Formulación de las ecuaciones del movimiento del avión

Mecánica del Vuelo II - 5º Ingeniería Aeronáutica
Escuela Superior de Ingenieros - Universidad de Sevilla

1. Ecuaciones Generales del Movimiento

Estas son las ecuaciones generales no lineales del movimiento del avión en ejes cuerpo. Las hipótesis que conllevan son:

- Avión rígido
- Avión con plano de simetría (XZ)
- No se consideran efectos giroscópicos
- Modelo de Tierra plana. Ejes fijos a tierra componen sistema inercial
- Modelo de gravedad constante
- Problema sin viento

Ecuaciones de fuerzas y momentos

$$\begin{aligned}
X - mg\sin\theta &= m\left(\dot{u} - rv + qw\right)\\
Y + mg\cos\theta\sin\phi &= m\left(\dot{v} + ru - pw\right)\\
Z + mg\cos\theta\cos\phi &= m\left(\dot{w} - qu + pv\right)\\
L &= I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + (I_z - I_y)qr - I_{xz}pq\\
M &= I_y\dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{xz}(p^2 - r^2)\\
N &= I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + (I_y - I_x)pq + I_{xz}qr
\end{aligned}$$

Relaciones cinemáticas angulares

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= p + (q\sin\phi + r\cos\phi)\tan\theta\\
\dot{\theta} &= q\cos\phi - r\sin\phi\\
\dot{\psi} &= (q\sin\phi + r\cos\phi)\sec\theta
\end{aligned}$$

Relaciones cinemáticas lineales

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u\cos\psi\cos\theta + v\left(\cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi\right) + w\left(\cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi\right)\\
\dot{y} &= u\sin\psi\cos\theta + v\left(\sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi\right) + w\left(\sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi\right)\\
\dot{z} &= -u\sin\theta + v\left(\cos\theta\sin\phi\right) + w\cos\theta\cos\phi
\end{aligned}$$

El punto (x, y, z) representa la posición del centro de gravedad de la aeronave respecto al origen del sistema de ejes tierra.

2. Ecuaciones linealizadas

Se van a linealizar las ecuaciones anteriores respecto a un vuelo de referencia. En lo que sigue, los subíndices (s) indicarán la variable en el estado de referencia, mientras que las variables sin subíndices se corresponden con las de perturbación.

$$\begin{aligned}
\Delta X - mg\theta\cos\theta_s &= m\left(\dot{u} - rv_s - vr_s + qw_s + wq_s\right) \\
\Delta Y + mg\left(\phi\cos\theta_s\cos\phi_s - \theta\sin\theta_s\sin\phi_s\right) &= m\left(\dot{v} + ru_s + ur_s - pw_s - wp_s\right) \\
\Delta Z - mg\left(\phi\cos\theta_s\sin\phi_s + \theta\sin\theta_s\cos\phi_s\right) &= m\left(\dot{w} - qu_s - uq_s + pv_s + vp_s\right) \\
\Delta L &= I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + \left(I_z - I_y\right)\left(qr_s + rq_s\right) - I_{xz}\left(qp_s + pq_s\right) \\
\Delta M &= I_y\dot{q} + \left(I_x - I_z\right)\left(pr_s + rp_s\right) - 2I_{xz}\left(pp_s - rr_s\right) \\
\Delta N &= I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + \left(I_y - I_z\right)\left(qp_s + pq_s\right) + I_{xz}\left(qr_s + rq_s\right) \\
\dot{\phi} &= p + \left(q\sin\phi_s + r\cos\phi_s + \phi\dot{\theta}_s\right)\tan\theta_s + \theta\dot{\psi}_s\sec\theta_s \\
\dot{\theta} &= q\cos\phi_s - r\sin\phi_s - \phi\cos\theta_s\dot{\psi}_s \\
\dot{\psi} &= \left(q\sin\phi_s + r\cos\phi_s + \phi\dot{\theta}_s + \theta\sin\theta_s\dot{\psi}_s\right)\sec\theta_s
\end{aligned}$$

3. Vuelo simétrico, recto, nivelado y estacionario. Ecuaciones linealizadas

Para esta condición de vuelo, se tienen las siguientes simplificaciones:

$$\begin{gathered}
v_s = 0 \\
\phi_s = \psi_s = 0 \\
\dot{\phi}_s = \dot{\theta}_s = \dot{\psi}_s = 0 \\
p_s = q_s = r_s = 0
\end{gathered}$$

Las ecuaciones linealizadas quedan:

$$\begin{aligned}
\Delta X - mg\theta\cos\theta_s &= m\left(\dot{u} + qw_s\right) \\
\Delta Y + mg\phi\cos\theta_s &= m\left(\dot{v} + ru_s - pw_s\right) \\
\Delta Z - mg\theta\sin\theta_s &= m\left(\dot{w} - qu_s\right) \\
\Delta L &= I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} \\
\Delta M &= I_y\dot{q} \\
\Delta N &= I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} \\
\dot{\phi} &= p + r\tan\theta_s \\
\dot{\theta} &= q \\
\dot{\psi} &= r\sec\theta_s
\end{aligned}$$

4. Modelo lineal de fuerzas

Se hace una linealización de las fuerzas propulsivas con las siguientes hipótesis:

- Las derivadas de fuerzas y momentos laterales-direccionales respecto a variables longitudinales son nulas.
- Las derivadas de fuerzas y momentos longitudinales respecto a variables laterales-direccionales son nulas.
- Todas las derivadas que involucran aceleraciones lineales o angulares se desprecian, excepto: $Z_{\dot{w}}$ y $M_{\dot{w}}$.
- Se desprecian:
$$X_q,\ X_{\delta_e},\ X_{\dot{\delta}_e},\ Z_{\delta_e},\ Y_{\delta_a},\ Y_{\dot{\delta}_a},\ Y_{\dot{\delta}_r},\ L_{\dot{\delta}_r},\ N_{\dot{\delta}_a}$$

  Con esto se tienen las siguientes expresiones de las fuerzas y momentos:

$$\begin{aligned}
\Delta X &= X_u u + X_w w \\
\Delta Y &= Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_r}\delta_r \\
\Delta Z &= Z_u u + Z_w w + Z_{\dot{w}}\dot{w} + Z_q q + Z_{\delta_e}\delta_e \\
\Delta L &= L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_a}\delta_a + L_{\dot{\delta}_a}\dot{\delta}_a + L_{\delta_r}\delta_r \\
\Delta M &= M_u u + M_w w + M_{\dot{w}}\dot{w} + M_q q + M_{\delta_e}\delta_e + M_{\dot{\delta}_e}\dot{\delta}_e \\
\Delta N &= N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_a}\delta_a + N_{\delta_r}\delta_r + +N_{\dot{\delta}_r}\dot{\delta}_r
\end{aligned}$$

5. Adimensionalización. Ecuaciones longitudinales

A continuación se va a adimesionalizar el problema longitudinal bajo las hipótesis de vuelo simétrico, recto, nivelado y estacionario.

Variables adimensionales del problema longitudinal:

$$C_X = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho V^2 S},\quad C_Z = \frac{Z}{\frac{1}{2}\rho V^2 S},\quad C_m = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 Sc}$$

$$\hat{u} = \frac{u}{u_s},\quad \hat{w} = \frac{w}{u_s} = \alpha,\quad \hat{q} = \frac{q}{2\frac{u_s}{c}}$$

$$\hat{t} = \frac{t}{\frac{c}{2u_s}},\quad \mu = \frac{m}{\frac{1}{2}\rho Sc},\quad \hat{I}_y = \frac{I_y}{\rho S\left(\frac{c}{2}\right)^3}$$

Las ecuaciones longitudinales adimensionales quedan:

$$\begin{aligned}
2\mu\frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} &= \left(2C_{X_s} + C_{X_{\hat{u}}}\right)\hat{u} + C_{X_\alpha}\alpha + C_{Z_s}\theta \\
\left(2\mu - C_{Z_{\dot{\hat{\alpha}}}}\right)\frac{d\alpha}{d\hat{t}} &= \left(2C_{Z_s} + C_{Z_{\hat{u}}}\right)\hat{u} + C_{Z_\alpha}\alpha + \left(2\mu + C_{Z_{\hat{q}}}\right)\hat{q} - C_{X_s}\theta + C_{Z_{\delta_e}}\delta_e \\
\hat{I}_y\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} - C_{m_{\dot{\hat{\alpha}}}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} &= C_{m_{\hat{u}}}\hat{u} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\hat{q}}}\hat{q} + C_{m_{\delta_e}}\delta_e + C_{m_{\dot{\hat{\delta}}_e}}\dot{\hat{\delta}}_e \\
\frac{d\theta}{d\hat{t}} &= \hat{q}
\end{aligned}$$

6. Adimensionalización. Ecuaciones laterales-direccionales

A continuación se va a adimesionalizar el problema lateral-direccional bajo las hipótesis de vuelo simétrico, recto, nivelado y estacionario.

Variables adimensionales del problema longitudinal:

$$C_Y = \frac{Y}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad \hat{v} = \frac{v}{u_s} = \beta, \quad \hat{t} = \frac{t}{\frac{b}{2u_s}}$$

$$\hat{I}_x = \frac{I_x}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3}, \quad \hat{I}_z = \frac{I_z}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3}, \quad \hat{I}_{xz} = \frac{I_{xz}}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3}$$

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b}, \quad C_n = \frac{N}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b}, \quad \mu = \frac{m}{\frac{1}{2}\rho S b}$$

$$\hat{p} = \frac{p}{2\frac{u_s}{b}}, \quad \hat{r} = \frac{r}{2\frac{u_s}{b}}$$

Las ecuaciones longitudinales adimensionales quedan:

$$\begin{aligned}
2\mu\frac{d\beta}{d\hat{t}} &= C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\hat{p}}}\hat{p} + \left(C_{Y_{\hat{r}}} - 2\mu\right)\hat{r} - C_{Z_s}\phi + C_{Y_{\delta_r}}\delta_r \\
\hat{I}_x\frac{d\hat{p}}{d\hat{t}} - \hat{I}_{xz}\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} &= C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\hat{p}}}\hat{p} + C_{l_{\hat{r}}}\hat{r} + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\hat{\dot{\delta}}_a}}\hat{\dot{\delta}}_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r \\
\hat{I}_z\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} - \hat{I}_{xz}\frac{d\hat{p}}{d\hat{t}} &= C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\hat{p}}}\hat{p} + C_{n_{\hat{r}}}\hat{r} + C_{n_{\delta_a}}\delta_a + C_{n_{\delta_r}}\delta_r + C_{n_{\hat{\dot{\delta}}_r}}\hat{\dot{\delta}}_r \\
\frac{d\phi}{d\hat{t}} &= \hat{p} + \hat{r}\tan\theta_s \\
\frac{d\psi}{d\hat{t}} &= \hat{r}\sec\theta_s
\end{aligned}$$