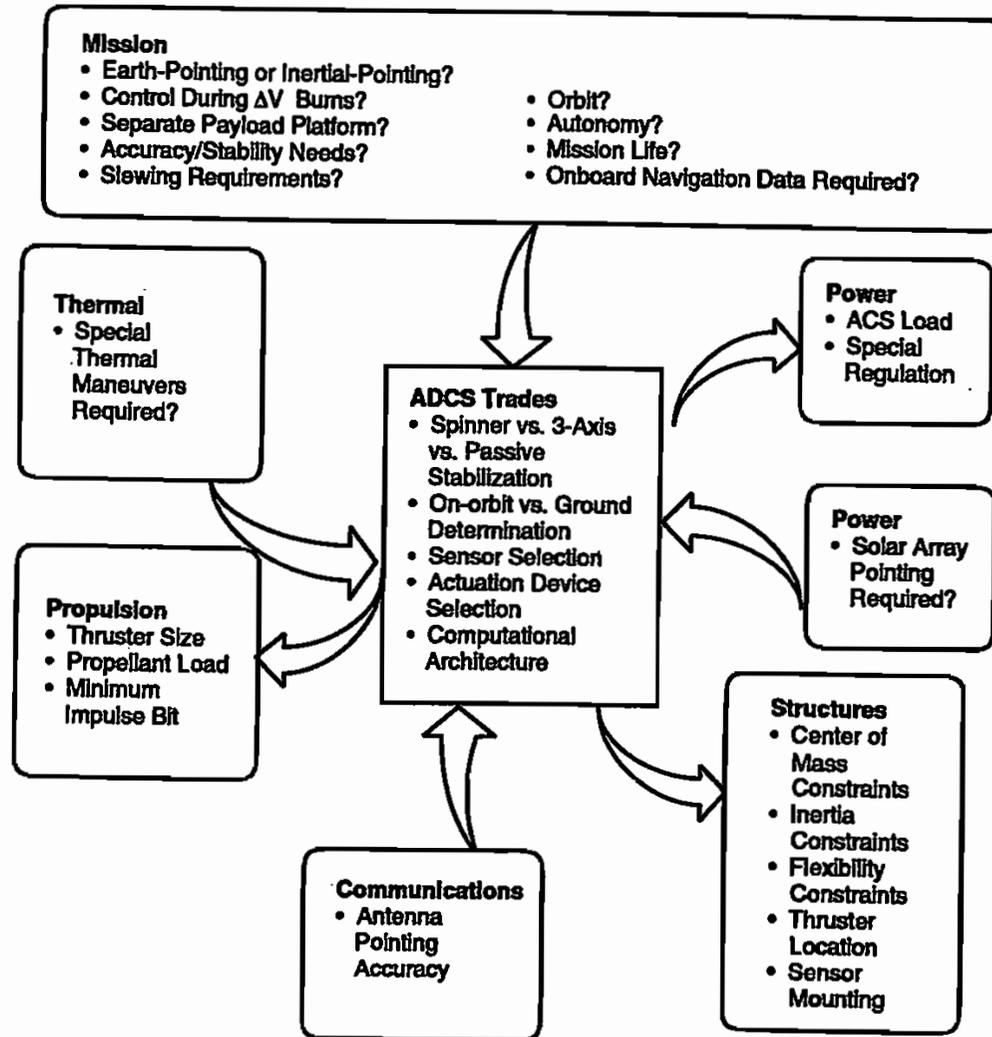


Fig. 11-2. The Impact of Mission Requirements and Other Subsystems on the ADCS Subsystem. Direction of arrows shows requirements flow from one subsystem to another.



# Diseño de un ADCS

## ■ Selección del sistema o sistemas a utilizar

**TABLE 11-4. Attitude Control Methods and Their Capabilities.** As requirements become tighter, more complex control systems become necessary.

