Cálculo de Aeronaves

Sergio Esteban , Antonio Franco, y Alfonso Valenzuela

1 de abril de 2014

1. Hipótesis Iniciales

En función de los diferentes regímenes de operación, se establecen unas pautas sobre la posible posición de la palanca de gases δ_T, todo y que cada grupo deberá decidir dicha posición en función de sus necesidades

Las configuraciones de palanca de gases definida en la sección de potencia y par dictará cual tiene que ser la posición de palanca en cada uno de los segmentos de vuelo de tal manera que:

- Segmento de Despegue a potencia militar: $\delta_T = 1{,}15$, o lo que es lo mismo al 115 %de palanca, dando100 % de potencia/empuje disponible (Full Throttle). La potencia máxima se puede emplear de forma extraordinaria en el segmento de despegue si es necesario un aporte adicional de empuje/potencia de forma puntual.
- Segmento de Despegue a potencia máxima continua: $\delta_T = 1{,}00$, o lo que es lo mismo al 100 %de palanca, dando86,9 % de potencia/empuje disponible (Full Throttle).
- Segmento de Subida:$\delta_T = 0{,}95$, o lo que es lo mismo, al 95 %de palanca, dando aproximadamente el82,6 % de potencia/empuje disponible (Full Throttle).
- Segmento de Crucero
  - Crucero 1: $\delta_T \approx 0{,}85$, o lo que es lo mismo aproximadamente al 85 %de palanca, dando aproximadamente el 73,9 % de potencia/empuje disponible (Normal Cruise) - Máximo alcance.
  - Crucero 2: $\delta_T \approx 0{,}65$, o lo que es lo mismo aproximadamente al 65 % de palanca, dando aproximadamente el 56,5 % de potencia/empuje disponible (Economy Cruise) - Máxima autonomía.
- Segmeno de aterrizaje: $\delta_T \approx 0{,}40$,o lo que es lo mismo aproximadamente al 40 %de palanca, dando aproximadamente el 34,8 % de potencia/empuje disponible.
- Segmento de descenso: $\delta_T \approx 0{,}05$, o lo que es lo mismo aproximadamente al 5 % de palanca, dando aproximadamente el 4 % de potencia/empuje disponible.

Estas posiciones de palanca son las que han de servir como pautas al diseñador para determinar la potencia/empuje disponible en cada uno de los segmentos que se han de analizar.

2. Modelo Planta Propulsiva Turbo-Fan

El empuje proporcionado por la planta motora turbo-fan empleada elegida vendrá dada por la expresión[2]:

$$T = \delta_T T_M(V, h)$$

donde, δ_T es la palanca de gases ($0 < \delta_T \leq 1$), y $T_M(V, h)$ es el empuje máximo y viene dado por la expresión

$$T_M(V,h) = W_{TO}\delta C_T$$

donde W_{TO} es el peso de referencia del avión en despegue, δ es el ratio de presiones ($\delta = p/p_{SL}$) siendo p_{SL} la presión a nivel de mar, y p la presión a la altura de operación. El coeficiente de tracción (C_T) viene dado por la expresión analítica simple que incluye su dependencia con el número de Mach [3] y que incluye el incremente de C_T en función de la altura [4] con la siguiente expresión:

$$C_T = \frac{T_{SL}}{W_{TO}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1{,}00-0{,}49\sqrt{M}\right)\frac{1}{\theta}$$

donde T_{SL} es el empuje máximo a nivel del mar para $M = 0$, que se puede extraer de las caracteristicas de motores disponibles en http://www.jet-engine.net/. $\gamma = 1{,}4$ (ratio de calores específicos), y θ es el ratio de temperaturas ($\theta = t/t_{SL}$) siendo t_{SL} la temperatura a nivel de mar, y t la temperatura a la altura de operación. Por consiguiente el modelo de empuje vien dado por la expresión:

$$T = \delta_T T_{SL}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1{,}00-0{,}49\sqrt{M}\right)\frac{\delta}{\theta} = \delta_T T_{SL}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1{,}00-0{,}49\sqrt{M}\right)\frac{\rho}{\rho_{SL}}$$

