MECÁNICA DEL VUELO II

CÁLCULO VARIACIONAL

1. Optimización sin ligaduras

Sea la integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y})\,\mathrm{d}x$$

con x_1 y x_2 dados. El problema variacional es encontrar la función óptima $y(x)$ que hace que la integral sea un extremo (máximo o mínimo). Se supone que la función óptima existe (se obtendrán condiciones necesarias para su existencia).

Dependiendo de los valores $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$ se tienen los siguientes casos: 1) y_1, y_2 dados; 2) y_1, y_2 libres; 3) y_1 dado, y_2 libre; 4) y_1 libre, y_2 dado.

Caso 1: y_1, y_2 dados.

Sea $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, esto es, se tiene una familia uniparamétrica de funciones. Nótese que para cualquiera que sea la función $\eta(x)$, la función óptima $y(x)$ pertenece a la familia para $\varepsilon = 0$. Se verifica

$$\begin{aligned} Y(x_1) &= y(x_1) = y_1 \\ Y(x_2) &= y(x_2) = y_2 \end{aligned}$$

y además, para $\varepsilon \ll 1$ se tiene $|y(x) - Y(x)| < \delta \ll 1$ (esto es, se tiene un entorno de $y(x)$).

Sea

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, \dot{Y})\,\mathrm{d}x$$

siendo $\dot{Y}(x) = \dot{y}(x) + \varepsilon\dot{\eta}(x)$. Dada $\eta(x)$, esta integral es una función de ε. Para $\varepsilon = 0$, se tiene

$$J(0) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y})\,\mathrm{d}x$$

Por tanto, la integral $J(\varepsilon)$ es extremo (respecto de ε) para $\varepsilon = 0$ por ser $y(x)$ la función óptima (independientemente de la función η).

La condición necesaria para que $J(\varepsilon)$ sea extremo para $\varepsilon = 0$, es

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = 0$$

Dado que

$$J'(\varepsilon) \doteq \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y, \dot{Y})\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}(x, Y, \dot{Y})\dot{\eta}(x)\right] \mathrm{d}x$$

se tiene

$$\begin{aligned} J'(0) &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \dot{y})\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(x, y, \dot{y})\dot{\eta}(x)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y}\eta\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\eta\right)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\right] \eta(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

La condición $J'(0) = 0$ para cualquier función $\eta(x)$, con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, conduce a

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0$$

siempre que se cumplan ciertas condiciones de regularidad en las funciones (η de clase C^1 y $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)$ continua). La ecuación anterior recibe el nombre de **Ecuación de Euler-Lagrange**, y es, en general, una ecuación diferencial ordinaria de 2º orden ($f(x, \dot{y}, \ddot{y}) = 0$), con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_1 \\ y(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

Esta ecuación representa una condición necesaria para la existencia de la función óptima, pero no suficiente.

Caso 2: y_1, y_2 libres.

Ahora $\eta(x_1)$ y $\eta(x_2)$ son arbitrarios. Análogamente al caso anterior, se llega a

$$J'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\right] \eta(x)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\eta\right)_{x_1}^{x_2}$$

y debe cumplirse $J'(0) = 0$ para cualquier función $\eta(x)$.

Si se elige $\eta(x)$ tal que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, entonces debe ser (análogamente al caso anterior)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0$$

que es la ecuación de Euler-Lagrange.

Si ahora se elige $\eta(x)$ tal que $\eta(x_1) = 0, \eta(x_2) = 1$, entonces debe ser

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(x_2) = 0$$

Si finalmente se elige $\eta(x)$ tal que $\eta(x_1) = 1, \eta(x_2) = 0$, entonces debe ser

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(x_1) = 0$$

Se tiene pues la misma ecuación diferencial ordinaria de 2º orden ($f(x, \dot{y}, \ddot{y}) = 0$), con condiciones de contorno (naturales)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(x_1) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Nótese que la ecuación de Euler-Lagrange no depende de las condiciones en los extremos, sólo de la función F.

Casos 3 y 4.

En estos casos se tiene la misma ecuación de Euler-Lagrange, con la combinación de condiciones de contorno correspondiente.