Type	Pointing Options	Attitude Maneuverability	Typical Accuracy	Lifetime Limits
<i>Gravity-gradient</i>	Earth local vertical only	Very limited	±5 deg (2 axes)	None
<i>Gravity-gradient and Momentum Bias Wheel</i>	Earth local vertical only	Very limited	±5 deg (3 axes)	Life of wheel bearings
<i>Passive Magnetic</i>	North/south only	Very limited	±5 deg (2 axes)	None
<i>Pure Spin Stabilization</i>	Inertially fixed any direction Repoint with precession maneuvers	High propellant usage to move stiff momentum vector	±0.1 deg to ±1 deg in 2 axes (proportional to spin rate)	Thruster propellant (if applies)*
<i>Dual-Spin Stabilization</i>	Limited only by articulation on despun platform	Momentum vector same as above Despun platform constrained by its own geometry	Same as above for spin section Despun dictated by payload reference and pointing	Thruster propellant (if applies)* Despin bearings
<i>Bias Momentum (1 wheel)</i>	Best suited for local vertical pointing	Momentum vector of the bias wheel prefers to stay normal to orbit plane, constraining yaw maneuver	±0.1 deg to ±1 deg	Propellant (if applies)* Life of sensor and wheel bearings
<i>Zero Momentum (thruster only)</i>	No constraints	No constraints High rates possible	±0.1 deg to ±5 deg	Propellant
<i>Zero Momentum (3 wheels)</i>	No constraints	No constraints	±0.001 deg to ±1 deg	Propellant (if applies)* Life of sensor and wheel bearings
<i>Zero Momentum CMG</i>	No constraints	No constraints High rates possible	±0.001 deg to ±1 deg	Propellant (if applies)* Life of sensor and wheel bearings

\* Thrusters may be used for slewing and momentum dumping at all altitudes. Magnetic torquers may be used from LEO to GEO.



# Diseño de un ADCS

## ■ Efecto de los requisitos en los sistemas a elegir

**TABLE 11-8. Effect of Control Accuracy on Sensor Selection and ADCS Design.** Accurate pointing requires better, higher cost, sensors, and actuators.

Required Accuracy ( $3\sigma$ )	Effect on Spacecraft	Effect on ADCS
> 5 deg	<ul style="list-style-type: none"> <li>Permits major cost savings</li> <li>Permits gravity-gradient (GG) stabilization</li> </ul>	<p><b>Without attitude determination</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>No sensors required for GG stabilization</li> <li>Boom motor, GG damper, and a bias momentum wheel are only required actuators</li> </ul> <p><b>With attitude determination</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Sun sensors &amp; magnetometer adequate for attitude determination at <math>\geq 2</math> deg</li> <li>Higher accuracies may require star trackers or horizon sensors</li> </ul>
1 deg to 5 deg	<ul style="list-style-type: none"> <li>GG not feasible</li> <li>Spin stabilization feasible if stiff, inertially fixed attitude is acceptable</li> <li>Payload needs may require despun platform on spinner</li> <li>3-axis stabilization will work</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sun sensors and horizon sensors may be adequate for sensors, especially a spinner</li> <li>Accuracy for 3-axis stabilization can be met with RCS deadband control but reaction wheels will save propellant for long missions</li> <li>Thrusters and damper adequate for spinner actuators</li> <li>Magnetic torquers (and magnetometer) useful</li> </ul>
0.1 deg to 1 deg	<ul style="list-style-type: none"> <li>3-axis and momentum-bias stabilization feasible</li> <li>Dual-spin stabilization also feasible</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Need for accurate attitude reference leads to star tracker or horizon sensors &amp; possibly gyros</li> <li>Reaction wheels typical with thrusters for momentum unloading and coarse control</li> <li>Magnetic torquers feasible on light vehicles (magnetometer also required)</li> </ul>
< 0.1 deg	<ul style="list-style-type: none"> <li>3-axis stabilization is necessary</li> <li>May require articulated &amp; vibration-isolated payload platform with separate sensors</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Same as above for 0.1 deg to 1 deg but needs star sensor and better class of gyros</li> <li>Control laws and computational needs are more complex</li> <li>Flexible body performance very important</li> </ul>



# Diseño de un ADCS

- Efecto de los requisitos de maniobras en los sistemas a elegir

**TABLE 11-7. Slewing Requirements That Affect Control Actuator Selection.** Spacecraft slew agility can demand larger actuators for intermittent use.