El coeficiente de consumo específico (Thrust Specific Fuel Consumption - $TSFC$) empleado viene definido por el modelo lineal definido por Mattingly [1], y simplificado por Miele [2]:

$$C = c_{SL}\frac{L_H}{a_{SL}}\left(1{,}00+1{,}20M\right)\sqrt{\theta}$$

donde c_{SL} es el consumo específico a nivel de mar y $M = 0$, y viene determinado por los datos disponibles en http://www.jet-engine.net/. Hay que tener en cuenta que el $TSFC$ vienen en unidades de $[lb/lbf \cdot hr]$, y dado que el modelo empleado para analizar las actuaciones del avión (ecuaciones de Breguet para alcance y Autonomía) se realiza mediante la variación de Peso (W) en vez de masa (m), es necesario multiplicar el $TSFC$ por la gravedad para obtener las unidades apropiadas cuando se convierte de uniades del sistema imperial al sistema métrico. El L_H es el poder calorífico del combustible (fuel latent heat), y tomaremos el valor $L_H = 43x10^6 J/kg$. El $TSFC$ viene dado en función del tipo de derivación. Para motores turbo-fan de alta derivación (high bypass ratio):

$$c_{TSFC} = c_{SL}\left(1{,}0+1{,}2M\right)\sqrt{\theta}$$

mientras que para motores turbo-fan de baja derivación (low bypass ratio):

$$c_{TSFC} = c_{SL}\left(1{,}0+0{,}33M\right)\sqrt{\theta} \rightarrow (potencia\,militar)$$

$$c_{TSFC} = c_{SL}\left(1{,}0+0{,}16875M\right)\sqrt{\theta} \rightarrow (potencia\,maxima)$$

Se introduce una corrección adicional al modelo del c_{TSFC} para tener en cuenta el consumo de combustible con la posición de la palanca.

$$c_{SL} = c_{SL}\left(a_1\cdot\delta_T^4 + a_2\cdot\delta_T^3 + a_3\cdot\delta_T^2 + a_4\cdot\delta_T + a_5\right)$$

siendo los coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3{,}559957437510763\\
a_2 &= -10{,}739698199171459\\
a_3 &= 11{,}989635150373475\\
a_4 &= -5{,}869876557884609\\
a_5 &= 2{,}059994459180667
\end{aligned}$$

2.1. Relaciones de empuje para distintos segmentos

Las relaciones de empuje para distintos segmentos se puede obtener ateniendo a la definición del modelo propulsivo propuesto resultando que para comparar los empujes entre dos segmentos (por ejemplo T_3y T_0)

$$\frac{T_3}{T_0} = \frac{\delta_{T_3}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1{,}00-0{,}49\sqrt{M_3}\right)\rho_3}{\delta_{T_0}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1{,}00-0{,}49\sqrt{M_0}\right)\rho_0}$$

donde los subíndices en δ_T, M, y ρ, corresponden a las condiciones empleadas en cada uno de los segmentos

2.2. Corrección de posición de palanca en función de operación

Se puede determinar la correcta posición de palanca teniendo en cuenta que en dichos segmentos el empuje en vuelo horizontal rectilineo uniforme viene dado por la relación

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

con $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ siendo

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

por lo que la posición de palanca puede vernir dada por

$$\delta_T = \frac{1}{T_{SL}}\frac{\rho_{SL}}{\rho}\frac{D}{\left(1.00-0.49\sqrt{M}\right)}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}$$

3. Modelo Planta Propulsiva Turbo-Prop

La potencia proporcionado por la planta motora turbo-prop se puede definir como

$$P = \delta\delta_T P_{SL}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \delta_T P_{SL}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\frac{p}{p_{SL}}$$

donde P_{SL} es la potencia máxima a nivel del mar para $M = 0$, que se puede extraer de las caracteristicas de motores disponibles en http://www.jet-engine.net/. El empuje (en unidades del sistema imperial) viene definido por la relación

$$T = \frac{P}{V}\eta_p$$

donde V es la velocidad de vuelo, y $\eta_p$es la eficiancia propulsiva viene dada por la expresion