Caso de funciones vectoriales.

El análisis desarrollado es válido para funciones vectoriales

$$\mathbf{y}(x) = [y_1(x)\ y_2(x)\ ...\ y_n(x)]$$

En tal caso las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1}\right) = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_n}\right) = 0
\end{aligned}$$

con condiciones de contorno

$$\begin{aligned}
&y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_1(x_2) = y_{21} \\
&\vdots \\
&y_n(x_1) = y_{1n}, \quad y_n(x_2) = y_{2n}
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1}(x_1) = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1}(x_2) = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_n}(x_1) = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_n}(x_2) = 0
\end{aligned}$$

o bien las combinaciones correspondientes, en función de las condiciones de contorno dadas.

2. Optimización con ligaduras

Sea la integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y}, z, \dot{z})\,\mathrm{d}x$$

con x_1 y x_2 dados, sujeta a la ligadura

$$G(x, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = 0$$

El problema es encontrar las funciones óptimas $y(x), z(x)$ que hacen que la integral sea un extremo (máximo o mínimo). Se supone que las funciones óptimas existen (se obtendrán condiciones necesarias para su existencia). El número de ligaduras debe ser inferior al de funciones.

Dependiendo de los valores $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, $z_1 = z(x_1)$, y $z_2 = z(x_2)$ se tienen distintos casos.

Caso 1: y_1, y_2, z_1, z_2 dados.

Sean

$$\begin{aligned}
Y(x) &= y(x) + \varepsilon\eta_1(x) \\
Z(x) &= z(x) + \varepsilon\eta_2(x)
\end{aligned}$$

con $\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = 0$ y $\eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0$, y con Y y Z cumpliendo la ligadura

$$G(x, Y, \dot{Y}, Z, \dot{Z}) = 0$$

Sea

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, \dot{Y}, Z, \dot{Z})\,\mathrm{d}x$$

siendo $\dot{Y}(x) = \dot{y}(x) + \varepsilon\dot{\eta}_1(x)$ y $\dot{Z}(x) = \dot{z}(x) + \varepsilon\dot{\eta}_2(x)$. Para $\varepsilon = 0$,

$$J(0) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y}, z, \dot{z})\,\mathrm{d}x$$

que es extremo de $J(\varepsilon)$, por ser $y(x)$ y $z(x)$ las funciones óptimas.

La condición necesaria para que $J(\varepsilon)$ sea extremo para $\varepsilon = 0$, es

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = 0$$

Dado que

$$J'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta_1(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\dot{\eta}_1(x) + \frac{\partial F}{\partial Z}\eta_2(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{Z}}\dot{\eta}_2(x) \right) \mathrm{d}x$$

donde las derivadas parciales son funciones de $(x, Y, \dot{Y}, Z, \dot{Z})$, se tiene

$$J'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta_1(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{\eta}_1(x) + \frac{\partial F}{\partial z}\eta_2(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\dot{\eta}_2(x) \right) \mathrm{d}x = 0$$

donde las derivadas parciales son funciones de $(x, y, \dot{y}, z, \dot{z})$.

Ahora las funciones η_1 y η_2 no son independientes, ya que están relacionadas por la ligadura

$$G(x, y + \varepsilon\eta_1, \dot{y} + \varepsilon\dot{\eta}_1, z + \varepsilon\eta_2, \dot{z} + \varepsilon\dot{\eta}_2) = 0$$

Diferenciando la ligadura respecto de ε se tiene

$$\frac{\partial G}{\partial Y}\eta_1(x) + \frac{\partial G}{\partial \dot{Y}}\dot{\eta}_1(x) + \frac{\partial G}{\partial Z}\eta_2(x) + \frac{\partial G}{\partial \dot{Z}}\dot{\eta}_2(x) = 0 \tag{4.1}$$

donde las derivadas parciales son funciones de $(x, Y, \dot{Y}, Z, \dot{Z})$, y en particular para $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial y}\eta_1(x) + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\dot{\eta}_1(x) + \frac{\partial G}{\partial z}\eta_2(x) + \frac{\partial G}{\partial \dot{z}}\dot{\eta}_2(x) = 0$$

donde las derivadas parciales son funciones de $(x, y, \dot{y}, z, \dot{z})$.