<b>Slewing</b>	<b>Effect on Spacecraft</b>	<b>Effect on ADCS</b>
None	Spacecraft constrained to one attitude—highly improbable	<ul style="list-style-type: none"><li>• Reaction wheels, if planned, can be smaller</li><li>• If magnetic torque can dump momentum, may not need thrusters</li></ul>
Nominal rates— 0.05 deg/s (maintain local vertical) to 0.5 deg/s	Minimal	<ul style="list-style-type: none"><li>• Thrusters very likely</li><li>• Reaction wheels adequate by themselves only for a few special cases</li></ul>
High rates— > 0.5 deg/s	<ul style="list-style-type: none"><li>• Structural impact on appendages</li><li>• Weight and cost increase</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Control moment gyros very likely or two thruster force levels—one for stationkeeping and one for high-rate maneuvers</li></ul>



# Diseño de un ADCS

- Efecto de los requisitos de la carga útil en los sistemas a elegir

**TABLE 11-6. Effect of Payload Pointing Directions on ADCS Design.** The payload pointing requirements are usually the most important factors for determining the type of actuators and sensors.

Requirement	Effect on Spacecraft	Effect on ADCS
<b>Earth-pointing</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Nadir (Earth) pointing</li> <li>• Scanning</li> <li>• Off-nadir pointing</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gravity-gradient fine for low accuracies (&gt;1 deg) only</li> <li>• 3-axis stabilization acceptable with Earth local vertical reference</li> </ul>	<b>If gravity-gradient</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Booms, dampers, Sun sensors, magnetometer or horizon sensors for attitude determination</li> <li>• Momentum wheel for yaw control</li> </ul> <b>If 3-axis</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Horizon sensor for local vertical reference (pitch and roll)</li> <li>• Sun or star sensor for third-axis reference and attitude determination</li> <li>• Reaction wheels, momentum wheels, or control moment gyros for accurate pointing and propellant conservation</li> <li>• Reaction control system for coarse control and momentum dumping</li> <li>• Magnetic torquers can also dump momentum</li> <li>• Inertial measurement unit for maneuvers and attitude determination</li> </ul>
<b>Inertial pointing</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sun</li> <li>• Celestial targets</li> <li>• Payload targets of opportunity</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Spin stabilization fine for medium accuracies with few attitude maneuvers</li> <li>• Gravity gradient does not apply</li> <li>• 3-axis control is most versatile for frequent reorientations</li> </ul>	<b>If spin</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Payload pointing and attitude sensor operations limited without despun platform</li> <li>• Needs thrusters to reorient momentum vector</li> <li>• Requires nutation damping</li> </ul> <b>If 3-axis</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Typically, sensors include Sun sensors, star tracker, and inertial measurement unit</li> <li>• Reaction wheels and thrusters are typical actuators</li> <li>• May require articulated payload (e.g., scan platform)</li> </ul>



# Diseño de un ADCS

- Con estas ideas se puede al menos tener una idea del tipo de actuadores y sensores necesarios, en base al tipo de sensor y requisito.
- Para más ideas de diseño inicial, se recomienda el libro "Space Mission Analysis and Design", de Wertz/Everett/Puschell.
- Una vez elegidos los sistemas, es necesario probar (inicialmente en simulación) los algoritmos de estimación, determinación y control que hemos estudiado a lo largo de la asignatura, y comprobar que al menos en simulación se cumplen los requisitos.
- Típicamente se analiza el comportamiento de los sistemas frente a perturbaciones con simulaciones de Monte Carlo (muchas simulaciones con diferentes perturbaciones "al azar").
- Una vez se tiene el hardware real, se pueden realizar simulaciones HIL (Hardware in the Loop).