$$\eta_p = \frac{\eta_{installed}}{0{,}1}M \rightarrow M \leq 0{,}1$$

$$\eta_p = \eta_{installed} \rightarrow M \geq 0{,}1$$

donde $\eta_{installed}$es la eficiandia propulsiva instalada, y se va a asumir que utilizando un motor con hélice de paso variable $\eta_{installed} = 0{,}82$. El consumo de combustible por unidad de potencia viene dado por la relación

$$C_{bhp} = \frac{c_P}{P} = \left(\frac{c_P}{P}\right)_{SL}(1+1{,}44M)\sqrt{\theta}$$

donde $\left(\frac{c_P}{P}\right)_{SL}$ es el consumo específico por unidad de potencia y tiempo, y viene determinado por los datos disponibles en http://www.jet-engine.net/ con unidades $\left(\frac{lb}{hp\cdot h}\right)$. Tener en cuenta que el consumo espedifico equivalente (SFC o C_{bhp}) vienen en unidades de $[lb/shp\cdot hr]$, por lo que hay que corregir atendiendo a:

$$C = C_{bhp}\frac{V}{550\eta_p} = \left(\frac{lb}{hp\cdot h}\right)\times\left(\frac{1hp}{550ft\cdot lb/s}\right)\times\left(\frac{1h}{3600s}\right)\times\left(\frac{ft}{s}\right)=\frac{1}{s}$$

Hay que tener en cuenta, al igual que en el caso de los modelos para motores turbo-fan, el modelo empleado para analizar las actuaciones del avión (ecuaciones de Breguet para alcance y Autonomía) se realiza mediante la variación de Peso (W) en vez de masa (m), es necesario multiplicar el SFC por la gravedad para obtener las unidades apropiadas si se trabaja con unidades del sistema métrico. Se introduce una corrección adicional al modelo del C_{bhp} para tener en cuenta el consumo de combustible con la posición de la palanca.

$$c_{bhp} = c_{bhp}\left(a_1\cdot\delta_T^4 + a_2\cdot\delta_T^3 + a_3\cdot\delta_T^2 + a_4\cdot\delta_T + a_5\right)$$

siendo los coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3{,}559957437510763\\
a_2 &= -10{,}739698199171459\\
a_3 &= 11{,}989635150373475\\
a_4 &= -5{,}869876557884609\\
a_5 &= 2{,}059994459180667
\end{aligned}$$

3.1. Relaciones de potencia para distintos segmentos

Las relaciones de empuje para distintos segmentos se puede obtener ateniendo a la definición del modelo propulsivo propuesto resultando que para comparar los empujes entre dos segmentos (por ejemplo P_3y P_0)

$$\frac{P_3}{P_0} = \frac{p_3\delta_{T_3}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{p_0\delta_{T_0}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

donde los subíndices en δ_T, M, y p, corresponden a las condiciones empleadas en cada uno de los segmentos. Utilizando la relación $T=\frac{P}{V}\eta_p$, la relación de enpujes puede escribirse como

$$\frac{T_3}{T_0} = \frac{p_3\delta_{T_3}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{p_0\delta_{T_0}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\frac{V_0}{V_3}\frac{\eta_{p_3}}{\eta_{p_0}}$$

3.2. Corrección de posición de palanca en función de operación

Se puede determinar la correcta posición de palanca teniendo en cuenta que en dichos segmentos

$$P = \frac{TV}{\eta_p}$$

donde el empuje en vuelo horizontal rectilineo uniforme viene dado por

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

con $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ siendo

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

$$\delta_T = \frac{1}{P_{SL}} \frac{p_{SL}}{p} \frac{DV}{\eta_p} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}$$

3.3. Obtención de la potencia, dimensiones, y consumo específico para el escalado del motor base

Para determinar la potencia del motor se empleará la siguiente relación

$$P_{USE} = F_{SCALING} \cdot P_{BASE}$$

Donde

- P_{USE} representa la potencia útil del nuevo motor despues del escalado, y de la corrección asociada a los diferentes factores de escalado $F_{SCALING}$
- P_{BASE} representa la potencia disponible del motor base elegido para escalar.
- $F_{SCALING}$ representa el coeficiente de escalado seleccionado por el diseñador para satisfacer los requisitos del análisis de las curvas de actuaciones y que podrá elegir entre: 0.80, 0.90, 1.10, y 1.20 y 1.30.