Añadiendo la última expresión al integrando de $J'(0)$ se tiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta_1 + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{\eta}_1 + \frac{\partial F}{\partial z}\eta_2 + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\dot{\eta}_2 \right) + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial y}\eta_1 + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\dot{\eta}_1 + \frac{\partial G}{\partial z}\eta_2 + \frac{\partial G}{\partial \dot{z}}\dot{\eta}_2 \right) \right] \mathrm{d}x = 0$$

Sea $H = F + \lambda G$, donde la función $\lambda(x)$ es el multiplicador de Lagrange. Entonces, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial H}{\partial y}\eta_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\dot{\eta}_1 + \frac{\partial H}{\partial z}\eta_2 + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\dot{\eta}_2 \right) \mathrm{d}x = 0$$

Integrando por partes se tiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial H}{\partial y}\eta_1 + \frac{\partial H}{\partial z}\eta_2 \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\eta_1 \right)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\eta_2 \right)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}} \right) \mathrm{d}x = 0$$

que se reduce, al tener en cuenta las condiciones en los extremos de η_1 y η_2, a

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right)\right]\eta_1\,\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right)\right]\eta_2\,\mathrm{d}x=0$$

Sea $\eta_1(x)$ arbitraria (entonces $\eta_2(x)$ no lo es). Si se elige $\lambda(x)$ de forma que

$$\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right)=0$$

entonces

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right)\right]\eta_1\,\mathrm{d}x=0$$

para cualquier $\eta_1(x)$, con $\eta_1(x_1)=\eta_1(x_2)=0$, por tanto (análogamente al caso de optimización sin ligaduras) se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right)=0$$

Así pues se han obtenido las 2 **ecuaciones de Euler-Lagrange** (condiciones necesarias para la existencia de las funciones óptimas, pero no suficientes) que resuelven el problema, junto con la ligadura y las condiciones de contorno. En resumen, se tiene el problema siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right)&=0\\
\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right)&=0\\
G(x,y,\dot{y},z,\dot{z})&=0\\
y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)&=y_2\\
z(x_1)=z_1,\quad z(x_2)&=z_2
\end{aligned}$$

que permite obtener las funciones óptimas $y(x)$, $z(x)$ y el multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$.

Caso 2: z_1 dado, y_1, y_2, z_2 libres.

Ahora $\eta_2(x_1)=0$ y $\eta_1(x_1),\eta_1(x_2),\eta_2(x_2)$ son arbitrarios, salvo que deben satisfacer la ligadura. Análogamente al caso anterior, se llega a

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right)\right]\eta_1\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\eta_1\right)_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right)\right]\eta_2\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\eta_2\right)_{x_2}=0$$

Sea $\eta_1(x)$ arbitraria (entonces $\eta_2(x)$ no lo es). Si se elige $\lambda(x)$ de forma que

$$\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right)=0$$

con $\lambda(x_2)$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}(x_2)=0$$

entonces

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right)\right]\eta_1\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\eta_1\right)_{x_1}^{x_2}=0$$

para cualquier $\eta_1(x)$, por tanto (análogamente al caso de optimización sin ligaduras) se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right)=0$$

además de las condiciones de contorno naturales

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}(x_1) = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}(x_2) = 0$$

Así pues se han obtenido las 2 **ecuaciones de Euler-Lagrange** (condiciones necesarias para la existencia de las funciones óptimas, pero no suficientes) que resuelven el problema, junto con la ligadura y las condiciones de contorno. En resumen, se tiene el problema siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right) &= 0 \\
\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\right) &= 0 \\
G(x, y, \dot{y}, z, \dot{z}) &= 0 \\
\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}(x_1) = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}(x_2) &= 0 \\
z(x_1) = z_1, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}(x_2) &= 0
\end{aligned}$$

que permite obtener las funciones óptimas $y(x)$, $z(x)$ y el multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$.