Para el escalado de las dimensiones del motor se asumirá que el Power-to-weight ratio se mantiene constante con el del motor base. Por ejemplo, si el motor base es un Allison T56-A Series IV cuyos datos principales son:

- T56-A Series IV
- Potencia máxima disponible en eje (Shaft HorsePower) : 5250 shp
- La potencia máxima disponible se reduce un 4.7 % una vez instalado en el avión: 5014 shp
- Longitud (m) : 3,711
- Diametro (m): 0,6858
- Altura (m): 0.91(estimado)
- Peso en vacío (kg): 879,96
- Power-to-weight ratio (shp/lb): 2.70

lo que se mantendrá constante es $(P_0/W_e)_{BASE} = 2{,}70$ shp/lbm por lo que el peso de motor (We) escalado se obtendrá a partir de la siguiente relación:

$$W_e = \frac{F_{SCALING}}{(P_0/W_e)_{BASE}} \cdot P_0$$

donde P_0 es la potencia máxima disponible previo a la instalación en el avión, es decir, para el motor base del ejemplo, $P_0 = 5250$ shp. De igual forma, las dimensiones del motor escalado serán proporcionales al factor de escalado, estimando el volumen relativo del motor base ($Length \times Diameter \times Height$), y calculando las nuevas dimensiones del motor escalado teniendo en cuenta que el volumen del motor escalado será directamente proporcional al factor de escalado ($F_{SCALING}$), pero manteniendo la relación entre las dimensiones del motor base tal que, para el ejemplo del motor Allison T56-A Series IV tendríamos que:

- relación entre longitud y diámetro: $x_{LD} = \frac{Length}{Diameter} = \frac{3{,}711}{0{,}69} = 5{,}37826087$

- relación entre longitud y altura:: $x_{LH} = \frac{Length}{Height} = \frac{3{,}711}{0{,}91} = 4{,}078021978$
- volumen del motor base: $V_{BASE} = Length \times Diameter \times Height = 2{,}3301369 m^3$

por lo que el volumen del nuevo motor escalado (V_{SCALE}) viene dado por

$$\begin{aligned} V_{SCALE} &= F_{SCALING} \times V_{BASE} = (Length_{SCALE} \times Diameter_{SCALE} \times Height_{SCALE}) \\ &= \left(Length_{SCALE} \times \frac{Length_{SCALE}}{x_{LD}} \times \frac{Length_{SCALE}}{x_{LH}} \right) = \frac{(Length_{SCALE})^3}{x_{LD} \cdot x_{LH}} \end{aligned}$$

de donde se puede extraer la siguiente relación

$$F_{SCALING} \times V_{BASE} = \frac{(Length_{SCALE})^3}{x_{LD} \cdot x_{LH}}$$

y por lo tanto, las dimensiones del nuevo motor vienen dadas por

$$\begin{aligned} Length_{SCALE} &= (F_{SCALING} \times V_{BASE} \times x_{LD} \times x_{LH})^{\frac{1}{3}} \\ Diameter_{SCALE} &= \frac{LengthSCALE}{x_{LD}} \\ HeightSCALE &= \frac{LengthSCALE}{x_{LH}} \end{aligned}$$

por ejemplo, para un escalado del $F_{SCALING} = 1{,}25$, las dimensiones del nuevo motor serían

$$\begin{aligned} Length_{SCALE} &= (F_{SCALING} \times V_{BASE} \times x_{LD} \times x_{LH})^{\frac{1}{3}} = (1{,}25 \times 2{,}3301369 \times 5{,}37826087 \times 4{,}078021978)^{\frac{1}{3}} = 3; \\ Diameter_{SCALE} &= \frac{LengthSCALE}{x_{LD}} = \frac{3{,}711}{5{,}37826087} = 0{,}8625\, m \\ HeightSCALE &= \frac{LengthSCALE}{x_{LH}} = \frac{3{,}711}{4{,}078021978} = 1;1375\, m \end{aligned}$$

y el nuevo peso vendrá determinado por

$$W_e = \frac{F_{SCALING}}{(P_0/W_e)_{BASE}} \cdot P_0 = \frac{1{,}25}{270} \cdot 5250 = 2430{,}56\, lb \approx 1102\, kg$$

Se asume que C_{bhp} se mantiene constante para el motor escalado

4. Modelo Planta Propulsiva Piston-Prop

El empuje proporcionado por la planta motora piston-prop se obtiene de seleccionar la potencia disponible para un régimen de palanca y corregir dicha potencia para la altura a la que está operando el motor utilizando la siguiente relación

$$Bhp = \delta_P \cdot Bhp_{SL} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} - \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_{SL}}}{7{,}55} \right) = \delta_P \cdot Bhp_{SL} \left(\frac{8{,}55 \frac{\rho}{\rho_{SL}} - 1}{7{,}55} \right)$$

donde

- Bhp y Bhp_{SL} son el brake horsepower (potencia en caballos) a la altura de vuelo y a nivel del mar (SL) respectívamente. Bhp_{SL} es la potencia del motor a nivel del mar, y viene determinado por los datos disponibles en http://www.jet-engine.net/.
- ρ y ρ_{SL}son las densidades a la altura de vuelo y a nivel del mar (SL) respectívamente.

- δ_P es la palanca de gases y viene dada en función de porcentaje de potencia disponible, $(0 < \delta_P \leq 1)$. Se recomienda emplear los mismo varemos de posición de palanca para las distintas misiones, tal como se han definido para los modelos de planta propulsiva turbo-prop piston-prop.

El consumo de combustible por unidad de potencia es constante con la velocidad y la altitud por lo que viene dado por la relación

$$C_{bhp} = \frac{c_P}{P} = \left(\frac{c_P}{P}\right)_{SL}$$

donde $\left(\frac{c_P}{P}\right)_{SL}$ es el consumo específico por unidad de potencia y tiempo, y viene determinado por los datos disponibles en http://www.jet-engine.net/ con unidades $\left(\frac{lb}{hp \cdot h}\right)$. Tener en cuenta que el consumo espedifico equivalente (SFC o C_{bhp}) vienen en unidades de $[lb/shp \cdot hr]$, por lo que hay que corregir atendiendo a las unidades empleadas.

4.1. Relaciones de potencia para distintos segmentos

Las relaciones de potenica y empuje para distintos segmentos se puede obtener ateniendo a la definición del modelo propulsivo propuesto resultando que para comparar los empujes entre dos segmentos (por ejemplo P_3y P_0)

$$\frac{P_3}{P_0} = \frac{\delta_{P_3}}{\delta_{P_0}} \frac{\left(8{,}55\frac{\rho_3}{\rho_{SL}} - 1\right)}{\left(8{,}55\frac{\rho_0}{\rho_{SL}} - 1\right)}$$

donde los subíndices en δ_T, M, y p, corresponden a las condiciones empleadas en cada uno de los segmentos. Utilizando la relación $T = \frac{P}{V}\eta_p$, la relación de enpujes puede escribierse como

$$\frac{T_3}{T_0} = \frac{P_3}{P_0} = \frac{\rho_3}{\rho_0} \frac{\delta_{P_3}}{\delta_{P_0}} \frac{V_0}{V_3} \frac{\eta_{p_3}}{\eta_{p_0}} \frac{\left(8{,}55\frac{\rho_3}{\rho_{SL}} - 1\right)}{\left(8{,}55\frac{\rho_0}{\rho_{SL}} - 1\right)}$$

4.2. Corrección de posición de palanca en función de operación

Se puede determinar la correcta posición de palanca teniendo en cuenta que en dichos segmentos

$$P = \frac{TV}{\eta_p}$$

donde el empuje en vuelo horizontal rectilineo uniforme viene dado por

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

con $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ siendo

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

$$\delta_P = \frac{DV}{\eta_p} \frac{1}{Bhp_{SL}} \left(\frac{8.55\frac{\rho}{\rho_{SL}} - 1}{7.55}\right)^{-1}$$

5. Bibliografía

- [1] Mattingly, J. D., Heiser,W. H., and Pratt, D. T., Aircraft Engine Design, 2nd ed., AIAA Education Series, AIAA, Reston, VA, 2002, pp. 38, 71.

- [2] Miele, A., Flight Mechanics. Theory of Flight Paths, Addison-Wesley, Reading, MA, 1962, pp. 107, 225.